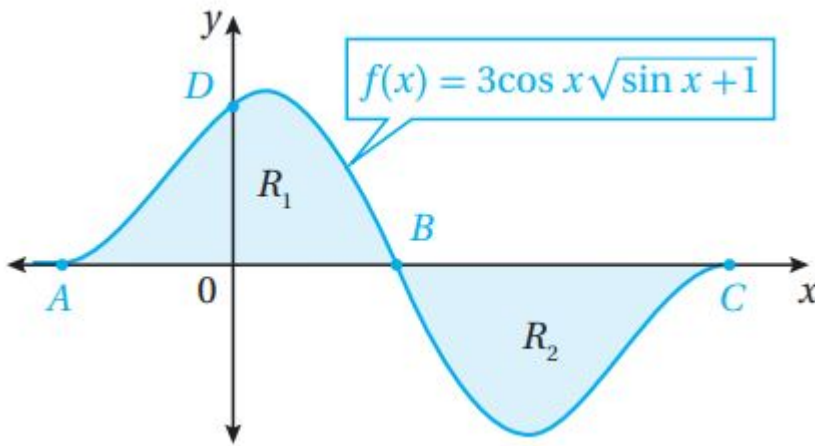


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x=0 \Rightarrow x=\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x=3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x=0 \Rightarrow \cos x = 1, \sin x = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = 3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \pi/2, x = 3\pi/2$ ، بوضع $n = 0$

$$(B(\pi/2, 0), C(3\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\pi/2$ ، بوضع $n = -1$

$$(A(-\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx = A_1 + A_2 = A(R_1) + A(R_2)$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$u = \sin x + 1 \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$A = 3 \int_{0}^2 \sqrt{u} du = 3 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^2 = 2 \left[u^{3/2} \right]_0^2 = 2(2^{3/2} - 0) = 4\sqrt{2}$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} -2(3\cos x + \sin x) dx = -\int_0^{\pi/2} 2(3\cos u + \sin u) du = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة: $\int_1^{16} (x^3 + 1) dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}, x^3 = u - 1 \Rightarrow u = 2x^3 = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow u = 9$$

$$\int_1^{16} (x^3 + 1) dx = \int_9^{16} \frac{u}{3} du = \frac{1}{3} \int_9^{16} u du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^2}{2} \right]_9^{16} = \frac{1}{6} (256 - 81) = \frac{175}{6}$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow dx = -du, x = \pi - u \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_1^e (\ln x) dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (2x + 1) \sin x dx$

bbb