

مهارات التفكير العليا

الاشتقاق الضمني

تبرير: إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$ ، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تبعاً:
 (43) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$x^2 - y^2 = 1 \rightarrow 2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

(44) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطة: $x = \sec t$, $y = \tan t$ ، حيث: $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
 أستعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \sec^2 t \tan t = \sec t \tan t$$

(45) أثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان، مبرراً إجابتي.

$$\frac{dy}{dx} = \sec t \tan t = \frac{x}{y}$$

المقداران الجبريان اللذان يمثلان متكافئان، لأنه من نص السؤال:

$$x = \sec t \text{ و } y = \tan t \text{ ومنه فإن } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

(46) أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 .

$$\frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y \rightarrow x^2 - y^2 = 1 \rightarrow (2y)^2 - y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$13 \rightarrow x = 23, y = -13 \rightarrow x = -23$$

النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 هي: $(23, 13)$, $(-23, -13)$

(47) تبرير: إذا مثل l أي مماس لمنحنى المعادلة: $x + y = k$ ، حيث k عدد حقيقي

موجب، فأثبت أنّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k ، مبرراً إجابتي.

$$x+y=k \quad 2x+dydx^2y=0 \rightarrow dydx=-yx$$

x_1, y_1 نفرض نقطة التماس هي: (x_1, y_1) فيكون ميل المماس:

$$dydx|(x_1, y_1) = -y_1/x_1$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = -y_1/x_1(x - x_1)$$

x المقطع والمقطع y للمماس:

$$x=0 \rightarrow y - y_1 = -y_1/x_1(-x_1) \rightarrow y = y_1 + y_1/x_1 \cdot x_1 = 2y_1$$

$$y=0 \rightarrow y_1 = y_1/x_1(x - x_1) \rightarrow x = x_1 + y_1/x_1$$

مجموع المقطعين:

$$y_1 + y_1/x_1 + x_1 + y_1/x_1 = y_1 + 2y_1/x_1 + x_1 = (y_1 + x_1)^2 = k^2 = k$$

(48) تحدّد: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y = x \ln x$ عند النقطة $(4, 16)$ يقطع المحور x في النقطة B ، والمحور y في النقطة C ، فأجد مساحة $\triangle OBC$ ، حيث O نقطة الأصل.

$$y = x \ln x \Rightarrow \ln y = \ln x \ln x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} dy = (x \ln x + \ln x) dx$$

$$\frac{1}{x \ln x} dy = (x \ln x + \ln x) dx \Rightarrow dy = x \ln x (x \ln x + \ln x) dx = x^2 \ln x (1 + \ln x) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \ln x (1 + \ln x) = 2x + \ln x \cdot 2x^2$$

ميل المماس:

$$dydx|(4, 16) = 2 + \ln 4 \cdot 2 \cdot 4^2 = 8 + 4 \ln 4$$

معادلة المماس:

$$y - 16 = (8 + 4 \ln 4)(x - 4)$$

x المقطع والمقطع y للمماس:

$$x=0 \rightarrow y - 16 = (8 + 4 \ln 4)(-4) \rightarrow y = -16 - 16 \ln 4$$

$$y=0 \rightarrow -16 = (8 + 4 \ln 4)(x - 4) \rightarrow x = 4 + \frac{16}{8 + 4 \ln 4} = 4 + 4 \ln 4$$

OBC مساحة المثلث بوحدة المساحة هي:

$$A = 12 \times 4 + 4 \ln 4 + \ln 4 \times |-16 - 16 \ln 4| = 32(1 + \ln 4) + 22 + \ln 4$$