منهاجي
متعة التعليم الهادف

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (1 - 2\text{س})(\text{س} - \text{س}^2)^4 \, \text{ءس}$

ب) $\int 6\text{س}^2 \sqrt[5]{(2\text{س}^3 - 2)^2} \, \text{ءس}$

جـ) $\int (2\text{س} - 3\text{س}^2) \, \text{قا}^2(\text{س}^2 - \text{س}^3) \, \text{ءس}$

د) $\int \frac{3\text{س} - 9}{(\text{س}^2 - 6\text{س})^2} \, \text{ءس}$

الحل

أ) $\int (1 - 2\text{س})(\text{س} - \text{س}^2)^4 \, \text{ءس}$.

$\text{ص} = \text{س} - \text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 - 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{1 - 2\text{س}} = \text{ءس}$

$\int \cancel{(1 - 2\text{س})} \, \text{ص}^4 \frac{\text{ءص}}{\cancel{1 - 2\text{س}}} = \int \text{ص}^4 \, \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ} = \frac{(\text{س} - \text{س}^2)^5}{5} + \text{جـ}$

ب) $\int 6\text{س}^2 \sqrt[5]{(2\text{س}^3 - 2)^2} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = 2\text{س}^3 - 2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{6\text{س}^2} = \text{ءس}$

$\int \cancel{6\text{س}^2} \sqrt[5]{\text{ص}^2} \frac{\text{ءص}}{\cancel{6\text{س}^2}} = \int \text{ص}^{\frac{2}{5}} \, \text{ءص}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{ص^{\frac{٥}{٤}+١}}{\frac{٥}{٤}+١} + جـ = \frac{ص^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}} + جـ$$

$$= \frac{٤}{٧}\sqrt[٤]{ص^{٧}} + جـ$$

$$= \frac{٤}{٧}\sqrt[٤]{(٢س^{٣}-٢)^{٧}} + جـ$$

ج) $\int (٢س - ٣س^{٢})\ قا^{٢}(س^{٢} - س^{٣})\ دس$

$ص = س^{٢} - س^{٣} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س - ٣س^{٢}$

$\frac{دص}{٣س^{٢} - ٢س} = دس .$

$\int \cancel{(٢س - ٣س^{٢})}^{(-١)}\ قا^{٢}ص\ \frac{دص}{\cancel{٣س^{٢} - ٢س}}$

$\int -قا^{٢}ص \cdot دص = -ظاص + جـ$

$= -ظا(س^{٢} - س^{٣}) + جـ$

د) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}}\ دس$

$ص = س^{٢} - ٦س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س - ٦ \Leftarrow$

$\frac{دص}{٢س - ٦} = دس .$

$\int \frac{٣س - ٩}{ص^{٢}} \times \frac{دص}{٢س - ٦} =$

$\int ٣\cancel{(س - ٣)} \times ص^{-٢} \times \frac{دص}{٢\cancel{(س - ٣)}} =$

$\frac{٣}{٢}\ \frac{ص^{-٢+١}}{-٢+١} + جـ = \frac{٣}{٢}\ \frac{ص^{-١}}{-١} + جـ$

$\frac{-٣}{٢ص} + جـ = \frac{-٣}{٢(س^{٢} - ٦س)} + جـ$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[3]{(\text{٣س} - \text{٢})^{2}}\ \text{ءس}$

ب) $\int (\text{س} - \text{١})(\text{٢س}^{2} - \text{٤س} + \text{١})^{5}\ \text{ءس}$

جـ) $\int \text{٢ قا}^{2}(\text{٢} - \text{س})\ \text{ءس}$

د) $\int \text{٢س}^{3}\ \text{جا}(\text{س}^{4} + \text{١})\ \text{ءس}$

الحل

أ) $\int \sqrt[3]{(\text{٣س}-\text{٢})^{2}}\ \text{ءس} = \int (\text{٣س}-\text{٢})^{\frac{2}{3}}\ \text{ءس} = \dfrac{(\text{٣س}-\text{٢})^{\frac{2}{3}+1}}{(\frac{2}{3}+1)\times 3} + \text{جـ}$

$= \dfrac{(\text{٣س}-\text{٢})^{\frac{5}{3}}}{\cancel{3}\times\cancel{\frac{5}{3}}} + \text{جـ} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{(\text{٣س}-\text{٢})^{5}} + \text{جـ}$

ب) $\int (\text{س}-\text{١})(\text{٢س}^{2}-\text{٤س}+\text{١})^{5}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{٢س}^{2}-\text{٤س}+\text{١} \Leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س} - \text{٤}$

$\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤س}-\text{٤}} \Leftarrow \text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤}(\text{س}-\text{١})}$

$\int \cancel{(\text{س}-\text{١})}\ \text{ص}^{5} \times \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤}\cancel{(\text{س}-\text{١})}} = \frac{1}{4}\int \text{ص}^{5}\ \text{ءص}$

$= \dfrac{\text{ص}^{6}}{6\times 4} + \text{جـ} = \dfrac{(\text{٢س}^{2}-\text{٤س}+\text{١})^{6}}{24} + \text{جـ}$

جـ) $\int \text{٢ قا}^{2}(\text{٢}-\text{س})\ \text{ءس} =$

$\dfrac{\text{٢ ظا}(\text{٢}-\text{س})}{-1} + \text{جـ}$

$-\text{٢ ظا}(\text{٢}-\text{س}) + \text{جـ}$

د) $\int \text{٢س}^{3}\ \text{جا}(\text{س}^{4}+\text{١})\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{4}+\text{١} \Leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{3} \Leftarrow$

$\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤س}^{3}}$

$\int \text{٢}\cancel{\text{س}^{3}}\ \text{جا ص}\ \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤}\cancel{\text{س}^{3}}} =$

$\int \frac{1}{2}\ \text{جا ص ءص} = -\frac{1}{2}\ \text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{جتا}(\text{س}^{4}+\text{١}) + \text{جـ}$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{0}^{2} \sqrt{4\text{س} + 1}\ \text{دس}$

ب) $\int_{-1}^{-1} 3\text{س}^2(\text{س}^3 - 1)^3\ \text{دس}$

جـ) $\int_{1}^{} 2\text{س}\ \sqrt[3]{\text{س}^2 - 1}\ \text{دس}$

د) $\int_{1}^{2} \frac{3 - 2\text{س}}{(\text{س}^2 - 3\text{س})^2}\ \text{دس}$

الحل

أ) $\int_{0}^{2} \sqrt{4\text{س}+1}\ \text{دس} = \int_{0}^{2} (4\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{دس}$

$$= \left[\frac{(4\text{س}+1)^{\frac{1}{2}+1}}{4 \times (\frac{1}{2}+1)} \right]_{0}^{2} = \left[\frac{(4\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}}{4 \times \frac{3}{2}} \right]_{0}^{2}$$

$$\left[\frac{\sqrt{(4\text{س}+1)^3}}{6} \right]_{0}^{2}$$

$$\frac{1}{6}\left[\sqrt{(4\times 2+1)^3} - \sqrt{(4\times 0+1)^3} \right]$$

$$\frac{1}{6}\left(\sqrt{9}^{\,3} - \sqrt{1}^{\,3} \right)$$

$$\frac{١}{٦}(٢٧-١)$$

$$\frac{١}{٦}\times ٢٦ = \frac{١٣}{٣}$$

ب) $\int_{-١}^{١} ٣س^{٤}(س^{٣}-١)^{٣}\,دس = صفر$

ج) $\int_{١}^{٠} ٢س\,\sqrt[٣]{س^{٢}-١}\;.\,دس =$

$$\int_{١}^{٠} ٢س\,(س^{٢}-١)^{\frac{١}{٣}}\,دس$$

$$ص = س^{٢}-١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س \Leftarrow \frac{دص}{٢س} = دس$$

$$\int_{١}^{٠} \cancel{٢س}\,ص^{\frac{١}{٣}}\,\frac{دص}{\cancel{٢س}} = \int_{١}^{٠} ص^{\frac{١}{٣}}\,دص$$

$$\left[\frac{ص^{\frac{١}{٣}+١}}{\frac{١}{٣}+١}\right]_{١}^{٠} = \left[\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}\right]_{١}^{٠}$$

$$\frac{٣}{٤}\left[\sqrt[٣]{(س^{٢}-١)^{٤}}\right]_{١}^{٠} = \frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{(٠^{٢}-١)^{٤}} - \sqrt[٣]{(١-١)^{٤}}\right)$$

$$\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{١} - \sqrt[٣]{٠}\right)$$

$$\frac{٣}{٤}\left(١ - ٠\right)$$

$$\frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٢س - ٣}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\, دس = \int_{١}^{٢} (٢س - ٣)(س^{٢} - ٣س)^{-٢} .\, دس$

$ص = س^{٢} - ٣س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س - ٣ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س - ٣}$

$\int_{١}^{٢} \cancel{(٢س - ٣)}\; ص^{-٢} \frac{دص}{\cancel{٢س - ٣}} = \int_{١}^{٢} ص^{-٢}\, دص =$ (-١)

$\left[\frac{-ص^{-٢+١}}{-٢+١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{ص^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{١}{ص}\right]_{١}^{٢}$

$\left[\frac{١}{س^{٢} - ٣س}\right]_{١}^{٢} = \frac{١}{٢^{٢} - ٣\times٢} - \frac{١}{١^{٢} - ٣\times١} = \frac{١}{-٢} - \frac{١}{-٢}$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{١}{٢} =$ صفر

---

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٢}^{٣} ٣س^{٢}\, قَ(س^{٣})\, دس$

الحل

$ص = س^{٣} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$\int_{-٢}^{٣} \cancel{٣س^{٢}}\, قَ(ص) \frac{دص}{\cancel{٣س^{٢}}} = \int_{-٢}^{٣} قَ(ص) .\, دص =$

$\Big[ق(ص)\Big]_{-٢}^{٣} = \Big[ق(س^{٣})\Big]_{-٢}^{٣}$

$ق(٣^{٣}) - ق((-٢)^{٣}) = ق(٢٧) - ق(-٨) = -٦ - ٥$

$= -١١$

---

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢}$ ق(س) ءس = ٣، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢}$ ٨س ق(س^{٢} + ١) ءس

الحل

ص = س^{٢} + ١ ⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س ⟸ $\frac{ءص}{٢}$ = ءس

$\int_{-١}^{٢}$ ٨ ~~س~~ ق(ص) $\frac{ءص}{~~٢س~~}$ = $\int_{-١}^{٢}$ ٤ ق(ص) ءص

عندما س = -١ ← ص = (-١)^{٢} + ١ = ٢

عندما س = ٢ ← ص = ٢^{٢} + ١ = ٥

$\int_{٢}^{٥}$ ٤ ق(ص) ءص = ٤ $\int_{٢}^{٥}$ ق(ص) ءص = ٤ × -٣ = -١٢

---

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{٤}$ ٢س $\sqrt{س^{٢} + ٩}$ ءس

الحل

$\int_{٠}^{٤}$ ٢س (س^{٢} + ٩)$^{\frac{١}{٢}}$. ءس

ص = س^{٢} + ٩ ⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س ⟸

$\frac{ءص}{٢س}$ = ءس .

$\int_{٠}^{٤}$ ~~٢س~~ . ص$^{\frac{١}{٢}}$ $\frac{ءص}{~~٢س~~}$ = $\int_{٠}^{٤}$ ص$^{\frac{١}{٢}}$. ءص = $\left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} \right]_{٠}^{٤}$ = $\left[\frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣} \left[\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}} \right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣} \left(\sqrt{(٤^{٢}+٩)^{٣}} - \sqrt{(٠+٩)^{٣}} \right)$

$\frac{٢}{٣}$ (٥^{٣} - ٣^{٣}) = $\frac{٢}{٣}$ (١٢٥ - ٢٧)

= $\frac{٢}{٣}$ × ٩٨ = $\frac{١٩٦}{٣}$