

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 4s^2 = 2u^3 + 4u^2$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + \frac{4}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{2}(s^4) + \frac{4}{3}(s^3) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{dx}{5}$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1$$

$$\text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_3^1 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{5} du$$

$$= \frac{1}{5} \int_3^1 \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{5} (\ln 1 - \ln 3) = -\frac{\ln 3}{5}$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

الحل

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} v &= 1+s^2 \\ v' &= 2s \\ s &= \frac{v'}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int 3 \left(\frac{v'}{2}\right)^2 v^{-5} \cdot \frac{1}{2} dv \\ &= \int \frac{3}{4} v' v^{-5} dv \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \int v^{-5} dv = \frac{3}{4} \left(\frac{v^{-4}}{-4} \right) + C = -\frac{3}{16} v^{-4} + C$$

$$= -\frac{3}{16} \frac{1}{(1+s^2)^4} + C$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$

$= \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x - 2x - 1}{x^2 - 1}$

$= \frac{2x - 2x - 1}{x^2 - 1}$

$= \frac{-1}{x^2 - 1} = \frac{-1}{(x-1)(x+1)}$

$u = x - 1$
 $\frac{du}{dx} = 1$
 $dx = du$

(٣) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$u = 1 - x^2$
 $\frac{du}{dx} = -2x$
 $dx = \frac{du}{-2x}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{x}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{dx}{x}$

(٤) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{(1+x)^2} dx$

$= \int \frac{1}{(1+x)^2} dx$

$= \int (1+x)^{-2} dx$

$= \frac{(1+x)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+x}$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta كس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0 ، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) كس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta كس = \frac{(أس + ب)^{\theta + 1}}{(\theta + 1) كس} + ج$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) كس = \frac{جنا(أس + ب)}{أ} + ج$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (2) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + ج$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + ج$$