# اختبار نهاية الوحدة

## التكامل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) قيمة ∫x3−1x2 هي:

x22−1x+C (a

x22+1x+C (b

x2−1x+C (c

x2+1x+C (d

x3−1x2dx=∫(x3x2−1x2)dx=∫(x−x−2)dx=12x2+x−1+C=12x2+1x∫ +C......b

(2) إذا كان: ∫02kxdx=6 فإن قيمة الثابت k:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

02kxdx=6⇒k2x2|02=6⇒k2(2)2−k2(0)2=6⇒2k=6⇒k=3.................∫ c

(3) قيمة: ∫03(−x2+3x)dx هي:

a) 334

b) 2114

c) 412

d) 2212

x2+3x)dx=(−13x3+32x2)|03=(−13(3)3+32(3)2)−(−13(0)3+−)03∫
(32(0)2)=92⋯⋯⋯⋯⋯⋯(c

(4) قيمة: ∫02e2x هي:

e4−1 (a

e4−2 (b

2e4−2 (c

12e4−12 (d

02e2xdx=12e2x|02=12e2(2)−12e2(0)=12e4−12.................d∫

(5) قيمة: ∫141x هي:

a) -2

b) 716−

c) 12

d) 2

141xdx=∫14x−12dx=2x12|14=2x|14=24−21=2..............d∫

(6) التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران: f(x)=4x−x2 والمحور x هو:

4x−x2)dx (a)40∫

4x−x2)dx (b)04∫

4x−x2)dx (c)10∫

4x−x2)dx (d)01∫

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الآتية:

f(x)=0⇒4x−x2=0⇒x(4−x)=0⇒x=0,x=4

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [0,4]، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

f(1)=4(1)−(1)2=3>0

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [0,4]

والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو ∫04)4x−x2)dx

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

∫7) 3x−1/2dx)

∫3x−12dx=6x12+C

∫(8) (8x−10x2)dx

∫(8x−10x2)dx=4x2−103x3+C

∫9) 5x3dx)

∫5x3dx=∫5x−3dx=−52x−2+C=−52x2+C

∫10) x2−1x3dx)

∫x2−1x3dx=∫x2−1x13dx=∫(x2x13−1x13)dx=∫(x53−x−13)dx=38x83+32x23+C=38x83+32x23+C

∫(11) (5x2−2e7x)dx

∫(5x2−2e7x)dx=53x3−27e7x+C

∫(12) (2x+3e4x+5)dx

2x+3e4x+5)dx=x2+34e4x+5+C)∫

(x2−62xdx (13∫

|x|+Cx2−62xdx=∫(x22x−62x)dx=∫(12x−3x)dx=14x2−3ln∫

(x−1)3dx (14)1∫

x−1)3dx=∫(x−1)−3dx=−12(x−1)−2+C=−12(x−1)2+C)1∫

(exex+4dx (15∫

|ex+4|+Cexex+4dx=ln∫

(2xex2−1dx (16∫

2xex2−1dxu=x2−1⇒dudx=2x⇒dx=du2x∫2xex2−1dx=∫2xeu×du2∫
x=∫eudu=eu+C=ex2−1+C

(4ex(3+e2x)dx (17∫

4ex(3+e2x)dx=∫(12ex+4e3x)dx=12ex+43e3x+C∫

(x(4+2x+x2)8dx (18+1∫

x(4+2x+x2)8dxu=4+2x+x2⇒dudx=2+2x⇒dx=du2+2x∫1+x(4+1∫
+2x+x2)8dx=∫1+xu8×du2+2x=∫1+xu8×du2(1+x)=∫12u−8du=−
114u−7+C=−114(4+2x+x2)−7+C=−114(4+2x+x2)7+C

((3+x2)dx (19xsin∫

u×(3+x2)dx=∫xsin(3+x2)dxu=3+x2⇒dudx=2x⇒dx=du2x∫xsinxsin∫
(3+x2)+Cu+C=−12cosudu=−12cosdu2x=∫12sin

(x)dx (203x−4cos3sin)∫

x+C3x−4sinx)dx=−cos3x−4cos3sin)∫

((7x+2))dx (21x−sin)∫

(7x+2)+C(7x+2)dx=12x2+17cos(7x+2))dx=∫1xdx−∫sinx−sin)∫

(e3x−e−3x)dx (22)∫

e3x−e−3x)dx=13e3x+13e−3x+C)∫

(21−5xdx (23∫

|1−5x|+C21−5xdx=∫2−5(−5)1−5xdx=−25∫−51−5xdx=−25ln∫

**(24) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: dydx=4x−2 فأجد قاعدة العلاقة، علماً بان منحناها يمر بالنقطة (0,3).**

y=∫(4x−2)dx=2x2−2x+C

منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,3) إذن:

CC=3y=2x2−2x+3+(0)2−2(0)2=3

(25) الإيراد الحدي: يمثل الاقتران: R′(x)=4x−1.2x2 الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المبيعة، وR(x) إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد R(x)، علماً بأن R(20)=30000.

R(x)=∫(4x−1.2x2)dx=2x2−0.4x3+C

بما أن R(20)=30000 إذن:

CC=54000R(x)=2x2−0.4x3+54000+3(20)2−0.4(20)2=30000

(26) يتحرك جسيم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: a(t)=cos(3t−π))، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

(3t−π)+C(3t−π)dx=13sinv(t)=∫cos

إذا كان ∫−5−1g(x)dx=11−5,∫−55f(x)dx=10,∫1f(x)dx=4، فأجد كلاً مما يأتي:

(15f(x)dx (27−∫

15f(x)dx=∫−1−5f(x)dx+∫−55f(x)dx=−4+10=6−∫

(5−17f(x)dx (28−∫

5−17f(x)dx=7∫−5−1f(x)dx=7×4=28−∫

(3f(x)−g(x))dx (29)1−5−∫

3f(x)−g(x))dx=3∫−1−5f(x)dx−∫−1−5g(x)dx=3(−4)−(−11))1−5−∫
=−1

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(3x2−4x+1)dx (30)23−∫

3x2−4x+1)dx=(x3−2x2+x)|−23=((3)3−2(3)2+3)−((−2)3−2()23−∫
−2)2−2)=30

(13x3+2x2xdx (31∫

13x3+2x2xdx=∫13(x3x+2x2x)dx=∫13(x2+2x)dx=(13x3+x2)|13=(∫
13(3)3+(3)2)−(13(1)3+(1)2)=503

(x|dx (32−3|15∫

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

x|={3−x,x<3x−3,x≥3−3|

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

x|dx=∫13(3−x)dx+∫35(x−3)dx=(3x−12x2)|13+(12x2−3x)|3−3|15∫
5=(3(3)−12(3)2)−(3(1)−12(1)2)+(12(5)2−3(5))−(12(3)2−3(3))=4

(1420xdx (33∫

1420xdx=∫1420x−12dx=40x12|14=40x|14=404−401=40∫

(253x(x+2)dx (34∫

253x(x+2)dx=∫25(3x2+6x)dx=(x3+3x2)|25=((5)3+3(5)2)−((2)3+∫
3(2)2)=180

(232xe−x2dx (35∫

232xe−x2dxu=−x2⇒dudx=−2x⇒dx=du−2xx=3⇒u=−9x=2⇒u=−∫
4∫232xe−x2dx=∫−4−92xeu×du−2x=∫−4−9−eudu=−eu|−4−9=−
e−9+e−4=−1e9+1e4

(023x2(x3+1)5dx (36∫

023x2(x3+1)5dxu=x3+1⇒dudx=3x2⇒dx=du3x2x=2⇒u=9x=0⇒u∫
=1∫023x2(x3+1)5dx=∫193x2u5×du3x2=∫19u−5du=−14u−4|19=
−14u4|19=−14(9)4+14(1)4=16406561

(016xx2+1dx (37∫

|x2+1||01=3ln016xx2+1dx=∫013(2x)x2+1dx=3∫012xx2+1dx=3ln∫
2|1|=3ln|2|−3ln

(38) إذا كان: f(x)={x2+4,x<04−x,x≥0، فأجد قيمة: ∫−21f(x)dx.

بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده:

21f(x)dx=∫−20(x2+4)dx+∫01(4−x)dx=(13x3+4x)|−20+(4x−12x−∫
2)|01=(0)−(13(−2)3+4(−2))+(4(1)−12(1)2)−(0)=856

(39) يتحرك جسم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: v(t)=5+et−2، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوان من بدء الحركة.

v(t)=5+et−2s(t)=∫(5+et−2)dt=5t+et−2+Cs(t)=5t+et−2+C

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن s(0)=0:

s(0)=5(0)+e0−2+C0=e−2+CC=−e−2C=−1e2⇒s(t)=5t+et−2−1e2

موقع الجسم بعد 3 ثوان من الحركة هو:

s(3)=5(3)+e3−2−1e2=15+e−1e2m

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران f(x)، ونقطة يمر بها منحنى y=f(x).
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران f(x):

(f′(x)=3x2+6x−2;(0,6) (40

f(x)=∫(3x2+6x−2)dx=x3+3x2−2x+C

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,6) إذن:

CC=6f(x)=x3+3x2−2x+6+(0)2−2(0)3+3(0)=6

(f′(x)=20x2;(1,400) (41

f(x)=∫20x2dx=∫20x−2dx=−20x−1+C=−20x+C

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (1,400) إذن:

CC=400+20f(x)=−20x+400+20+201−=400

(f′(x)=2x+1x2;(1,1) (42

|x|−1x+C|x|−x−1+C=2lnf(x)=∫(2x+1x2)dx=∫(2x+x−2)dx=2ln

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (1,1) إذن:

|x|−1x+2|1|−11+CC=2f(x)=2ln2ln=1

**(**f′(x)=5ex−4;(0,−1) **(43**

f(x)=∫(5ex−4)dx=5ex−4x+C

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,-1) إذن:

5e0−4(0)+CC=−6f(x)=5ex−4x−6=1−

**(**f′(x)=xx2+5;(2,10) **(44**

f(x)=∫xx2+5dxu=x2+5⇒dudx=2x⇒dx=du2x∫xx2+5dx=∫xu12×du2

$x=∫12u12du=13u32+C=13(x2+5)3+C$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (2,10) إذن:

$CC=1f(x)=13(x2+5)3+1+3(2+5(2))13=10$

(45) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=x2−x−2$، والمحور x، والمستقيمين: $x=1,x=-2$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0⇒x2−x−2=0⇒(x+1)(x−2)=0⇒x=−1,x=2$

نختار عدداً ضمن الفترة [-2,1]، وليكن 1.5- ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(0)=(−1.5+1)(−1.5−2)=1.75>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [-1 ,-2]

نختار عددا ضمن الفترة [-1,1]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(0)=(0+1)(0−2)=−2<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [-1,1 ]

العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله

$A=∫−2−1(x2−x−2)dx−∫−11(x2−x−2)dx=∫−2−1(x2−x−2)dx+∫−11(−x2+x+2)dx=(13x3−12x2−2x)|−2−1+(−13x3+12x2+2x)|−11=(−13−12+2)−(−83−2+4)+(−13+12+2)−(13+12−2)=316$

إذن، المساحة هي: 316 وحدة مربعة.

(46) طب: يمثل الاقتران C(1) تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm3). إذا كان تركيز الدواء فـي دم المريض يتغير بمعدل $C′(t)=3t(t2+36)3$، فأجد مقدار التغير في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

أولاً نجد قاعدة الاقتران:

$C(t)=∫3t(t2+36)3dtu=t2+36⇒dudt=2t⇒dt=du2tC(t)=∫3t(t2+36)3dt=∫3tu3×du2t=∫32u−32du=−3u−12+K=−3u+K=−3t2+36+K$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0)=0$ ومنه:

$C(t)=−3t2+36+KC(0)=−30+36+K0=12+KK=−12C(t)=−3t2+36−12C(8)=−364+36−12=−810$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو $−0.8$ mg/cm2

(47) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)=3x2−3x$، والمحور x.

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0⇒3x2−3x=0⇒3x(x−1)=0⇒x=0,x=1$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [0,1]، وليكن 12 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(0)=3(12)2−3(12)=−34<0$

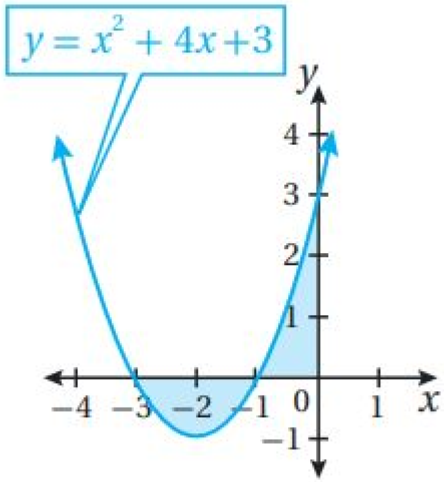
بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [0,1]

$A=−∫01(3x2−3x)dx=∫01(−3x2+3x)dx=(−x3+32x2)|01=(−(1)3+32(1)2)−(−(0)3+32(0)2)=12$

إذن، المساحة هي: 12 وحدة مربعة.

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

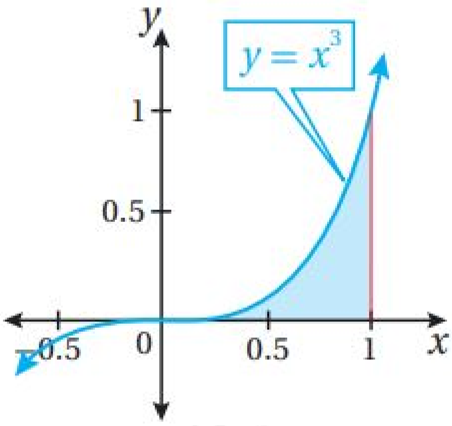
48




A=−∫−3−1(x2+4x+3)dx+∫−10(x2+4x+3)dx=∫−3−1(−x2−4x−3)dx+∫−10(x2+4x+3)dx=(−13x3−2x2−3x)|−3−1+(13x3+2x2+3x)|−10=(13−2+3)−(9−18+9)+(0)−(−13+2−3)=83

إذن، المساحة هي: 83 وحدة مربعة.

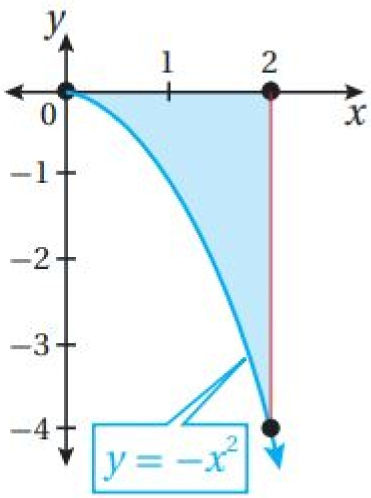
49




A=∫01x3dx=(14x4)|01=(14(1)4)−(14(0)4)=14

إذن، المساحة هي: 14 وحدة مربعة.

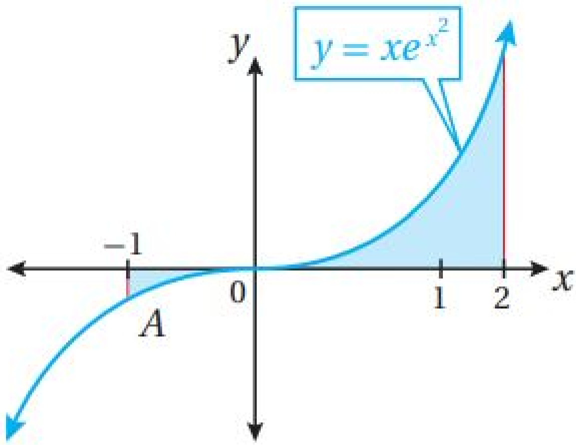
50




$A=-\int_0^2 -x^2dx=\int_0^2 x^2dx=\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\left(\frac{1}{3}(2)^3\right)-\left(\frac{1}{3}(0)^3\right)=\frac{8}{3}$

إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

51




$A=-\int_{-1}^0 xe^{x^2}dx+\int_0^2 xe^{x^2}dx=\int_{-1}^0 -xe^{x^2}dx+\int_0^2 xe^{x^2}dx$ $u=x^2\Rightarrow\frac{du}{dt}=2x\Rightarrow dt=\frac{du}{2x}$ $x=0\Rightarrow u=0$ $x=-1\Rightarrow u=1$ $x=2\Rightarrow u=4$ $A=\int_1^0 -xe^u\times\frac{du}{2x}+\int_0^4 xe^u\times\frac{du}{2x}=\int_1^0 -\frac{1}{2}e^udu+\int_0^4\frac{1}{2}e^udu=\left(-\frac{1}{2}e^u\right)\Big|_1^0+\left(\frac{1}{2}e^u\right)\Big|_0^4=\left(-\frac{1}{2}e^0\right)-\left(-\frac{1}{2}e^1\right)+\left(\frac{1}{2}e^4\right)-\left(\frac{1}{2}e^0\right)=-1+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^4$

إذن، المساحة هي: $-1+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^4$ وحدة مربعة.