اختبار نهاية الوحدة

التكامل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) قيمة ∫02e2xdx هي:

e4−1 (a

e4−2 (b

2e4−2 (c

12e4−12 (d

02e2x=12e2x|02=12e4−12..........d∫

(2) قيمة ∫−44)4−|x|)dx هي:

a) 0

b) 4

c) 16

d) 8

∫−44)4−|x|)dx=∫−40(4+x)dx+∫04(4−x)dx=(4x+12x2)|−40+(4x−1
(2x2)|04=−(−16+8)+(16−8)=16.................(c

(3) يبين الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:
y=x3−3x2+4،,y=x2−x−2، في الفترة [-1,2]

التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد مساحة المنطقة المظللة هو:

∫−12(x3−4x2+x+6)dx (a

∫−12(−x3+4x2−x−6)dx (b

x3−4x2−x+2)dx (c)12−∫

x3−2x2−x+2)dx (d)12−∫

A=∫−12(x3−3x2+4−(x2−x−2))dx=∫−12(x3−4x2+x+6)dx............(...(a

(4) حل المعادلة التفاضلية: dydx=2xy الذي تحققه النقطة (0,1) هو:

y=ex2 (a

y=x2y (b

y=x2y+1 (c

y=x2y22+1 (d

|y|=x2⇒|y|=ex2y=|y|=x2+C(0,1)⇒0=0+C⇒C=0⇒lndyy=∫2xdx⇒ln∫ ex2............a

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(1exdx (5∫

1exdx=∫e−12xdx=−2e−12x+C∫

(2x+e3x−1x)dx (6tan)∫

|cos2x+e3x−1x)dx=−12ln2xcos2x+e3x−1x)dx=∫(−12×−2sintan)∫ |x|+C2x|+13e3x−ln

(x)dx (7x(1+tan2csc2∫

x+sec2x)dx=∫(csc2xcos2x×sin2x+1sin2x)dx=∫(csc2x(1+tan2csc2∫ x+Cx+tanx)dx=−cot

(e2xe2x+5dx (8∫

(e2x+5)+Ce2xe2x+5dx=12∫2e2xe2x+5dx=12ln∫

(2x2+7x−3x−2dx (9∫

|x−2|+C2x2+7x−3x−2dx=∫(2x+11+19x−2)dx=x2+11x+19ln∫

((2x−1)dx (10sec2∫

(2x−1)+C(2x−1)dx=12tansec2∫

((5x+1)dx (11cot∫

(5x+1)|+C|sin(5x+1)dx=15ln(5x+1)sin(5x+1)dx=15∫5coscot∫

(xdx (12xcos0π/2sin∫

2x|0π2=−14(−1−1)=122x=−14cosx=12∫0π2sinxcos0π2sin∫

(0.5xdx (130πcos2∫

x)|0π=12((π)+(0))−0=πx)dx=12(x+sin12xdx=12∫0π(1+cos0πcos2∫
2

(x3−1|dx (14|02∫

x3−1|dx=∫01(1−x3)dx+∫12(x3−1)dx=(x−14x4)|01+(14x4−x)||02∫
12=(34)+(4−2+34)=72

(4x)dx (15x+cos0π/4(sec2∫

4x)|0π4=(1)−(0)=1x+14sin4x)dx=(tanx+cos0π4(sec2∫

(2x)dx (16(2x+π3)−1+cos0π/3(sin∫

2x)|0π3=((2x+π3)−x+12sin2x)dx=(−12cos(2x+π3)−1+cos0π3(sin∫
12−π3+34)−(−14)=3+34−π3

(2xdx (172xcos0π/8sin∫

4x|0π8=0−(−18)=184xdx=−18cos2xdx=12∫0π8sin2xcos0π8sin∫

(4x2−4dx (18∫

4x2−4dx=∫4(x−2)(x+2)dx4(x−2)(x+2)=Ax−2+Bx+2A(x+2)+B(x−∫
2)=4x=2⇒A=1x=−2⇒B=−14(x−2)(x+2)=1x−2+−1x+24x2−4dx=
|x−2x|x−2|−ln|x+2|+C=ln∫4(x−2)(x+2)dx=∫(1x−2+−1x+2)dx=ln
+2|+C

(x+7x2−x−6dx (19∫

x+7x2−x−6dx=∫x+7(x−3)(x+2)dxx+7(x−3)(x+2)=Ax−3+Bx+2A(∫
x+2)+B(x−3)=x+7x=−2⇒B=−1x=3⇒A=2x+7(x−3)(x+2)=2x−3+
−1x+2∫x+7x2−x−6dx=∫x+7(x−3)(x+2)dx=∫(2x−3+−1x+2)dx=2l
|x+2|+C|x−3|−lnn

(x−1x2−2x−8dx (20∫

|x2−2x−8|+Cx−1x2−2x−8dx=12∫2(x−1)x2−2x−8dx=12ln∫

(x2+3x3+xdx (21∫

x2+3x3+xdx=∫x2+3x(x2+1)dxx2+3x(x2+1)=Ax+Bx+Cx2+1A(x2∫
+1)+(Bx+C)(x)=x2+3x=0⇒A=3x=1⇒2A+B+C=4⇒B+C=−2x=−1⇒
2A+B−C=4⇒B−C=−2⇒B=−2,C=0x2+3x(x2+1)=3x+−2xx2+1∫x2
|x2+1||x|−ln+3x3+xdx=∫x2+3x(x2+1)dx=∫(3x+−2xx2+1)dx=3ln
|x3x2+1|+C+C=ln

(1x2(1−x)dx (22∫

1x2(1−x)=Ax+Bx2+C1−xAx(1−x)+B(1−x)+C(x2)=1x=0⇒B=1x=1
⇒C=1x=−1⇒−2A+2B+C=1⇒A=11x2(1−x)=1x+1x2+11−x∫1x2(1−
|x1−x|−1x+C|1−x|+C=ln|x|−1x−lnx)dx=∫(1x+1x2+11−x)dx=ln

(xdx (23x−3cosxcos2sin∫

xu2−3ux=∫sinx−3cosxcos2x∫sinx⇒dx=du−sinx⇒dudx=−sinu=cos
x=∫13u−u2du13u−u2=1u(3−u)=Au+B3−u⇒A(3−u)+Bu=×du−sin
|u|−13l1u=0⇒A=13u=3⇒B=13∫13u−u2du=∫(13u+133−u)du=13ln
x|+Cx3−cos|cos|3−u|+C=13lnn

(xx−4dx (24∫

u=x⇒u2=x,dx=2udu∫xx−4=∫uu2−4×2udu=∫2u2u2−4du=∫(2+8u2−4)du8u2−4=Au−2+Bu+2⇒A(u+2)+B(u−2)=8u=2⇒A=2u=−2⇒B|u+2|+C=2x|u−2|−2ln=−2∫xx−4=∫(2+2u−2+−2u+2)du=2u+2ln|x−2x+2|+C+2ln

(xdx (25x1+tanxtansec2∫

x(u−1)udusec2xdx=∫sec2x1+tanxtanx∫sec2x⇒dx=dusec2u=1+tanx)32x)52−23(1+tanx=∫(u32−u12)du=25u52−23u32+C=25(1+tan+C

(x4−3x3dx (26∫

u=4−3x⇒dx=du−3,x=4−u3∫x4−3x3dx=∫13(4−u)u13×du−3=−19∫(4u−13−u23)du=−19(6u23−35u53)+C=−23u23+115u53+C=−23(4−3x)23+115(4−3x)53+C

(x)6xdx (27ln)∫

x)6xdx=∫xu6xdu=∫u6du=17u7+C=17(x⇒dudx=1x,dx=xdu∫(lnu=lnx)7+Cln

(x+1)2x−2dx (28)∫

u=x−2⇒x=u+2,dx=du∫(x+1)2x−2dx=∫(u+3)2u12du=∫(u2+6u+9)u12du=∫(u52+6u32+9u12)du=27u72+125u52+6u32+C=27(x−2)72+125(x−2)52+6(x−2)32+C

(xdx (29xcsc2∫

xx+∫cotxdx=−xcotx∫xcsc2xdxdu=dxv=−cotxdxu=xdv=csc2xcsc2∫x|+C|sinx+lnxdx=−xcotxsinx+∫cosdx=−xcot

(x2−5x)exdx (30)∫

u=x2−5xdv=exdxdu=(2x−5)dxv=ex∫(x2−5x)exdx=(x2−5x)ex−∫(2 x−5)exdxu=2x−5dv=exdxdu=2dxv=ex∫(2x−5)exdx=(2x−5)ex−∫2exdx=(2x−5)ex−2ex+C∫(x2−5x)exdx=(x2−5x)ex−(2x−5)ex+2ex+C=ex(x2−7x+7)+C

(2xdx (31xsin∫

2x−∫−12co2xdx=−12xcos2x∫xsin2xdxdu=dxv=−12cosu=xdv=sin2x+C2x+14sin2xdx=−12xcoss

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(01t3t2dt (32∫

u=t2⇒dt=uv2tt=0⇒u=0t=1⇒u=1∫01t3t2dt=∫01t3udu2t=12∫013ud33=1ln3−12ln3|01=32lnu=3u2ln

(xdx (33π/4π/3cot3∫

xdx−∫π4π3coxcsc2x−1)dx=∫π4π3cotx(csc2xdx=∫π4π3cotπ4π3cot3∫xcsc2xx=π4⇒u=1x=π3⇒u=13⇒∫π4π3cotx⇒dx=du−csc2xdxu=cott|sinxdx=−12u2|113−lnxsinxdx=∫113−udu−∫π4π3cosxdx−∫π4π3cot3232=13−12ln22)=13−ln32−lnx|π4π3=−12(13−1)−(ln

(xdx (34x4+3sinππcos−∫

xdxx4+3sinxx=−π⇒u=4x=π⇒u=4∫−ππcosx⇒dx=du3cosu=4+3sinx=13∫44duu=0xu×du3cos=∫44cos

(10x2−xx2+x−2dx (35−∫

10x2−xx2+x−2dx=∫−10x(x−1)(x−1)(x+2)dx=∫−10xx+2dx=∫−−∫21)=1−2ln2−(−1−2ln|x+2|)|−10=0−2ln10(1−2x+2)dx=(x−2ln

(1232x2+416x2−1dx (36∫

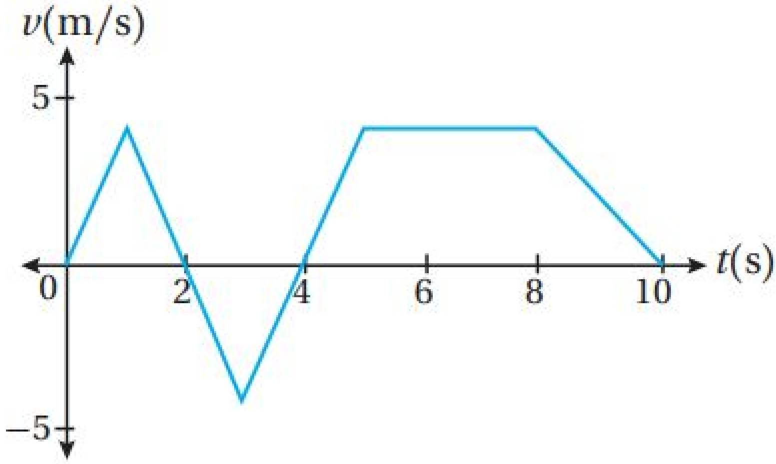
32x2+416x2−1=2+616x2−1=2+A4x−1+B4x+1⇒A(4x+1)+B(4x−1)=6x=14⇒A=3x=−14⇒B=−3∫1232x2+416x2−1dx=∫12(2+34x−19)−7−34ln|4x+1|)|12=(4+34ln|4x−1|−34ln+−34x+1)dx=(2x+34ln

35275)=2+34ln3−34ln(2+34ln

(2xdx (371/2e/2xln∫

2x|12e2−∫12e2x22xdx=x22ln2xdv=xdxdu=1xv=x22∫12e2xlnu=ln
(2x|12e2−14x2|12e2=116(e2+1dx=x22ln

يبين الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية [0,10]، إذا بدأ الجسيم الحركة من x=0 عندما t=0، فأجيب عن الأسئلة الثلاثة التالية تباعاً:



(38) أجد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

s(10)−s(0)=∫010v(t)dt=R1−R2+R3=12(2)(4)−12(2)(4)+12(3+6)(4)
=18m

(39) أجد المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة له.

v(t)|dt=R1+R2+R3=4+4+18=26m|010∫

(40) أجد الموقع النهائي للجسيم.

s(10)−s(0)=18⇒s(10)−0=18⇒s(10)=18m

(41) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: g(x)=x2,f(x)=x.

x2=x12⇒x4=x⇒x4−x=0⇒x(x3−1)=0⇒x=0,x=1A=∫01(x−x2)dx=(2
3x32−13x3)|01=(23−13)−(0)=13

(42) أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: g(x)=x,f(x)=x3.

x=x3⇒x(x2−1)=0⇒x=0,x=1,x=−1A=∫−10(x3−x)dx+∫01(x−x3)dx

=(14x4−12x2)|−10+(12x2−14x4)|01=12

(43) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين:
f(x)=−x,g(x)=x2+2، والمستقيمين x=2,x=-2

x2+2=−x⇒x2+x+2=0

هذه المعادلة التربيعية لا حلول لها، لأن المميز سالب، إذن، منحنيا الاقترانين لا يتقاطعان.

A=∫−22(x2+2+x)dx=(13x3+2x+12x2)|−22=403

(44) أثبت أن: ∫225x2x2−1dx=3+12ln.

x2x2−1=1+1x2−1=1+Ax−1+Bx+1⇒A(x+1)+B(x−1)=1x=1⇒A=12|x=−1⇒B=−12∫25x2x2−1dx=∫25(1+12x−1+−12x+1)dx=(x+12ln2|x+1|)|25=3+12lnx−1|−12ln

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: v(t)=t9−1t+6، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

(45) أجد إزاحة الجسيم في الفترة [1,10].

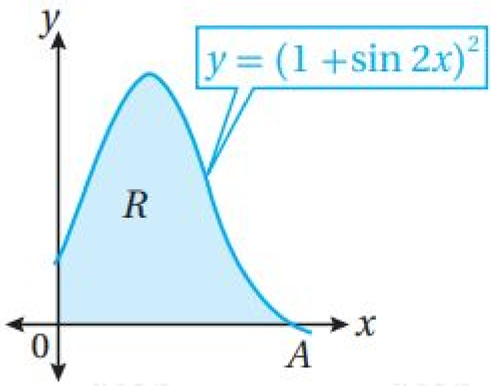
D=∫110v(t)dt=∫110(19t−(t+6)−12)dt=(118t2−2t+6)|110=(27−52)m≈2.792m

(46) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة [1,10].

v(t)=19t−(t+6)−12

لتكن d المسافة المقطوعة وهي تمثل المساحة بين منحنى v(t) والمحور t بين المستقيمين t=1,t=10

d=∫110|v(t)|dt=∫110|19t−(t+6)−12|dt19t−(t+6)12=0⇒t9=1t+6⇒tt+6=9⇒t2(t+6)=81⇒t3+6t2−81=0⇒(t−3)(t2+9t+81)=0⇒t=3⇒d=−∫13(19t−(t+6)−12)dt+∫310(19t−(t+6)−12)dt=(2t+6−118t2)|13+(118t2−2t+6)|310=15518−27≈3.32m



يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران: y=(1+sin 2x)2 حيث: 0≤3π4≥x:

(47) أجد إحداثيي النقطة A.

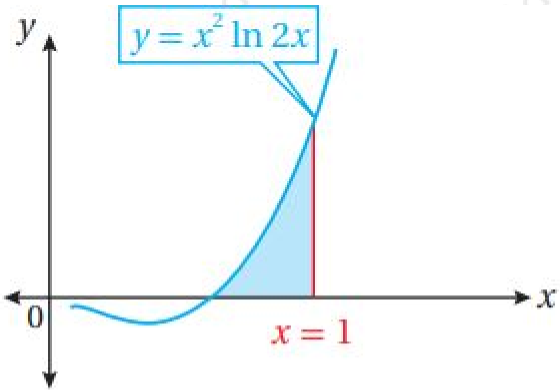
(2x=−12x=3π2⟹x=3π4⇒A(3π4,02x)2=0⟹sinsin+1)

(48) أجد مساحة المنطقة R.

2x)dx=∫03π4(1+22x+sin22x)2dx=∫03π4(1+2sinA(R)=∫03π4(1+sin
2x4x)dx=(32x−cos2x−12cos4x)dx=∫03π4(32+2sin2x+12(1−cossin
4x)|03π4=9π8+1−18sin

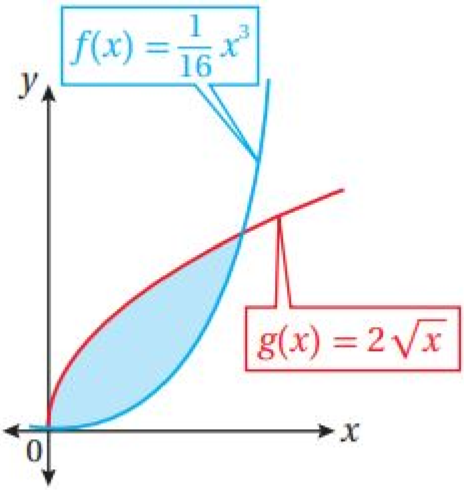
أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

49

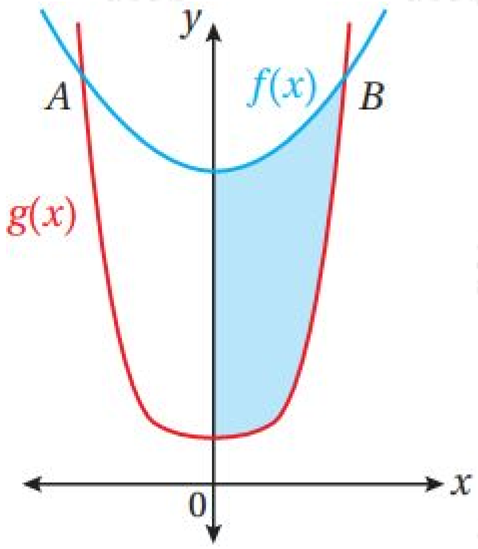


2xdv2xdxu=ln2x=0⇒2x=1⇒x=12A=∫121x2lnlnيهمل 2x=0⇒x=0x2ln
2x2x−∫13x31xdx=13x3ln2xdx=13x3ln=x2dxdu=1xdxv=13x3∫x2ln
2−7722x−19x3)|121=13ln−19x3+CA=(13x3ln

50



116x3=2x⇒1256x6−4x=0⇒x(1256x5−4)=0⇒x=0,x=4(256)5=2105
=4A=∫04(2x−116x3)dx=(43x32−164x4)|04=203



يـــبين الشكـــل الآتـــي منحنيـــي الاقترانيـــن:
:f(x)=x2+14,g(x)=x4+2

(51) إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة A والنقطة B، فأجد إحداثي نقطتي التقاطع.

x2+14=x4+2⇒x4−x2−12=0⇒(x2−4)(x2+3)=0⇒x=±2⇒A(−2,f(−2))
(=(−2,18)B(2,f(2))=(2,18

(52) أجد حجم المجسّم الناتج من دورات المنطقة المظللة حول المحور x.

نلاحظ أن منحنيي f,g واقعان فوق المحور x، وأن منحنى f فوق منحنى g في الفترة [-2,2]

V=π∫02(f2(x)−g2(x))dx=π∫02((x2+14)2−(x4+2)2)dx=π∫02(−x8−⇒

3x4+28x2+192)dx=π(−19x9−35x5+283x3+192x)|02=17216π45

(53) أجد حجم المجسّم الناتج من دورات المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: f(x)=xe−x، والمحور x والمستقيمين: x=1 و x=2 حول المحور x.

V=π∫12(f(x))2dx=π∫12xe−xdxu=xdv=e−xdxdu=dxv=−e−x∫xe−xdx=−xe−x+∫e−xdx=−xe−x−e−x+CV=π∫12xe−xdx=π((−xe−x−e−x)|12)=2e−3e2π

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

(dydx=yx (54

|x|+Cdyy=dxx⇒∫dyy=∫dxx⇒2y=ln

(y (55dydx=xexsec

ydy=∫xexdxu=xdv=exdxdu=dxv=ex⇒∫xexdx=y=xexdx⇒∫cosdysec y=xex−ex+Cydy=∫xexdx⇒sinxex−∫exdx=xex−ex+C⇒∫cos

(3y2dydx=8x (56

3y2dy=8xdx∫3y2dy=∫8xdx⇒y3=4x2+C

(xdydx=3xy+4y (57

|x|xdy=y(3x+4)dxdyy=3x+4xdx⇒∫y−12dy=∫(3+4x)dx⇒2y=3x+4ln +C

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

(dydx+4y=8;y(0)=3 (58

العا |4−y|=4x+Cdydx=8−4y=4(2−y)dy2−y=4dx⇒∫dy2−y=∫4dx−ln م الحل−x=0,y=3ln نعوض−1=0+C⇒C=0 الخاص الحل |4−y|=4xln

(dydx=5ey(2x+1)(x−2);y(−3)=0 (59

dy5ey=dx(2x+1)(x−2)1(2x+1)(x−2)=A2x+1+Bx−2⇒A(x−2)+B(2x

+1)=1x=2⇒B=15x=−12⇒A=−25∫dy5ey=∫(−252x+1+15x−2)dx−5+C5+15ln15ln−=15−الحل العام |x−2|+C|2x+1|+15lne−y5=−15ln |x−2|−15⇒1−|2x+1|+15lne−y5=−15ln−نعوض ⇒C=−15 x=−3,y=0 الحل الخاص ||x−22x+1|x−22x+1|⇒1−e−y=lne−y5=15ln

أسماك: يتغير عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: dxdt=0.2x، حيث x عدد الأسماك، وt الزمن بالسنوات منذ هذه السنة:

(60) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علماً بأن عددها هذه السنة هو 300 سمكة.

|x|=0.2t+C⇒x=e0.2t+C=eC(e0.2t)=Kedxx=0.2dt⇒∫dxx=∫0.2dt⇒ln 0.2t

حيث k ثابت يساوي eC وبملاحظة أن عدد الأسماك x أكبر من صفر (فيكون |x|=x)

الحل الخاص x(0)=300⇒300=Ke0.2(0)⇒K=300x(t)=300e0.2t

(61) أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات.

x(5)=300e0.2(5)=300e≈815

إذن، عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات هو 815 سمكة تقريباً.

(62) تجارة: يمثل الاقتران p(x) سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من منتج معين، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج بالمئات. إذا كان: p′(x)=−300x(9+x2)3 هو معدل التغير في سعر القطعة الواحدة من المنتج، فأجد p(x)، علماً بأن سعر القطعة الواحدة هو 75JD عندما يكون عدد القطع المبيعة من المنتج 400 قطعة.

p(x)=∫−300x(9+x2)32dxu=9+x2⇒dx=du2xp(u)=∫−300xu32du2x=∫−150u−32du=300u+C⇒p(x)=3009+x2+Cp(4)=3005+C⇒75=60+C⇒C=15⇒p(x)=15+3009+x2