

مهارات التفكير العليا

الضرب القياسي

(37) تبرير: إذا كانت $A(3, -2, 4), B(1, -5, 9), C(-4, 5, -1)$ ، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B ، وكانت الزاوية $\angle CDA$ قائمة، فما إحداثيات النقطة D ؟ أبرر إجابتك.

بما أن قائمة $\angle CDA$ ، فالنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C ، على $AB \leftrightarrow$ ، ويمكن إيجاد إحداثياتها كما يأتي:

$$\langle AB \rightarrow = \langle -2, -3, 5$$

معادلة المستقيم $AB \leftrightarrow$ هي: $\langle r \rightarrow = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle -2, -3, 5 \rangle$

بما أن النقطة D تقع على $AB \leftrightarrow$ فإن:

$$\begin{aligned} OD \rightarrow &= \langle 3 - 2t, -2 - 3t, 4 + 5t \rangle \\ CD \rightarrow &= \langle 3 - 2t + 4, -2 - 3t - 5, 4 + 5t + 1 \rangle = \langle 7 - 2t, -7 - 3t, 5 + 5t \rangle \\ CD \rightarrow \perp AB &\Leftrightarrow CD \rightarrow \cdot AB \rightarrow = 0 \Rightarrow -2(7 - 2t) - 3(-7 - 3t) + 5(5 + 5t) \\ &\Rightarrow t = -1619 \Rightarrow OD \rightarrow = \langle 3 - 2(-1619), -2 - 3(-1619), 4 + 5(-1619) \rangle = \langle 89 \\ &\langle 19, 1019, -419 \end{aligned}$$

إذن، إحداثيات D هي: $(419, -8919, 1019)$

تحذ: إذا كانت: $\langle r \rightarrow = \langle -8161 \rangle + t \langle 7 - 3 - 6$

معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت $\langle r \rightarrow = \langle -1031 - 26 \rangle + u \langle 3 - 67$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، وتقاطع هذان المستقيمان في النقطة P ، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1 ، حيث: $t = 3$ ، والنقطة R تقع على المستقيم l_2 ، حيث: $PQ = PR, u > 3$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(38) إذا كان $m\angle RPQ = \theta$ ، فأبين أن: $\theta = -394 \cos$.

الزاوية RPQ هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين l_1, l_2 ، ونساوي الزاوية بين اتجاهيهما.

اتجاه l_1 هو: $\langle u \rightarrow = \langle 7 - 3 - 6$ ، واتجاه l_2 هو: $\langle v \rightarrow = \langle 3 - 67$

$$\theta = \vec{u} \cdot \vec{v} / |\vec{u}| |\vec{v}| = 21 + 18 - 42 / 9 + 36 \times 9 + 36 + 49 = \cos \angle RPQ = \theta \Rightarrow \cos \theta = -394 / 94 = -394$$

(39) أبين أن مساحة المثلث PQR هي 28827 وحدة مربعة.

لإيجاد مساحة PQR يتعين معرفة متجهين يمثلان اثنين من أضلاعه، ولذا تلزمنا معرفة إحداثيات رؤوسه الرأس P هو نقطة تقاطع المستقيمين l_1, l_2 ، ونجدها بمساواة \vec{r} في المعادلتين ومساواة الإحداثيات المتناظرة:

$$\begin{aligned} 8 + 7t, 16 - 3t, 1 - 6t &= (-10 + 3u, 31 - 6u, -26 + 7u) \Rightarrow -8 + 7t = -10 + 3u \quad (1) \\ \Rightarrow 7t - 3u &= -2 \dots \dots \dots (1) \\ 16 - 3t &= 31 - 6u \Rightarrow -3t + 6u = 15 \dots \dots \dots (2) \\ 1 - 6t &= -26 + 7u \Rightarrow 7u + 6t = 27 \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

بحل النظام نجد أن: $t=1, u=3$

لإيجاد إحداثيات P تعوض $t=1$ في معادلة l_1 :

$$\vec{r} = (-8 + 7, 16 - 3, 1 - 6) = (-1, 13, -5) \Rightarrow P(-1, 13, -5)$$

نجد إحداثيات Q بتعويض $t=3$ في معادلة l_1 :

$$\vec{r} = (-8 + 21, 16 - 9, 1 - 18) \Rightarrow Q(13, 7, -17)$$

النقطة R تقع على المستقيم l_2 ، فمتجه موقعها هو: $(-10 + 3u, 31 - 6u, -26 + 7u)$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (13, 7, -17) - (-1, 13, -5) = (14, -6, -12) \\ \vec{PR} &= (-10 + 3u, 31 - 6u, -26 + 7u) - (-1, 13, -5) = (-9 + 3u, 18 - 6u, -21 + 7u) \\ \vec{PR} &= \vec{PQ} \Rightarrow |\vec{PR}| = |\vec{PQ}| \\ \Rightarrow (-9 + 3u)^2 + (18 - 6u)^2 + (-21 + 7u)^2 &= 14^2 + (-6)^2 + (-12)^2 \\ 64u^2 - 470 &= 0 \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0 \Rightarrow u = 1 \text{ أو } u = 5 \end{aligned}$$

لكن $u > 3$ ، فإذاً $u = 5$ وتكون $R(5, 1, 9)$

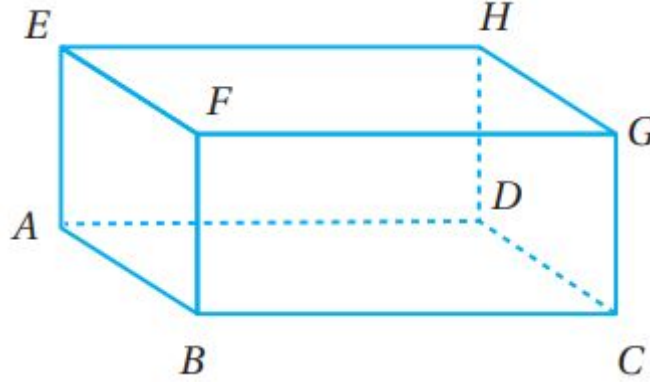
لدينا: $R(5, 1, 9), Q(13, 7, -17), P(-1, 13, -5)$

$$\begin{aligned} \theta(PQR) &= \frac{1}{2} |\vec{PQ}| \times |\vec{PR}| \sin \angle PRQ = \frac{1}{2} \sqrt{14^2 + (-6)^2 + (-12)^2} \times \sqrt{(-9 + 3u)^2 + (18 - 6u)^2 + (-21 + 7u)^2} \sin \theta \\ \theta(PQR) &= \frac{1}{2} \times 376 \times 22388880 = 1 - 9942 = 88278836 \text{ Area} \sin \theta \end{aligned}$$

تحد: رسم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها

على المتجهات، فكانت كالآتي:

$$\vec{AB} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}), \vec{AD} = (-10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k}), \vec{AE} = (-6\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$$



(40) إذا كانت $B(8, 3, -2)$ ، فأجد إحداثيات النقطة H.

لتكن $H(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \vec{BH} &= \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DH} \Rightarrow \vec{DH} = \vec{AE} \\ (x-8, y-3, z+2) &= (-2, -4, -4) + (-10, 10, -5) + (-6, -3, 6) \\ (x-8, y-3, z+2) &= (-18, 3, -3) \\ x-8 &= -18 \Rightarrow x = -10 \\ -10y-3 &= 3 \Rightarrow y = -6z+2 = -3 \Rightarrow z = -5 \Rightarrow H(-10, 6, -5) \end{aligned}$$

ملحوظة: توجد طرق أخرى للحل، منها التدرج بإيجاد إحداثيات A ثم E ثم H

(41) أجد قياس الزاوية GAC مقرباً إلى أقرب عشر درجة.

يمكن بالطرق الواردة في حل السؤال السابق إيجاد إحداثيات كل من C, G وإكمال الحل لحساب قياس الزاوية المطلوبة تقليدياً، هنا سنستفيد من حقيقة أن GC و AC متعامدان (أي أن $\vec{GC} \cdot \vec{AC} = 0$)

ليكن $m\angle GAC = \theta$

$$\begin{aligned} \theta &= \angle GAC \\ \tan \theta &= \frac{|\vec{GC}|}{|\vec{AC}|} = \frac{|\vec{AE}|}{|\vec{AB} + \vec{AD}|} = \frac{|(-6, -3, 6)|}{|(2, 4, 4) + (-10, 10, -5)|} \\ &= \frac{|(-6, -3, 6)|}{|(-8, 14, -1)|} = \frac{\sqrt{36+9+36}}{\sqrt{64+196+1}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{261}} = \frac{9}{\sqrt{261}} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{9}{\sqrt{261}} \right) \approx \tan^{-1}(1.76) \approx 60.3^\circ \end{aligned}$$

(42) إذا كان X نقطة منتصف الضلع EF، فأجد جيب تمام الزاوية DXC.

$$\begin{aligned} \vec{XD} &= \vec{XE} + \vec{EA} + \vec{AD} = 12\vec{FE} - \vec{AE} + \vec{AD} = -12\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AD} = \langle -1, -2, -2 \rangle - \langle -6, -3, 6 \rangle + \langle -10, 10, -5 \rangle = \langle -5, 11, -13 \rangle \implies |\vec{XD}| = \sqrt{25 + 121 + 169} = 315 \\ \vec{XC} &= \vec{XF} + \vec{FB} + \vec{BC} = 12\vec{EF} - \vec{AE} + \vec{AD} = 12\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AD} = \langle 1, 2, 2 \rangle - \langle -6, -3, 6 \rangle + \langle -10, 10, -5 \rangle = \langle -3, 15, -9 \rangle \implies |\vec{XC}| = \sqrt{9 + 225 + 81} = 315 \\ \vec{XD} \cdot \vec{XC} &= -5(-3) + 11(15) - 13(-9) = 297 \\ \cos \theta &= \frac{\vec{XD} \cdot \vec{XC}}{|\vec{XD}| |\vec{XC}|} = \frac{297}{315 \cdot 315} = \frac{297}{315^2} = \frac{297}{3335} \end{aligned}$$