مهارات التفكير العليا

المتجهات في الفضاء

(39) تحد: يمر المستقيم l1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{q}=\langle -6,14,-19\rangle$، ويمر أيضا بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\vec{s}=\langle -4,6,-3\rangle$، ويمر المستقيم l2 بالنقطة $T(1,9,9)$، ويوازي المستقيم: $\vec{r}=\langle 0,-6,1\rangle+t\langle 4,7,4\rangle$. إذا تقاطع المستقيم l1 والمستقيم l2 في النقطة U، فأثبت أن المثلث STU متطابق الضلعين.

$\overrightarrow{QS}=\langle 2,-8,16\rangle$

يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{QS}$: $\vec{v}_1=\langle 1,-4,8\rangle$

إذن معادلة l1 هي: $\vec{r}=\langle -6,14,-19\rangle+t\langle 1,-4,8\rangle$

معادلة l2 هي: $\vec{r}=\langle 1,9,9\rangle+u\langle 4,7,4\rangle$

لإيجاد نقطة تقاطعهما، نجد قيم u,t اللتين تجعلان $\vec{r}$ في المعادلتين متساويين:

$$\langle -6+t,14-4t,-19+8t\rangle=\langle 1+4u,9+7u,9+4u\rangle$$
$$-6+t=1+4u\Rightarrow t-4u=7\cdots\ldots(1)$$
$$14-4t=9+7u\Rightarrow 4t+7u=5\cdots\cdots\cdots\ldots(2)$$
$$-19+8t=9+4u\Rightarrow 4t-2u=14\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$(3)-(2):9u=-9\Rightarrow u=-1,t=3$$

وهاتان القيمتان تحققان أيضا المعادلة (1)

نجد نقطة تقاطع l2,l1 بتعويض $t=3$ في معادلة l1:

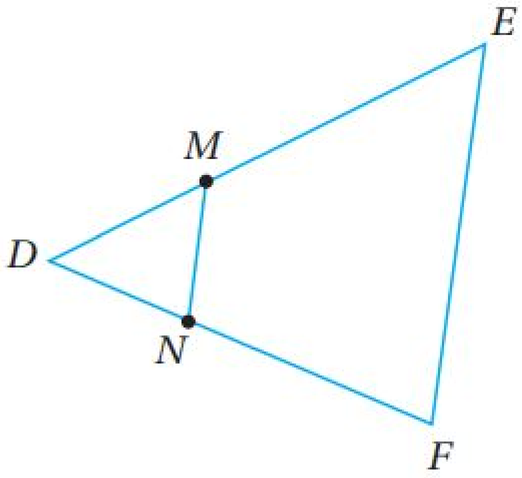
$\vec{r}=\langle -6,14,-19\rangle+3\langle 1,-4,8\rangle=\langle -3,2,5\rangle$

إذن، نقطة تقاطع l2,l1 هي: $U(-3,2,5)$

الآن لدينا أيضاً $T(1,9,9),S(-4,6,-3)$

$$TU=\sqrt{16+49+16}=9$$
$$SU=\sqrt{1+16+64}=9$$

بما أن $TU=SU$ اذن، $\triangle STU$ متطابق الضلعين.



تبرير: في الشكل المجاور، DF=8b→,DE=12a→، والنقطة M تقسم DE بنسبة 1:2، والنقطة N تقسم DF¯ بنسبة 1:2

(40) أثبت أن: FEMN شبه منحرف.

MN→=MD→+DN→=13ED→+13DF→=13(−12a→+8b→)EF→=ED→+DF→→=−12a→+8b→⇒MN→=13EF

وهذا يثبت أن MN→∥EF→

إذن الشكل FEMN رباعي فيه ضلعان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين، فهو شبه منحرف.

(41) إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة، فأجد مساحة FEMN.

يمكن حل هذا السؤال بتوظيف تشابه المثلثات.

أو باستخدام مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين فيه وجيب الزاوية المحصورة بينهما، كالآتي:

ليكن A2 مساحة △DEF، A1 مساحة △DMN

DA2A1=DNDF×DMDE=13×1DA1=12(DM)(DN)sinA2=12(DE)(DF)sin3=19⇒A272=19⇒A2=8

مساحة شبه المنحرف FEMN تساوي: A1−A2=72−8=64

إذن مساحة الشكل FEMN تساوي 64 وحدة مربعة.

(42) تبرير: تقع النقطة C على المستقيم الذي يحوي النقطتين: (A(13,−10,15),(B(22,−22,9)، إذا كان بعد C عن B مثلي بعد C عن A، فأجد

جميع إحداثيات النقطة C الممكنة، مبرراً إجابتي.

$\langle AB\rightarrow=\langle 9,-12,-6$

يمكن تبسيط اتجاه $\langle AB\rightarrow: v\rightarrow=\langle 3,-4,-2$

إذن معادلة $AB\rightarrow$ هي: $\langle r\rightarrow=\langle 13,-10,15\rangle+t\langle 3,-4,-2$

النقطة الواقعة على $AB\rightarrow$ تكون إحداثياتها على الصورة: $(C=(13+3t,-10-4t,15-2t$

$BC=2AC\Rightarrow(BC)2=4(AC)2\Rightarrow(13+3t-22)2+(-10-4t+22)2+(15-2t-9)2=4((3t)2+(-4t)2+(-2t)2)\Rightarrow 87t2+174t-261=0\Rightarrow t2+2t-3=0\Rightarrow(t+3)((t-1)=0\Rightarrow t=-3,t=1t=-3\Rightarrow C(4,2,21)t=1\Rightarrow C(16,-14,13$

(43) تحد: أجد جميع النقاط على المستقيم: $\langle r\rightarrow=\langle 3,-2,-6\rangle+t\langle 1,2,3$ التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل.

النقاط الواقعة على المستقيم المعطى تكون إحداثياتها على الصورة:

$P(3+t,-2+2t,-6+3t)OP=(3+t)2+(-2+2t)2+(-6+3t)2=29$

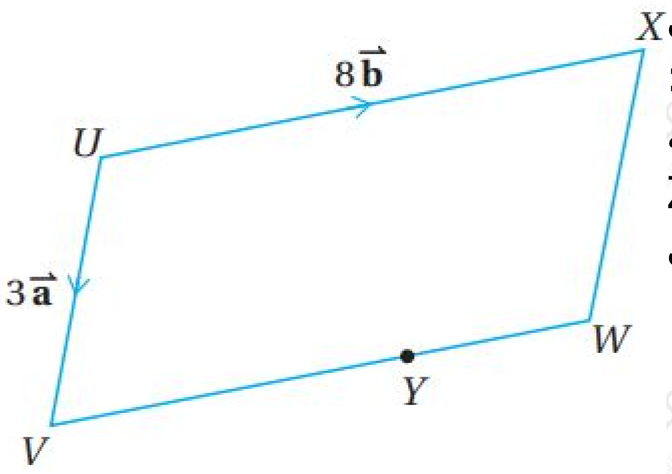
نربع الطرفين ونفك الأقواس فنحصل على:

$14t2-38t-792=0\Rightarrow 7t2-19t-396=0\Rightarrow(t-9)(7t+44)=0\Rightarrow t=9,t=-447$

إذن، لدينا نقطتان تحققان المطلوب هما:

$(P1=(12,16,21),P2=(-237,-1027,-1747$

(44) تحـد: يمثـل الشـكـل المجـاور متـوازي الأضلاع UVWX، إذا كــــــــــــان: UX→=8b,UV→=3a→، وكانت النقطة Y لا تقـع بيـن V و W، حيـث: VY=3YW، وZ هي نقطة، حيث: XZ→=43XW→، فأثبت أن U، وY، وZ تقع على استقامة واحدة.



XZ→=43XW→=43UV→=43(3a→)=4a→⇒XW→+WZ→=4a→⇒WZ→=4a→−3a→=a→YWVY=13⇒YWVW=11+3=14⇒YW→=2b→,VY→=6b→UY→=UV→+VY→=3a→+6b→=3(a→+2b→)............(1)YZ→=YW→+WZ→=2b→+a→................................2⇒UY→=3YZ→⇒YZ→∥UY

وبما أنهما ينطلقان من النقطة Y إذن النقاط U,Z,Y تقع على استقامة واحدة.