

مهارات التفكير العليا

المتجهات في الفضاء

(39) تحد: يمر المستقيم l_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\langle -6, 14, -19 \rangle = \vec{q}$ ، ويمر أيضا بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\langle -4, 6, -3 \rangle = \vec{s}$ ، ويمر المستقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$ ، وبوازي المستقيم: $\vec{r} = \langle 0, -6, 1 \rangle + t \langle 4, 7, 4 \rangle$. إذا تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U ، فأثبت أن المثلث STU متطابق الضلعين.

$$\langle QS \rightarrow = \langle 2, -8, 16 \rangle$$

يمكن تبسيط اتجاه $\langle QS \rightarrow : v \rightarrow = \langle 1, -4, 8 \rangle$

إذن معادلة l_1 هي: $\vec{r} = \langle -6, 14, -19 \rangle + t \langle 1, -4, 8 \rangle$

معادلة l_2 هي: $\vec{r} = \langle 1, 9, 9 \rangle + u \langle 4, 7, 4 \rangle$

لإيجاد نقطة تقاطعهما، نجد قيم u, t اللتين تجعلان $\vec{r} \rightarrow$ في المعادلتين متساويين:

$$\begin{aligned} t, 14 - 4t, -19 + 8t &= \langle 1 + 4u, 9 + 7u, 9 + 4u \rangle - 6 + t = 1 + 4u \Rightarrow t - 4u = 7 \dots + 6 - \\ \dots \dots \dots (1) \quad 14 - 4t &= 9 + 7u \Rightarrow 4t + 7u = 5 \dots \dots \dots (2) \quad -19 + 8t = 9 + 4u \Rightarrow 4t - 2u = \\ 14 \dots \dots \dots (3) \quad (3) - (2) : &9u = -9 \Rightarrow u = -1, t = 3 \end{aligned}$$

وهاتان القيمتان تحققان أيضا المعادلة (1)

نجد نقطة تقاطع l_1, l_2 بتعويض $t = 3$ في معادلة l_1 :

$$\vec{r} = \langle -6, 14, -19 \rangle + 3 \langle 1, -4, 8 \rangle = \langle -3, 2, 5 \rangle$$

إذن، نقطة تقاطع l_1, l_2 هي: $U(-3, 2, 5)$

الآن لدينا أيضاً $S(-4, 6, -3), T(1, 9, 9)$

$$TU = 16 + 49 + 16 = 9 \quad SU = 1 + 16 + 64 = 9$$

بما أن $TU = SU$ إذن، $\triangle STU$ متطابق الضلعين.



(40) أثبت أن: FEMN شبه منحرف.

$$\vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DN} = \frac{1}{3}\vec{ED} + \frac{2}{3}\vec{DF} = \frac{1}{3}(-12\vec{a} + 8\vec{b})$$

$$\vec{EF} = \vec{ED} + \vec{DF} = -12\vec{a} + 8\vec{b} \Rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{EF}$$

وهذا يثبت أن $\vec{MN} \parallel \vec{EF}$

إذن الشكل FEMN رباعي فيه ضلعان متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين، فهو شبه منحرف.

(41) إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة، فأجد مساحة FEMN.

يمكن حل هذا السؤال بتوظيف تشابه المثلثات.

أو باستخدام مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين فيه وجيب الزاوية المحصورة بينهما، كالآتي:

ليكن A_1 مساحة $\triangle DMN$ ، A_2 مساحة $\triangle DEF$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{DN \cdot DF \cdot \sin A_1}{DM \cdot DE \cdot \sin A_2} = \frac{12 \cdot 8 \cdot \sin A_1}{3 \cdot 12 \cdot \sin A_2} = \frac{8 \sin A_1}{\sin A_2}$$

$$\frac{72}{A_1} = \frac{8 \sin A_1}{\sin A_2} \Rightarrow A_1 = 9 \sin A_2$$

مساحة شبه المنحرف FEMN تساوي: $A_1 - A_2 = 72 - 8 = 64$

إذن مساحة الشكل FEMN تساوي 64 وحدة مربعة.

(42) تبرير: تقع النقطة C على المستقيم الذي يحوي النقطتين: $A(13, -10, 15)$ ، $B(22, -22, 9)$ ، إذا كان بعد C عن B مثلي بعد C عن A، فأجد

جميع إحداثيات النقطة C الممكنة، مبرراً إجابتي.

$$\langle AB \rightarrow = (9, -12, -6)$$

يمكن تبسيط اتجاه $\langle AB \rightarrow : v \rightarrow = (3, -4, -2)$

إذن معادلة $\rightarrow AB$ هي: $\langle r \rightarrow = (13, -10, 15) + t(3, -4, -2)$

النقطة الواقعة على $\rightarrow AB$ تكون إحداثياتها على الصورة:
 $(C = (13 + 3t, -10 - 4t, 15 - 2t)$

$$\begin{aligned} BC = 2AC &\Rightarrow (BC)^2 = 4(AC)^2 \Rightarrow (13 + 3t - 22)^2 + (-10 - 4t + 22)^2 + (15 - 2t - 9)^2 \\ &= 4((3t)^2 + (-4t)^2 + (-2t)^2) \Rightarrow 87t^2 + 174t - 261 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t + 3) \\ &((t - 1) = 0 \Rightarrow t = -3, t = 1 \Rightarrow C(4, 2, 21) \quad t = 1 \Rightarrow C(16, -14, 13) \end{aligned}$$

(43) تحد: أجد جميع النقاط على المستقيم: $\langle r \rightarrow = (3, -2, -6) + t(1, 2, 3)$ التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل.

النقاط الواقعة على المستقيم المعطى تكون إحداثياتها على الصورة:

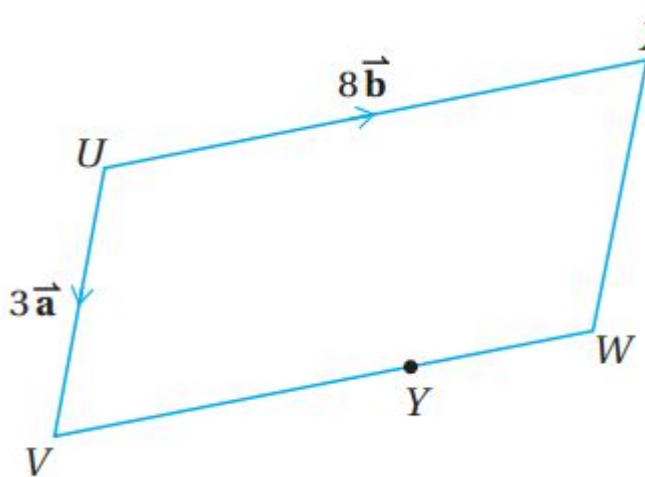
$$P(3 + t, -2 + 2t, -6 + 3t) \quad OP^2 = (3 + t)^2 + (-2 + 2t)^2 + (-6 + 3t)^2 = 29$$

نربع الطرفين ونفك الأقواس فنحصل على:

$$14t^2 - 38t - 792 = 0 \Rightarrow 7t^2 - 19t - 396 = 0 \Rightarrow (t - 9)(7t + 44) = 0 \Rightarrow t = 9, t = -447$$

إذن، لدينا نقطتان تحققان المطلوب هما:

$$(P_1 = (12, 16, 21), P_2 = (-237, -1027, -1747)$$



(44) تحد: يمثل الشكل المجاور متوازي الأضلاع UVWX، إذا كان: $\vec{UV} = 3\vec{a}$, $\vec{UX} = 8\vec{b}$ وكانت النقطة Z تقع بين V و W، حيث: $\vec{VY} = 3\vec{YW}$ ، هي نقطة، حيث: $\vec{XZ} = 4\vec{XW}$ ، فأثبت أن U، Y، Z تقع على استقامة واحدة.

$$\begin{aligned} \vec{XZ} &= 4\vec{XW} \Rightarrow \vec{XZ} = 4\vec{XW} \Rightarrow \vec{XZ} = 4(3\vec{a}) = 4\vec{a} \Rightarrow \vec{XW} + \vec{WZ} = 4\vec{a} \Rightarrow \vec{WZ} = 4\vec{a} \\ &\rightarrow -3\vec{a} = \vec{a} \Rightarrow \vec{YW} = 1\vec{a} \Rightarrow \vec{VY} = 3\vec{YW} = 3\vec{a} \Rightarrow \vec{VY} = 3\vec{a} \Rightarrow \vec{UY} = \vec{UV} + \vec{VY} = 3\vec{a} + 3\vec{a} = 6\vec{a} \\ &\Rightarrow \vec{YZ} = \vec{YW} + \vec{WZ} = \vec{a} + 4\vec{a} = 5\vec{a} \Rightarrow \vec{UY} = 6\vec{a} \Rightarrow \vec{YZ} = 5\vec{a} \Rightarrow \vec{UY} \parallel \vec{YZ} \end{aligned}$$

وبما أنهما ينطلقان من النقطة Y إذن النقاط U, Z, Y تقع على استقامة واحدة.