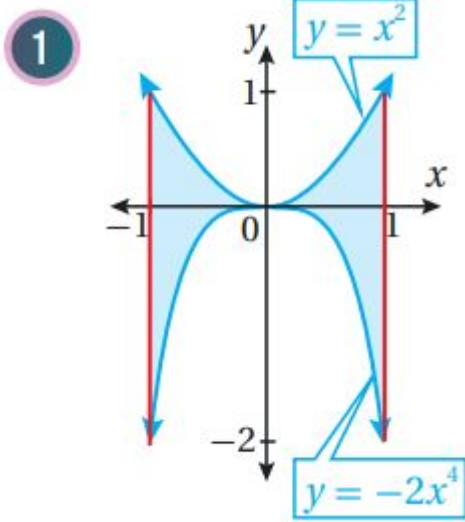


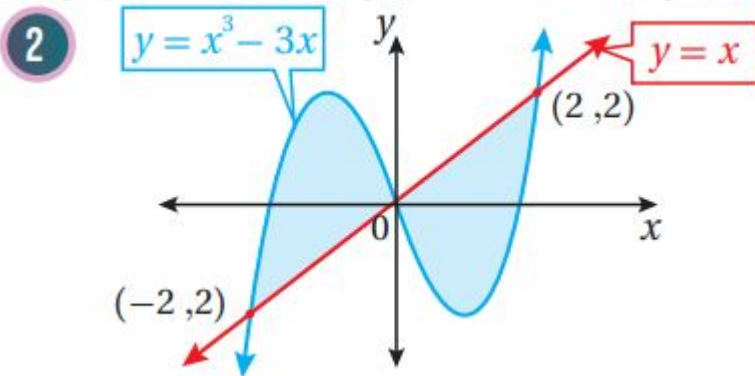
أدرب وأحل المسائل

المساحات والحجوم

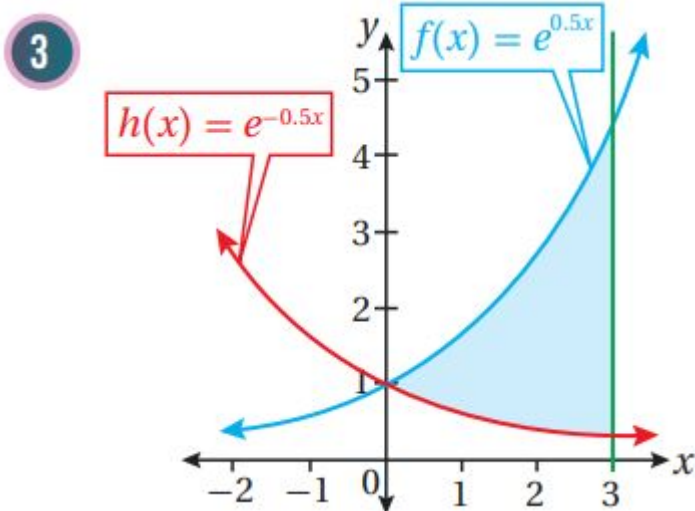
أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:



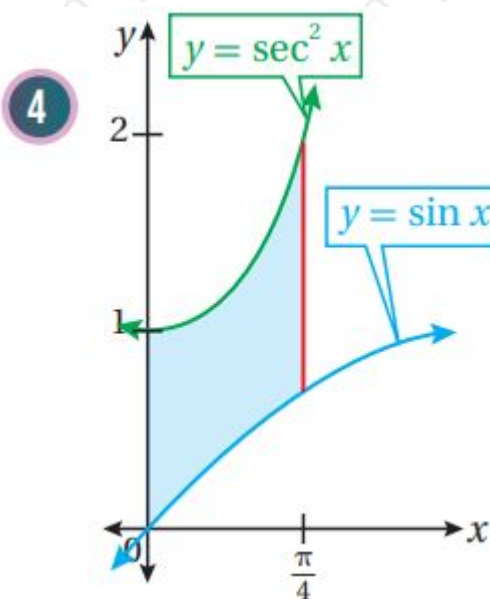
$$A = \int_{-1}^1 (x^2 - (-2x^4)) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x^4) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 \right) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$$



$$A = \int_{-2}^2 (x^3 - 3x - x) dx + \int_0^2 (x - (x^3 - 3x)) dx = \int_{-2}^2 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^2 + \left(2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = (0) - (4 - 8) + (8 - 4) - (0) = 8$$



$$A = \int_0^3 (e^{0.5x} - e^{-0.5x}) dx = (2e^{0.5x} + 2e^{-0.5x}) \Big|_0^3 = (2e^{1.5} + 2e^{-1.5}) - (2 + 2) = 2e^{1.5} + 2e^{-1.5} - 4$$



$$A = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x) dx = (\tan x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - (0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(5) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين:

$$g(x) = 2x^2, f(x) = 12x^2 + 6$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 12x^2 + 6 = 2x^2 \Rightarrow 10x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$A = \int_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{3}{5}}} (12x^2 + 6 - 2x^2) dx = \int_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{3}{5}}} (10x^2 + 6) dx = (10 \cdot \frac{x^3}{3} + 6x) \Big|_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{3}{5}}} = (\frac{10}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} + 6\sqrt{\frac{3}{5}}) - (-\frac{10}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} - 6\sqrt{\frac{3}{5}}) = (2\sqrt{\frac{3}{5}} + 6\sqrt{\frac{3}{5}}) - (-2\sqrt{\frac{3}{5}} - 6\sqrt{\frac{3}{5}}) = 16\sqrt{\frac{3}{5}}$$

(6) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $g(x) = 3x, f(x) = 4x$ والمستقيم $x = 1$ في الربع الأول.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 3x=4x \Rightarrow x=0 \quad A = \int_0^1 (f(x)-g(x))dx = \int_0^1 (4x-3x)dx = (4x \ln 3 - 3x^2) \Big|_0^1 = (4 \ln 3 - 3) - (0) = 4 \ln 3 - 3 \approx 0.3444 - 2 \ln 3 = 3 \ln 4 - 1 \ln 3 - (1 \ln 4 - 3 \ln 3) \Big|_0^1 = (4 \ln 4 - 3 \ln 3)$$

(7) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x)=e^x$, $g(x)=\cos x$ ، في الربع الأول.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow e^x = \cos x$$

نعلم من حلول هذه المعادلة الحل غير السالب: $x=0$

في الربع الأول يكون $\cos x \leq 1$ بينما $e^x \geq 1$ ، إذن $e^x \geq \cos x$

$$A = \int_0^{\pi/2} (e^x - \cos x) dx = (e^x - \sin x) \Big|_0^{\pi/2} = (e^{\pi/2} - 1) - (1 - 0) = e^{\pi/2} - 2$$

(8) أجد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x)=|x|$, $g(x)=x^4$.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^4 = |x| \Rightarrow x^4 = x \text{ or } x^4 = -x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x=0, x=1 \quad x^4 = -x \Rightarrow x^4 + x = 0 \Rightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Rightarrow x=0, x=-1$$

إذن، يتقاطع المنحنيان عند $x=-1, x=0, x=1$ ، ويكون في الفترتين $f(x) > g(x)$

$$A = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx$$

نجزئ هذا التكامل بسبب تغيير قاعدة $f(x)$ حول x ، نحسب هذه المساحة على النحو الآتي:

$$A = \int_{-1}^0 (-x - x^4) dx + \int_0^1 (x - x^4) dx = (-12x^2 - 15x^5) \Big|_{-1}^0 + (12x^2 - 15x^5) \Big|_0^1 = (0) - (-12 + 15) + (12 - 15) - (0) = 35$$

(9) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي

الاقترانين: $f(x)=3x^3-x^2-10x$, $g(x)=-x^2+2x$.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 3x^3-x^2-10x = -x^2+2x \Rightarrow 3x^3-12x=0 \Rightarrow 3x(x^2-4)=0 \Rightarrow x=0, x=-2, x=2$$

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين -2 و 0 مثل -1 نجد أن:

$$f(-1) = -3 - 1 + 10 = 6, g(-1) = -1 - 2 = -3$$

$(f(x) > g(x)) \leftarrow$ في الفترة $[-2, 0]$

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين 0 و 2 مثل 1 نجد أن:

$$f(1) = 3 - 1 - 10 = -8, g(1) = -1 + 2 = 1$$

$(f(x) < g(x)) \leftarrow$ في الفترة $[0, 2]$

$$A = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^0 (3x^3 - x^2 - 10x - (-x^2 + 2x)) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x - (3x^3 - x^2 - 10x)) dx = \int_{-2}^0 (3x^3 - x^2 - 10x + x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x - 3x^3 + x^2 + 10x) dx = \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x) dx + \int_0^2 (12x - 3x^3) dx = (3 \times 4 - 6 \times 2) \Big|_{-2}^0 - 20 + (6 \times 2 - 3 \times 4) \Big|_0^2 = (0) - (12 - 24) + (24 - 12) - (0) = 24$$

(10) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين $(x) = x^2, f(x) = ex$ والمستقيمين: $x=0, x=1$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow ex = x^2$$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لمعرفة أن $(f(x) > g(x))$ في الفترة $(\infty, 0]$

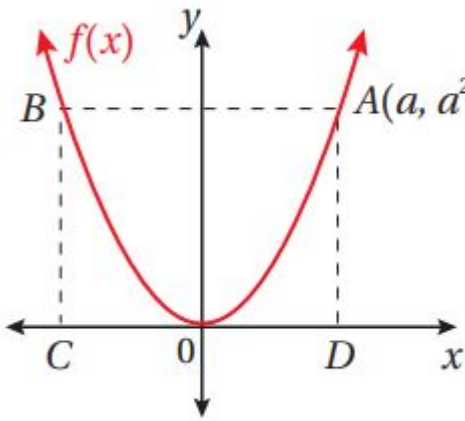
$$A = \int_0^1 (ex - x^2) dx = (ex - \frac{1}{3}x^3) \Big|_0^1 = (e - \frac{1}{3}) - (0 - 0) = e - \frac{1}{3}$$

(11) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $h(x) = 4x, f(x) = 12x^2$.

$$f(x) = h(x) \Rightarrow 12x^2 = 4x \Rightarrow 12x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(3x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{3}$$

$(h(x) > f(x))$ في الفترة $(0, \frac{1}{3})$

$$A = \int_0^{\frac{1}{3}} (h(x) - f(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (4x - 12x^2) dx = (2x^2 - 4x^3) \Big|_0^{\frac{1}{3}} = (2 \times \frac{1}{9} - 4 \times \frac{1}{27}) - (0 - 0) = \frac{2}{9} - \frac{4}{27} = \frac{6}{27} - \frac{4}{27} = \frac{2}{27}$$



(12) يبين الشكل التالي منحنى الاقتران: $f(x)=x^2$. إذا كان إحداثيا النقطة A هما $A(a, a^2)$, فأثبت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والقطعة المستقيمة AB تساوي ثلثي مساحة المستطيل $ABCD$.

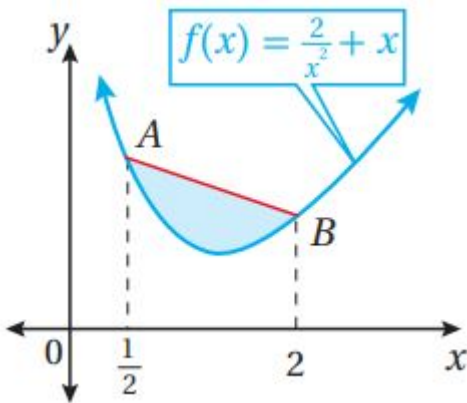
من التماثل فإن $B(-a, a^2)$

لتكن مساحة المنطقة المطلوبة:

$$\int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = (a^2x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_{-a}^a = (a^3 - \frac{1}{3}a^3) - (-a^3 + \frac{1}{3}a^3) = 2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

مساحة المستطيل $ABCD$ هي: $2a \times a^2 = 2a^3$

إذن، المساحة بين المنحنى والقطعة المستقيمة AB تساوي $\frac{2}{3}$ مساحة المستطيل $ABCD$.



(13) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x)=2x^2+x$. إذا كان الإحداثي x لكل من النقطة A والنقطة B هو 12 و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$.

$$(A(12, f(12))) = (12, 172) \quad B(2, f(2)) = (2, 52)$$

ميل AB :

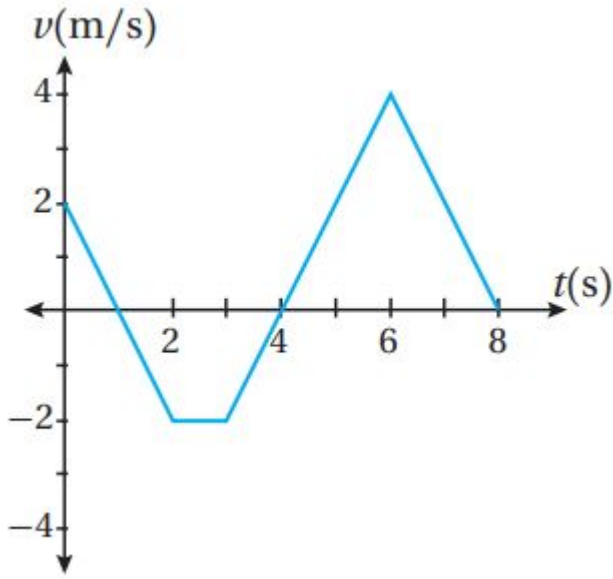
$$4 - = 172 - 52 \quad 12 - 2$$

معادلة المستقيم AB :

$$y-52=-4(x-2)\Rightarrow y=212-4x$$

المساحة المطلوبة هي:

$$\int_0^8 (212-4x-(2x-2+x))dx = \int_0^8 (212-5x-2x-2)dx = (212x-52x^2-2x^2)|_0^8 = 212(8)-10(64)-1(64)=278$$



يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية [0,8]، إذا بدأ الجسيم الحركة من x=5 عندما t=0، فأجد كلاً مما يأتي:

(14) إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

لتكن الإزاحة D

$$D=s(8)-s(0)=\int_0^8 v(t)dt=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^4 v(t)dt+\int_4^8 v(t)dt$$

$\int_0^1 v(t)dt$ يساوي مساحة المثلث الأيسر في الرسم البياني وهي:

$$1=(2)(1)2$$

$\int_1^4 v(t)dt$ يساوي معكوس مساحة شبه المنحرف في الرسم البياني فهو يساوي:

$$-4=(2)(1+3)2-$$

$\int_4^8 v(t)dt$ يساوي مساحة المثلث الأيمن في الرسم البياني وهي:

$$8=(4)(4)2$$

إذن، إزاحة الجسيم هي: $s(8)-s(0)=1+(-4)+8=5m$

(15) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة.

المسافة التي قطعها الجسم هي: $\int_0^8 |v(t)| dt$

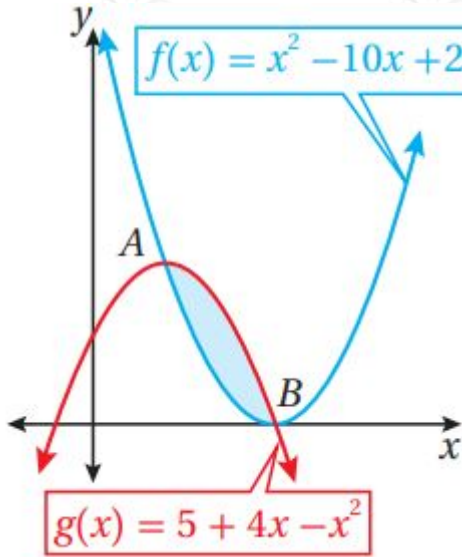
$$\int_0^8 |v(t)| dt = \int_0^1 |v(t)| dt + \int_1^4 |v(t)| dt + \int_4^8 |v(t)| dt = 1 + 4 + 8 = 13 \text{ m} \int_0^8$$

(16) الموقع النهائي للجسم.

$$s(8) - s(0) = 5$$

وبتعويض $s(0) = 5$ نجد أن:

$$s(8) - 5 = 5 \Rightarrow s(8) = 10 \text{ m}$$



يبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين: $f(x) = x^2 - 10x + 25, g(x) = 5 + 4x - x^2$ معتمداً هذا الشكل، أجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(17) أجد إحداثيي كل من النقطة A، والنقطة B.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 5 + 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(\Rightarrow (x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 2 \Rightarrow A(2, 9), B(5, 0)$$

(18) أجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x.

$$V = \int_2^5 25\pi((5+4x-x^2)^2 - (x^2-10x+25)^2) dx = \int_2^5 25\pi(12x^3 - 144x^2 + 540x - 600) dx$$

$$= 12\pi \int_2^5 (x^3 - 12x^2 + 45x - 50) dx = 12\pi(14x^4 - 4x^3 + 45x^2 - 50x) \Big|_2^5$$

$$= 12\pi(14(5)^4 - 4(5)^3 + 45(5)^2 - 50(5)) - (14(2)^4 - 4(2)^3 + 45(2)^2 - 50(2)) = 81\pi$$

(19) أجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$f(x)=\sin x$ في الفترة $[0, \pi]$ ، والمحور x ، حول المحور x .

$$V = \int_0^{\pi} \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

(20) أجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين:
 $f(x)=x^3, g(x)=x$ حول المحور x .

$$x^3 = x \Rightarrow x^6 = x \Rightarrow x^6 - x = 0 \Rightarrow x(x^5 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

لكل $x \in (0, 1)$ يكون $x > x^3$

$$V = \int_0^1 \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^1 (x^6 - x) dx = \pi \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5\pi}{14}$$

(21) أجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقتران:
 $f(x)=1+\sec x$ ، في الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ والمستقيم $y=3$ حول المحور x .

$$x = \pi/2 \Rightarrow \sec x = 3 \Rightarrow \cos x = 1/3 \Rightarrow x = \pm \arccos(1/3)$$

نلاحظ أن المنحنيين يقعان فوق المحور x وأن $f(x)=1+\sec x < 3$ في الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi (f(x) - 3)^2 dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sec x + 1 - 3)^2 dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sec x - 2)^2 dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sec^2 x - 4\sec x + 4) dx = \pi \left[\tan x - 4 \ln |\sec x + \tan x| + 4x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi \left((0 - 4 \ln 2 + 2\pi) - (-0 - 4 \ln 2 + 2\pi) \right) = 4\pi^2$$