

## أدرب وأحل المسائل

### التكامل بالأجزاء

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (x \cos(x+1)) dx$$

$$u = x+1 \quad du = dx \quad v = \sin u = \sin(x+1) \quad dv = \cos(x+1) dx$$

$$\int x \cos(x+1) dx = \int (u-1) \sin u du = \int u \sin u du - \int \sin u du$$

$$= -u \cos u + \int \cos u du + \cos u + C = -x \cos(x+1) + \sin(x+1) + \cos(x+1) + C$$

$$\int x e^{2x} dx$$

$$u = 2x \quad du = 2 dx \quad v = e^{-2x} \quad dv = -2e^{-2x} dx$$

$$\int x e^{2x} dx = \int \frac{u}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{-u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{8} \int u e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{8} (-u e^{-u} + \int e^{-u} du) = \frac{1}{8} (-2x e^{-2x} - e^{-2x}) + C = -\frac{1}{4} x e^{-2x} - \frac{1}{8} e^{-2x} + C$$

$$\int (2x^2 - 1) e^{-x} dx$$

$$u = 2x^2 - 1 \quad du = 4x dx \quad v = e^{-x} \quad dv = -e^{-x} dx$$

$$\int (2x^2 - 1) e^{-x} dx = \int \frac{u}{4} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} du = -\frac{1}{16} \int u du = -\frac{1}{32} u^2 + C = -\frac{1}{32} (2x^2 - 1)^2 + C$$

$$= -\frac{1}{32} (4x^4 - 4x^2 + 1) + C = -\frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{32} + C = -\frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{8} x^2 + C$$

$$\int x \ln x dx$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad v = x \quad dv = dx$$

$$\int x \ln x dx = \int u \cdot v \cdot du = \int u \cdot x \cdot \frac{1}{x} du = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

$$\int 5x \cos x \sin x dx$$

$$u = 2x \quad du = 2 dx \quad v = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad dv = \cos 2x dx$$

$$\int 5x \cos x \sin x dx = \int \frac{u}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{5}{8} \int u du = \frac{5}{16} u^2 + C = \frac{5}{16} (2x)^2 + C = \frac{5}{4} x^2 + C$$

$$\int 6x \tan x \sec x dx$$

$$u = \sec x \quad du = \sec x \tan x dx \quad v = x \quad dv = dx$$

$$\int 6x \tan x \sec x dx = \int u \cdot v \cdot du = \int u \cdot x \cdot du = \int u \cdot \frac{1}{u} du = \int 1 du = u + C = \sec x + C$$

$$\int (x \sin^2 7x) dx$$

$$x \sin^2 7x = -x \int x \csc^2 x dx \quad u = dx \quad v = -\cot x \quad du = dx \quad dv = \csc^2 x dx = \int x \csc^2 x \sin^2 x dx + C$$

$$= -x \cot x \sin x + \int \cos x dx = -x \cot x + \int \cot x \cot$$

$$\int (x^3 \ln x) dx$$

$$x^3 \ln x = -12x^2 - 2 \ln x \quad dv = x - 3 \quad du = 1 \quad dx \quad dv = -12x^2 - 2 \int x - 3 \ln u = \ln x^2 x^2 - 14x^2 + C = -\ln x + \int 12x^2 - 3 dx = -12x^2 - 2 \ln x - 21x^2 = -12x^2 - 2 \ln - 14x^2 + C$$

$$\int (x^2 \tan^2 2x \sec^2 2x) dx$$

$$x^2 \tan^2 2x \sec^2 2x = 4x^2 \tan^2 x \sec^2 x = 12 \tan^2 x \tan x = 2x^2 dv = \sec^2 x$$

ملاحظة: لإيجاد  $v$  استخدمنا طريقة التعويض، حيث:  $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ، ومنه:  $dx = dy \sec^2 y = \tan^2 y$

$$x^2 \int 2x^2 \sec^2 x = \int y dy = 12y^2 = 12 \tan^2 x \int dy \sec^2 x dx = \int \sec^2 x \tan^2 x = \int \sec^2 x (x^2 - 1) dx = \int x^2 \sec^2 x dx - \int \sec^2 x dx = 2x^2 (12 \tan^2 x - x) - \int 2(\tan x - 2x(\tan x dx = x^2 \tan^2 x \tan x - x \int 2x^2 \sec^2 du = 2 dx v = \tan x x - 2x \tan x - x) dx = x^2 \tan^2 x \cos x + 2x^2 + 2 \int (\sin x - 2x \tan - x) dx = x^2 \tan^2 x | + C | \cos x + x^2 - 2 \ln x - 2x \tan x | - x^2 + C = x^2 \tan^2 | \cos + 2x^2 - 2 \ln$$

$$\int (x-2)^8 - x dx \quad (10)$$

هذه المسألة يمكن حلها بالتعويض، حيث:  $u = 8 - x$  أو  $u = x - 8$

وحلها بالأجزاء كالآتي:

$$u = x - 2 \quad dv = (8 - x)^2 \quad du = dx \quad v = -\frac{1}{3}(8 - x)^3 \quad \int (x-2)^8 - x dx = (x-2)^8 - \frac{1}{3}(8-x)^3 - \int -\frac{1}{3}(8-x)^3 dx = -\frac{1}{3}(8-x)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}(8-x)^4 + C = -\frac{1}{3}(8-x)^3 - \frac{1}{12}(8-x)^4 + C$$

$$\int (2x^3 \cos x) dx$$

بالأجزاء 3 مرات، لنستخدم طريقة الجدول:

$f(x)$  ومشتقاته المتكررة

$g(x)$  وتكاملاته المتكررة

$x^3$	+	$\cos 2x$
$3x^2$	-	$\frac{1}{2} \sin 2x$
$6x$	+	$-\frac{1}{4} \cos 2x$
$6$	-	$-\frac{1}{8} \sin 2x$
$0$		$\frac{1}{16} \cos 2x$

$$2x + C \int 2x - 38 \cos 2x - 34x \sin 2x + 34x^2 \cos 2x dx = 12x^3 \sin x - 3 \cos f$$

$$\int (x^6 dx) (12f)$$

$$\int 6x^6 - x dx = -x^6 - \int x^6 dx = \int x^6 - x dx u = x dv = 6 - x dx du = dx v = -6 - x \ln \int$$

$$6) 2 + C \int 6 - x \ln 6 dx = -x^6 - x \ln 6 + \int 6 - x \ln \ln$$

$$\int (2x dx) (13e^{-x} \sin f)$$

$$\int 2x dx = -12e^{-x} - \int 2x f e^{-x} \sin 2x dx du = -e^{-x} dx v = -12 \cos u = e^{-x} dv = \sin$$

$$2x dx du = -12e^{-x} dx v = 12 \sin 2x dx u = 12e^{-x} dv = \cos 2x - \int 12e^{-x} \cos$$

$$2x dx f e^{-x} \sin 2x - 14 \int e^{-x} \sin 2x - 14e^{-x} \sin 2x dx = -12e^{-x} \cos 2x f e^{-x} \sin$$

$$2x dx (2x) + C \int 54 \int e^{-x} \sin 2x + 2 \cos 2x dx = -14e^{-x} (\sin 2x dx + 14 \int e^{-x} \sin$$

$$2x) 2x + 2 \cos 2x dx = -15e^{-x} (\sin 2x) + C \int e^{-x} \sin 2x + 2 \cos = -14e^{-x} (\sin$$

$$+ C$$

$$\int (x dx) (14 \sin x \ln \cos f)$$

$$\int x \sin x \ln x dx = \sin x \ln x \int \cos x dx v = \sin x \sin x dx du = \cos x dv = \cos \sin u = \ln$$

$$x + C x - \sin x \ln x dx = \sin - \int \cos$$

$$\int ((1+e^x) dx) (15e^x \ln f)$$

$$\int (1+e^x)(1+e^x) dx = e^x \ln(1+e^x) dv = e^x dx du = e^x (1+e^x) dx v = e^x \int e^x \ln u = \ln$$

$$(1+e^x) - \int (e^x + (1+e^x)) - \int (e^x + (1+e^x)) dx = e^x \ln - \int e^{2x} (1+e^x) dx = e^x \ln$$

$$(1+e^{-x})+C(1+e^x)-e^x-\ln e^{-x}e^{-x+1}dx=e^x \ln$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\pi/2} x dx (160\pi/2e^x \cos x)$$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = 12e^x (\sin x) + C \Rightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^x \cos x + \cos x dx = 12e^x (\sin x \cos x) \int_0^{\pi/2} 2e^x \cos x + \cos x dx = 12e^{\pi/2} - 12e^0 = 12e^{\pi/2} - 12$$

$$\int_1^2 x^2 dx (171e \ln f)$$

$$\int_1^2 x^2 dx = 2x \ln x dv = dx du = 2x dx v = x \int_1^2 1e^2 \ln x dx u = 2 \ln x^2 dx = \int_1^2 1e^2 \ln 1e \ln f 1-2e+2=2e-0-2e+2=2e-2 \ln x | 1e-2x | 1e=2e \ln e - \int_1^2 1e^2 dx = 2x \ln$$

$$\int_1^2 (x e^x) dx (1812 \ln f)$$

$$\int_1^2 x dx + \int_1^2 x dx x + x dx = \int_1^2 12 \ln e^x dx = \int_1^2 (\ln x + \ln(x e^x)) dx = \int_1^2 (\ln 12 \ln f$$

نجد بطريقة  $\int_1^2 x dx 12 \ln f$  الأجزاء:

$$\int_1^2 x | 12 - x | 12 = x | 12 - \int_1^2 12 dx = x \ln x dx = x \ln x dv = dx du = 1 x dx v = x \int_1^2 12 \ln u = \ln (x e^x) dx 2 - 1 \int_1^2 x dx = 12 x^2 | 12 = 42 - 12 = 32 \Rightarrow \int_1^2 12 \ln 1 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - \ln 2 \ln 2 + 12^2 - 1 + 32 = 2 \ln = 2 \ln$$

$$\int_0^{\pi/3} 3x dx (19\pi/12\pi/9x \sec^2 f)$$

$$\int_0^{\pi/3} 3x dx = 13x \tan 3x \int_{\pi/12}^{\pi/9} 12\pi 9x \sec^2 3x dx du = dx v = 13 \tan u = x dv = \sec^2 3x dx = 3x \cos 3x |_{\pi/12}^{\pi/9} - \int_{\pi/12}^{\pi/9} 12\pi 9 13 \sin 3x dx = 13x \tan^2 \pi/9 - \int_{\pi/12}^{\pi/9} 12\pi 9 13 \tan \pi \cos \pi/4 + 19 \ln \pi^3 - \pi^3 6 \tan 3x |_{\pi/12}^{\pi/9} = \pi^2 7 \tan \cos 3x |_{\pi/12}^{\pi/9} + 19 \ln 13x \tan 12 12 - 19 \ln \pi^4 = \pi^3 27 - \pi^3 6 + 19 \ln \cos 3 - 19 \ln$$

$$\int_1^2 x dx (201e x^4 \ln f)$$

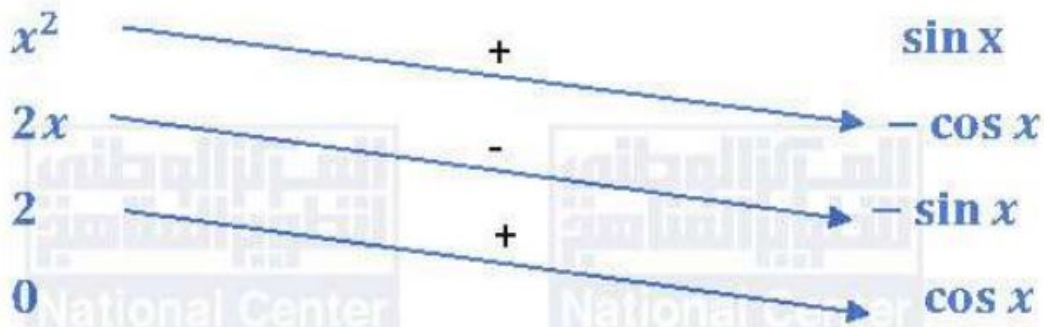
$$\int_1^2 x | 1e - \int_1^2 1e 15x^4 dx x dx = 15x^5 \ln x dv = x^4 dx du = dx x v = 15x^5 \int_1^2 1e x^4 \ln u = \ln x | 1e - 125x^5 | 1e = 15e^5 - 0 - 125e^5 + 125 = 4e^5 + 125 = 15x^5 \ln$$

$$\int_0^{\pi/2} x dx (210\pi/2x^2 \sin f)$$

نجد  $\int_0^{\pi/2} x dx x^2 \sin f$  باستخدام طريقة الجدول:

$f(x)$  ومشتقاته المتكررة

$g(x)$  وتكاملاته المتكررة



$$\int_0^{\pi/2} (x^2 + 2x + 2) \sin x \, dx = -x^2 \cos x - 2x \sin x + 2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2$$

$$\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) \, dx \quad (22)$$

$$\begin{aligned} u = x, dv = (e^{-2x} + e^{-x}) \, dx \Rightarrow du = dx, v = -\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} \\ \int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) \, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 (-\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}) \, dx \\ = -\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4}e^{-2} + e^{-1} = -\frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x e^x (1+x)^2 \, dx \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u = x, dv = (1+x)^2 \, dx \Rightarrow du = dx, v = \frac{1}{3}(1+x)^3 \\ \int_0^1 x e^x (1+x)^2 \, dx = \frac{1}{3}x e^x (1+x)^3 - \int_0^1 \frac{1}{3} e^x (1+x)^3 \, dx \\ = \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^3 \ln 3 \, dx \quad (24)$$

$$\int_0^1 x^3 \ln 3 \, dx = \ln 3 \int_0^1 x^3 \, dx = \ln 3 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\ln 3}{4}$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int x^3 e^{x^2} \, dx \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y = x^2 \Rightarrow dy = 2x \, dx \Rightarrow \int x^3 e^{x^2} \, dx = \int \frac{1}{2} y e^y \, dy \\ = \frac{1}{2} (y e^y - e^y) + C = \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + C \end{aligned}$$

(26)  $\int \frac{dx}{x \ln x \cos x}$

$$y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x dy, x = e^y \int \frac{dx}{x \ln x \cos x} = \int \frac{e^y dy}{e^y \cos y} = \int \frac{dy}{\cos y} = \ln |\sec y + \tan y| + C = \ln |\sec(\ln x) + \tan(\ln x)| + C$$

(27)  $\int \frac{x^2 dx}{x^3 \sin x}$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}, x = \sqrt{y} \int \frac{x^2 dx}{x^3 \sin x} = \int \frac{1}{\sqrt{y} \sin \sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y \sin \sqrt{y}}$$

$$u = \sqrt{y} \Rightarrow y = u^2 \Rightarrow dy = 2u du \int \frac{1}{u^2 \sin u} \cdot 2u du = 2 \int \frac{du}{u \sin u} = 2 \int \frac{du}{\sin u} = 2 \ln |\csc u - \cot u| + C = 2 \ln |\csc \sqrt{y} - \cot \sqrt{y}| + C$$

(28)  $\int \frac{2x dx}{x \sin x \cos x}$

$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow dy = -\frac{dx}{y^2}, y = \frac{1}{x} \int \frac{2x dx}{x \sin x \cos x} = \int \frac{2 dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{2 dx}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 4 \int \frac{dx}{\sin 2x}$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \int \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C = \frac{1}{2} \ln |\csc 2x - \cot 2x| + C$$

(29)  $\int \frac{x dx}{x^2 \sin x}$

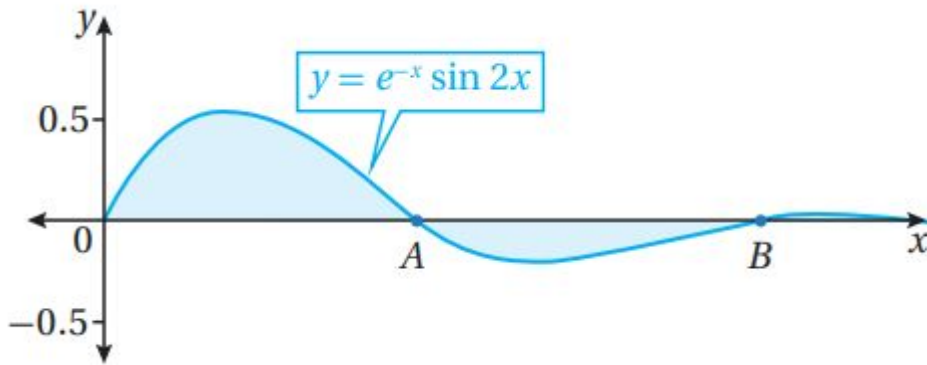
$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow dy = -\frac{dx}{y^2}, y = \frac{1}{x} \int \frac{x dx}{x^2 \sin x} = \int \frac{dx}{x \sin x} = \int \frac{dx}{\frac{1}{y} \sin \frac{1}{y}} = \int \frac{y dy}{\sin y} = \int \frac{dy}{\sin y} = \ln |\csc y - \cot y| + C = \ln |\csc \frac{1}{x} - \cot \frac{1}{x}| + C$$

(30)  $\int \frac{x^3 e^{x^2} (x^2 + 1)^2 dx}{x^2}$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}, x = \sqrt{y} \int \frac{x^3 e^{x^2} (x^2 + 1)^2 dx}{x^2} = \int \frac{x e^{x^2} (x^2 + 1)^2 dx}{2}$$

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \int \frac{x e^{x^2} (x^2 + 1)^2 dx}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{e^u u^2 du}{2} = \frac{1}{4} \int e^u u^2 du = \frac{1}{4} (e^u u^2 - 2e^u u + 2e^u) + C = \frac{1}{4} e^{x^2} (x^2 + 1)^2 - \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 + 1) + \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$





إذا كان الشكل المجاور  
يمثل منحنى الاقتران:  
 $f(x) = e^{-x} \sin 2x$   
حيث:  $x \geq 0$  فأجيب عن  
الأسئلة الثلاثة الآتية  
تباعاً:

(31) أجد إحداثيي كل من النقطة A، والنقطة B.

الإحداثيان x للنقطتين A و B هما أصغر حلين موجبين للمعادلة:

$$e^{-x} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi, \dots \Rightarrow A(\frac{\pi}{2}, 0), B(\pi, 0)$$

(32) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x} \sin 2x dx$$

للبيسط سنجد أولاً:  $\int e^{-x} \sin 2x dx$  (التكامل غير المحدود)

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin 2x dx &= -\int 2e^{-x} \cos 2x dx \\ u &= -e^{-x} \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \\ du &= e^{-x} dx \quad dv = \sin 2x dx \\ \int 2e^{-x} \cos 2x dx &= 2e^{-x} \sin 2x - \int 2e^{-x} \sin 2x dx \\ \int 2e^{-x} \cos 2x dx &= 2e^{-x} \sin 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx \\ \int 2e^{-x} \cos 2x dx &= 2e^{-x} \sin 2x - 2 \left( -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x \right) \\ \int 2e^{-x} \cos 2x dx &= 2e^{-x} \sin 2x + e^{-x} \cos 2x + C \\ \int e^{-x} \sin 2x dx &= -e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + C \end{aligned}$$

(33) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = te^{-t/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t te^{-t/2} dt \\ u &= -2e^{-t/2} \quad v = t \\ du &= e^{-t/2} dt \quad dv = dt \\ \int te^{-t/2} dt &= -2te^{-t/2} - \int -2e^{-t/2} dt \\ \int te^{-t/2} dt &= -2te^{-t/2} - 4e^{-t/2} + C \\ s(0) &= 0 - 4 + C = 0 \Rightarrow C = 4 \\ s(t) &= -2te^{-t/2} - 4e^{-t/2} + 4 \end{aligned}$$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران  $(f(x), y=f(x))$ ، ونقطة يمر بها منحنى  $y=f(x)$ .  
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران  $(f(x), y=f(x))$ :

$$(x; (0,2)) \quad (34) \quad f'(x) = (x+2)\sin x$$

$$xf(x) = -(x+2)\cos x \quad dx \quad du = dx \quad v = -\cos x \quad dx \quad u = x+2 \quad dv = \sin x \quad f(x) = \int (x+2)\sin x + C \quad f(0) = -2+0+C = -2+0+C \Rightarrow C=4$$

$$f(x) = \int (x+2)\sin x + C = \int (x+2)\cos x + C = \int (x+2)\cos x + C = -\cos x + C = -\cos x + 4$$

$$(f(x) = 2xe^{-x}; (0,3)) \quad (35)$$

$$f(x) = \int 2xe^{-x} dx \quad u = 2x \quad dv = e^{-x} \quad du = 2 \quad v = -e^{-x} \quad f(x) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x} dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \quad f(0) = 0 - 2 + C = -2 + C \Rightarrow C = 5$$

$$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 5$$



(36) دورة تدريبية: تقدمت دعاء لدورة

تدريبية متقدمة في الطباعة. إذا كان عدد

الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد

بمعدل:  $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$ ، حيث  $N(t)$  عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في

الدقيقة بعد  $t$  أسبوعاً من التحاقها بالدورة، فأجد  $N(t)$ ، علماً بأن دعاء كانت تطبع 40

كلمة في الدقيقة عند بدء الدورة.

$$N(t) = \int (t+6)e^{-0.25t} dt \quad u = t+6 \quad dv = e^{-0.25t} \quad du = dt \quad v = -4e^{-0.25t} \quad N(t) = -4(t+6)e^{-0.25t} + \int 4e^{-0.25t} dt = -4(t+6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + C$$

$$N(0) = -24 - 16 + C = 40 \Rightarrow C = 80 \Rightarrow N(t) = -4(t+6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + 80$$