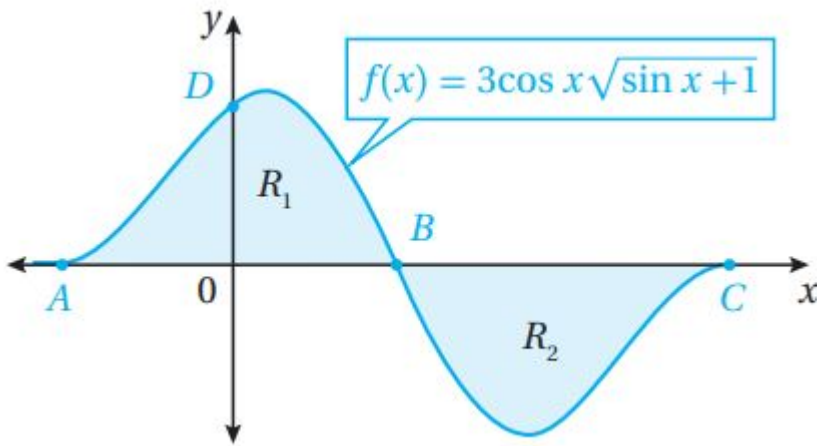


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x=0 \Rightarrow x = \pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = 3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x=0 \Rightarrow \cos x = 1, \sin x = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = 3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \pi/2, x = 3\pi/2$ ، بوضع $n = 0$

$$(B(\pi/2, 0), C(3\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\pi/2$ ، بوضع $n = -1$

$$(A(-\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$u = \sin x + 1 \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$A = \int_{0}^2 3\sqrt{u} du + \int_{0}^2 -3\sqrt{u} du = 6 \int_{0}^2 \sqrt{u} du - 6 \int_{0}^2 \sqrt{u} du = 0$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 3\cos x (1 + \sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 3\cos x (1 + \sin x) dx = -\int_0^{\pi/2} 3u du = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة: $\int_1^{16} \frac{1+x^3}{4x} dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2} du, x^3 = u - 1 \Rightarrow u = 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\int_1^{16} \frac{1+x^3}{4x} dx = \int_2^{17} \frac{u}{4(3x^2)} du = \frac{1}{12} \int_2^{17} \frac{u}{x^2} du = \frac{1}{12} \int_2^{17} \frac{u}{u-1} du = \frac{1}{12} \int_2^{17} (1 + \frac{1}{u-1}) du = \frac{1}{12} (u + \ln|u-1|) \Big|_2^{17} = \frac{1}{12} (15 + \ln 16 - 1 - \ln 1) = \frac{1}{12} (14 + \ln 16)$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow dx = -du, x = \pi - u \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_1^e (\ln x)(\ln x^2) dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (2x^2 + 1) \sin x dx$

bbb