أتدرب وأحل المسائل

العمليات على الأعداد المركبة

أجد ناتج كلّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $(7 + 2i) + (3 - 11i)$

$(7+2i)+(3-11i)=10-9i$

(2) $(5 - 9i) - (-4 + 7i)$

$(5-9i)-(-4+7i)=9-16i$

(3) $(4 - 3i)(1 + 3i)$

$(4-3i)(1+3i)=4+12i-3i+9=13+9i$

(4) $(4 - 6i)(1 - 2i)(2 - 3i)$

$(4-6i)(1-2i)(2-3i)=(4-6i)(2-3i-4i-6)=(4-6i)(-4-7i)=-16-28i+24i-42=-58-4i$

(5) $(x2 + y2)2 = 50(x2 - y2)$

$(9-2i)2=81-36i-4=77-36i$

(6) $48+19i5-4i$

$48+19i5-4i=48+19i5-4i\times5+4i5+4i=240+192i+95i-7625+16=164+287i41=4+7i$

أجد ناتج كلّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

(7) $6(\cos \pi+i\sin \pi)\times2(\cos (-\pi4)+i\sin (-\pi4))$

$6(\cos \pi+i\sin \pi)\times2(\cos (-\pi4)+i\sin (-\pi4))=12(\cos (\pi-\pi4)+i\sin (\pi-\pi4))=12(\cos 3\pi4+i\sin 3\pi4)$

(8) $(\cos 3\pi 10+i\sin 3\pi 10)\div(\cos 2\pi 5+i\sin 2\pi 5)$

$(\cos (3\pi 10)+i\sin (3\pi 10))\div(\cos 2\pi 5+i\sin 2\pi 5)=\cos (3\pi 10-2\pi 5)+i\sin (3\pi 10-2\pi 5)=\cos (-\pi 10)+i\sin (-\pi 10)$

(9) $12(\cos \pi 4+i\sin \pi 4)\div 4(\cos \pi 3+i\sin \pi 3)$

$12(\cos (\pi 4)+i\sin (\pi 4))\div 4(\cos \pi 3+i\sin \pi 3)=124(\cos (\pi 4-\pi 3)+i\sin (\pi 4-\pi 3))=3(\cos (-\pi 12)+i\sin (-\pi 12))$

(10) $11(\cos (-\pi 6)+i\sin (-\pi 6))\times 2(\cos 3\pi 2+i\sin 3\pi 2)$

$11(\cos(-\pi 6)+i\sin(-\pi 6))\times 2(\cos(3\pi 2)+i\sin(3\pi 2))=22(\cos(-\pi 6+3\pi 2)+i\sin(-\pi 6+3\pi 2))=22(\cos (4\pi 3)+i\sin (4\pi 3))=22(\cos (4\pi 3-2\pi)+i\sin (4\pi 3-2\pi))=22(\cos (-2\pi 3)+i\sin (-2\pi 3))$

أجد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كل ممّا يأتي:

(11) $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

$(a+6i)+(7-bi)=-2+5ia+7+(6-b)i=-2+5i\rightarrow a+7=-2,6-b=5\rightarrow a=-9,b=1$

(12) $(11-ia)-(b-9i)=7-6i$

$(11-ia)-(b-9i)=7-6i11-b+(9-a)i=7-6i\rightarrow 11-b=7,9-a=-6$

(13) $(a+ib)(2-i)=5+5i$

$(a+ib)(2-i)=5+5i2a+b+(2b-a)i=5+5i\rightarrow 2a+b=5,2b-a=5\rightarrow b=3,a=1$

طريقة ثانية للحل:

$a+ib=5+5i2-i=5+5i2-i\times 2+i2+i=10+5i+10i-54+1=5+15i5\rightarrow a=1+3i\rightarrow a1,b=3$

(14) $a-6i1-2i=b+4i$

$a-6i1-2i=b+4i \rightarrow a-6i1-2i \times 1+2i1+2i=b+4i \rightarrow a+2ai-6i+121+4=b+4i \rightarrow a+125+2a-65i=b+4i \rightarrow a+125=b, 2a-65=4 \rightarrow a=13$

بتعويض قيمة a في المعادلة الأولى ينتج أن: $b=5$

طريقة ثانية للحل:

$a-6i=(b+4i)(1-2i) \rightarrow a-6i=b+8+(-2b+4)i \rightarrow a=b+8, -6=-2b+4 \rightarrow b=5, a=13$

(15) أضرب العدد المركب $8(\cos\pi4-i\sin\pi4)$ في مرافقه.

$z=8(\cos(\pi4)-i\sin(\pi4))=8(\cos(-\pi4)+i\sin(-\pi4)) \rightarrow \bar{z}=8(\cos(\pi4)+i\sin(\pi4)) \rightarrow z\bar{z}=8(\cos(\pi4)-i\sin(\pi4)) \times 8(\cos(\pi4)+i\sin(\pi4))=64(\cos2(\pi4)+\sin2(\pi4))=64$

الحل الثاني: نكتب كلاً من العددين بالصورة المثلثية أولاً ثم نطبق القاعدة:

$z=8(\cos(\pi4)-i\sin(\pi4))=8(\cos(-\pi4)+i\sin(-\pi4)) \rightarrow \bar{z}=8(\cos(\pi4)+i\sin(\pi4)) \rightarrow z\bar{z}=64(\cos(-\pi4+\pi4)+i\sin(-\pi4+\pi4))=64$

الحل الثالث: نكتب كلاً من العددين بالصورة القياسية أولاً ثم إجراء عملية الضرب:

$z=8(\cos(\pi4)-i\sin(\pi4))=8(12-12i)=42-42i \rightarrow \bar{z}=42+42i \rightarrow z\bar{z}=(42-42i)(42+42i)=32+32=64$

إذا كان: $z1=12-2i, z2=5-i15, z3=2-2i$ ، فأجد المقياس والسعة الرئيسة لكل ممّا يأتي:

(16) $z2z1$

$z1=23-2i, z2=5-i15, z3=2-2i |z1|=12+4=4 |z2|=5+15=25 |z3|=4+4=22 Arg(z1)=-\tan-1(223)=-\tan-1(13)=-\pi6 Arg(z2)=-\tan-1(155)=-\tan-1(3)=-\pi3 Arg(z3)=-\tan-1(22)=-\tan-1(1)=-\pi4 |z2z1|=|z2||z1|=254=52 Arg(z2z1)=Arg(z2)-Arg(z1)=-\pi3-(-\pi6)=-\pi6$

(17) $1z3$

$|1z3|=|1||z3|=122 Arg(1z3)=Arg(1)-Arg(z3)=0-(-\pi4)=\pi4$

(18) $z3z2$

$\bar{z2}=5+i15 \rightarrow |\bar{z2}|=|z2|=25, Arg(\bar{z2})=-Arg(z2)=\pi 3 |z3\bar{z2}|=|z3||\bar{z2}|=2225=25 Arg(z3\bar{z2})=Arg(z3)-Arg(\bar{z2})=-\pi 4-\pi 3=-7\pi 12$