

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$3s^2 + 4s = \frac{ds}{du}$$

$$ds = \frac{ds}{du} \cdot du$$

$$\int (2s^3 + 4s^2) ds = \int (2u^3 + 4u^2) \frac{ds}{du} du$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du = \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2} u^4 + \frac{4}{3} u^3 + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{5x}{5} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = 0$$

$$\cdot \quad 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } x = 3 \rightarrow 1 + \sqrt{5 \times 3} = 1 + \sqrt{15}$$

$$\text{عندما } x = 1 \rightarrow 1 + \sqrt{5 \times 1} = 1 + \sqrt{5}$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \frac{1}{5} \cdot \int_{1+\sqrt{5}}^{1+\sqrt{15}} \frac{1}{u} du$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \frac{1}{5} \left[ \ln |u| \right]_{1+\sqrt{5}}^{1+\sqrt{15}}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \ln \left( \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{5} (\ln(1+\sqrt{15}) - \ln(1+\sqrt{5}))$$

**تدريب ٣**

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

**الحل**

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$= \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} u &= 1+s^2 \\ du &= 2s ds \\ s ds &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

(٣)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u}}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = -\frac{1}{2} \arcsin(u) + C$

$= -\frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + C$

$= -\frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + C$

$= -\frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + C$

**تدريب ٤**

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب) \sqrt{أس} ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0 ، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) \sqrt{أس} ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

**الحل**

$$(1) \int (أس + ب) \sqrt{أس} = \int \frac{(أس + ب) \sqrt{أس}}{أس(1+ن)} = \int \frac{(أس + ب) \sqrt{أس}}{أس(1+ن)}$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) \sqrt{أس} = \int جتا(أس + ب) \sqrt{أس}$$

**تدريب ٥**

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1) \sqrt{أس}} ، (2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1) \sqrt{أس}}$$

**الحل**

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1) \sqrt{أس}} = \int \frac{1}{(أس^2 - 1) \sqrt{أس}} = \int \frac{1}{(أس^2 - 1) \sqrt{أس}}$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1) \sqrt{أس}} = \int \frac{1}{(أس^4 - 1) \sqrt{أس}}$$