

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$ (ب) $\int 6s^2 \sqrt{2s-2} ds$

(ج) $\int (2s-2s^3) \sqrt{2s-2} ds$ (د) $\int \frac{9-s^3}{(s^2-2s)^2} ds$

الحل

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص = $s-2 \Rightarrow ds = 1 ds$

$\int (1-2s)(s-2)^4 ds = \int (1-2(s-2))s^4 ds$

$= \int (1-2s+4)s^4 ds = \int (5-2s)s^4 ds$

(ب) $\int 6s^2 \sqrt{2s-2} ds$

ص = $2s-2 \Rightarrow ds = 2 ds$

$\int 6s^2 \sqrt{2s-2} ds = \int 3s^2 \sqrt{2s-2} ds$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{u} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{u} =$$

(ج) $\int (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx$

$$ص = 2 - 3x \Rightarrow \frac{ص}{3} = 2 - x$$

$$\cdot \frac{ص}{3} = \frac{ص}{3}$$

$$\frac{ص}{3} \int (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int -\frac{ص}{3} (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -\frac{ص}{3} (2-3x)^{\frac{1}{2}}$$

(د) $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

$$\Leftrightarrow 6 - x^2 = \frac{ص}{x} \Leftrightarrow 6x - x^2 = ص$$

$$\cdot \frac{ص}{6-x^2} = \frac{ص}{6-x^2}$$

$$= \frac{ص}{6-x^2} \times \frac{9-x^2}{x}$$

$$= \frac{ص}{(3-x)^2} \times \frac{ص}{x} \times (3-x)^2$$

$$p + \frac{1}{\sqrt{u}} = p + \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{2}{\sqrt{u}} = p + \frac{2}{\sqrt{2-3x}}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$
 (ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds$
 (ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds$
 (د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{s^2}{2} + C$

(ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds = \int (1-s-2s^3+s^5-2s^5+s^7) ds = \int (1-s-2s^3+s^7) ds = s - \frac{s^2}{2} - \frac{2s^4}{4} + \frac{s^8}{8} + C = s - \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{2} + \frac{s^8}{8} + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \left(-\frac{2}{3} (2-s)^{3/2} \right) + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$
 Let $u = 1+s^4$, then $du = 4s^3 ds$
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u} + C = \sqrt{1+s^4} + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \left(-\frac{2}{3} (2-s)^{3/2} \right) + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$
 Let $u = 1+s^4$, then $du = 4s^3 ds$
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u} + C = \sqrt{1+s^4} + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \left(-\frac{2}{3} (2-s)^{3/2} \right) + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$
 Let $u = 1+s^4$, then $du = 4s^3 ds$
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u} + C = \sqrt{1+s^4} + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب) $\int_1^{-1} 3s^2(s-1)^2 ds$

ج) $\int 2s \sqrt{s^2-1} ds$

د) $\int \frac{s^2-3}{(s^3-2s)^2} ds$

الحل

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds = \int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds$

$$\int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times \frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{2} ds$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{4s+1} ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{1}{x} (1-2x) = \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2) dx = \text{مفتر}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هـ} = 1-x^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{2x} = \frac{dx}{2x} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dx}{x}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{dx}{2x} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{2x} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2x}$$

$$\frac{2}{3} \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right]_{-1}^1$$

$$\left(\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2}$$

$$\left(-1 - 1 \right) \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{(x^3 - 6)^2} dx - \int_1^2 \frac{2}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{u} = \int_1^2 \frac{1}{1-u} = \int_1^2 \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{1+u} = \int_1^2 \frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{1+u}$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx$

الحل

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{(3 - u)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{(3 - u)^2} dx$$

$$\int_1^2 \frac{x^2}{(3 - u)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{(3 - u)^2} dx$$

$$0 - 6 - = (8 -) u - (27) u = (3 -) u - (3) u$$

$$11 - =$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

الحل

$$٥س = س٢ + ١ \Leftrightarrow س٢ = ٥س - ١ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس$$

$$\text{عند } س = ١ \Rightarrow ٥س - ١ = ٤ \Rightarrow س = ١$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow ٥س - ١ = ٩ \Rightarrow س = ٢$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس = \int_4^9 ٨ \sqrt{٥س - ١} دس = ٣ - ٨ \times ٤ = ١٢ -$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٨س ق(٩ + ٤س٢) دس$$

الحل

$$\int_0^2 ٨س ق(٩ + ٤س٢) دس = \int_0^2 ٨س ق(٩ + ٤س٢) دس$$

$$\Leftrightarrow ٥س = ٩ + ٤س٢ \Leftrightarrow ٤س٢ - ٥س + ٩ = ٠$$

$$\Leftrightarrow ٤س٢ - ٥س + ٩ = ٠$$

$$\int_0^2 ٨س ق(٩ + ٤س٢) دس = \int_0^2 \frac{٨س}{٤س٢ + ٩} دس = \int_0^2 \frac{٢س}{٤س٢ + ٩} دس = \int_0^2 \frac{٢س}{٤(س٢ + \frac{٩}{٤})} دس$$

$$= \int_0^2 \frac{٢س}{٤(س٢ + \frac{٩}{٤})} دس = \int_0^2 \frac{٢س}{٤(س٢ + \frac{٩}{٤})} دس$$

$$= \frac{٢}{٤} \int_0^2 \frac{س}{س٢ + \frac{٩}{٤}} دس = \frac{١}{٢} \int_0^2 \frac{س}{س٢ + \frac{٩}{٤}} دس$$

$$= \frac{١}{٢} \left(\frac{١}{٢} \ln |س٢ + \frac{٩}{٤}| \right) \Big|_0^2 = \frac{١}{٤} \left(\ln |٤ + \frac{٩}{٤}| - \ln |٠ + \frac{٩}{٤}| \right)$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف