

إجابات تدريبات الدرس

تطبيقات القيم القصوى

تدريب ١

مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن مستخدماً تطبيقات التفاضل.



الحل

نفرض العددين s ، v فيكون $s + 2v = 40$ ← $s = 40 - 2v$

$$l = s \times v$$

$$= (40 - 2v) \times v = 40v - 2v^2$$

$$l' = 40 - 4v = 0 \quad \leftarrow \quad 4v = 40 \quad \leftarrow \quad v = 10$$

$$l'' = -4 < 0$$

$$l(10) = (40 - 2 \times 10) \times 10 = 20 \times 10 = 200$$

$$s = 40 - 2 \times 10 = 20$$

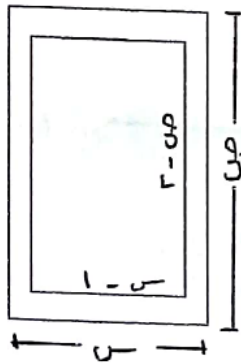


تدريب ٢

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٢٨ سم^٢، يراد طباعة إعلان عليها، إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم، وفي كل من الجانبين $\frac{1}{2}$ سم، فجد بُعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

الحل



$$س \times ص = ١٢٨ \leftarrow ص = \frac{١٢٨}{س}$$

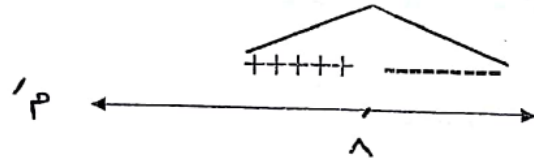
$$المساحة المطبوعة م = (س - ١) (٢ - ص)$$

$$م = س ص - ٢ ص - س + ٢$$

$$م = ٢ - ١٢٨ - س + ٢ = ٢ + \frac{١٢٨}{س} - س$$

$$٠ = \frac{١٢٨}{س} + ٢ - س \leftarrow ٢س^٢ = ١٢٨$$

$$س^٢ = ٦٤ \leftarrow س = ٨$$

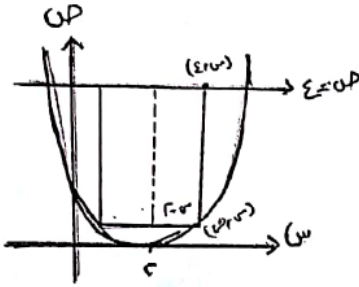


$$عظمى عند س = ٨ \leftarrow ص = \frac{١٢٨}{٨} = ١٦$$

تدريب ٣

يقع المستطيل أ ب ج د في المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $2s^2 - 4s + 4$ والمستقيم ص = 4 بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق، ورأساه الآخران ج، د على المستقيم ص = 4، جد بُعدَي المستطيل أ ب ج د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل



$$\text{معادلة محور التماثل س} = \frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} = \frac{-(-4)}{2 \times 2} = 1$$

$$0 = 2(2 - \text{س})^2 - 4(2 - \text{س}) + 4$$

$$0 = 2(4 - 4\text{س} + \text{س}^2) - 8 + 4\text{س} + 4$$

$$0 = 2(4 - 4\text{س} + \text{س}^2) - 8 + 4\text{س} + 4 \quad (\div 2)$$

$$0 = 4 - 4\text{س} + \text{س}^2 - 4 + 2\text{س} + 2$$

$$0 = \text{س}^2 - 2\text{س} + 2 - 4 + 2\text{س} + 2$$

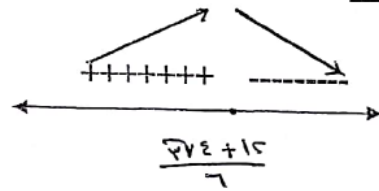
$$0 = \text{س}^2 - 8 + 4\text{س} + 2 = \text{س}^2 + 4\text{س} - 6$$

نستخدم المميز : ب² - 4أ ج = 16 - 4(1)(-6) = 40

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2\text{أ}} = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -2 \pm \sqrt{10}$$

$$\text{نأخذ س} = \frac{-4 + \sqrt{40}}{2} = \frac{-4 + 2\sqrt{10}}{2} = -2 + \sqrt{10}$$

قيمة عظمى عند س



تدريب ٤

نحتاج إلى قص لوح خشبي، على شكل مثلث متطابق الضلعين، طول كل منهما ٨ سم، إذا كانت زاوية رأس المثلث ه متغيرة، فجد قياس الزاوية ه التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

الحل



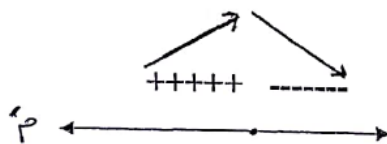
$$\text{م} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \text{جنا ه}$$

$$32 = \text{م} \times \text{جنا ه}$$

$$32 = \text{م} \times \text{جنا ه}$$

$$32 = \text{م} \times \frac{\pi}{4} \quad \leftarrow \text{ه} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{عظمى عند ه} = \frac{\pi}{4}$$

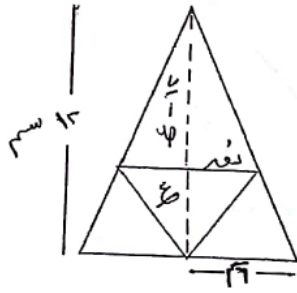


تدريب ٥

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته ٦ سم، وارتفاعه ١٢ سم، بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف



منهاجي
متعة التعليم الهادف

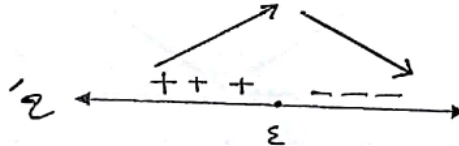
$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\
 \text{لكن: } \frac{12 - h}{6} &= \frac{r}{6} \\
 2 - \frac{h}{6} &= \frac{r}{6} \quad \leftarrow \\
 2 - \frac{h}{6} &= \frac{r}{6} \\
 C &= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{12 - h}{6} \right)^2 h \\
 C &= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{144 - 24h + h^2}{36} \right) h \\
 C &= \frac{\pi}{36} (144h - 24h^2 + h^3) \\
 0 &= 12h - 2h^2 + \frac{1}{3}h^3 \quad \leftarrow \\
 0 &= 12 - 2h + \frac{1}{3}h^2 \\
 0 &= 36 - 6h + h^2 \\
 0 &= (h - 6)(h - 6) \\
 0 &= h - 6, \quad 0 = h - 6
 \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قيمة عظمى عند $h = 6$

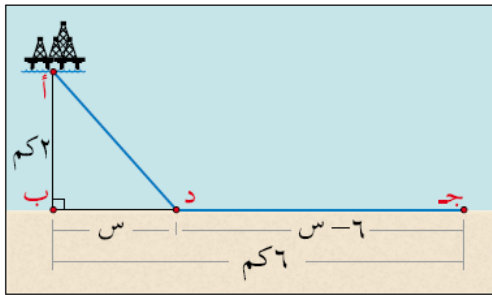
$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{3} \pi (6)^2 (6) \\
 C &= \frac{1}{3} \pi \times 36 \times 6 \\
 C &= 72\pi
 \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف



تدريب ٦

يقع حقل نفط في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٢ كم عن أقرب نقطة ب على الساحل، وأردنا أن نضخ البترول من الحقل إلى المصفاة التي تقع عند النقطة جـ على الساحل، وتبعد ٦ كم من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة د على الساحل، ثم بواسطة أنابيب على اليابسة على خط مستقيم من د إلى جـ، على فرض أن الأنابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد، إذا كانت تكلفة الأنابيب تحت سطح البحر ٥٠٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر وعلى اليابسة ٣٠٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر، فأجب عما يأتي:



الشكل (٣-٢٥)

- (١) أين يجب أن تكون د لتحقيق أقل تكلفة ممكنة؟
- (٢) أين يجب أن تكون د لتحقيق أكبر تكلفة ممكنة؟

الحل

$$أ د = \sqrt{4 + 2س}$$

التكاليف:

ت = ت (في البحر) + ت (في اليابسة)

$$ت = 300000(س-6) + \sqrt{4 + 2س} \times 500000$$

$$ت' = 300000 - \frac{س}{\sqrt{4 + 2س}} \times 500000 = 0 \quad (1000000 \div)$$

$$0 = 3 - \frac{س}{\sqrt{4 + 2س}} \quad \leftarrow \quad 3\sqrt{4 + 2س} = س$$

$$36 + 2س = 2س \quad \leftarrow \quad 9 = (4 + 2س)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} = س \quad \leftarrow \quad \frac{9}{4} = \frac{36}{16} = 2س$$

$$\frac{3}{2} = س \quad \text{صغرى عند س} \quad \frac{3}{2}$$

(2) تحدث القيمة العظمى عند س = 0 أو س = 6 (أطراف الفترة)

$$عند س = 0 : ت = 2 \times 500000 + 6 \times 300000 = 2800000$$

$$2800000 = 1800000 + 1000000 =$$

$$عند س = 6 : ت = 6 + \sqrt{4 + 2 \times 6} \times 500000 =$$

$$6,3 \times 500000 =$$

$$3150000 =$$

تكون أكبر ما يمكن عند س = 6

