

إجابات أسئلة الدرس

الاشتقاق الضمني

(١) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$

ب) $x^2 + 3y^2 = 3$

ج) $\sqrt{x^2 + 3y^2} = 2$

د) $(x^2 + y^2)^2 = 3$

الحل

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$
 $\frac{d}{dx}(x^2 + 4y^2) = \frac{d}{dx}(16)$

$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$

$8y \frac{dy}{dx} = -2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y}$

ب) $x^2 + 3y^2 = 3$
 $\frac{d}{dx}(x^2 + 3y^2) = \frac{d}{dx}(3)$

$2x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$

$6y \frac{dy}{dx} = -2x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{6y}$

$$(ج) \quad 1 \times c + c' s = c' c^3 + c^3 c'$$

$$c^3 - c = c' s - c' c^3$$

$$\frac{c^3 - c}{s - c^3} = \frac{(s - c^3) c'}{s - c^3}$$

$$\frac{c^3 - c}{s - c^3} = c'$$

$$(د) \quad \text{حيث } (s) = (s + c) = c^2$$

$$s = c^2 \text{ حيث } (s) = c^2 + c^2 \text{ حيث } (s) = c^2$$

$$\frac{s - c^2}{s - c^2} = \frac{c^2 - c^2}{s - c^2}$$

$$\frac{s - c^2}{s - c^2} = c'$$

(٢) جد $\frac{y^2}{x^2}$ لكل مما يأتي :

(ب) $4x^2 + 3y^2 = 16$
 (د) $\sqrt{y} = x + 2$

أ) $(x^2 - 4)^2 = 4$
 ج) $x = 3y$

الحل

أ) $x^2 - 4 = 2$
 $x^2 = 6$
 $x = \sqrt{6}$
 $y = \frac{x^2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
 $\frac{y^2}{x^2} = \frac{2^2}{(\sqrt{6})^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ب) $4x^2 + 3y^2 = 16$
 $4x^2 = 16 - 3y^2$
 $x^2 = \frac{16 - 3y^2}{4}$
 $\frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{\frac{16 - 3y^2}{4}} = \frac{4y^2}{16 - 3y^2}$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - \frac{2x-2}{y^3} = 0$$

$$(ب) \quad 1 + y - \frac{2x-2}{y^2} = 0$$

$$1 + y = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$1+y = 2x-2$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$(3y)$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$y^2$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$y^2$$

$$\frac{1+y}{y^2} = \frac{2x-2}{y^2}$$

$$(ج) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = \frac{y}{x}$$

$$y = x^2 = (x+1)^2 - 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = \frac{y}{x}$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d((x+1)^2 - 2x - 1)}{dx} = 2(x+1) - 2 = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x = \frac{d((x+1)^2 - 2x - 1)}{dx}$$

$$\frac{2x^2}{2x} = \frac{2(x+1)^2 - 4x - 2}{2(x+1)}$$

$$(د) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = \frac{y}{x}$$

$$y = x^2 = (x+1)^2 - 2x - 1$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d((x+1)^2 - 2x - 1)}{dx} = 2(x+1) - 2 = 2x$$

$$\frac{2x^2}{2x} = \frac{2(x+1)^2 - 4x - 2}{2(x+1)}$$

$$2x = \frac{2(x+1)^2 - 4x - 2}{2(x+1)}$$

$$2x = \frac{2(x^2 + 2x + 1) - 4x - 2}{2(x+1)}$$

٣) جد قيمة $\frac{y}{x}$ لكل من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) $8x^2 + y^2 = \pi^2$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

ج) $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ، $(1, 4)$

الحل

أ) $8x^2 + y^2 = \pi^2$ ؟
 $16x^2 + 2y^2 = 2\pi^2$
 $16x^2 + 2y^2 = 2\pi^2$

$16x^2 + 2y^2 = 2\pi^2$
 $8x^2 + y^2 = \pi^2$

$8x^2 + y^2 = \pi^2$
 $8x^2 + y^2 = \pi^2$

$\frac{8x^2 + y^2}{8x^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{\pi^2}$

عند $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

$\frac{\frac{\pi}{2} \times 8 - \frac{\pi}{4} \times 8}{\frac{\pi}{2} \times 8 - \frac{\pi}{4} \times 8} = \frac{y}{x}$

$\frac{\pi \times 4 - \pi \times 2}{\pi \times 4 - \pi \times 2} = \frac{y}{x}$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

$4x^2 + 2y^2 = 4$
 $4x^2 + 2y^2 = 4$

ج) $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ، $(1, 4)$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

$3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$
 $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

٤) إذا كان جا(س + ص) = ص^٢ جتا(س)، فجد ص'.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} \text{جبا}(س + ص) &= (ص + ١) (ص + ١) = ص^٢ \text{جتا}(س) + \text{جا}(س) - \text{ص} \text{جتا}(س) \\ \text{جبا}(س + ص) + \text{جبا}(س + ص) &= \text{ص}' (ص + ص) = \text{ص}' (٢ص) \\ \text{جبا}(س + ص) (ص + ص) &= \text{ص}' (٢ص) \\ \text{ص}' (٢ص) &= \text{ص}' (٢ص) \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{\text{ص}' (٢ص) - \text{ص}' (٢ص)}{\text{ص}' (٢ص) - \text{ص}' (٢ص)} = \text{ص}'$$

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٣$ التي يكون عندها المماس أفقيًا.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} ٣ &= \sqrt{ص} + \sqrt{س} \\ ٠ &= \frac{١}{٢\sqrt{ص}} + \frac{١}{\sqrt{س}} \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{١}{\sqrt{ص}} = -\frac{١}{\sqrt{س}} \Rightarrow \frac{١}{\sqrt{ص}} = \frac{١}{\sqrt{س}}$$

المماس أفقي $\Rightarrow \text{ص}' = ٠$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{١}{\sqrt{ص}} = \frac{١}{\sqrt{س}} \Rightarrow \sqrt{ص} = \sqrt{س} \Rightarrow \text{ص} = س$$

$$\text{نعوض } \sqrt{ص} = \sqrt{س} \Rightarrow ٣ = \sqrt{ص} + \sqrt{ص} = ٢\sqrt{ص} \Rightarrow \sqrt{ص} = \frac{٣}{٢}$$

$$\Rightarrow \text{ص} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^2 = \frac{٩}{٤}$$

(٦) إذا كان $v = \sqrt{2s + 1}$ فجد $\frac{dv}{ds}$.

الحل

$$v^2 = 2s + 1 \Rightarrow 2v \frac{dv}{ds} = 2$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2}{2v} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2s + 1}}$$

(٧) إذا كان $s = \cos v$ ، فأثبت أن $v = \arccos s$.

الحل

$$s = \cos v$$

$$1 = \cos v \times \frac{1}{\cos v}$$

$$v = \arccos \frac{1}{\cos v} = \arccos s$$

نوعنا

$$v = \arccos \frac{1}{\cos v}$$

$$v = \arccos s$$

$$v = \arccos s \text{ وهو المطلوب.}$$

(٨) إذا كان $v = \arcsin s$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

الحل

$$s = \sin v$$

$$s = \sin v \Rightarrow \frac{ds}{dv} = \cos v \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\text{عند } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{dv}{ds}$$

٩) إذا كان $s = \cos$ ، فأثبت أن: $s' = -2s + s^2 + s = 0$

الحل

$$s = \cos$$

$$-s' = \sin = -2s + s^2 + s$$

$$s' = 2s - s^2 - s = -s + s^2$$

$$s' = s^2 - s = s(s - 1)$$

$$s' = s(s - 1) = 0 \quad (s = 0 \text{ أو } s = 1)$$

$$s' = s(s - 1) = 0 \quad \text{وهو المطلوب}$$

١٠) إذا كان $v = 2n^2 + 3n$ ، $\frac{dv}{dn} = 4n$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند $n = 1$.

الحل

$$v = 2n^2 + 3n$$

$$\frac{dv}{dn} = 4n + 3 = 7 \quad \text{عند } n = 1$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dn} \times \frac{dn}{ds}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dv}} = \frac{1}{4n + 3}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{4n + 3} = \frac{1}{4(1) + 3} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{7}$$

$$\text{عند } n = 1$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1 - 12}{-11} = \frac{1}{7}$$

(١١) إذا كان $s + v = جا ص$ ، فأثبت أن:

$$(ص)'' = 2(ص) (ظنا ص - قناص)$$

الحل

$$ص + جا ص = جا ص$$

$$1 + ص' = ص' جا ص + جا ص'$$

$$ص' = ص' جا ص + جا ص' - 1$$

$$ص' (1 - جا ص) = جا ص'$$

$$ص' = \frac{جا ص'}{1 - جا ص}$$

$$(ص')' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) - جا ص' (-جا ص')}{(1 - جا ص)^2}$$

$$(ص')' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) + جا ص'^2}{(1 - جا ص)^2}$$

$$(ص')' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) + جا ص'^2}{(1 - جا ص)^2}$$

(١٢) إذا كان $s + v = جا ص$ ، فأثبت أن:

$$ص'' = \frac{2}{ص - 1}$$

الحل

$$ص + جا ص = جا ص$$

$$ص - ص = جا ص - جا ص$$

$$ص' = ص' جا ص + جا ص'$$

$$ص' (1 - جا ص) = جا ص'$$

$$ص' = \frac{جا ص'}{1 - جا ص}$$

$$ص'' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) - جا ص' (-جا ص')}{(1 - جا ص)^2}$$

$$ص'' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) + جا ص'^2}{(1 - جا ص)^2}$$

$$ص'' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) + جا ص'^2}{(1 - جا ص)^2}$$

$$ص'' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) + جا ص'^2}{(1 - جا ص)^2}$$

$$ص'' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) + جا ص'^2}{(1 - جا ص)^2}$$

$$ص'' = \frac{جا ص'' (1 - جا ص) + جا ص'^2}{(1 - جا ص)^2}$$

$$\frac{c'}{s-1} = \frac{(c''+c')(s-1)}{s-1}$$

وهو المطلوب $\frac{c'}{s-1} = c''+c'$