إجابات أسئلة الدرس

قواعد الاشتقاق 1

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $ق(س) = \sqrt{٣٠}$ ب) $ص = ٤ س^{١٠}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ د) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٤}$

الحل

أ) $قَ(س) = صفر$

ب) $صَ = ٤٠ س^{٩}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ (ثابت)

$صَ = صفر$.

د) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٤}$

$ق(س) = \frac{١}{١٦} س^{٤}$

$قَ(س) = \frac{١}{١٦} \times ٤ س^{٣}$

$= \frac{١}{٤} س^{٣}$.

٢) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = س^٢ + ٣س − ٤

ب) ص = $\frac{١}{٤}$ (س^٢+٨)

جـ) ص = $\frac{٤}{٣}$ π س^٣

د) ص = $\frac{١}{٤}$ س^٤ + $\frac{١}{٣}$ س^٣ − س

الحل

أ) ص = س^٢ + ٣س − ٤

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س + ٣ .

ب) ص = $\frac{١}{٤}$ س^٢ + ٢

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٢س + صفر = $\frac{١}{٢}$ س

جـ) ص = $\frac{٤}{٣}$ π س^٣

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٤}{\cancel{٣}}$ π × $\cancel{٣}$ س^٢ = ٤ π س^٢ .

د) ص = $\frac{١}{٤}$ س^٤ + $\frac{١}{٣}$ س^٣ − س .

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٤س^٣ + $\frac{١}{٣}$ × ٣س^٢ − ١

= س^٣ + س^٢ − ١

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} ، س = − ١

ب) ق(س) = س^{٢} + | ٣س − ٦ | ، س = ٣

جـ) ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س + ٥] − ٤س^{٢} ، س = ٢,٤

د) ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] − | س | ، س = − ١

الحل

أ) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤}

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ × ٤ س^{٣} = ٢ س^{٣}

قَ(−١) = ٢(−١)^{٣} = ٢ × −١ = −٢

ب) ق(س) = س^{٢} + | ٣س − ٦ | ، س = ٣

| ٣س − ٦ | = ٣س − ٦ عندما س = ٣

ق(س) = س^{٢} + ٣س − ٦

قَ(س) = ٢س + ٣

قَ(٣) = ٦ + ٣ = ٩ .

جـ) [$\frac{١}{٢}$ س + ٥] ل = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٢

[$\frac{١}{٢}$ س + ٥] = ٦ ، ٢ ≤ س < ٤ .

ق(س) = ٦ − ٤ س^{٢} .

قَ(س) = −٨ س .

قَ(٢,٤) = −٨ × ٢,٤ = −١٩,٢

د) [س + ٠,١] = −١ حول س = −١

ق(س) = ٣س − ١ + س

ق(س) = ٤ س − ١

قَ(س) = ٤

قَ(−١) = ٤ .

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(−٢) = ٤ ، هـَ(−٢) = −٣ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ ل(س) − ٢هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

الحل

أ) ق(س) = ٦ل(س) − ٢هـ(س)

قَ(س) = ٦ لَ(س) − ٢هـَ(س)

قَ(−٢) = ٦ لَ(−٢) − ٢هـَ(−٢)

= ٦×٤ − ٢×−٣

= ٢٤ + ٦ = ٣٠

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ لَ(س) + هـَ(س) + ٣س^{٢}.

قَ(−٢) = $\frac{١}{٢}$ لَ(−٢) + هـَ(−٢) + ٣(−٢)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ + −٣ + ١٢

= ٢ − ٣ + ١٢ = ١١

٥) إذا كان ق(س) = { أ س^2 + ب س ، س ≤ ١ ؛ ٤ − ب س^2 + أ س ، س > ١ }

وكانت قَ (١) موجودة ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتيْن أ ، ب.

الحل

قَ(١) موجودة ⟸ ق متصل عند س = ١

نهـا ق(س) (س ← ١$^+$) = نهـا ق(س) (س ← ١$^-$)

٤ − ب + أ = أ + ب

+ب − أ   +ب − أ

$\frac{٤}{٢}$ = $\frac{٢ب}{٢}$ ⟸ $\boxed{ب = ٢}$

قَ(١)$^+$ = قَ(١)$^-$

قَ(س) = { ٢أ س + ب ، س < ١ ؛ −٢ب س + أ ، س > ١ }

٢أ + ب = −٢ب + أ

٢أ + ٢ = −٤ + أ

−أ   −أ

أ + ٢ = −٤ ⟸ $\boxed{أ = −٦}$

---

٦) إذا كان ق(س) = { ل(س) ، س ≤ جـ ؛ لَ(جـ) (س − جـ) ، س > جـ }

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س = جـ ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.

فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد قَ(جـ) .

الحل

ق متصل عند س = ٢

قَ(س) = { لَ(س) ، س < جـ ؛ لَ(جـ) × ١ ، س > جـ }

قَ(جـ)$^+$ = لَ(جـ)

قَ(جـ)$^-$ = لَ(جـ)

∴ قَ(جـ) موجودة = لَ(جـ) .