إجابات تمارين ومسائل الدرس

التزايد والتناقص

١) حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = ٤س - س^٢$ ، $س \in ح$.

ب) $ق(س) = |س^٢ - ٩|$ ، $س \in [-٥ ، ٥]$

جـ) $ق(س) = جتا^٢ س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

د) $ق(س) = (١ - س)^٣$ ، $س \in ح$.

هـ) $ق(س) = (٢ - س)^٤$ ، $س \in ح$.

و) $ق(س) = \sqrt{٢٥ - س^٢}$ ، $س \in [-٥ ، ٥]$

ز) $ق(س) = \sqrt[٣]{(س - ٤)^٢}$ ، $س \in ح$.

ح) $ق(س) = جتا س - \frac{١}{٢} جتا ٢س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ط) $ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^٢ & ، س \leq ١ \\ \frac{٢}{س} & ، س > ١ \end{cases}$

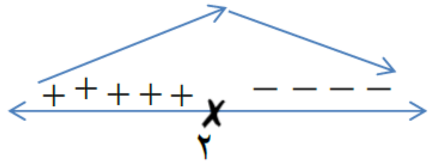
ي) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٤} - \text{س}^{\text{٣}} & \text{، س} < \text{١} \\ \dfrac{\text{٣}}{\text{س}} & \text{، س} \geq \text{١} \end{cases}$

الحل

أ) $\text{ه(س)} = \text{٤س} - \text{س}^{\text{٢}} \text{ ، س} \in \text{ح}$

$\text{ه}'\text{(س)} = \text{٤} - \text{٢س}$

$\text{ه}'\text{(س)} = \text{٠} \leftarrow \text{٤} - \text{٢س} = \text{٠} \leftarrow \text{س} = \text{٢}$



فترات التزايد $(-\infty\text{،}\ \text{٢}]$

فترات التناقص $[\text{٢}\text{،}\ \infty)$

ب) $\text{ه(س)} = |\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}| \text{ ، س} \in [-\text{٥}\text{،}\ \text{٥}]$

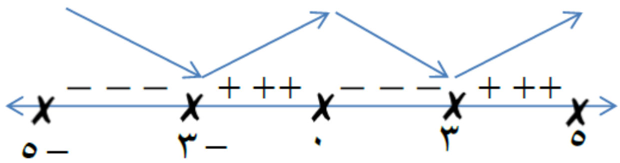
$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩} = \text{٠} \leftarrow \text{س} = \pm\text{٣}$

$\text{ه(س)} = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} - \text{٩} & \text{، } -\text{٥} \leq \text{س} < -\text{٣} \\ \text{٩} - \text{س}^{\text{٢}} & \text{، } -\text{٣} \leq \text{س} < \text{٣} \\ \text{س}^{\text{٢}} - \text{٩} & \text{، } \text{٣} < \text{س} \leq \text{٥} \end{cases}$

$\text{ه}'\text{(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & \text{، } -\text{٥} < \text{س} < -\text{٣} \\ -\text{٢س} & \text{، } -\text{٣} < \text{س} < \text{٣} \\ \text{٢س} & \text{، } \text{٣} < \text{س} < \text{٥} \end{cases}$

$\text{ه}'\text{(س)} = \text{٠} \leftarrow \text{س} = \text{٠}$

$\text{ه}'\text{(س)}$ غير موجودة عند $\text{س} = \pm\text{٣}$



فترات التزايد : $[-\text{٣}\text{،}\ \text{٠}] \cup [\text{٣}\text{،}\ \text{٥}]$

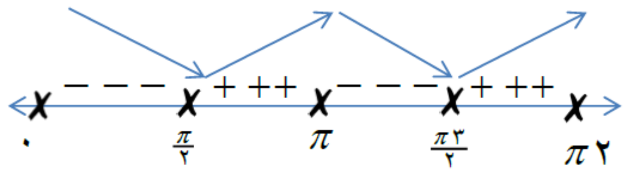
فترات التناقص : $[-\text{٥}\text{،}\ -\text{٣}] \cup [\text{٠}\text{،}\ \text{٣}]$

جـ) $\text{ه(س)} = \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س، س} \in [\text{٠}\text{،}\ \text{٢}\pi]$

$\text{ه}'\text{(س)} = -\text{٢جتاس جاس}$

$\text{ه}'\text{(س)} = \text{٠} \leftarrow -\text{٢جتاس جاس} = \text{٠}$

$\text{س} = \frac{\pi}{\text{٢}} \text{ ، } \pi \text{ ، } \frac{\text{٣}\pi}{\text{٢}}$ و غير موجودة عند $\text{س} = \text{٠} \text{ ، } \text{٢}\pi$



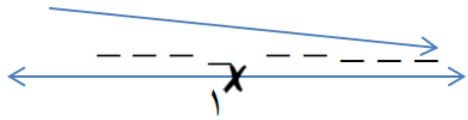
فترات التزايد : $[\frac{\pi}{٢}، \pi] \cup [\frac{٣\pi}{٢}، ٢\pi]$

فترات التناقص : $[٠، \frac{\pi}{٢}] \cup [\pi، \frac{٣\pi}{٢}]$

د) $ق(س) = (١ - س)^{٣}$ ، $س \in ح$

$\bar{ق}(س) = -٣(١ - س)^{٢}$

$\bar{ق}(س) = ٠ \leftarrow س = ١$

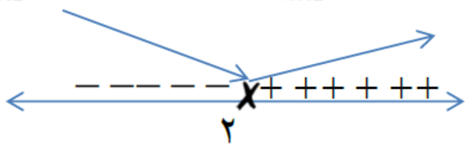


$ق(س)$ متزايد لكل $س \in ح$

هـ) $ق(س) = (٢ - س)^{٤}$ ، $س \in ح$

$\bar{ق}(س) = -٤(٢ - س)^{٣}$

$\bar{ق}(س) = ٠ \leftarrow س = ٢$

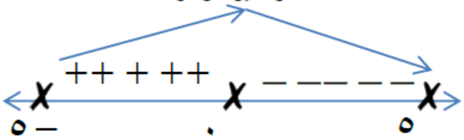


متزايد على الفترة $[٢، \infty)$ ، متناقص على الفترة $(-\infty، ٢]$

و) $ق(س) = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، $س \in [-٥، ٥]$

$\bar{ق}(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٢٥ - س^{٢}}}$

$\bar{ق}(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$ و غير موجودة عند $س = \pm ٥$

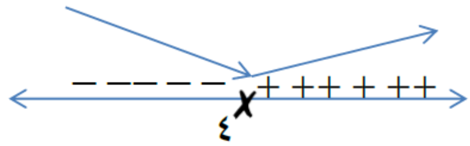


متزايد على الفترة $[-٥، ٠]$ متناقص على الفترة $[٠، ٥]$

ز) $ق(س) = (س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$ ، $س \in ح$

$\bar{ق}(س) = \frac{٢}{٣(س - ٤)^{\frac{١}{٣}}}$

$\bar{ق}(س) \neq ٠$ ولاكن $\bar{ق}(س)$ غير موجودة عند $س = ٤$



متزايد على الفترة $(-\infty، ٤]$ ، متناقص على الفترة $[٤، \infty)$

ح) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس} - \frac{١}{٢}\text{جتا٢س}، \text{س} \in [٠، ٢\pi]$

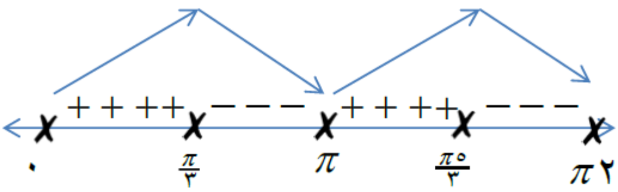
$$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس} + \text{جا٢س}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow -\text{جاس} + \text{جا٢س} = ٠$$

$$\text{٢جاس جتاس} - \text{جاس} = ٠ \leftarrow \text{جاس}(\text{٢جتاس} - ١) = ٠$$

$$\text{جاس} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠ ، \pi$$

$$\text{٢جتاس} - ١ = ٠ \leftarrow \text{جتاس} = \frac{١}{٢} \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٣}، \frac{٥\pi}{٣}$$



متزايد على الفترة $[٠، \frac{\pi}{٣}] \cup [\pi، \frac{٥\pi}{٣}]$

متناقص على الفترة $[\frac{\pi}{٣}، \pi] \cup [\frac{٥\pi}{٣}، ٢\pi]$

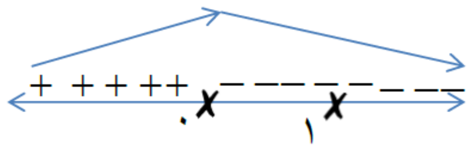
ط)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ - \text{س}^٢ & ، \text{س} \le ١ \\ \frac{٢}{\text{س}} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} -٢\text{س} & ، \text{س} < ١ \\ \frac{-٢}{\text{س}^٢} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠$$



متزايد على الفترة : $(-\infty، ٠]$

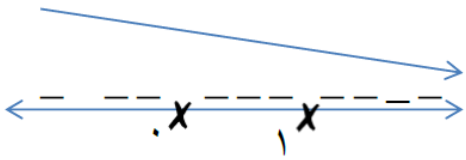
متناقص على الفترة : $[١، \infty)$

ي) $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٣} &، س \le ١ \\ \frac{٣}{س} &، س > ١ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -٣س^{٢} &، س < ١ \\ \frac{-٣}{س^{٢}} &، س > ١ \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

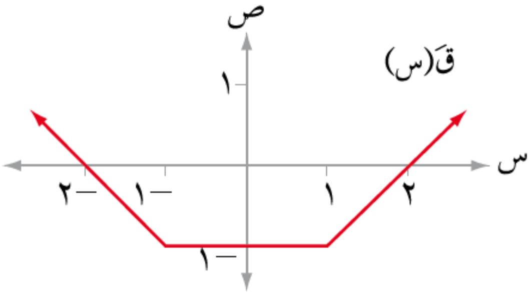
$ق'(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$



الأقتران متناقص لكل $س \in ع$

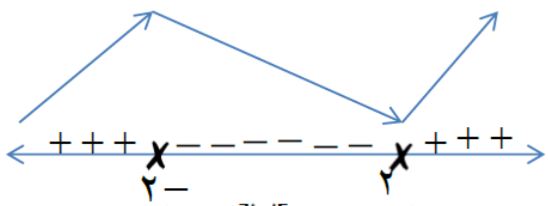
---

٢) يمثل الشكل (٣−١٢) منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.



الشكل (٣−١٢)

الحل



متزايد على الفترة: $(-\infty ، -٢] \cup [٢ ، \infty)$

متناقص على الفترة : $[-٢ ، ٢]$

٣) إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ(س) > ٠ ، لكلِّ س ∈ (أ ، ب)، وكان هـ (س) = ق(س) + س^٣، فأثبت أنَّ هـ (س) متزايد على الفترة [أ ، ب].

الحل

هَـ(س) = قَ(س) + ٣س^٢

ولا كن قَ(س) > ٠ على الفترة (أ ، ب)

و ٣س^٢ > ٠ على الفترة (أ ، ب)

فيكون ← هَـ(س) > ٠ على الفترة

∴ هـ(س) متزايد على الفترة [أ ، ب]