د . خالد جلال

☎ 079 - 9948198

طريق التفوق في الرياضيات للتوجيهي (العلمي)

2005

وحدة تطبيقات التفاضل

الوحدة الثانية

تطبيقات التفاضل

منهاجي

متعة التعليم الهادف

الدرس الاول

المعدلات المرتبطة بالزمن

Related Rates

مثال 1

عند سقوط قطرة ماء على مُسطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائرية مُتَّحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر إحدى الدوائر يزداد بمُعدَّل 3 cm/s، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

① مُعدَّل تغيُّر محيط الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 5 cm.

② مُعدَّل تغيُّر مساحة الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 9 cm.

أتحقَّق من فهمي

تنفخ ماجدة بالونًا على شكل كرة، فيزداد حجمه بمُعدَّل $80\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون نصف القُطْر 6 cm

مثال 2

تسير السيّارة *A* في اتجاه الغرب بسرعة 80 km/h، وتسير السيّارة *B* في اتجاه الشمال بسرعة 100 km/h، وهما تتَّجِهان نحو تقاطع مروري. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين عندما تكون السيّارة *A* والسيّارة *B* على بُعْد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

أتحقَّق من فهمي

تحرَّكت السيّارة *A* والسيّارة *B* في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتَّجهت السيّارة *A* نحو الشمال بسرعة 45 km/h، واتَّجهت السيّارة *B* نحو الشرق بسرعة 40 km/h. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

مثال 3 : من الحياة

رصدت كاميرا مُثبَّتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسيًّا إلى الأعلى، وَفق اقتران الموقع: $s(t) = 50t^2$، حيث s الموقع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة 2000 ft عن مِنَصَّة الإطلاق، فأجد مُعدَّل تغيُّر زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثوانٍ من انطلاقه.

أتحقّق من فهمي

حلّقت طائرة ورقية خيطها مُثبَّت بنقطة على سطح الأرض على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، ثم أخذت تتحرَّك أفقيًّا بسرعة 2 m/s. أجد مُعدَّل تغيُّر الزاوية بين الخيط وسطح الأرض عندما يكون طول الخيط 100 m.

مثال 4

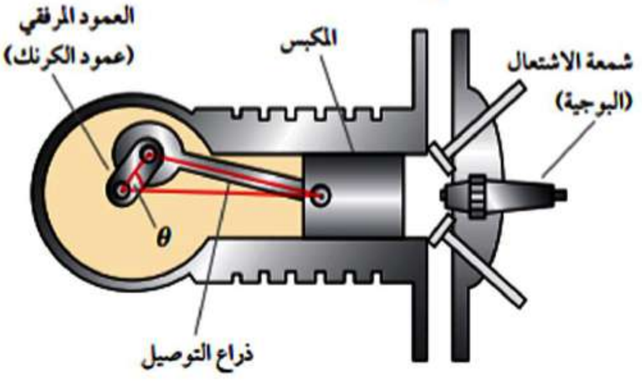
أُنشِئت منارة على جزيرة صغيرة، وتم تثبيتها في مستوى سطح البحر، وكانت تبعد مسافة 2 km عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل 3 دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة 4 km عن أقرب نقطة إلى المنارة.

أتحقّق من فهمي

أُنشِئت منارة على جزيرة صغيرة، وكانت تبعد مسافة 3 km عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل 4 دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة 1 km عن أقرب نقطة إلى المنارة.

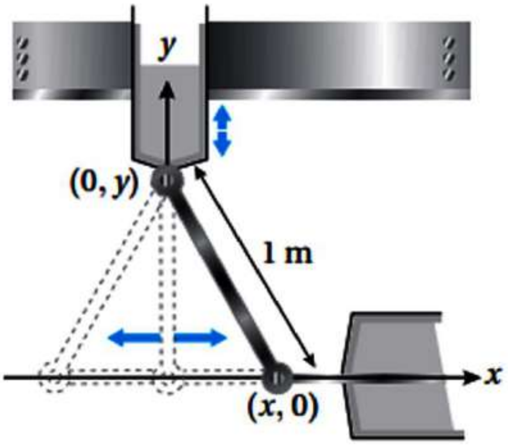
مثال 5

يُبيِّن الشكل الآتي مُحرِّك سيّارة يحتوي على ذراع توصيل طولها 7 in، وهي مُثبَّتة بعمود مرفقي طوله 3 in. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$؟



أتحقَّق من فهمي

هندسة ميكانيكية: يُبيِّن الشكل المجاور ذراعًا معدنيــةً مُتحرِّكــةً طولها 1 m، وإحداثيــات نهايتيها $(x, 0)$ و $(0, y)$. ويُمثِّــل الاقتــران $x(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{6}$ موقع طــرف الذراع علــى المحور x، حيث t الزمن بالثواني:



a) أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع.

b) أجـد سـرعة طـرف الـذراع الواقـع علـى المحـور y عندمـا يكـون الطـرف الآخـر عنـد النقطـة $(\frac{1}{4}, 0)$.

مثال 6

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم، ارتفاعه 5 m، ونصف قُطْر قاعدته 2 m، ورأسه إلى الأسفل.

تســرَّب الماء من الخزّان بمُعدَّل $\frac{1}{12} m^3/min$. ما مُعــدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 4 m؟

أتحقَّق من فهمي

خـزّان مـاء على شـكل مخـروط دائـري قائم رأسـه إلـى الأسـفل، وارتفاعـه 10 m، ونصف قُطـر قاعدتـه 5 m. صُـبَّ المـاء فـي الخـزّان بمُعـدَّل $\pi\ m^3/min$. مـا مُعـدَّل تغيُّـر ارتفاع المـاء فـي الخـزّان عندمـا يكـون ارتفاعه 8 m؟

أتدرَّب وأحُلّ المسائل

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمُعدَّل 2 cm/s، ويقل طول ضلع آخر له بمُعدَّل 3 cm/s بحيث يحافظ المستطيل على شكله، وفي لحظة مُعيَّنة بلغ طول الضلع الأوَّل 20 cm، وطول الضلع الثاني 50 cm:

① ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟

② ما مُعدَّل تغيُّر محيط المستطيل في تلك اللحظة؟

③ ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطْر المستطيل في تلك اللحظة؟

④ أيُّ الكمِّيات في المسألة مُتزايِدة؟ أيُّها مُتناقِصة؟ أُبرِّر إجابتي.

مُكعَّب طول ضلعه 10 cm. بدأ المُكعَّب يتمدَّد، فزاد طول ضلعه بمُعدَّل 6 cm/s، وظلَّ مُحافِظًا على شكله:

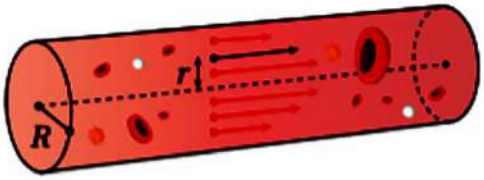
5 **أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب بعد 4s من بَدْء تمدُّده.**

6 **أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة سطح المُكعَّب بعد 6s من بَدْء تمدُّده.**

وقود: خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15 m، وقُطْر قاعدته 2 m. مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل 500 L/min:

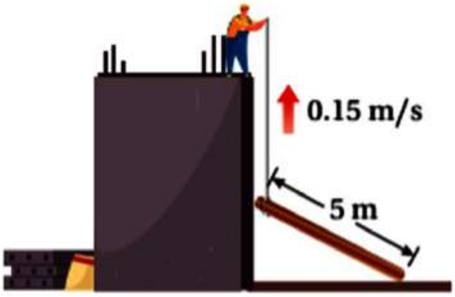
7 **أجد مُعدَّل ارتفاع الوقود في الخزّان عند أي لحظة.**

8 **أجد مُعدَّل تغيُّر المساحة الجانبية للوقود لحظة امتلاء الخزّان، علمًا بأنَّه كان فارغًا قبل ذلك.**



9 **طب: تُمثِّل المعادلة: $V = \frac{3125}{6}(R^2 - r^2)$ سرعة الدم في أحد الأوعية الدموية بالملّيمتر لكل ثانية، حيث R طول نصف قُطْر الوعاء بالملّيمتر، وذلك على بُعْد r ملّيمترًا من محور هذا الوعاء. إذا كان الوعاء ينقبض بمُعدَّل 0.0002 mm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر سرعة الدم في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قُطْره 0.075 mm، علمًا بأنَّ r ثابت، ومقداره 0.0005 mm**

10 **علوم: يُمثِّل الاقتران $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسيوس) التي يشعر بها شخص على بُعْد x مترًا من النار. إذا كان الشخص يبتعد عن النار بمُعدَّل 2 m/s، فأجد سرعة تغيُّر درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بُعْد 5 m من النار.**



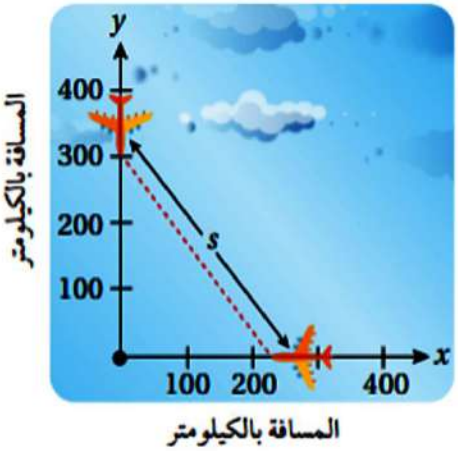
11 **بناء: يسحب عامل بناء لوحًا خشبيًّا طوله 5 m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعدُ، وذلك باستعمال حبل رُبِط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور. إذا افترضْتُ أنَّ الطرف الآخر من لوح الخشب يتبع مسارًا عموديًّا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب الحبل بمُعدَّل 0.15 m/s، بحيث يظلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًا للجدار. فما سرعة انزلاق طرف اللوح على الأرض عندما يكون على بُعْد 3 m من جدار المبنى؟**

آلات: يسقط الرمل من حزام ناقل بمُعدَّل $10\ m^3/min$ على قِمَّة كَوْمة مخروطية الشكل. إذا كان ارتفاع الكَوْمة يساوي دائمًا ثلاثة أثمان طول قُطْر قاعدتها، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

⑫ سرعة تغير ارتفاع الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها 4 m.

⑬ سرعة تغيُّر طول نصف قُطْر قاعدة الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها 4 m.

طيران: رصد مُراقِب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تُحلِّقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور. كانت إحدى الطائرتين تبعد مسافة 225 km عن النقطة، وتسير بسرعة 450 km/h، في حين كانت الطائرة الأُخرى تبعد مسافة 300 km عن النقطة، وتسير بسرعة 600 km/h :

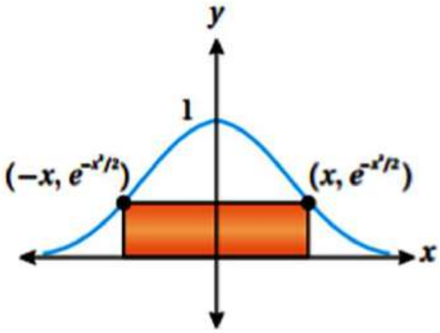


⑭ أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

⑮ هل يجب على مُراقِب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتِّخاذ مسار مختلف؟ أُبرِّر إجابتي.

⑯ **درّاجات نارية:** تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$. إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى 15 km/h، وسرعة الدرّاجة الثانية 20 km/h، فأجد سرعة ابتعاد كلٍّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

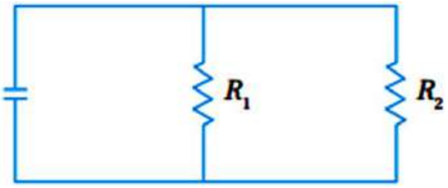
يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل منحنى الاقتران $f(x) = e^{-x^2/2}$، إذا كانت x تتغير مع الزمن ليتغير معها موضع المستطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



⑰ أجد مساحة المستطيل بدلالة x.

⑱ أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x = 4$، و $\frac{dx}{dt} = 4\ cm/min$.

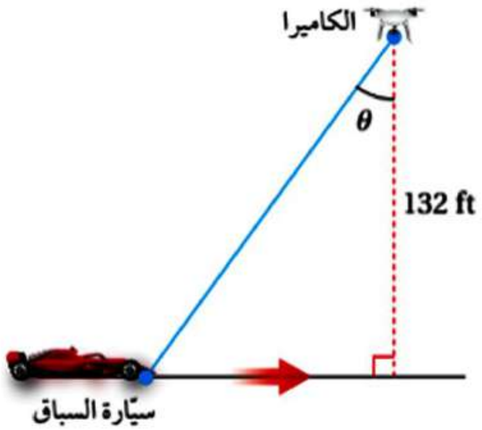
19 **كهرباء:** تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي، كما في الشكل المجاور، بالعلاقة الآتية: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$



إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمُعدَّل 0.3 Ω/s و 0.2 Ω/s على الترتيب، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $R_1 = 80\ \Omega$، و $R_2 = 100\ \Omega$.

20 **قوارب:** يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع 1 m عن مُقدِّمة القارب. إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة 1 m/s، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8 m في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ؟

سباقات سيّارات: ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132 ft، وترصد سيّارة تتحرَّك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها 264 ft/s كما في الشكل المجاور:

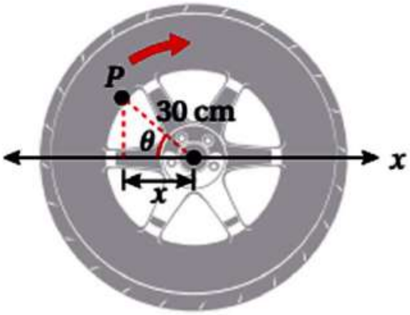


21 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ عندما تكون السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

22 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيّارة أسفل الكاميرا.

23 **فيزياء:** يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$. وعند مروره بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$، فإنَّ الإحداثي x لموقعه يزداد بمُعدَّل $\sqrt{10}$ cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الجُسَيْم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

24 **ضوء:** مصباح مُثبَّت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة 12 m. إذا سار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّه على الجدار عندما يكون على بُعْد 4 m من الجدار.



سـيّارات: عجلة سـيّارة طول نصف قُطْرها 30 cm، وهي تدور بمُعدَّل 10 دورات في الثانية. رُسِمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:

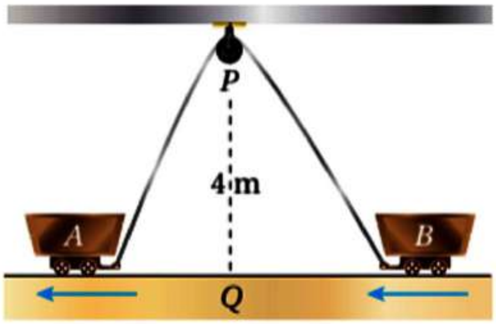
㉕ أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.

㉖ أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = 45°$.

㉗ **مدينـة ألعاب:** عجلة دوّارة في مدينة الألعاب، طول نصف قُطْرها 10 m، وهي تدور بمُعدَّل دورة واحدة كل دقيقتين. أجد سرعة تغيُّر ارتفاع راكب فيها عندما يكون على ارتفاع 16 m فوق سطح الأرض.

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة

مهارات التفكير العليا

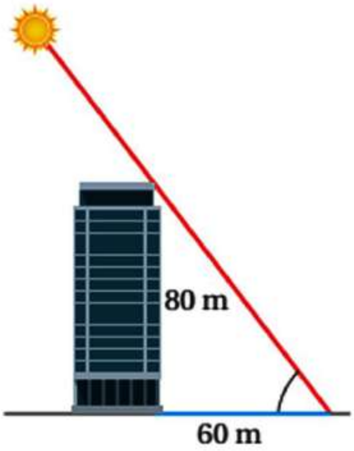


㉘ **تبرير:** رُبِطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m، وهو يمرُّ بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m، وكانت العربة A تتحرَّك بعيدًا عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعْد 3 m من النقطة Q، مُبرِّرًا إجابتي.

㉙ **تبرير:** يركض عَدّاء في مضمار دائري، طول نصف قُطْره 100 m، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف عَدّاء آخر على بُعْد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين العَدّاءين عندما تكون المسافة بينهما 200 m.

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة

30 **تحدٍّ:** سطعت الشـــمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m، فـــكان طول ظلِّ المبنى فـــي هذه اللحظة 60 m كما في الشـــكل المجاور. أجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّ المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min، مُقرِّبًـــا إجابتي إلى أقرب جزء من عشـــرة، علمًا بأنَّ الشمس في هذا اليوم ستمرُّ فوق المبنى تمامًا.



إرشاد: تُكمِل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.

الدرس الثاني

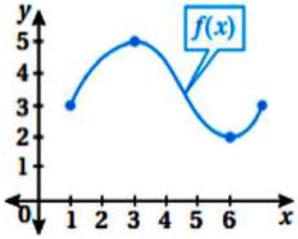
القيم القصوى و التقعر

Extreme Values and Concavity

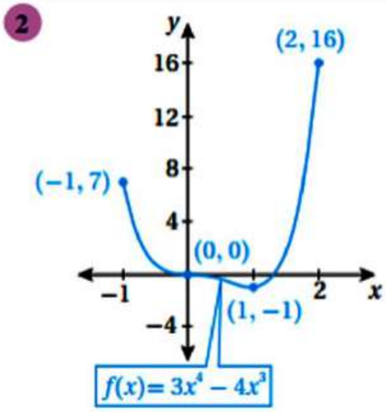
مثال 1

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كلٍّ ممّا يأتي:

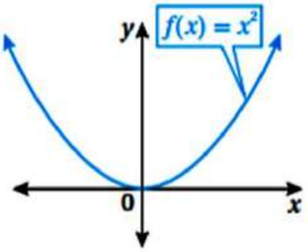
1



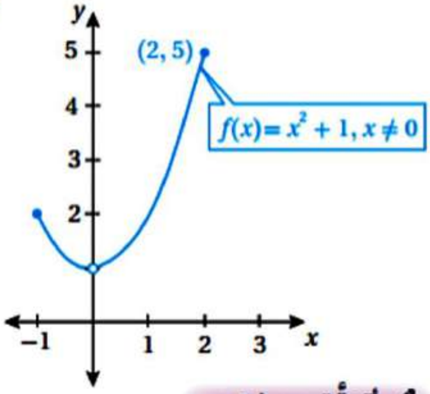
2



3



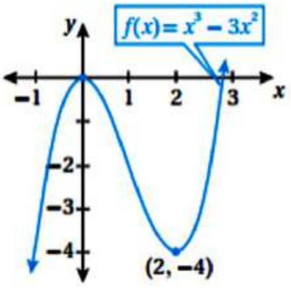
4



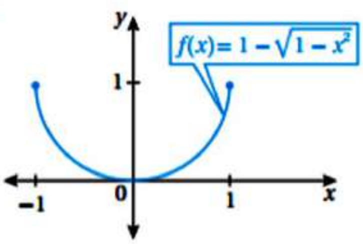
أتحقَّق من فهمي

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كلٍّ ممّا يأتي:

a)



b)



مثال 2

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغــرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

① $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, [-2, 2]$

② $f(x) = x^{2/3}, [-1, 2]$

③ $f(x) = 2 \sin x - \cos 2x, [0, 2\pi]$

أتحقَّق من فهمي

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغــرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, [-3, 5]$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, [-8, 8]$

c) $f(x) = \sin^2 x + \cos x, [0, 2\pi]$

مثال 3

أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x^2 - 3)\, e^x$.

أتحقَّق من فهمي

أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x - 1)e^x$

مثال 4

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

أتحقَّق من فهمي

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{x - 3}$

مثال 5

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = e^{-x^2/2}$

② $f(x) = x + \frac{1}{x}$

أتحقَّق من فهمي

أجـد فتـرات التقعُّـر للأعلـى وللأسـفل ونقـاط الانعطـاف (إنْ وُجِـدت) لمنحنـى كل اقتران ممّـا يأتي:

a) $f(x) = (x - 2)^3\,(x - 1)$

b) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

مثال 6

إذا كان: $f(x) = (x^2 - 4)^2$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = xe^x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران $s(t) = 3t^2 - 2t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

① ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

② ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t + 3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

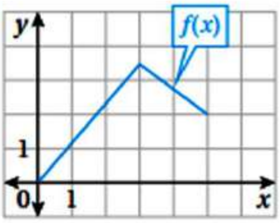
a) ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

b) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

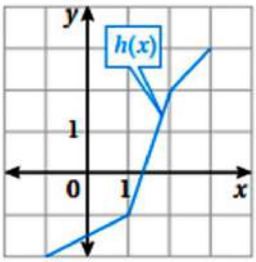
أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

①



②

③



أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

④ $f(x) = 1 + 6x - 3x^2, [0, 4]$

⑤ $f(x) = (x+3)^{2/3} - 5, [-3, 3]$

⑥ $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, [-2, 2]$

⑦ $f(x) = \sqrt[3]{x}, [8, 64]$

⑧ $f(x) = 2\cos x + \sin 2x, [0, \frac{\pi}{2}]$

⑨ $f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}, [0, 3]$

⑩ $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, [\frac{1}{2}, 4]$

⑪ $f(x) = \sec x, [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

⑫ $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]$

أجـــد فترات التزايد وفترات التناقـــص لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أجد القِيَم القصوى المحليـــة والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

⑬ $f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

⑭ $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$

⑮ $f(x) = x^2 \ln x$

⑯ $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

⑰ $f(x) = x^{2/3}(x-3)$

⑱ $f(x) = \sin^2 x + \sin x, [0, 2\pi]$

⑲ $f(x) = x + \sin x , [0, 2\pi]$

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

⑳ $f(x) = x^3 - 12x + 1$

㉑ $f(x) = \sqrt{\sin x}, [0, \pi]$

㉒ $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

㉓ $f(x) = \ln(x^2 + 5)$

㉔ $f(x) = \sqrt{x}(x + 3)$

㉕ $f(x) = xe^x$

أجد القِيَم القصوى المحلية لكل اقتران ممّا يأتي، مُستعمِلًا اختبار المشتقة الثانية (إنْ أمكن):

㉖ $f(x) = 6x - x^2$

㉗ $f(x) = \cos x - x, [0, 4\pi]$

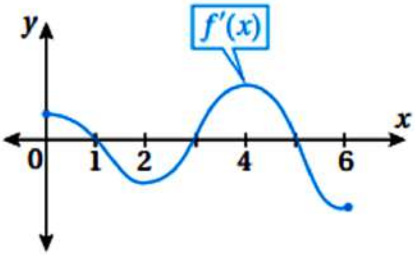
㉘ $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

㉙ $f(x) = x \ln x$

㉚ $f(x) = \frac{x}{2^x}$

㉛ $f(x) = x^{2/3} - 3$

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:



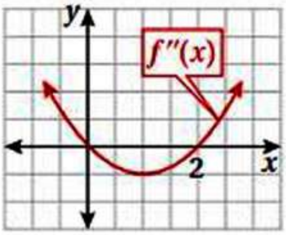
㉜ قِيَـــم x التي يكـــون عندها للاقتران f قِيَم قصـــوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

㉝ فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

㉞ إذا كان للاقتـــران: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ قيمـــة عظمى محلية عندمـــا $x = -3$، وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(1, -14)$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، b، وc.

㉟ إذا كان للاقتران: $f(x) = \sqrt{x + 1} + \frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x = 3$، فأجد قيمة الثابت b.

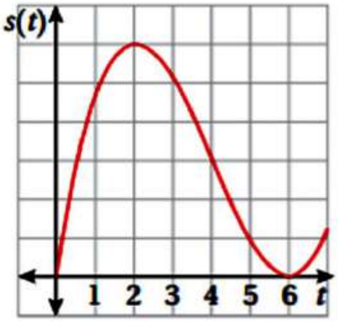
أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:



36 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

37 الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

38 **ضغط دم:** يُمثِّل الاقتران: $B(x) = 305x^2 - 1830x^3, 0 \le x \le 0.16$ ضغط الدم المَقيس بوحدة mmgh، والناتج من تناول جرعة دواء مقدارها x cm^3. أجد الحدَّ الأقصى لضغط الدم الناتج من هذا الدواء، مُحدِّدًا جرعة الدواء التي يحدث عندها.



يُمثِّل الاقتران $s(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

39 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

40 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

41 إذا كان تسارع الجسم صفرًا عندما $t = 4$، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

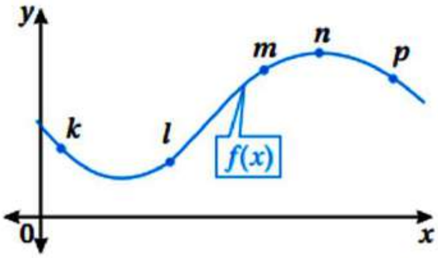
42 **مُكبِّرات صوت:** يُمثِّل الاقتران: $f(x) = \frac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150$ الربح الأسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه، حيث x عدد مُكبِّرات الصوت المَبيعة. أجد عدد مُكبِّرات الصوت الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t, t \ge 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

43 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

44 ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

مهارات التفكير العليا

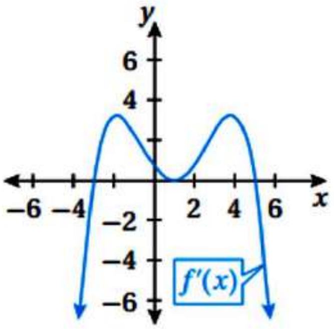


تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط: $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تُحقِّق كُلًّا من الشروط الآتية، مُبرِّرًا إجابتي:

(45) أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة.

(46) أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة.

(47) أنْ تكون إشارة $f'(x)$ سالبة، وإشارة $f''(x)$ موجبة.



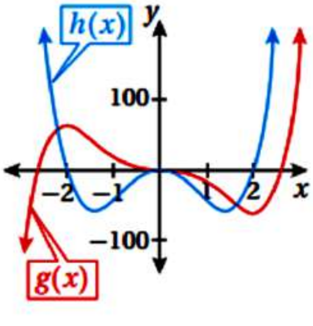
تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

(48) قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

(49) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

(50) فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

(51) الإحداثي x لنقاط الانعطاف.



(52) **تحدٍّ:** أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ و $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يُمثِّل مشتقة للآخر، مُبرِّرًا إجابتي.

(53) **تحدٍّ:** إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأجد القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران: $f(x) = x^a (1-x)^b$ في الفترة $[0, 1]$.

الدرس الثالث

تطبيقات القيم القصوى

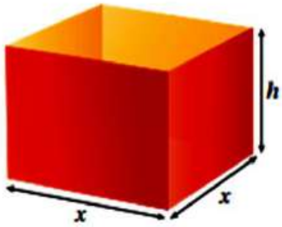
Optimization Problems

مثال 1

صندوق على شكل متوازي مستطيلات، صُنِع من قطعة كرتون رقيقة، مربعة الشكل، طولها 8 dm، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها، وطَيِّ الجوانب إلى الأعلى. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية 1080 cm^2 كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

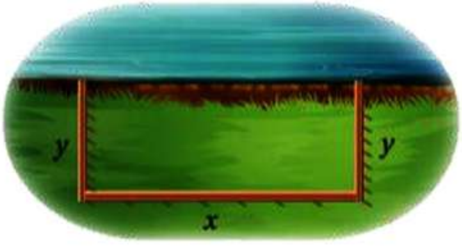


مثال 2

عمودان طول أحدهما 8 m، وطول الآخر 4 m، والمسافة بينهما 9 m، وهما مُثبَّتان بسلكين يصلان قِمَّة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور. أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المُستعمَل أقل ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ 245000 m^2 لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.



أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

مثال 3 : من الحياة

تدرَّب إسراء وأميرة يوميًّا استعدادًا لسباق العَدْوِ (الماراثون). في أحد الأيام، انطلقت إسرا من منزلها الذي يقع على بُعْد 20 km شمال منزل أميرة الساعة 9:00 am، واتَّجهت جنوبيًا بسرعة 8 km/h. وفي الوقت نفسه، انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة 6 km/h. في أيِّ ساعة تكون إسراء وأميرة أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما، علمًا بأنَّ كُلًّا منهما ركضت مدَّة 2.5 h؟

أتحقَّق من فهمي

انطلق قطار من إحدى المحطّات الساعة 10:00 am، وتحرَّك في اتجاه الجنوب بسرعة 60 km/h، حيث المحطَّة التالية. وفي الوقت نفسه، انطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة 45 km/h، ثم وصل إلى المحطة نفسها الساعة 11:00 am. في أيِّ ساعة يكون القطاران أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما؟

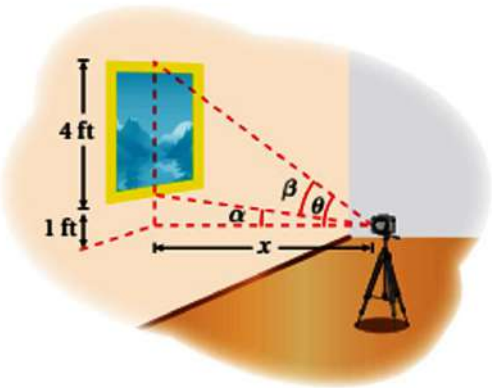
مثال 4 : من الحياة

لاحظت إدارة أحد المسارح أنَّ مُتوسِّط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة JD 26 ، وأنَّ عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصًا مُقابِل كل دينار يُخصَم من سعر التذكرة. إذا كان مُتوسِّط ما يُنفِقه كل شخص JD 4 على الخدمات داخل المسرح، فما سعر بيع التذكرة الذي يُحقِّق للمسرح أعلى إيراد؟

أتحقَّق من فهمي

يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهريًّا بسعر JD 350 للشاشة الواحدة. وقد أشار مسح للسوق أَعَدَّهُ خبير التسويق في المتجر إلى أنَّ عدد الشاشات المَبيعة شهريًّا يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره JD 10 من سعر الشاشة الواحدة. أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يُحقِّق للمتجر أعلى إيراد مُمكِن.

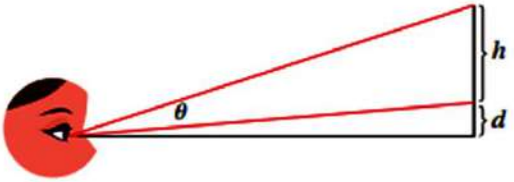
مثال 5 : من الحياة



يريد مُصوِّر التقاط صورة للوحة ارتفاعها 4 ft، وهي مُعلَّقة في معرض فني. إذا كانت عدسة الكاميرا تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار 1 ft كما يظهر في الشكل المجاور، فأجد بُعْد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها (β) أكبر ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

نظرت سارة إلى لوحة مُعلَّقة على حائط في منزلها، ارتفاعها h مترًا، وارتفاع حافتها السفلية d مترًا فوق عينها كما في الشكل المجاور. كم مترًا يجب أنْ تبتعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يُمكِن؟



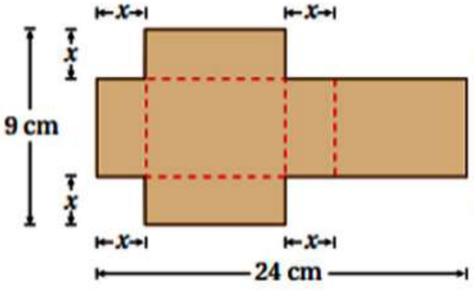
مثال 6

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x) = 4 - x^2$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة (0, 2).

أتحقَّق من فهمي

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{8x}$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة (4, 2).

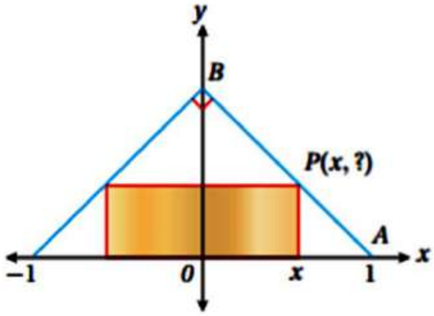
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل



قطعة كرتون طولها 24 cm، وعرضها 9 cm، أُزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طَيُّها، وتكوين صندوق له غطاء منها:

1. أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يُمثِّل حجم الصندوق.
2. أحدِّد مجال الاقتران V.
3. أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

4 أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $4x^2 + y^2 = 4$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(0, 1)$.



يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل مثلث قائم الزاوية.

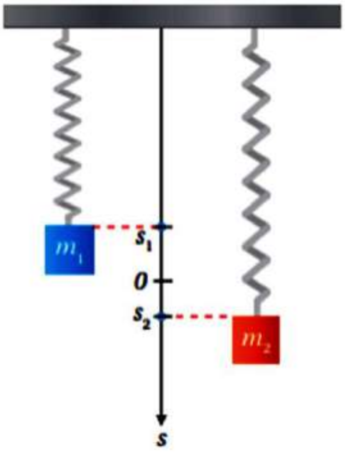
وهو متطابق الضلعين، وطول قاعدته 2 وحدة طول:

5 أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x.

6 أكتب مساحة المستطيل بدلالة x.

7 أجد أكبر مساحة مُمكِنة للمستطيل.

8 أجد أبعاد المستطيل.



يُبيِّن الشكل المجاور كتلتين مُعلَّقتين جنبًا إلى جنب في زنبركين. ويُمثِّل الاقتران $s_1 = 2 \sin t$ والاقتران $s_2 = \sin 2t$ موقعي الكتلتين على الترتيب، حيث s_1 و s_2 الموقعان بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

9 أجد قيمة (قِيَم) t التي تكون عندها الكتلتان في الموقع نفسه، حيث: $t > 0$.

10 أجد قيمة (قِيَم) t التي تكون عندها المسافة الرأسية بين الكتلتين أكبر ما يُمكِن، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$.

يُمثِّل الاقتران $p = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حدَّدته إحدى الشركات، حيث x عدد البدلات المَبيعة. ويُمثِّل الاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

11 أجد اقتران الإيراد.

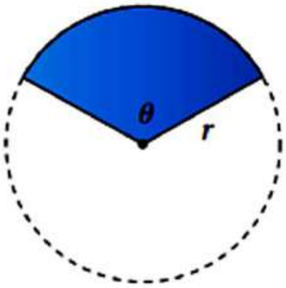
12 أجد اقتران الربح.

13 أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

14 أجد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أعلى ربح مُمكِن.

15 تُنتِج مزرعة للتفّاح 30 صندوقًا من الشجرة الواحدة تقريبًا عند زراعة 20 شجرة في كل فَدّان من الأرض. ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فَدّان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فَدّان لتحقيق أكبر إنتاج مُمكِن؟

لدى مُزارِع P مترًا طوليًّا من سياج، يرغب في استعماله كاملًا لتسييج حقل رَعْي على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قُطْرها r مترًا كما في الشكل المجاور:

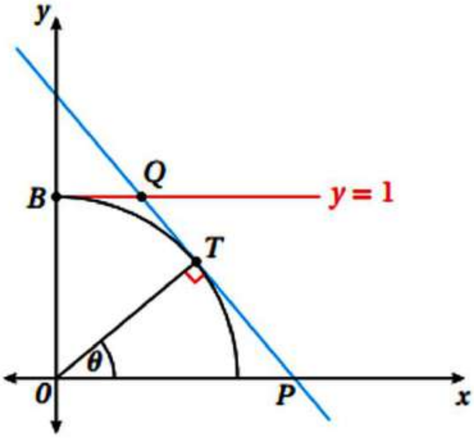


⑯ أُثبِت أنَّ طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو: $P = r(\theta + 2)$.

⑰ أُثبِت أنَّ مساحة القطاع هي: $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

⑱ أجد نصف قُطْر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يُمكِن.

تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$، عند الزاوية θ من المحور x الموجب، حيث: $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور:



⑲ أُثبِت أنَّ معادلة المستقيم PT هي:

$$x \cos\theta + y \sin\theta = 1$$

⑳ أُثبِت أنَّ مساحة شبه المُنحرِف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي:

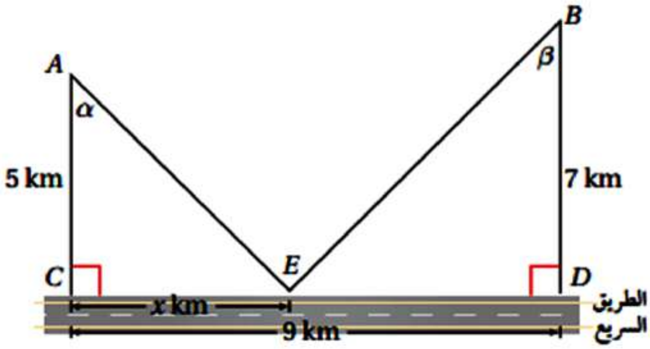
$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

㉑ أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المُنحرِف أقل ما يُمكِن.

㉒ يُبيِّن الشكل المجاور نافذة مُكوَّنة من جزأين؛ أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قُطْرها x m، والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه x m وارتفاعه y m.

صُنِع الجزء العلوي من زجاج مُلوَّن يسمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع، وصُنِع الجزء السفلي من زجاج شفّاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع. أجد قيمة كلٍّ من x و y التي تجعل كمية الضوء المارِّ خلال النافذة أكبر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ 10 m من المعدن الرقيق استُعمِل في تشكيل إطار النافذة كاملًا، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين.

يُمارِس يوسف هواية ركوب الدرّاجات. وفي أحد الأيام، انطلق على درّاجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B، مارًّا بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:

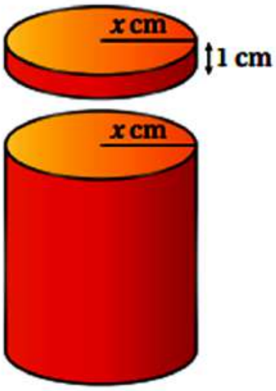


23 إذا كان الاقتران L يُمثِّل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة، فأكتب L بدلالة x.

24 أُثبِت أنّه إذا كان: $\frac{dL}{dx} = 0$، فإنَّ: $\sin \alpha = \sin \beta$.

25 أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يُمكِن.

علبة بسكويت أسطوانية الشكل، لها غطاء مُحكَم يتداخل مع العلبة بمقدار 1 cm كما في الشكل المجاور. إذا كان نصف قُطْر العلبة والغطاء x cm، وصُنِعت العلبة والغطاء من صفيحة رقيقة مُلائِمة للأغذية، مساحتها $80\pi\ \text{cm}^2$ من دون أيِّ هدر في المواد في أثناء عملية التصنيع:



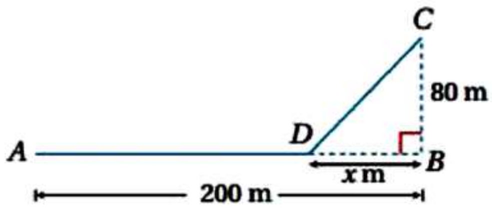
26 أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكِن.

27 أجد أكبر حجم مُمكِن للعلبة.

28 أجد النسبة المئوية للجزء الذي استُعمِل من الصفيحة لصنع الغطاء عندما كان الحجم أكبر ما يُمكِن.

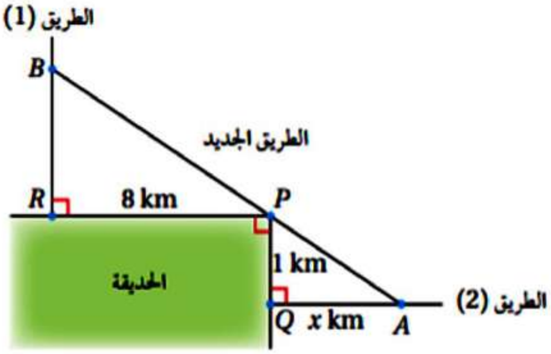
يمتدُّ مسار للركض شرقًا من النقطة A إلى النقطة B مسافة 200 m، وتقع النقطة C على بُعْد 80 m شمال النقطة B.

انطلق راكب على درّاجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة 10 m/s، حيث تقع النقطة D على بُعْدx مترًا غرب النقطة B، ثم سار في طريق مستقيم وَعِر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة 6 m/s:



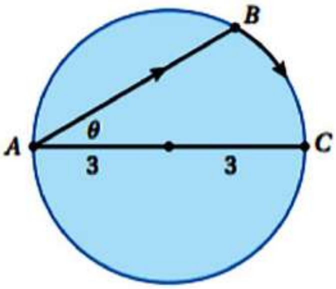
29 أجد اقترانًا بدلالة x يُمثِّل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدرّاجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C.

30 بافتراض أنَّ x قيمة مُتغيِّرة، أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يُمكِن.



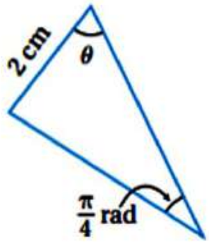
31 يُبيِّن الشــكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويُمكِن الوصول إلى هذين المدخلين مــن طريقين عمودييــن على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشــاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمرُّ بالنقطة P التي تُمثِّل زاوية الحديقــة، فاختارت النقطــة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر مــا يُمكِن، علمًا بأنَّ النقطة A تقع على بُعْد x km من النقطة Q. أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن.

مهارات التفكير العليا



32 تبريــر: يقف رجل عند النقطة A على شــاطئ بحيــرة دائرية نصف قُطْرها 3 km، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تمامًا للنقطة A، على الجانب الآخر من البحيــرة، في أقصر وقت مُمكِن كما في الشــكل المجاور. يُمكِن للرجل أنْ يَجدِف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بســرعة 3 km/h، ثم يركض حول حافة البحيرة بســرعة 6 km/h. أُحــدِّد موقــع النقطة B ليصل الرجل مــن النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت مُمكِن؟ أُبرِّر إجابتي.

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا، قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4}$ rad، ومُقابِلها ضلع طوله 2 cm:



33 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث A تعطى بالاقتران: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$.

34 أجد مجال الاقتران في السؤال السابق.

35 أُثبِت أنَّ أكبر مساحة مُمكِنة للمثلث هي: $(1 + \sqrt{2})$ cm^2.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 مثلث قائم الزاوية، ساقاه x وy، ووتره z. إذا كان: $\frac{dz}{dt} = 1$، وكان: $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$، فإنّ $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 4$، و$y = 3$ هي:

a) $\frac{1}{3}$ b) 1   c) 2   d) 5

2 القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران $f(x) = 4x - x^2 + 6$ في الفترة $[0, 4]$ هي:

a) 6   b) 2   c) 10   d) 12

3 الإحداثي x لنقطة انعطاف الاقتران $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x + 7$ هو:

a) 0   b) 1   c) 3   d) -1

4 قيمة x التي تكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هي:

a) 3   b) $-\frac{7}{3}$ c) $-\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

5 إذا كانت الفترة $[1, 25]$ هي مجال الاقتران المتصل f، الذي مداه $[3, 30]$، وكان: $f'(x) < 0$ لجميع قيم x بين 1 و25، فإنّ $f(25)$ تساوي:

a) 1   b) 3   c) 25   d) 30

6 القيمة العظمى (بالوحدات المربعة) لمساحة مثلث قائم الزاوية، طول وتره 10 وحدات، هي:

a) 24   b) 25   c) 48   d) 50

7 إذا زاد حجم مُكعَّب بمُعدَّل $24\ \text{cm}^3/\text{min}$، وزادت مساحة سطحه بمُعدَّل $12\ \text{cm}^2/\text{min}$، فإنَّ طول ضلعه في تلك اللحظة هو:

a) 2 cm   b) $2\sqrt{2}$ cm

c) 4 cm   d) 8 cm

8 عدد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = (x-2)^5 (x+3)^4$ هو:

a) 1   b) 2   c) 3   d) 5

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

9 $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-5, 1]$

10 $f(x) = \frac{x}{x+3}$,$[-1, 6]$

11 $f(x) = xe^{x/2}$, $[-3, 1]$

12 $f(x) = 3\cos x$, $[0, 2\pi]$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أجد القِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران:

13 $f(x) = x^5 + x^3$

14 $f(x) = x^4 e^{-x}$

15 $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$

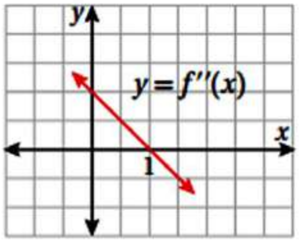
أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

16 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

17 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

18 $f(x) = (3 - x^2)^2$

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:



19 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

20 الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

يُمثِّل الاقتران $p(x) = 5.00 - 0.002x$ سعر مُنتَج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع من المُنتَج. ويُمثِّل الاقتران $C(x) = 3.00 + 1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة من المُنتَج:

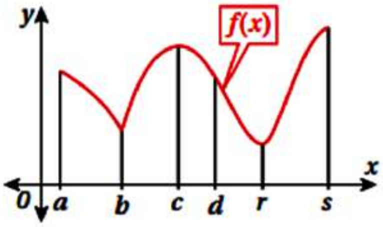
21 أجد اقتران الإيراد.

22 أجد اقتران الربح.

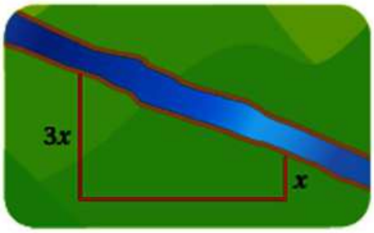
23 أجد عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

24 أجد سعر المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

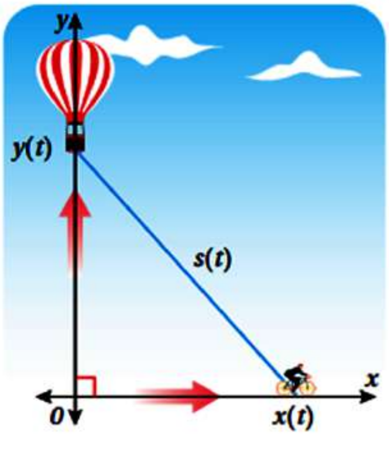
25 يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. أيُّ النقاط الواقعة على المنحنى تُمثِّل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية؟ أيُّها تُمثِّل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مُطلَقة؟



26 لدى مُزارِع 400 m من السياج، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه مُنحرِف، ويوجد على حافة النهر كما في الشكل التالي. إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الآخر، فأجد أكبر مساحة يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بهذا السياج، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



27 يرتفع بالون رأسيًّا فوق مستوى طريق مستقيم بمُعدَّل 1 ft/s. وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 65 ft فوق سطح الأرض، مَرَّت أسفله درّاجة تتحرَّك بسرعة 17 ft/s كما في الشكل التالي. أجد سرعة تغيُّر المسافة بين البالون والدرّاجة بعد 3 ثوانٍ من هذه اللحظة.



اجابات كتاب الطالب

وحدة تطبيقات التفاضل

اعداد

المركز الوطني لتطوير المناهج

National Center for Curriculum Development

منهاجي

متعة التعليم الهادف

الدرس الأول: المعدلات المرتبطة

مسألة اليوم تُستعمَل المعادلة: $S=\frac{\sqrt{hm}}{19}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان، حيث h طوله بالسنتيمتر، و m كتلته بالكيلوغرام.

يتّبع خالد حِمية غذائية تجعله يخسر من كتلته 2 kg شهريًا.

ما مُعدَّل النقصان في مساحة سطح جسمه عندما تصبح كتلته 70 kg، علمًا بأنَّ طوله 170 cm؟

مسألة اليوم صفحة 76

$$S=\frac{\sqrt{hw}}{60}=\frac{\sqrt{170w}}{60}=\frac{\sqrt{170}}{60}\sqrt{w}$$

معدل التغير المعطى: $\frac{dw}{dt}=-2\ \text{kg/month}$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{w=70}$

العلاقة بين الكتلة ومساحة سطح الجسم: $S=\frac{\sqrt{170w}}{60}$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{120\sqrt{w}}\frac{dw}{dt}$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{w=70}=\frac{\sqrt{170}}{120\sqrt{70}}\times-2$$

$$=-0.03\ \text{cm}^2/\text{month}$$

أتحقق من فهمي صفحة 78

ليكن حجم الكرة V وطول نصف قطرها r

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt}=80\ \text{cm}^3/\text{s}$

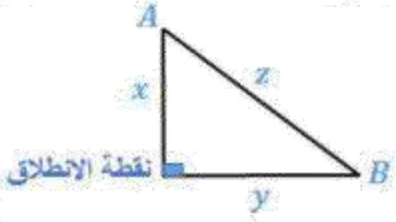
معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}$

حجم البالون الكروي: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}\rightarrow\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=6}=4\pi(6)^2\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}\rightarrow\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}=\frac{80}{144\pi}$$

أتحقق من فهمي صفحة 80

ليكن بعد A عن نقطة الانطلاق يساوي x ، و بعد B عن نقطة الانطلاق يساوي y ، والبعد بين A ، و B يساوي z



معدلات التغير المعطاة:

$$\frac{dx}{dt} = 45\text{km/h}, \quad \frac{dy}{dt} = 40 \text{ km/h}$$

معدل التغير المطلوب:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}$$

بعد ساعتين من الحركة يكون:

$$x = 45 \times 2 = 90 \text{ km} \ , y = 40 \times 2 = 80 \text{ km}$$

من نظرية فيثاغورس:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{90 \times 45 + 80 \times 40}{\sqrt{8100 + 6400}}$$

$$= \frac{7250}{10\sqrt{145}} = \frac{725}{\sqrt{145}} \approx 60.21 \text{ km/h}$$

الحل بطريقة ثانية:

بعد t ساعة من الحركة يكون:

$$x = 45t \text{ km} \ , y = 40t \text{ km}$$

من نظرية فيثاغورس:

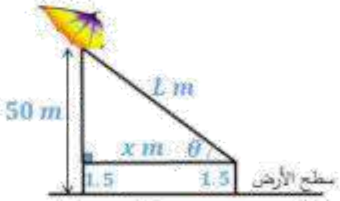
$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{(45t)^2 + (40t)^2} = \sqrt{3625}\, t$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{3625} \approx 60.21$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} \approx 60.21 \text{ km/h}$$

أتحقق من فهمي صفحة 82



ليكن طول الخيط L وقياس الزاوية بين الخيط والأفقي θ ، و بعد الطائرة أفقيا هو x .

المعطى: $\frac{dx}{dt} = 2\ \text{m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100}$

$$\tan\theta = \frac{50-1.5}{x} = \frac{48.5}{x}$$

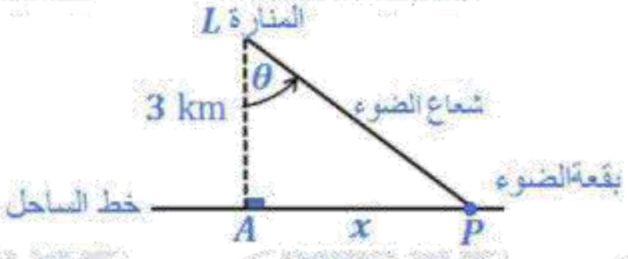
$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\,\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{L^2}{x^2}\times\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\,\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{x^2}\times\frac{x^2}{L^2} = \frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{L^2}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100} = -\frac{48.5(2)}{(100)^2} \approx -0.0097\ \text{rad/s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 84



لتكن الأبعاد و القياسات كما في الشكل أعلاه

المعطى: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4(2\pi) = 8\pi\ \text{rad/min}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1}$

$$\tan\theta = \frac{x}{3} \rightarrow \sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x^2+9}{3}\times\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1} = 80\pi\ \text{km/min}$$

سرعة بقعة الضوء على الساحل 80π km/min عندماتبعد 1 km عن A.

أتحقق من فهمي صفحة 86

a

يصل الطرف العلوي للذراع إلى أعلى نقطة عندما يكون وضع الذراع رأسيا، وتكون النقطة المطلوبة هي $(0, 1)$

b

المعطى: $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$

المطلوب: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}$

عندما $x = \frac{1}{4}$، فإن:

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow t = 1$$

العلاقة المعطاة: $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$

من نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = 1$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dt} = 0$$

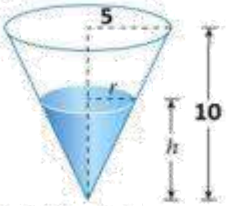
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = -\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\pi}{96} \times \frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{\pi}{24\sqrt{5}} \text{ m/s}$$

إذن، يتحرك طرف الذراع الواقع على المحور y للأسفل بمعدل $\frac{\pi}{24\sqrt{5}}$ m/s عندما $x = \frac{1}{4}$.

أتحقق من فهمي صفحة 88



ليكن حجم الماء في الخزان V ونصف قطر قاعدته r وارتفاعه h

المعطى: $\frac{dV}{dt} = \pi \text{ m}^3/\text{min}$

المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8}$

من التشابه: $\frac{r}{h} = \frac{5}{10} \rightarrow r = \frac{1}{2}h$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8} = \frac{1}{16} \text{ m/min}$$

إذن، يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}$ m/min عندما يكون ارتفاعه 8 m

أتدرب وأحل المسائل صفحة 88

1

ليكن طول المستطيل x وعرضه y ومساحته A ومحيطه C وطول قطره R

المعطى: $\frac{dy}{dt} = -3\text{cm/s}, \quad \frac{dx}{dt} = 2\text{cm/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=20, y=50}$

$$A = xy \rightarrow \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

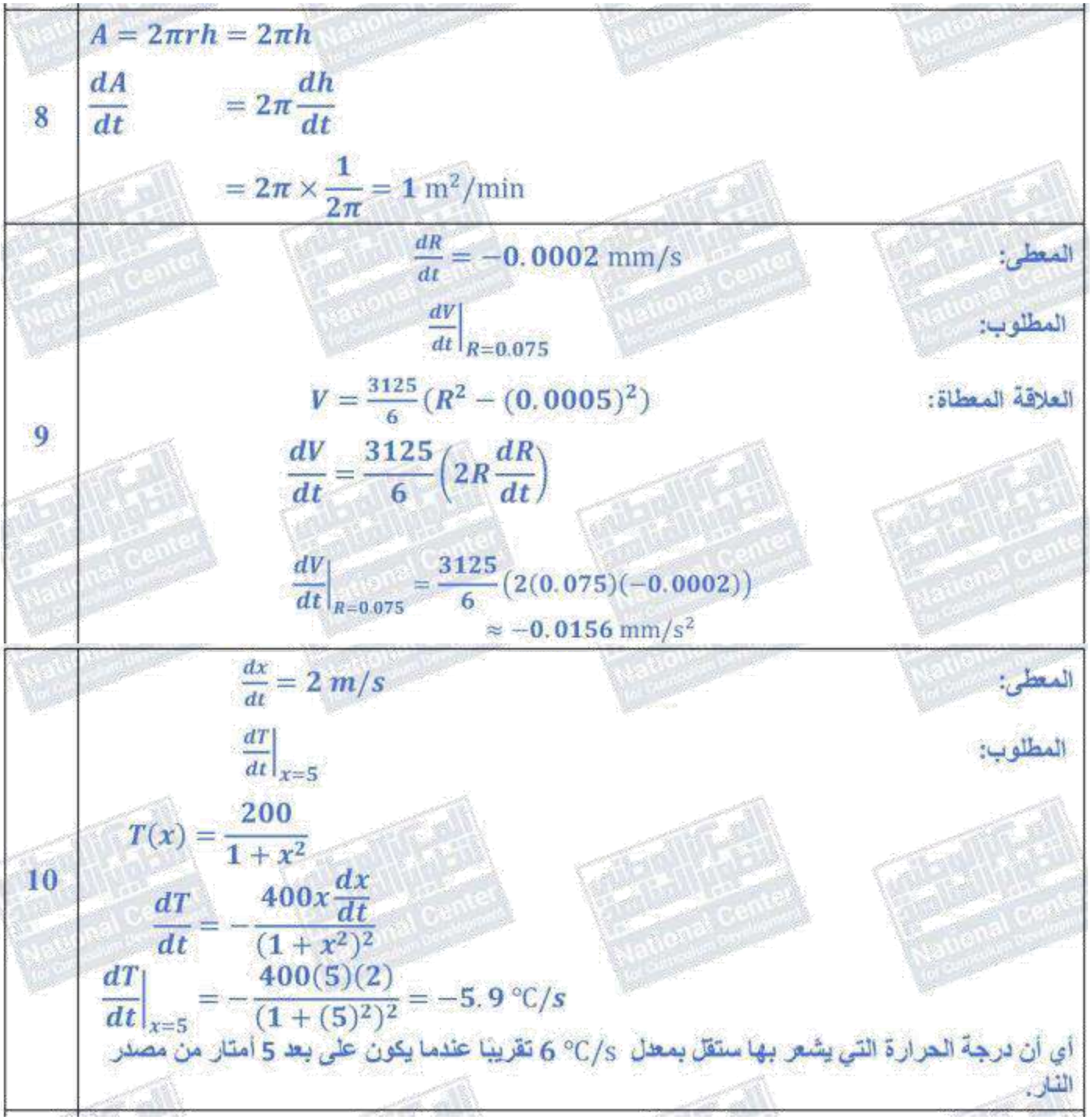
$$\rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=20, y=50} = 20(-3) + 50(2) = 40 \text{ cm}^2/\text{s}$$

2

$$C = 2x + 2y \rightarrow \frac{dC}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$\rightarrow \left.\frac{dC}{dt}\right|_{x=20, y=50} = 2(2) + 2(-3) = -2 \text{ cm/s}$$

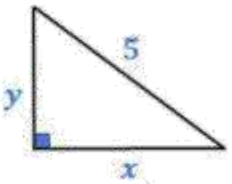
$R^2 = x^2 + y^2$ $2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ $\sqrt{(20)^2 + (50)^2}\,\frac{dR}{dt}\Big\vert_{x=20,y=50} = 20(2) + 50(-3)$ $\frac{dR}{dt}\Big\vert_{x=20,y=50} = -\frac{110}{10\sqrt{29}} = -\frac{11}{\sqrt{29}}\ \text{cm/s}$	3
في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب)، بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر(لأن معدل تغير كل منهما سالب).	4
ليكن حجم المكعب V وطول ضلعه (حرفه) x المعطى: $\frac{dx}{dt} = 6\ \text{cm/s}$ المطلوب: $\frac{dV}{dt}\Big\vert_{t=4}$ بعد مرور t ثانية يصبح طول ضلع المكعب: $x = 10 + 6t$ ويكون حجمه: $V = x^3 = (10 + 6t)^3$ $\frac{dV}{dt} = 3(10 + 6t)^2 \times 6$ $\frac{dV}{dt}\Big\vert_{t=4} = 3(34)^2(6) = 20808\ \text{cm}^3/\text{s}$	5
لتكن مساحة سطح المكعب A بعد مرور t ثانية تصبح مساحة سطح المكعب: $A = 6x^2 = 6(10 + 6t)^2$ $\frac{dA}{dt} = 12(10 + 6t) \times 6$ $\frac{dA}{dt}\Big\vert_{t=6} = 12(46)(6) = 3312\ \text{cm}^2/\text{s}$	6
ليكن ارتفاع الوقود في الخزان h ، سيكون طول نصف قطر قاعدته 1 m، ويكون حجمه: $V = \pi r^2 h = \pi h$ المعطى: $\frac{dV}{dt} = 500\text{L/min} = 0.5\ \text{m}^3/\text{min}$ المطلوب: $\frac{dh}{dt}$ العلاقة التي تربط الحجم بالارتفاع: $V = \pi h$ $\frac{dV}{dt} = \pi\frac{dh}{dt} \rightarrow 0.5 = \pi\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ \text{m/min}$	7



8	$A = 2\pi rh = 2\pi h$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi\frac{dh}{dt}$ $= 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1\ \text{m}^2/\text{min}$
9	المعطى: $\frac{dR}{dt} = -0.0002\ \text{mm/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{R=0.075}$ العلاقة المعطاة: $V = \frac{3125}{6}(R^2 - (0.0005)^2)$ $\frac{dV}{dt} = \frac{3125}{6}\left(2R\frac{dR}{dt}\right)$ $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{R=0.075} = \frac{3125}{6}(2(0.075)(-0.0002))$ $\approx -0.0156\ \text{mm/s}^2$
10	المعطى: $\frac{dx}{dt} = 2\ m/s$ المطلوب: $\left.\frac{dT}{dt}\right\|_{x=5}$ $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ $\frac{dT}{dt} = -\frac{400x\frac{dx}{dt}}{(1+x^2)^2}$ $\left.\frac{dT}{dt}\right\|_{x=5} = -\frac{400(5)(2)}{(1+(5)^2)^2} = -5.9\ °C/s$ أي أن درجة الحرارة التي يشعر بها ستقل بمعدل 6 °C/s تقريبا عندما يكون على بعد 5 أمتار من مصدر النار.

11

نفرض أن بعد الطرف السفلي عن الجدار هو x، وأن بعد الطرف العلوي عن الأرض هو y.



المعطى: $\frac{dy}{dt} = 0.15 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}$

من نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = 25$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y\frac{dy}{dt}}{x}$$

عندما $x = 3$، يكون:

$$y^2 = 25 - 9 = 16 \to y = 4$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = -\frac{4(0.15)}{3} = -0.2 \text{ m/s}$$

إذن يتحرك الطرف السفلي في تلك اللحظة بسرعة 0.2 m/s نحو اليسار مقتربا من الجدار.

12

ليكن حجم كومة الرمل V ، وارتفاعها h ، وطول نصف قطر قاعدتها r

المعطى: $\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min \qquad , h = \frac{3}{8}(2r)$

المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}$

$$h = \frac{3}{8}(2r) \quad \to r = \frac{4}{3}h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{16}{27}\pi h^3 \to \frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\pi h^2\frac{dh}{dt} \to 10 = \frac{16}{9}\pi(4)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4} = \frac{45}{128\pi} \text{ m/min}$$

إذن يزداد ارتفاع الكومة المخروطية عند تلك اللحظة بمعدل 0.112 مترا لكل ثانية تقريبا.

13

$$r=\frac{4}{3}h$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4}=\frac{4}{3}\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}=\frac{4}{3}\times\frac{45}{128\pi}=\frac{15}{32\pi}\ \mathrm{m/min}$$

إذن يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل 0.149 مترا لكل ثانية تقريبا.

14

ليكن بعد الطائرة الأولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو x،

وبعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في تلك اللحظة هو y، والبعد بين الطائرتين هو s.

المعطى: $\frac{dy}{dt}=-600\ \mathrm{km/h}$ $\frac{dx}{dt}=-450\ \mathrm{km/h}$

المطلوب: $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=225,y=300}$

$$s^2=x^2+y^2$$

$$2s\frac{ds}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{s}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=225,y=300}=\frac{225(-450)+300(-600)}{\sqrt{(225)^2+(300)^2}}=-750\ \mathrm{km/h}$$

إذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل 750 كيلومترا في الساعة.

15

نحسب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين:

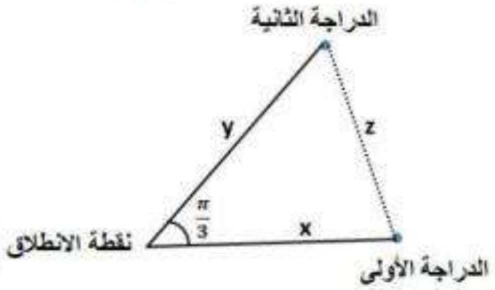
$$t_1=\frac{x}{v_x}=\frac{225}{450}=0.5\ h$$

$$t_2=\frac{y}{v_y}=\frac{300}{600}=0.5\ h$$

بما أن الطائرتين ستصلان لنقطة التقاء المسارين بعد نصف ساعة من لحظة رصدهما من قبل المراقب الجوي، فإن اصطدامهما متوقع، ويجب على مراقب الحركة الجوية التوجيه بالتغيير اللازم في مسار إحداهما أو في سرعتها على الأقل حتى لا تصلان إلى نقطة التقاء المسارين معا في الوقت نفسه.

16

لتكن المسافات كما في الشكل أدناه:



المعطى: $\frac{dy}{dt} = 20 \text{ km/h}$ $\frac{dx}{dt} = 15 \text{ km/h}$

المطلوب: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}$

بعد t ساعة من انطلاقهما يكون: $x = 15t, \quad y = 20t$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5\sqrt{13}t$$

$$\frac{dz}{dt} = 5\sqrt{13}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = 5\sqrt{13} \text{ km/h}$$

إذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الاخرى بسرعة $5\sqrt{13}$ كيلومتر كل ساعة

17

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

18

المعطى: $\frac{dx}{dt} = 4$

المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}$

$$A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = (2x)\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(2\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= 2e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)\frac{dx}{dt} \rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4} = 2e^{-\frac{(4)^2}{2}}(1 - (4)^2)(4)$$

$$= -120e^{-8} \text{ cm}^2/\text{min}$$

عندما $R_1 = 80$، $R_2 = 100$:يكون:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{80} + \frac{1}{100} = \frac{180}{8000}$$

$$R = \frac{800}{18} = \frac{400}{9}\ \Omega$$

المعطى: $\frac{dR_1}{dt} = 0.3,\quad \frac{dR_2}{dt} = 0.2$

المطلوب: $\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R_1=80,R_2=100}$

19

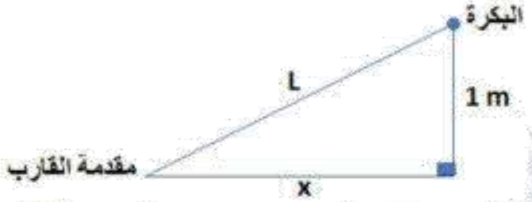
العلاقة المعطاة: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$-\frac{\frac{dR}{dt}}{R^2} = -\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2} - \frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}$$

$$\frac{dR}{dt} = R^2\left(\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2} + \frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}\right)$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R_1=80,R_2=100} = \frac{160000}{81}\left(\frac{0.3}{6400} + \frac{0.2}{10000}\right) \approx 0.132\ \Omega/s$$

لتكن الأبعاد كما في الشكل:



المعطى: $\frac{dL}{dt} = -1\ \text{m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8}$

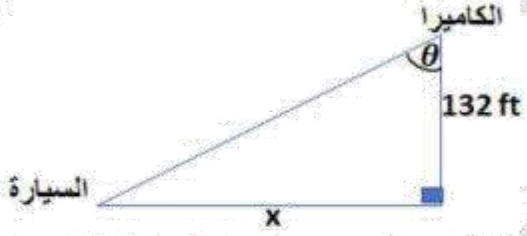
20 $L^2 = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad 2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{L}{x} \times \frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \times \frac{dL}{dt}$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8} \times -1 = -\frac{\sqrt{65}}{8}\ \text{m/s}$$

إذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف بسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}$ m/s

21

لتكن x كما في الشكل:



المعطى: $\frac{dx}{dt} = -264 \text{ ft/s}$

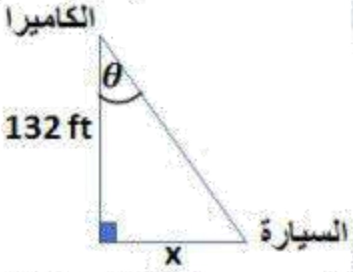
المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0}$

$$\tan\theta = \frac{x}{132} \rightarrow \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{132}(-264)\cos^2 0 = -2 \text{ rad/s}$$

22

لتكن x كما في الشكل:



بعد تجاوز السيارة للكاميرا تتزايد المسافة x حيث يصبح $\frac{dx}{dt} = 264 \text{ ft/s}$

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0.5 \text{ s}}$

بعد نصف ثانية: $x = 0.5 \times 264 = 132$

$$\tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{132} \rightarrow \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$$

$$\rightarrow \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0.5 \text{ s}} = \frac{1}{132}(264) \times \cos^2(\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 \text{ rad/s}$$

يزداد قياس الزاوية θ بسرعة 1 rad/s في تلك اللحظة.

23

ليكن الجسيم عند النقطة $P\left(x, 2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ في أي لحظة، O نقطة الأصل، وليكن $PO = L$

المعطى: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}} = \sqrt{10}\ \text{units/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}}$

$$L^2 = (x-0)^2 + \left(2\sin\frac{\pi x}{2} - 0\right)^2$$

$$L^2 = x^2 + 4\sin^2\frac{\pi x}{2}$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 8\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\left(x + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi x\right)\frac{dx}{dt}$$

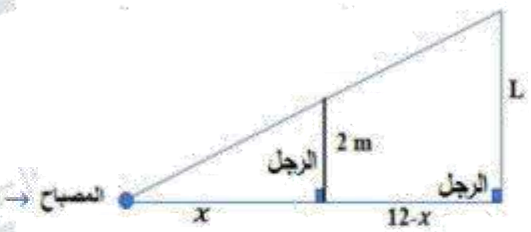
عندما $x = \frac{1}{3}$ ، فإن: $L = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + 4\sin^2(\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}\left(\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{10} = 1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$$

إذن يزداد بعد الجسيم عن نقطة الأصل في تلك اللحظة بسرعة $\left(1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right)$ وحدة/ثانية

24

ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقيا x ، وطول ظله على الجدار L



المعطى: $\frac{dx}{dt} = 1.6\ \text{m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=8}$

من تشابه المثلثات: $\frac{L}{2} = \frac{12}{x} \rightarrow L = \frac{24}{x}$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2} \rightarrow \left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=8} = \frac{-24(1.6)}{64} = -0.6\ \text{m/s}$$

إذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر لكل ثانية

المعطى: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10 \times 2\pi = 20\pi \text{ rad/s}$

المطلوب: $\frac{dx}{dt}$

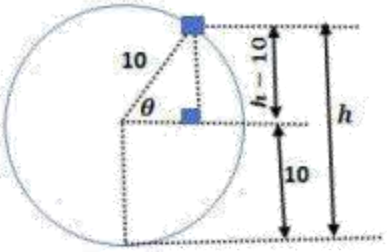
25 $\cos\theta = \frac{x}{30} \rightarrow x = 30\cos\theta$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -30\sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -30(20\pi)\sin\theta = -600\pi\sin\theta$$

26 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=45°} = -600\pi\sin 45° = -\frac{600\pi}{\sqrt{2}} \text{ cm/s}$

27 ليكن h ارتفاع الراكب عن سطح الأرض



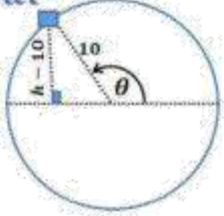
المعطى: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/min}$

المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16}$

بما أن $\sin\theta = \frac{h-10}{10}$ فعندما h= 16 يكون: $\sin\theta = 0.6$ ومنه $\cos\theta = 0.8$

$h = 10 + 10\sin\theta$

$\frac{dh}{dt} = 10\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16} = 10 \times 0.8 \times \pi = 8\pi \text{ m/min}$

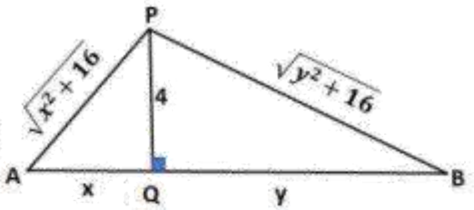


ويمكن أن يكون الارتفاع 16 m والعربة نازلة بعد إكمال نصف دورة. عندئذ يكون $\cos\theta = -0.8$ لأن θ تكون زاوية منفرجة، ويكون:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16} = 10 \times -0.8 \times \pi = -8\pi \text{ m/min}$$

إذن، على ارتفاع 16m يكون الراكب في حالة صعود أو في حالة هبوط بسرعة مقدارها 8π m/min

لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



المعطى: $\frac{dx}{dt} = 0.5$ m/s

المطلوب: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3}$

طول الحبل: $AP + BP = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$

28 عندما $x = 3$ فإن: $\sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \rightarrow \sqrt{y^2+16} = 7 \rightarrow y = \sqrt{33}$

$$\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = 0$$

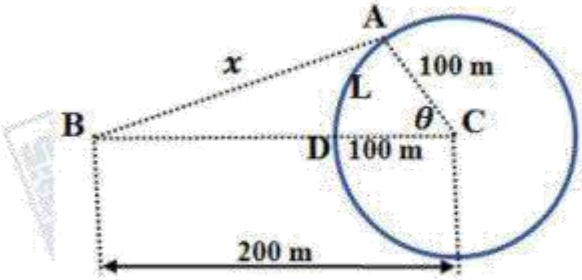
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$$

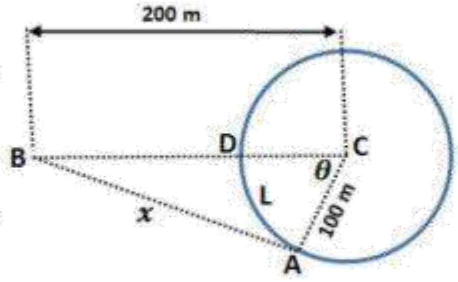
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = -\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{25}} \times 0.5 = -\frac{21}{10\sqrt{33}} \text{ m/s}$$

إذن، تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها $\frac{21}{10\sqrt{33}}$ m/s

29

ليكن العداء الأول A، والعداء الثاني B، والبعد بينهما x كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD. توجد حالتان لموقع العداء A كما في الرسمين الآتيين:





الحالة الأولى: العداء A إلى يمين B

المعطى: (تكون L متناقصة) ويكون: $\frac{dL}{dt} = -7$ m/s

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200\ m}$

$$L = r\theta = 100\theta \rightarrow \frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -0.07 \text{ rad/s}$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta \rightarrow x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$\rightarrow 2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{x}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

عندما $x = 200$ فإن:

$$\cos\theta = \frac{50000-40000}{40000} = \frac{1}{4}$$

ومنه: $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times -0.07 = -\frac{7\sqrt{15}}{4} \text{ m/s}$$

الحالة الثانية: العداء A إلى يسار B

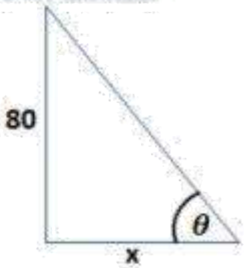
عندئذ يتزايد طول القوس L، ويكون $\frac{dL}{dt} = 7$ ، ويكون $\frac{d\theta}{dt} = 0.07$ rad/s، وعليه فإن:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times 0.07 = \frac{7\sqrt{15}}{4} \text{ m/s}$$

إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 m، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ m/s

30

ليكن طول ظل المبنى x ، وزاوية ارتفاع الشمس θ .



الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماما، يعني أن الزاوية θ متزايدة.

المعطى: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi \text{ rad}}{24h} = \frac{\pi}{12}\frac{\text{rad}}{h} = \frac{\pi \text{ rad}}{12\times60 \text{ min}} = \frac{\pi}{720} \text{ rad/min}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60}$

العلاقة التي تربط بين المتغيرين هي: $\tan\theta = \frac{80}{x}$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{80}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^2 \sec^2\theta}{80} \times \frac{d\theta}{dt}$$

عندما $x = 60$ فإن: طول وتر المثلث القائم في الشكل أعلاه يساوي $\sqrt{60^2+80^2} = 100$

ومنه: $\sec\theta = \frac{100}{60} = \frac{5}{3}$

إذن: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60} = -\frac{60^2\left(\frac{25}{9}\right)}{80} \times \frac{\pi}{720} = -\frac{25\pi}{144} \text{ m/min}$

لتحويل الوحدة إلى cm/ min نضرب السرعة في 100، فتكون $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60} = -\frac{2500\pi}{144} \text{ cm/min}$

إذن يتناقص طول ظل البناية في تلك اللحظة بسرعة مقدارها 54.5 cm/min تقريبا.

الدرس الثاني: القيم القصوى والتقعر

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتـــران: $C(t) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ تركيز جرعة دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث C مَقيسة بوحدة μg/ mL. أُحدِّد الزمـــن الذي يكون فيه تركيز الـــدواء أكبر ما يُمكِن خلال أوَّل 12 ساعة من تناوله.

مسألة اليوم صفحة 93	
$C(t) = 3.95 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ المطلوب هو قيمة t التي يكون عندها للاقتران $C(t)$ قيمة عظمى مطلقة في $[0, 12]$، لذا نجد القيم الحرجة: $C'(t) = 8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0 \to e^{-0.4t-1} = e^{-0.6t}$ $\to 0.4t + 1 = 0.6t$ $\to t = 5$ توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $t = 5$ نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي مجاله باستخدام الآلة الحاسبة: $C(0) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(0)-1} - e^{-0.6(0)}\right) \approx 0.005$ $C(5) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(5)-1} - e^{-0.6(5)}\right) \approx 3.79$ $C(12) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(12)-1} - e^{-0.6(12)}\right) \approx 3.62$ وبما أن $C(5)$ هو أكبر هذه القيم فإن تركيز الدواء يكون أكبر ما يمكن بعد 5 ساعات من تناوله.	
أتحقق من فهمي صفحة 96	
ليس للاقتران f قيم قصوى مطلقة للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$ وله قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -4$	a
للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$ و $x = -1$ هي $f(\pm 1) = 1$ وله قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$	b

أتحقق من فهمي صفحة 102

a	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$ $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0, x = 4$ وتكون قيم x الحرجة هي: $x = 0, x = 4,$ نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة وعند طرفي مجاله $f(-3) = -27 - 54 + 5 = -76, f(0) = 5$ $f(4) = 64 - 96 + 5 = -27, f(5) = 125 - 150 + 5 = -20$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3$ هي $f(-3) = -76$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 5$
b	$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad [-8, 8]$ $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي قيمة في $(-8, 8)$، وهي غير موجودة عند $x = 0$ وهذه هي القيمة الحرجة فقط. $f(-8) = -2$ $f(0) = 0$ $f(8) = 2$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -8$ هي $f(-8) = -2$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$ هي $f(8) = 2$
c	$f(x) = \sin^2 x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$ أجد القيم الحرجة في الفترة $(0, 2\pi)$ $f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x\,(2\cos x - 1) = 0$ $\rightarrow \sin x = 0 \quad or \quad \cos x = \frac{1}{2}$ $\rightarrow x = \pi, or\ x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$ وتكون قيم x الحرجة هي: $x = \pi, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$ أجد قيم الاقتران عند القيم الحرجة وطرفي مجاله $f(0) = 1$ ، $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}$ ، $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}$ ، $f(\pi) = -1$ ، $f(2\pi) = 1$ للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = \pi$ هي $f(\pi) = -1$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$ هي $\frac{5}{4}$

أتحقق من فهمي صفحة 105

$f(x) = (x-1)e^x$

$f'(x) = (x-1)e^x + e^x = 0 \rightarrow xe^x = 0 \rightarrow x = 0$

للاقتران قيمة حرجة وحيدة هي $x = 0$

بما أن إشارة المشتقة الأولى تغيرت من السالب إلى الموجب عند هذه القيمة، لذا يكون للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(0) = -1$

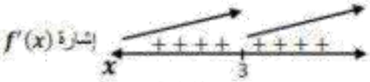
أتحقق من فهمي صفحة 106

$f(x) = \sqrt[3]{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

$f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي عدد حقيقي x ، لكن $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 3$

إذن القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$



الاقتران f متزايد على R ولا يوجد له قيم قصوى محلية ولا مطلقة. النقطة $(3, 0)$ نقطة حرجة لكنها ليست نقطة قيمة قصوى لعدم تغير إشارة المشتقة حولها.

أتحقق من فهمي صفحة 111

a

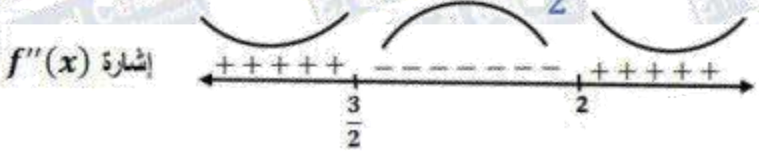
$f(x) = (x-2)^3(x-1)$

$f'(x) = (x-2)^3 + 3(x-1)(x-2)^2$

$f''(x) = 3(x-2)^2 + 6(x-1)(x-2) + 3(x-2)^2$

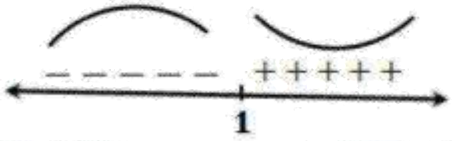
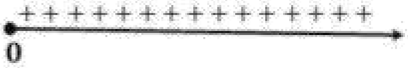
$= 3(x-2)((x-2) + 2(x-1) + (x-2))$

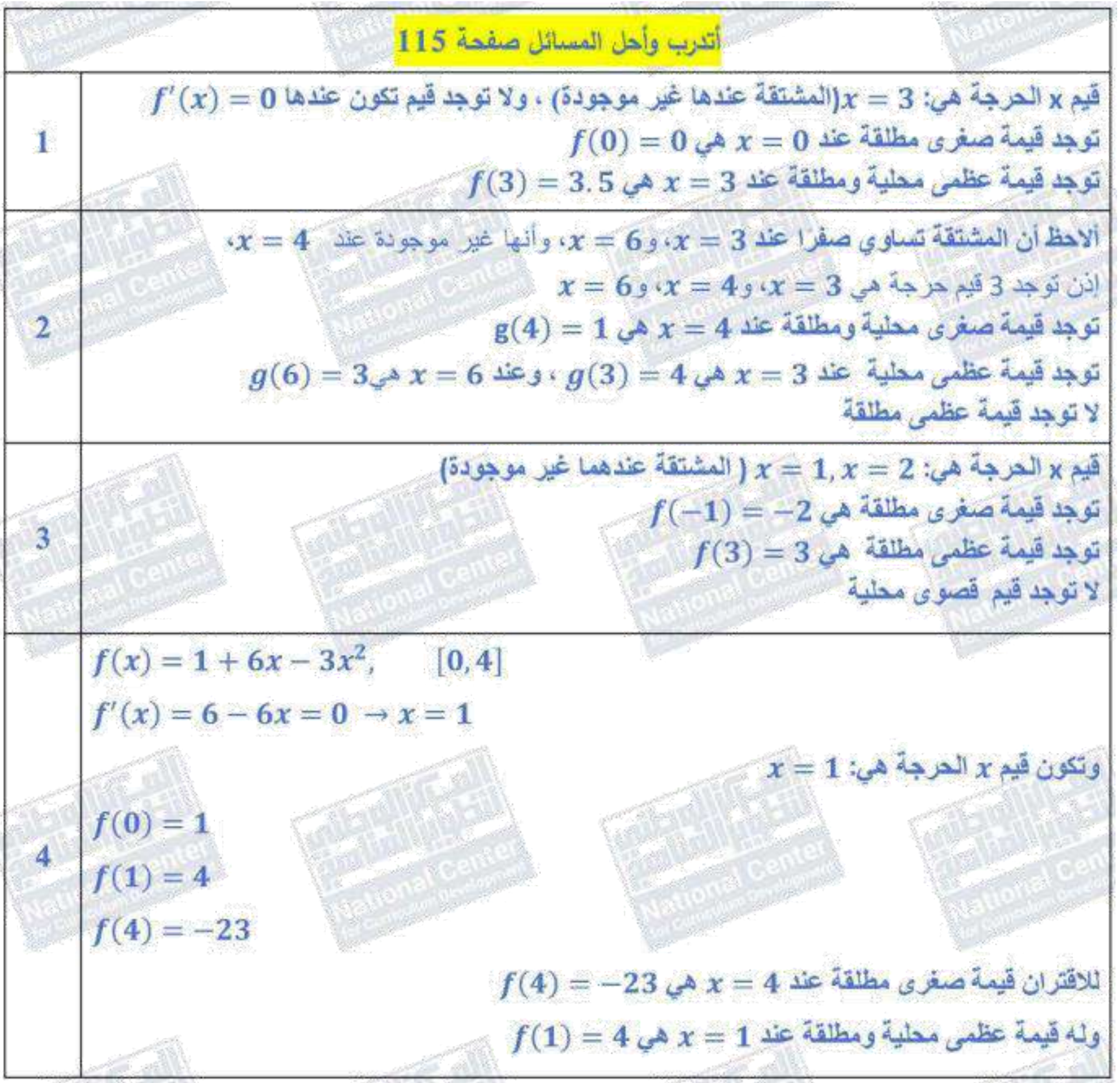
$= 3(x-2)(4x-6) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \ \ or \ \ x = \frac{3}{2}$



إذن منحنى $f(x)$ مقعر للأعلى في $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ و $(2, \infty)$، ومقعر للأسفل في $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

وله نقطتا انعطاف هما $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ و $(2, 0)$

$f(x)=\frac{x}{x-1}$ $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$ $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$ $f''(x)$ لا تساوي صفرًا لأي عدد حقيقي x ، لكن $f''(x)$غير موجودة عند $x=1$  إذن منحنى $f(x)$ مقعر للأعلى في $(-\infty,1)$، ومقعر للأسفل في $(1,\infty)$ ولا توجد نقاط انعطاف مع أن المنحنى غيّر من اتجاه تقعره عند $x=1$ وذلك لأنها خارج مجال $f(x)$	b
أتحقق من فهمي صفحة113	
$f(x)=xe^x$ $f'(x)=xe^x+e^x=0 \rightarrow e^x(x+1)=0 \rightarrow x=-1$ القيمة الحرجة هي $x=-1$ $f''(x)=xe^x+e^x+e^x=e^x(x+2)$ $f''(-1)=e^{-1}>0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية للاقتران f هي $f(-1)=-e^{-1}$	
أتحقق من فهمي صفحة115	
$s(t)=t^3-3t+3\,, t\geq 0$ $v(t)=3t^2-3=0 \rightarrow t=1$  يتحرك الجسم في الاتجاه السالب في الفترة $(0,1)$ يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب في الفترة $(1,\infty)$	a
$a(t)=6t=0 \rightarrow t=0$  تكون سرعة الجسم متزايدة في الفترة $(0,\infty)$ ولا تتناقص أبدا	b



أتدرب وأحل المسائل صفحة 115	
1	قيم x الحرجة هي: $x = 3$(المشتقة عندها غير موجودة) ، ولا توجد قيم تكون عندها $f'(x) = 0$ توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$ توجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = 3.5$
2	ألاحظ أن المشتقة تساوي صفرا عند $x = 3$، و$x = 6$، وأنها غير موجودة عند $x = 4$، إذن توجد 3 قيم حرجة هي $x = 3$، و$x = 4$، و$x = 6$ توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 4$ هي $g(4) = 1$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ هي $g(3) = 4$ ، وعند $x = 6$ هي $g(6) = 3$ لا توجد قيمة عظمى مطلقة
3	قيم x الحرجة هي: $x = 1, x = 2$ (المشتقة عندهما غير موجودة) توجد قيمة صغرى مطلقة هي $f(-1) = -2$ توجد قيمة عظمى مطلقة هي $f(3) = 3$ لا توجد قيم قصوى محلية
4	$f(x) = 1 + 6x - 3x^2, \quad [0,4]$ $f'(x) = 6 - 6x = 0 \rightarrow x = 1$ وتكون قيم x الحرجة هي: $x = 1$ $f(0) = 1$ $f(1) = 4$ $f(4) = -23$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 4$ هي $f(4) = -23$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 1$ هي $f(1) = 4$

$f(x)=(x+3)^{\frac{2}{3}}-5, \qquad [-3,3]$ $f'(x)=\frac{2}{3}(x+3)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+3}}$ $f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي قيمة في الفترة $(-3,3)$، وهي غير موجودة عند $x=-3$ ولا توجد قيم حرجة في الفترة $(-3,3)$. $f(-3)=-5$ $f(3)=\sqrt[3]{36}-5$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-3$ هي $f(-3)=-5$ للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=3$ هي $f(3)=\sqrt[3]{36}-5\approx-1.7$	5
$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, \qquad [-2,2]$ $f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\to x=0$ القيم الحرجة هي: $x=0$ $f(-2)=\frac{4}{5}$ $f(0)=0$ $f(2)=\frac{4}{5}$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=0$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=2$ و$x=-2$ هي $\frac{4}{5}$	6
$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}, \qquad [8,64]$ $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(x)$ موجودة ولا تساوي صفرا لأي عدد x، وهي موجبة لجميع قيم x في $(8,64)$، و $f(x)$ متزايد $f(8)=2$ $f(64)=8$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=8$ هي $f(8)=2$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=64$ هي $f(64)=8$	7

8	$f(x)=2\cos x+\sin 2x, \quad \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x)=-2\sin x+2\cos 2x=-2\sin x+2(1-2\sin^2 x)=0$ $\rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$ $\rightarrow (2\sin x-1)(\sin x+1)=0$ $\rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\ \ or\ \sin x=-1 \rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ القيمة الحرجة في الفترة $(0,\frac{\pi}{2})$هي $x=\frac{\pi}{6}$ $f(0)=2$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=\frac{\pi}{2}$ هي $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x=\frac{\pi}{6}$ هي $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2.6$
9	$f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}, \quad [0,3]$ $f'(x)=\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}=0\rightarrow e^x(x^2-2x+1)=0$ $\rightarrow e^x(x-1)^2=0\rightarrow x=1$ القيم الحرجة هي $x=1$ $f(0)=1$ $f(1)=\frac{1}{2}e$ $f(3)=\frac{1}{10}e^3$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=1$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=3$ هي $f(3)=\frac{1}{10}e^3\approx 2.0$

10

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \qquad \left[\frac{1}{2}, 4\right]$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e}$$

القيمة الحرجة هي $x = \sqrt{e}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4\ln 2 \approx -2.8$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} \approx 0.18$$

$$f(4) = \frac{1}{16}\ln 4 = \frac{1}{8}\ln 2 \approx 0.09$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{1}{2}$ هي $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4\ln 2 \approx -2.8$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \sqrt{e}$ هي $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} \approx 0.18$

11

$$f(x) = \sec x, \qquad \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$f'(x) = \sec x \tan x = 0$$

بما أن $\sec x \neq 0$ فإن $\tan x = 0$، ومنها $x = 0$

القيمة الحرجة هي $x = 0$

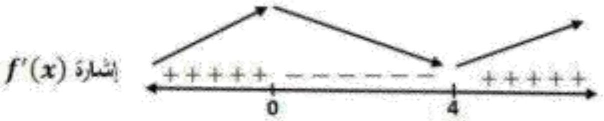
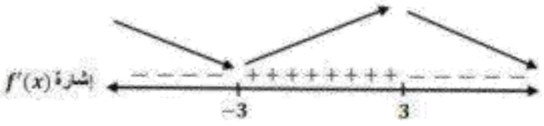
$$f(0) = \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos(-\frac{\pi}{6})} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} = 2$$

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$

وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}$ هي $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

$f(x)=\sqrt{4-x^2},\qquad [-2,2]$ $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0\rightarrow x=0$ القيمة الحرجة هي $x=0$ $f(-2)=0$ $f(0)=2$ $f(2)=0$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-2, x=2$ هي 0 للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=2$	12
$f(x)=x^3-6x^2-135$ $f'(x)=3x^2-12x=0\rightarrow 3x(x-4)=0\rightarrow x=0\ or\ x=4$ القيم الحرجة هي $x=0, x=4$  f متزايد على $(-\infty,0),(4,\infty)$ f متناقص على $(0,4)$ له قيمة عظمى محلية هي $f(0)=-135$ له قيمة صغرى محلية هي $f(4)=-167$	13
$f(x)=\frac{2x}{x^2+9}$ $f'(x)=\frac{(x^2+9)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+9)^2}=0\rightarrow\frac{18-2x^2}{(x^2+9)^2}=0\rightarrow x=3\ or\ x=-3$ القيم الحرجة هي $x=3, x=-3$  f متناقص على $(-\infty,-3),(3,\infty)$ f متزايد على $(-3,3)$ له قيمة عظمى محلية هي $f(3)=\frac{1}{3}$ له قيمة صغرى محلية هي $f(-3)=-\frac{1}{3}$	14

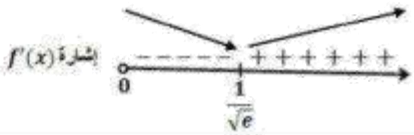
15

$f(x) = x^2 \ln x \,, \quad x > 0$

$f'(x) = (x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2x) = 0 \rightarrow x(1 + 2\ln x) = 0$

$\rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

القيمة الحرجة هي $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$



f متزايد على $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$

f متناقص على $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

16

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 0 \quad \rightarrow x = 1$

القيمة الحرجة هي $x = 1$

f متزايد على $(1, \infty)$

f متناقص على $(-\infty, 1)$

له قيمة صغرى محلية هي $f(1) = 1$

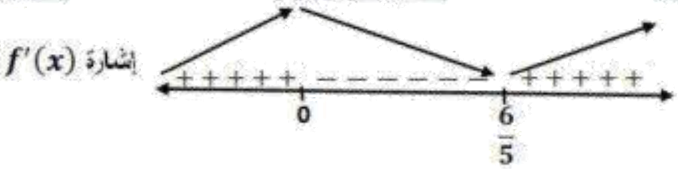
17

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-3) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow 5x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{6}{5}$

وكذلك $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 0$

يوجد له قيمتان حرجتان هما $x = 0$ ، و $x = \frac{6}{5}$

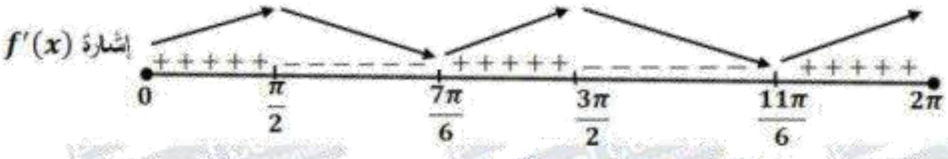
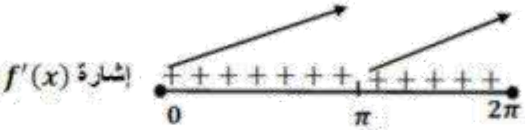


f متزايد على $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{6}{5}, \infty\right)$

f متناقص على $\left(0, \frac{6}{5}\right)$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{9}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

له قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

18	$f(x)=\sin^2 x+\sin x,[0,2\pi]$ $f'(x)=2\cos x\sin x+\cos x=\cos x(2\sin x+1)=0$ $\rightarrow \cos x=0\ or\ \sin x=-\frac{1}{2}\ \rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$  f متزايد على $(0,\frac{\pi}{2}),(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}),(\frac{11\pi}{6},2\pi)$ f متناقص على $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}),(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6})$ له قيمة صغرى محلية هي $f(\frac{7\pi}{6})=-\frac{1}{4},f(\frac{11\pi}{6})=-\frac{1}{4}$ له قيمتان عظميان محليتان هما $f(\frac{\pi}{2})=2,f(\frac{3\pi}{2})=0$
19	$f(x)=x+\sin x,[0,2\pi]$ $f'(x)=1+\cos x=0\rightarrow \cos x=-1\rightarrow x=\pi$ القيمة الحرجة هي $x=\pi$ f متزايد على $(0,2\pi)$ ليس له قيم قصوى محلية 
20	$f(x)=x^3-12x+1$ $f'(x)=3x^2-12$ $f''(x)=6x=0\ \rightarrow x=0$  f مقعر للأعلى في $(0,\infty)$ f مقعر للأسفل في $(-\infty,0)$ للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0,1)$

21

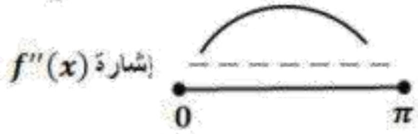
$$f(x) = \sqrt{\sin x}\ , [0, \pi]$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$f''(x) = \frac{\left(2\sqrt{\sin x}\right)(-\sin x) - (\cos x)\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)}{4 \sin x} = -\frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{4 \sin x \sqrt{\sin x}}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + 1}{4 \sin x \sqrt{\sin x}}$$

$$f''(x) \neq 0$$



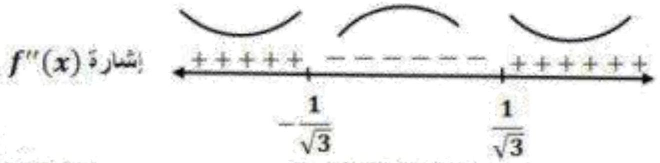
f مقعر للأسفل على $(0, \pi)$ ، وليس له نقاط انعطاف

22

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)^2(-6) - (-24x^2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{18x^2 - 6}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



f مقعر للأعلى على $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

f مقعر للأسفل على $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

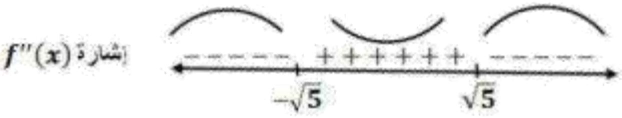
وله نقطتا انعطاف هما: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$

23

$$f(x) = \ln(x^2+5)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+5)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{10-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = \pm\sqrt{5}$$



f مقعر للأعلى على $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$ ،

f مقعر للأسفل على $(-\infty,-\sqrt{5}), (\sqrt{5},\infty)$ ،

وله نقطتا انعطاف هما: $(\sqrt{5},\ln 10)$ و $(-\sqrt{5},\ln 10)$

24

$$f(x) = \sqrt{x}(x+3) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}, \quad x \ge 0$$

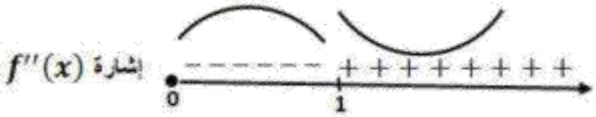
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad x > 0$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \to x = 1$$

f مقعر للأعلى على $(1,\infty)$ ،

f مقعر للأسفل على $(0,1)$ ،

وله نقطة انعطاف هي: $(1,4)$

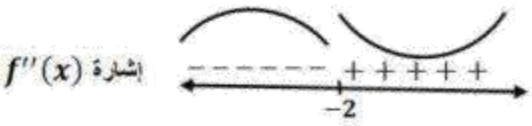


25

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2) = 0 \to x = -2$$

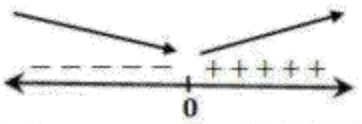
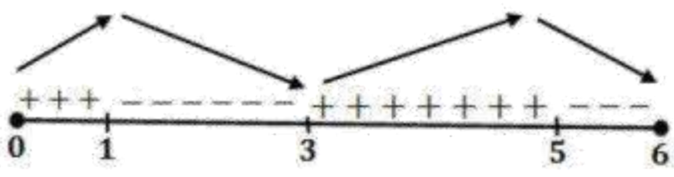


f مقعر للأعلى على $(-2,\infty)$ ،

f مقعر للأسفل على $(-\infty,-2)$ ،

وله نقطة انعطاف هي: $(-2,-2e^{-2})$

26	$f(x) = 6x - x^2$ $f'(x) = 6 - 2x = 0 \to x = 3$ $f''(x) = -2 \to f''(3) = -2 < 0$ للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(3) = 9$
27	$f(x) = \cos x - x, [0, 4\pi]$ $f'(x) = -\sin x - 1 = 0 \to \sin x = -1 \to x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}$ $f''(x) = -\cos x$ $\to f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 , f''\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0$ ويكون اختبار المشتقة الثانية قد فشل في تحديد نوع القيم $f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ ، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى والذي يعتمد على دراسة إشارتها:  نلاحظ أن $f'(x)$ لا تغير إشارتها أبدا، إذن ليس للاقتران f قيم قصوى محلية .
28	$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ $f'(x) = \frac{(x-1)(2x) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \to x(x-2) = 0 \to x = 0, x = 2$ $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ $f''(0) = -2 < 0 \ , f''(2) = 2 > 0 \ \to$ للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$ وله قيمة صغرى محلية هي $f(2) = 4$
29	$f(x) = x \ln x$ $f'(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x = 0 \to \ln x = -1 \to x = e^{-1}$ $f''(x) = \frac{1}{x}$ $\to f''(e^{-1}) = e > 0$ للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(e^{-1}) = -e^{-1}$

$f(x) = \frac{x}{2^x}$ $f'(x) = \frac{2^x - (x)(2^x \ln 2)}{2^{2x}} = 2^{-x} - (x)(2^{-x} \ln 2) = 2^{-x}(1 - x \ln 2) = 0$ $\rightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$ $f''(x) = (2^{-x})(-\ln 2) + (1 - x \ln 2)(-2^{-x} \ln 2)$ $= -2^{-x} \ln 2 \, (2 - x \ln 2)$ $\rightarrow f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = -2^{-\frac{1}{\ln 2}} \ln 2 \left(2 - \frac{1}{\ln 2} \times \ln 2\right) = -2^{-\frac{1}{\ln 2}} \ln 2 < 0$ للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$	30
$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3$ $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $f'(x)$ لا تساوي صفرا أبدا، لكنها غير موجودة عند $x = 0$ ، فلا يمكن تطبيق اختبار المشتقة الثانية لمعرفة القيم القصوى، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى بدراسة إشارتها:  للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(0) = -3$	31
نلاحظ من الرسم المعطى أن $f'(x) = 0$ عند $x = 1, x = 3, x = 5$، وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:  للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ للاقتران f قيمة عظمى محلية عند $x = 1, x = 5$	32
الاقتران f متزايد على $(0, 1), (3, 5)$، ومتناقص على $(1, 3), (5, 6)$	33

34

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

الاقتران f كثير حدود فهو قابل للاشتقاق على R ، بما أن كل نقطة قيمة قصوى هي نقطة حرجة، فإن

$f'(1) = 0$ و $f'(-3) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-3) = 27 - 6a + b = 0 \; \ldots.(1)$

$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \; \ldots\ldots\ldots(2)$

النقطة (1, -14) تقع على منحنى الاقتران، لذا فإن $f(1) = -14$

$f(1) = 1 + a + b + c = -14 \ldots.(3)$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد أن: $a = 3$

ثم بتعويض قيمة a في المعادلة (2) نجد أن: $b = -9$

ثم بتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أنّ: $c = -9$

35

$f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{b}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{b}{x^2}$

$f''(x) = \frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{2b}{x^3}$

بما أنه يوجد نقطة انعطاف عند $x = 3$ فإما أن يكون $f''(3) = 0$ أو $f''(3)$ غير موجودة،

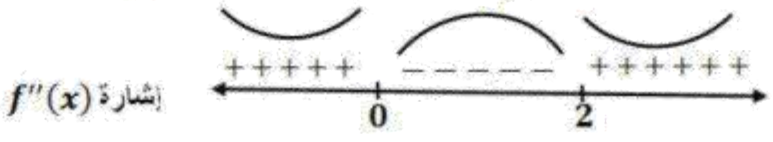
لكن بالنظر إلى قاعدة الاقتران f'' فإن $f''(x)$ غير موجودة عند $x = -1$ و $x = 0$ ،

إذن $f''(3) = 0$ ، ومنه:

$f''(3) = \frac{-1}{32} + \frac{2b}{27} = 0 \;\to b = \frac{27}{64}$

36

نلاحظ من الشكل أنّ $f''(x) = 0$ عند $x = 0$ و $x = 2$ ، وأنّ إشارة $f''(x)$ على النحو الآتي:

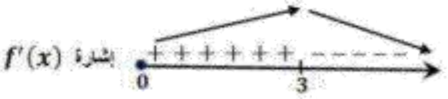


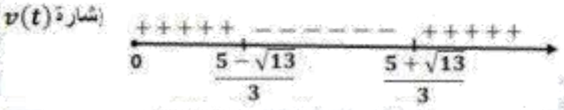
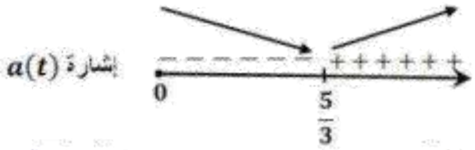
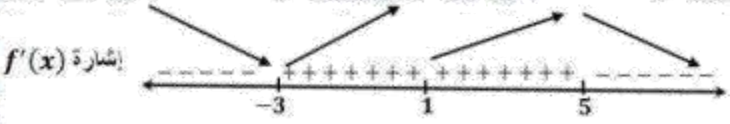
f مقعر للأسفل على $(0, 2)$ ،

f مقعر للأعلى على $(-\infty, 0), (2, \infty)$

37

توجد نقطتا انعطاف عند $x = 0$ و $x = 2$

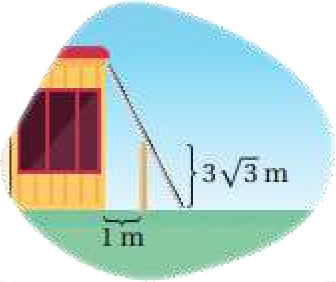
$B(x) = 305x^2 - 1830x^3, \ 0 \le x \le 0.16$ $B'(x) = 610x - 5490x^2 = 0 \ \to 610x(1-9x) = 0$ $\to x = 0 , x = \frac{1}{9} \approx 0.11$ القيمة الحرجة هي: $x = \frac{1}{9}$ $B(0) = 0$ $B\left(\frac{1}{9}\right) = 305\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 1830\left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 1.26$ $B(0.16) = 305(0.16)^2 - 1830(0.16)^3 \approx 0.31$ الحد الأقصى لضغط الدم هو 1.26 ويحدث عند تناول $\frac{1}{9}$ cm³ من الدواء	38
يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ أي: $s'(t) = 0$ وهذا يحدث عندما يكون لمنحنى $s(t)$ مماس افقي، أي عند $t = 2$ و $t = 6$	39
يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أو السالب تبعا لإشارة $s'(t) = v(t)$، وهذه الإشارة ترتبط بكون منحنى $s(t)$ متزايدا أو متناقصا: يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: $(6,7)$, $(0,2)$لأن اقتران الموقع متزايد فيهما. ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(2,6)$ لأن اقتران الموقع متناقص فيها.	40
تتزايد $v(t)$ عندما $s''(t) = v'(t)$ يكون موجبا أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرا للأعلى، أي في الفترة $(4,7)$ تتناقص $v(t)$ عندما $s''(t) = v'(t)$ يكون سالبا أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرا للأسفل، أي في الفترة $(0,4)$	41
$f(x) = \frac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150$ $f'(x) = \frac{-1500(2x-6)}{(x^2 - 6x + 10)^2} = 0 \ \to x = 3$ القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$ لأن المقام لا يساوي صفرا  بدراسة إشارة $f'(x)$ نلاحظ أن للاقتران f قيمة عظمى عندما $x = 3$ ، أي أنّ عدد مكبرات الصوت اللازم إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح أسبوعي ممكن هو 3	42

$s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t, t \ge 0$ $v(t) = 3t^2 - 10t + 4 = 0 \quad \rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$  يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: $\left(0, \frac{5-\sqrt{13}}{3}\right), \left(\frac{5+\sqrt{13}}{3}, \infty\right)$ ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{3}, \frac{5+\sqrt{13}}{3}\right)$	43
تتزايد $v(t)$ وتتناقص وفقًا لإشارة $a(t) = v'(t)$ $a(t) = 6t - 10 = 0 \quad \rightarrow t = \frac{5}{3}$  تتزايد سرعة الجسم المتجهة في الفترة $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$ وتتناقص على الفترة $\left(0, \frac{5}{3}\right)$	44
تكون $f'(x) > 0$ ، و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متزايدًا ومنحناه مقعرًا للأعلى. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: l	45
تكون $f'(x) < 0$ ، و $f''(x) < 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصًا ومنحناه مقعرًا للأسفل. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: p	46
تكون $f'(x) < 0$ ، و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصًا ومنحناه مقعرًا للأعلى. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: k	47
نلاحظ من الرسم أنّ $f'(x) = 0$ عند $x = -3 , x = 1, x = 5$ ، وأنّ إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:  للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x = -3$ وله قيمة عظمى محلية عند $x = 5$	48
الاقتران f متزايد على $(-3, 5)$ ومتناقص على $(5, \infty), (-\infty, -3)$	49

50	يكون منحنى f مقعرًا للأعلى في الفترة (أو الفترات) التي يكون فيها f' متزايدا حيث تكون في هذه الفترات مشتقة f' أي f'' موجبة. يتضح من الرسم أنّ f' متزايدة في الفترتين: $(-\infty,-2),(1,4)$ وعندما تكون f' متناقصة في فترة ما تكون f'' سالبة ويكون منحنى f مقعرًا للأسفل، ويتضح من الرسم أنّ f' متناقصة في الفترتين: $(-2,1),(4,\infty)$ إذن، منحنى f مقعر للأسفل في الفترتين $(-2,1),(4,\infty)$ ومقعر للأعلى في الفترتين $(-\infty,-2),(1,4)$.
51	f له ثلاث نقاط انعطاف عند $x=-2, x=1, x=4$ لأن للاقتران f' قيم قصوى عندها.
52	$h(x)$ هو مشتقة $g(x)$ أي $g'(x)=h(x)$ وليس العكس التبرير: بما أن أحدهما هو مشتقة الآخر (من المعطيات)، يكفي ملاحظة الفترة $x<-2$ حيث g متزايد و h أكبر من الصفر، وهذا ينسجم مع كون h هو مشتقة g بينما في هذه الفترة نفسها h متناقص و g لا يحافظ على الإشارة السالبة، وهذا يؤكد أن g ليس مشتقة h والنظر لباقي الفترات بالمنهجية نفسها يؤدي إلى ذات النتيجة. كذلك للاقتران g قيمة صغرى محلية عند $x=-2$، ونلاحظ أن $h(-2)=0$، ما يؤكد أن $g'(x)=h(x)$.
	$f(x)=x^a(1-x)^b, x\in[0,1], a>0, b>0$ $f'(x)=-bx^a(1-x)^{b-1}+ax^{a-1}(1-x)^b$ $=x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a(1-x)-bx)$ $=x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a-(a+b)x)$ $f'(x)=0 \rightarrow x=0, x=1, x=\frac{a}{a+b}$ بما أن a ، و b موجبان، فإن: $0<a<a+b$ وبقسمة حدود المتباينة على $(a+b)$ ينتج أن: $0<\frac{a}{a+b}<1$ أي أنّ العدد $\frac{a}{a+b}$ يقع ضمن مجال الاقتران f وهو $[0,1]$ إذن القيمة الحرجة في الفترة $(0,1)$هي: $x=\frac{a}{a+b}$ أجد قيمة الاقتران عند القيمة الحرجة وطرفي المجال. $f\left(\frac{a}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^a\left(1-\frac{a}{a+b}\right)^b=\left(\frac{a}{a+b}\right)^a\left(\frac{b}{a+b}\right)^b$ $f(0)=0, f(1)=0$ إذن القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي $f\left(\frac{a}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^a\left(\frac{b}{a+b}\right)^b$

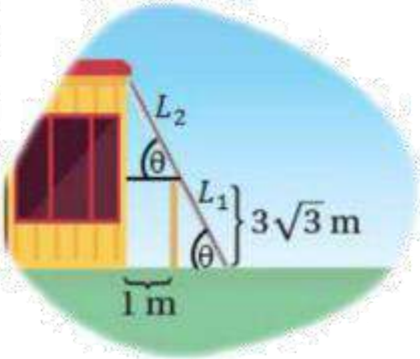
الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم يحيط سياج ارتفاعه $3\sqrt{3}$ m بمبنى، ويبعد عنه مسافة 1 m كما في الشكل المجاور. أجد طول أقصر سُلَّم قد يصل من الأرض إلى المبنى، ويمرُّ فوق السياج مُلامِسًا له.



مسألة اليوم صفحة 119

ليكن θ قياس الزاوية بين السلم والأرض، L طول السلم، كما في الشكل:



$$\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{L_1} \quad , \cos\theta = \frac{1}{L_2} \quad , 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

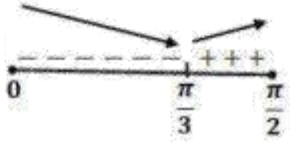
$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \ \rightarrow 3\sqrt{3}\cos^3\theta = \sin^3\theta$$

$$\rightarrow \tan^3\theta = 3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3$$

$$\rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ قيمة حرجة وحيدة، نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{d\theta}$:



للاقتران L قيمة صغرى محلية عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$

إذن أقل طول ممكن للسلم هو $L\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 6 + 2 = 8\ m$

أتحقق من فهمي صفحة 121

ليكن حجم الصندوق V ومساحة سطحه الكلية A

$$A = 4xh + x^2 = 1080 \quad \rightarrow h = \frac{1080 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{1080 - x^2}{4x}\right) = \frac{1}{4}(1080x - x^3), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1080}$$

$$V'(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{360}$$

القيمة الحرجة هي: $\sqrt{360}$

أجد حجم الصندوق عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$V(0) = 0$$

$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}(1080\sqrt{360} - 360\sqrt{360}) = 180\sqrt{360} = 1080\sqrt{10}$$

$$V(\sqrt{1080}) = 0$$

إذن يكون الحجم أكبر ما يمكن عندما $x = 6\sqrt{10}$ cm وعندها يكون الارتفاع $h = 3\sqrt{10}$ cm

أتحقق من فهمي صفحة 124

ليكن طول السياج L ومساحة الحظيرة A

$$A = xy = 245000 \quad \rightarrow y = \frac{245000}{x}$$

$$L = x + 2y$$

$$L(x) = x + \frac{490000}{x}, x > 0$$

$$L'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$

$$L'(x) = 0 \quad \rightarrow x = 700$$

قيمة x الحرجة هي: 700

$$L''(x) = \frac{980000}{x^3} \rightarrow \quad L''(700) = \frac{980000}{(700)^3} > 0$$

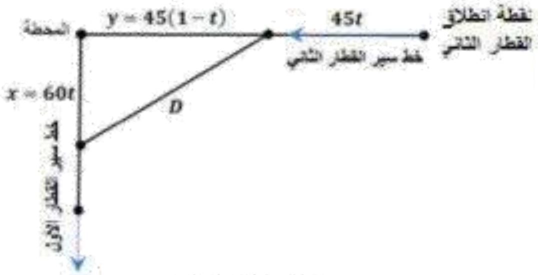
إذن، يكون طول سياج أقل ما يمكن عندما $x = 700$ m و $y = \frac{245000}{700} = 350$ m

أتحقق من فهمي صفحة 126

نفرض x بعد القطار الأول عن المحطة، y بعد القطار الثاني عن المحطة

ونفرض D البعد بين القطارين،

القطار الثاني استغرق ساعة واحدة للوصول إلى المحطة، إذن فقد انطلق من نقطة تبعد 45 كيلومترا عنها،



بعد t ساعة من انطلاقهما يكون: $x = 60t$ ، ويكون $y = 45 - 45t = 45(1-t)$

$$D(t) = \sqrt{(60t)^2 + \left(45(1-t)\right)^2} = \sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2} \quad ,0 \le t \le 1$$

$$D'(t) = \frac{7200t - 4050(1-t)}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}} = \frac{11250t - 4050}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$D'(t) = 0 \quad \to t = \frac{4050}{11250} = \frac{9}{25}$$

القيمة الحرجة هي: $t = \frac{9}{25}$

أجد المسافة D عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

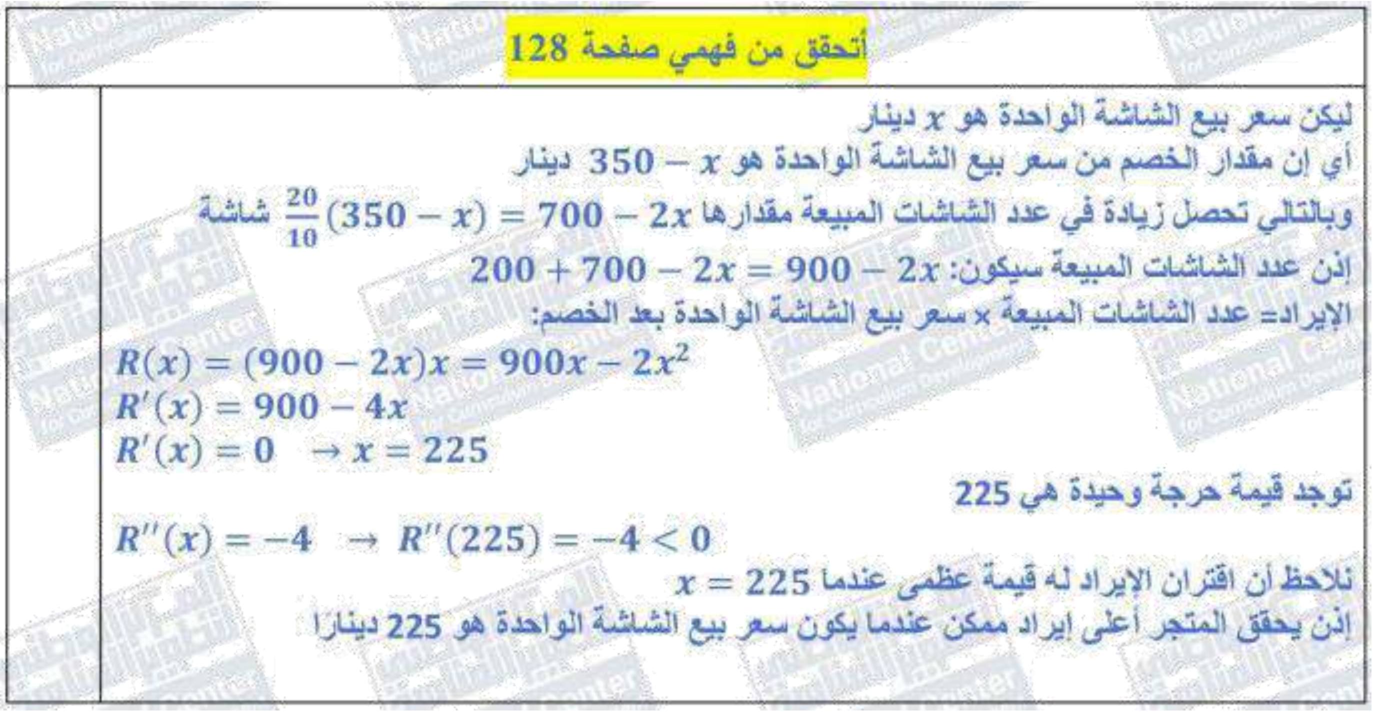
$$D(0) = \sqrt{2025} = 45$$

$$D(1) = \sqrt{3600} = 60$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{3600\left(\frac{9}{25}\right)^2 + 2025\left(1 - \frac{9}{25}\right)^2} = 36$$

إذن يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما عندما h $t = \frac{9}{25}$ أي بعد 21 دقيقة و36 ثانية

وتكون الساعة حينئذ $10:21:36$



أتحقق من فهمي صفحة 128

ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة هو x دينار

أي إن مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو $350 - x$ دينار

وبالتالي تحصل زيادة في عدد الشاشات المبيعة مقدارها $\frac{20}{10}(350 - x) = 700 - 2x$ شاشة

إذن عدد الشاشات المبيعة سيكون: $200 + 700 - 2x = 900 - 2x$

الإيراد= عدد الشاشات المبيعة x سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم:

$$R(x) = (900 - 2x)x = 900x - 2x^2$$
$$R'(x) = 900 - 4x$$
$$R'(x) = 0 \quad \rightarrow x = 225$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي 225

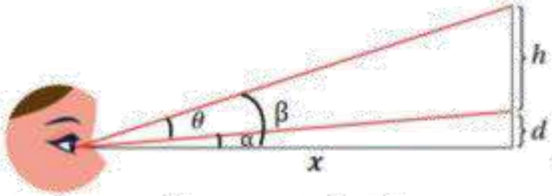
$$R''(x) = -4 \quad \rightarrow \quad R''(225) = -4 < 0$$

نلاحظ أن اقتران الإيراد له قيمة عظمى عندما $x = 225$

إذن يحقق المتجر أعلى إيراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 دينارا

أتحقق من فهمي صفحة 129

نسمي الأبعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل:



$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{h+d}{x}-\frac{d}{x}}{1+\frac{d(h+d)}{x^2}}\ ,x>0$$

$$\tan\theta\ =\frac{xh}{x^2+d(h+d)}$$

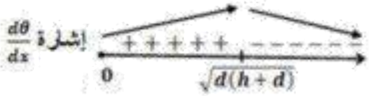
$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx}=\frac{\left(x^2+d(h+d)\right)(h)-xh(2x)}{\left(x^2+d(h+d)\right)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx}=\cos^2 x\times\frac{\left(-x^2+d(h+d)\right)(h)}{(x^2+d(h+d))^2}=0$$

بما أن $\theta<\frac{\pi}{2}$، فإن $\cos^2 x\neq 0$، إذن، $\left(-x^2+d(h+d)\right)(h)=0$

$$x^2=d(h+d)\ \rightarrow x=\sqrt{d(h+d)}$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي $x=\sqrt{d(h+d)}$



نستخدم اختبار المشتقة الأولى، وندرس إشارة $\frac{d\theta}{dx}$

أعوض $x=\sqrt{dh}$

$$\frac{d\theta}{dx}=\cos^2\sqrt{dh}\times\frac{(-dh+d(h+d))(h)}{(dh+d(h+d))^2}$$

$$=\cos^2\sqrt{dh}\times\frac{d^2h}{(dh+d(h+d))^2}>0$$

أعوض $x=\sqrt{d(2h+d)}$

$$\frac{d\theta}{dx}=\cos^2\sqrt{d(2h+d)}\times\frac{(-d(2h+d)+d(h+d))(h)}{(dh+d(h+d))^2}$$

$$=\cos^2\sqrt{d(2h+d)}\times\frac{-dh^2}{(dh+d(h+d))^2}<0$$

إذن يجب أن تبتعد سارة عن الجدار مسافة $\sqrt{d(h+d)}$ m لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن

تحقق من فهمي صفحة 131

لتكن النقطة (x, y) على منحنى $f(x) = \sqrt{8x}$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(4, 2)$ هي L حيث:

$$L = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{8x} - 2\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x - 4 + \left(\sqrt{8x} - 2\right)\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)}{\sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{8x} - 2\right)^2}} = \frac{x - \frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{8x} - 2\right)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{8x}} \rightarrow x\sqrt{8x} = 8 \rightarrow 8x^3 = 64 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{dx}$

إذن أقرب نقطة من نقاط المنحنى f للنقطة $(4, 2)$ هي: $(2, 4)$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 131

1

$$V(x) = (12 - x)(9 - 2x)x = 2x^3 - 33x^2 + 108x$$

2

حتى يتشكل لدينا صندوق، يجب أن تكون أبعاده كلها موجبة، وذلك بتحقق الشروط الثلاثة الآتية معا:

$$x > 0 \text{ و } 12 - x > 0 \text{ و } 9 - 2x > 0 \quad \rightarrow x > 0 \text{ و } x < 12 \text{ و } x < \frac{9}{2}$$

أي أن مجال الاقتران $V(x)$ هو $\left(0, \frac{9}{2}\right)$

3

$$V'(x) = 6x^2 - 66x + 108$$

$$V'(x) = 0 \quad \rightarrow 6(x-9)(x-2) = 0 \quad \rightarrow x = 9 \ , x = 2$$

القيمة 9 خارج المجال، إذن تهمل، فتكون القيمة الحرجة الوحيدة ضمن المجال هي $x = 2$

$$V''(x) = 12x - 66$$

$$V''(2) = 12(2) - 66 = -42 < 0$$

وعليه فإن حجم الصندوق يكون أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده: 2 m, 5 m, 10m،

ويكون حجمه عندئذ $V(2) = 100 \text{ m}^3$

لتكن النقطة (x, y) على منحنى العلاقة $4x^2 + y^2 = 4$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(0, 1)$ هي L حيث: $L = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{\frac{4-y^2}{4} + y^2 - 2y + 1}$ $= \sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}\ , y \in [-2, 2]$ $\frac{dL}{dy} = \frac{\frac{3}{4}y - 1}{\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}}$ $\frac{dL}{dy} = 0 \to y = \frac{4}{3}$ إذن توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال $L(y)$ هي $y = \frac{4}{3}$ وبمقارنة $L\left(\frac{4}{3}\right)$ مع $L(-2)$، و $L(2)$ نجد أن $L\left(\frac{4}{3}\right)$ قيمة صغرى مطلقة لأن: $L(-2) = \sqrt{3+4+2} = 3$ ، $L(2) = \sqrt{3-4+2} = 1$ ، $L\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.82$ تكون L قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $y = \frac{4}{3}$، وتكون $x = \mp\sqrt{\frac{4-y^2}{4}} = \mp\sqrt{\frac{4-\frac{16}{9}}{4}} = \mp\frac{\sqrt{5}}{3}$ إذن أقرب نقطتين من نقاط المنحنى إلى النقطة $(0, 1)$ هما: $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$، و $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$	4
المثلث قائم ومتطابق الضلعين، إذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته $\frac{\pi}{4}$ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ وهو يمر بالنقطة $A(1, 0)$ معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $y - 0 = -1(x-1) \to y = 1 - x$ إذن، الإحداثي y للنقطة P هو $1 - x$	5
مساحة المستطيل = طوله × عرضه $A = 2xy = 2x(1-x) = 2x - 2x^2\ , 0 < x < 1$	6
$A'(x) = 2 - 4x$ $A'(x) = 0 \to 2 - 4x = 0 \to x = \frac{1}{2}$ $A(0) = A(1) = 0,\ A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ للاقتران A قيمة عظمى مطلقة هي: $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ، إذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.	7
الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن هي: الطول: $2x = 1$، والعرض: $y = 1 - x = \frac{1}{2}$	8

9

$s_1 = s_2 \to 2\sin t = \sin 2t \quad ,t > 0$

$2\sin t - 2\sin t\cos t = 0$

$2\sin t\,(1 - \cos t) = 0$

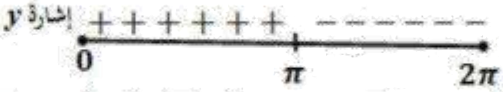
$\sin t = 0 \quad or \quad \cos t = 1$

$t = n\pi$ ، حيث n عدد طبيعي

لتكن المسافة الرأسية بين الكتلتين y حيث:

$y = |s_1 - s_2| = |2\sin t - \sin 2t|$

لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة ندرس إشارة $(2\sin t - \sin 2t)$ على الفترة $[0, 2\pi]$



$$y = \begin{cases} 2\sin t - \sin 2t, & 0 \le t \le \pi \\ \sin 2t - 2\sin t, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

① $y = 2\sin t - \sin 2t \quad ,0 \le t \le \pi$

$y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$

$y'(t) = 0 \quad \to 2\cos t - 2\cos 2t = 0 \quad \to 2\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) = 0$

$\to 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$

$\to (2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$

$\to \cos t = -\dfrac{1}{2} \quad or \quad \cos t = 1$

$\to t = \dfrac{2\pi}{3}, t = 0$

لإيجاد القيم القصوى نستطيع استخدام اختبار المشتقة الثانية:

$y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t$

$y''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -2\sin\dfrac{2\pi}{3} + 4\sin 2\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -3\sqrt{3} < 0$

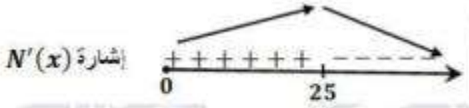
$y(0) = 0$

$y(\pi) = 0$

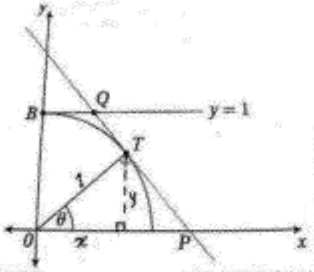
$y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\,sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - sin\,2\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

إذن أكبر قيمة لـ y في الفترة $[0, \pi]$ هي: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

10	❷ $y = \sin 2t - 2\sin t \ , \pi \le t \le 2\pi$ $y'(t) = 2\cos 2t - 2\cos t$ $y'(t) = 0 \ \rightarrow 2\cos 2t - 2\cos t = 0 \ \rightarrow 2(2\cos^2 t - 1) - 2\cos t = 0$ $\rightarrow 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$ $\rightarrow (2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$ $\rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \ \ or \ \ \cos t = 1$ $\rightarrow t = \frac{4\pi}{3}, t = 2\pi$ لإيجاد القيم القصوى نستطيع استخدام اختبار المشتقة الثانية: $y''(t) = -4\sin 2t + 2\sin t$ $y''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -4\sin\frac{8\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} - \sqrt{3} = -3\sqrt{3} < 0$ إذن، $y\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ قيمة عظمى $y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ، $y(2\pi) = 0$ ، $y(\pi) = 0$ إذن أكبر قيمة لـ y في الفترة $[\pi, 2\pi]$ هي: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ إذن، قيم t التي تكون عندها المسافة بين الكتلتين أكبر ما يمكن هي: $t = \frac{2\pi}{3}, t = \frac{4\pi}{3}$
11	$R(x) = xp(x) = 150x - 0.5x^2$
12	$P(x) = R(x) - C(x) = 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$ $= 150x - 0.75x^2 - 4000$
13	$P'(x) = 150 - 1.5x$ $P'(x) = 0 \ \rightarrow 150 - 1.5x = 0 \ \rightarrow x = 100$ $P''(x) = -1.5 \rightarrow P''(100) = -1.5 < 0$ إذن لتحقيق أكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدلة، وتكون عندها قيمة الربح: $P(100) = 15000 - 7500 - 4000 = 3500\,JD$
14	عندما $x = 100$ ، فإن سعر البدلة الواحدة يساوي: $p(100) = 150 - 0.5(100) = 100\,JD$

ليكن عدد الأشجار التي ستزرع في الفدان هو x شجرة حيث $x \geq 20$ إذن عدد الأشجار الزائدة على العشرين شجرة هو: $x-20$ سينقص عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة بمقدار $(x-20)$ صندوق ويكون عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة: $30-(x-20)=50-x$ سيكون اقتران الانتاج الكلي من الفدان:(عدد الأشجار× عدد الصناديق من كل شجرة) $N(x)=x(50-x)=50x-x^2$ $N'(x)=50-2x$ $N'(x)=0 \rightarrow 50-2x=0 \rightarrow x=25$  إذن يتحقق أكبر إنتاج عندما يتم زرع 25 شجرة في كل فدان.	15
ليكن L طول قوس القطاع الدائري المظلل، إذن: $P=r+r+L=2r+r\theta=r(2+\theta)$	16
لتكن A مساحة القطاع الدائري المظلل، اذن: $A=\frac{1}{2}r^2\theta$ وبما أن $P=r(2+\theta)$ فإن $\theta=\frac{P-2r}{r}=\frac{P}{r}-2$ $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r}-2\right)=\frac{1}{2}Pr-r^2$	17
$A'(r)=\frac{1}{2}P-2r$ $A'(r)=0 \rightarrow \frac{1}{2}P-2r=0 \rightarrow r=\frac{1}{4}P$ $A''(r)=-2 \rightarrow A''\left(\frac{1}{4}P\right)=-2<0$ تكون مساحة الحقل أكبر ما يمكن عندما $r=\frac{1}{4}P$	18

19



$$\sin\theta = \frac{y}{1}\ ,\cos\theta = \frac{x}{1}\quad \rightarrow T(\cos\theta\,,\sin\theta)$$

ميل OT يساوي $\tan\theta$ لأن زاوية ميله θ ، ومنه فان ميل TP يساوي $\frac{-1}{\tan\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$ لأنه يعامد OT

معادلة TP :

$$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta)\quad \rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -\cos\theta\,(x - \cos\theta)$$

$$\rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta \quad \rightarrow y\sin\theta + x\cos\theta = 1$$

20

$$A = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB)$$

لإيجاد OP نضع y=0 في معادلة المستقيم TP فنجد أنّ :

$$0 + x\cos\theta = 1 \rightarrow x = \frac{1}{\cos\theta} = OP$$

لإيجاد BQ نضع y=1 في معادلة المستقيم TP فنجد أنّ:

$$\sin\theta + x\cos\theta = 1 \rightarrow x = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = BQ$$

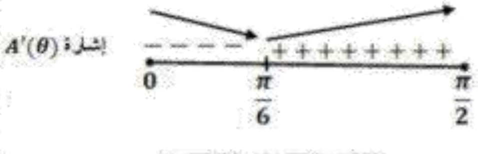
ومنه تكون مساحة شبه المنحرف هي:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1) = \frac{2-\sin\theta}{2\cos\theta}$$

21

$$A'(\theta) = \frac{(2\cos\theta)(-\cos\theta) - (2-\sin\theta)(-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos^2\theta}$$

$$A'(\theta) = 0 \quad \rightarrow 2\sin\theta - 1 = 0 \quad \rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$



تكون مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$

22

لتكن كمية الضوء المارّة خلال النافذة كاملة Q

$$Q = 3xy + \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3xy + \frac{1}{8}\pi x^2$$

محيط النافذة بالإضافة إلى القطعة الفاصلة بين الجزأين هو L

$$L = 2x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 10 \quad \rightarrow y = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$$

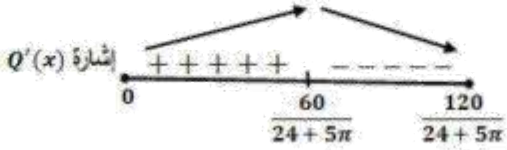
ومنه فإن كمية الضوء تصبح:

$$Q(x) = 3x\left(5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x\right) + \frac{1}{8}\pi x^2 \quad ,0 \le x \le \frac{120}{24 + 5\pi}$$

$$= 15x - \left(3 + \frac{5\pi}{8}\right)x^2$$

$$Q'(x) = 15 - \left(6 + \frac{5\pi}{4}\right)x$$

$$Q'(x) = 0 \quad \rightarrow x = \frac{60}{24+5\pi}$$



إذن تكون كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن عندما:

$$x = \frac{60}{24+5\pi} \text{ ، } y = \frac{60+10\pi}{24+5\pi}$$

23

$$L = AE + EB = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(9 - x)^2 + 49} \quad ,0 \le x \le 9$$

24

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{-(9 - x)}{\sqrt{(9 - x)^2 + 49}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \quad \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} = \frac{9 - x}{\sqrt{(9 - x)^2 + 49}} \quad \rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

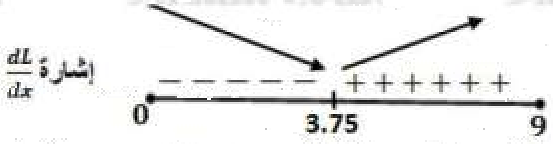
25

من الفرع السابق، بما أن $\sin\alpha = \sin\beta$ ، والزاويتان α و β حادتان، إذن $\beta = \alpha$

ومنه فإن $\tan\alpha = \tan\beta$ أي:

$$\frac{x}{5} = \frac{9 - x}{7} \quad \rightarrow 7x = 45 - 5x \quad \rightarrow 12x = 45 \quad \rightarrow x = \frac{15}{4} = 3.75$$

إذن قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن هي 3.75 km



26	ليكن حجم العلبة V ومساحة سطحها الكلية مع الغطاء A وارتفاعها h $A = 2(\pi x^2) + 2\pi xh + 2\pi x = 80\pi \rightarrow x^2 + (1+h)x = 40$ $\rightarrow h = \frac{40}{x} - x - 1$ $V = \pi x^2 h = \pi x^2\left(\frac{40}{x} - x - 1\right) = \pi(40x - x^3 - x^2)$ $\frac{dV}{dx} = \pi(40 - 3x^2 - 2x)$ $\frac{dV}{dx} = 0 \rightarrow \pi(40 - 3x^2 - 2x) = 0$ $\rightarrow 3x^2 + 2x - 40 = 0$ $\rightarrow (3x - 10)(x + 4) = 0 \rightarrow x = \frac{10}{3}$ $\frac{d^2V}{dx^2} = \pi(-6x - 2)$ $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right\vert_{x=\frac{10}{3}} = -22\pi < 0$ إذن قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن هي $x = \frac{10}{3}$
27	$V\left(\frac{10}{3}\right) = \pi(40\left(\frac{10}{3}\right) - \left(\frac{10}{3}\right)^3 - \left(\frac{10}{3}\right)^2) = \frac{2300}{27}\pi\ \text{cm}^3$
28	لتكن مساحة الغطاء الكلية A_c $A_c = \pi x^2 + 2\pi x(1) = \pi x(x + 2)$ $A_c\left(\frac{10}{3}\right) = \pi\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{10}{3} + 2\right) = \frac{160\pi}{9}$ النسبة المئوية للجزء المستعمل لصنع الغطاء من مساحة الصفيحة هي: $\frac{A_c}{80\pi} \times 100\% = \frac{\frac{160\pi}{9}}{80\pi} \times 100\% = \frac{200}{9}\% \approx 22.2\%$

29

$$T = T_{AD} + T_{DC} = \frac{200 - x}{10} + \frac{\sqrt{x^2 + 6400}}{6}$$

30

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 6400}}$$

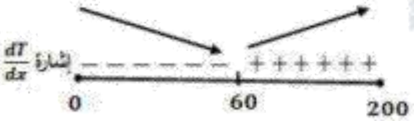
$$\frac{dT}{dx} = 0 \ \to \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 6400}} = \frac{1}{10}$$

$$\to 10x = 6\sqrt{x^2 + 6400}$$

$$\to 25\,x^2 = 9(x^2 + 6400)$$

$$\to 16x^2 = 9(6400)$$

$$\to x = 60 \text{ m}$$



إذن قيمة x التي يكون عندها الزمن T أقل ما يمكن هي: $x = 60$ m

31

ليكن L طول AB ، النقاط A و B و P على استقامة واحدة، إذن المثلثان القائمان AQP,PRB متشابهان،

ينتج عن ذلك: $\frac{BR}{1} = \frac{8}{x} \to BR = \frac{8}{x}$

$$L = AP + PB = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{64 + \left(\frac{8}{x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{\frac{64x^2 + 64}{x^2}} = \sqrt{1 + x^2} + \frac{8}{x}\sqrt{1 + x^2}$$

$$= \sqrt{1 + x^2}\left(1 + \frac{8}{x}\right) \quad ,x > 0$$

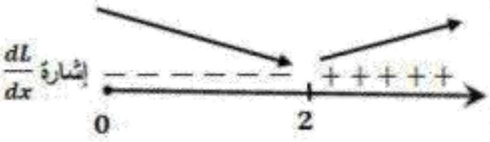
$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(1 + \frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$= \frac{-8\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

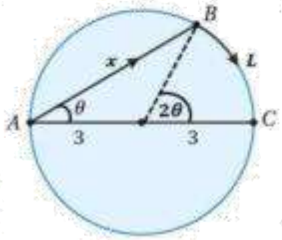
$$\frac{dL}{dx} = 0 \ \to \frac{8\sqrt{1 + x^2}}{x^2} = \frac{8 + x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\to 8(1 + x^2) = 8x^2 + x^3$$

$$\to x^3 = 8 \ \to x = 2$$



إذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي: $x = 2$ km



المثلث ABC قائم الزاوية في B لأن الزاوية ABC محيطية على قطر، ومنه فإن: $\cos\theta = \frac{x}{6}$

قياس الزاوية COB يساوي 2θ لأنها مركزية مشتركة مع المحيطية CAB بالقوس نفسه.

ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول إلى النقطة C هو T

$$T = T_{A\to B} + T_{B\to C} = \frac{x}{3} + \frac{L}{6}$$

$$= \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6} = 2\cos\theta + \theta \quad ,0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

32 $$\frac{dT}{d\theta} = 1 - 2\sin\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \ \to \sin\theta = \frac{1}{2} \ \to \theta = \frac{\pi}{6}$$

نقارن الزمن عند النقطة الحرجة مع الزمن عند طرفي المجال وهما $0, \frac{\pi}{2}$

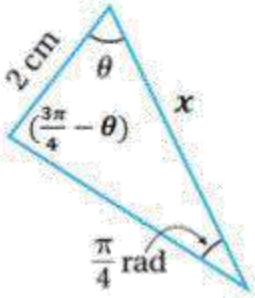
$$T(0) = 2\text{ h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.25\text{ h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57\text{ h}$$

إذن القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، أي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس $\overset{\frown}{AB}$ كاملا راكضا على اليابسة دون تجديف في الماء.

33



ليكن طول الضلع الآخر من ضلعي الزاوية θ هو x، فيكون قياس الزاوية المقابلة له هو $(\pi - \theta - \frac{\pi}{4})$ أي $\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$

ولتكن مساحة هذا المثلث A ، فإنّ: $A = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\theta$

وبتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث ينتج أن:

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)}$$

$$x = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

$$= 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$= 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$$

$$= \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

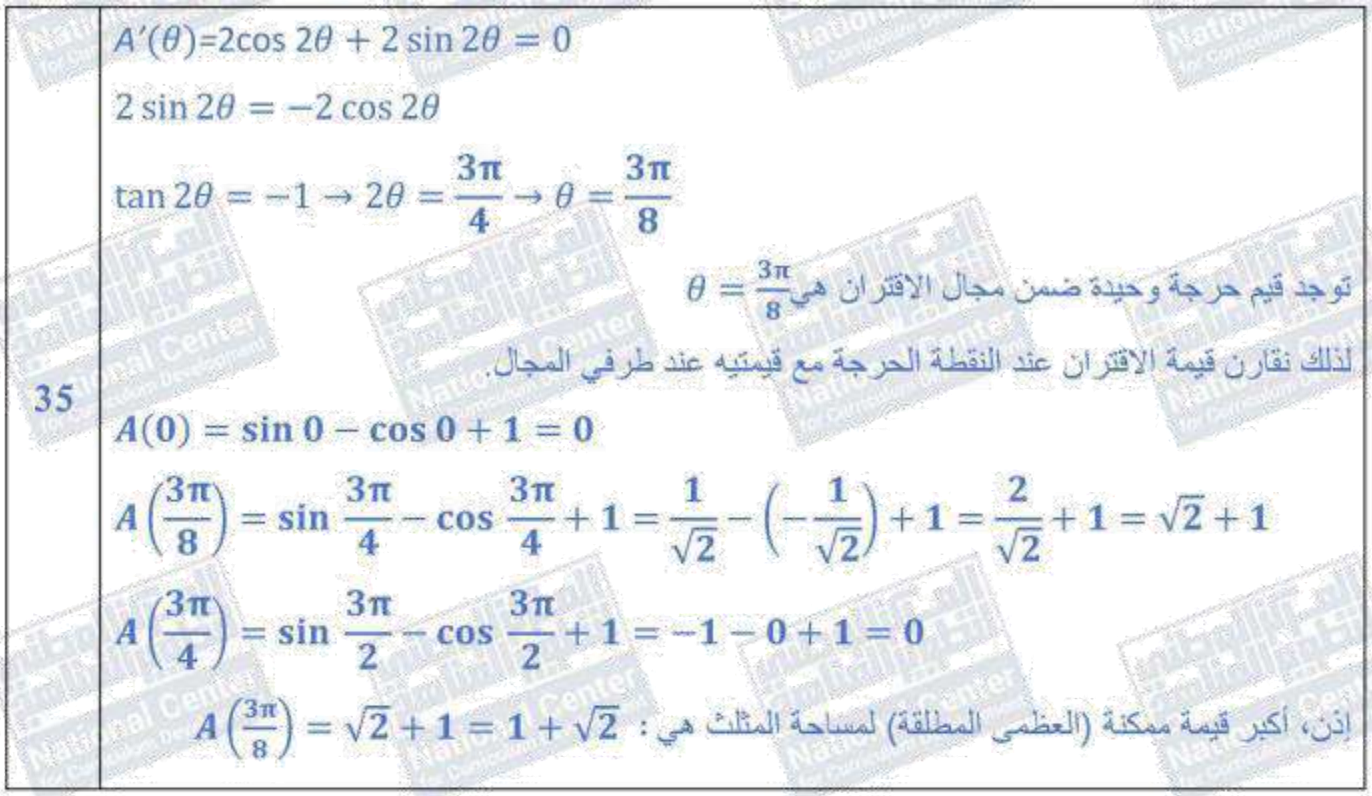
إذن، مساحة المثلث المعطى هي: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

34

المجال هو الفترة التي تكون فيها مساحة المثلث عددا حقيقيا موجبا وهو هنا الفترة $(0, \frac{3\pi}{4})$ التي طرفاها جذري اقتران المساحة لأن المساحة عند هذين الحدين تكون صفرا وعند أي عدد بينهما تكون عددا موجبا.

فإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{6}$، تكون مساحة المثلث:

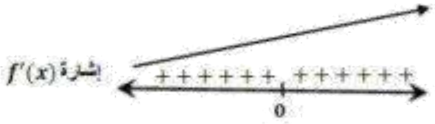
$$A = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 \approx 1.37 > 0$$



35	$A'(\theta)$=$2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$ $2\sin 2\theta = -2\cos 2\theta$ $\tan 2\theta = -1 \rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8}$ توجد قيم حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $\theta = \frac{3\pi}{8}$ لذلك نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال. $A(0) = \sin 0 - \cos 0 + 1 = 0$ $A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$ $A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2} + 1 = -1 - 0 + 1 = 0$ إذن، أكبر قيمة ممكنة (العظمى المطلقة) لمساحة المثلث هي : $A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$

اختبار نهاية الوحدة الثانية صفحة 136

1	b
2	c
3	c
4	d
5	b
6	b
7	d
8	c
9	$f(x) = 3x^2 - 2x^3 \quad ,[-5, 1]$ $f'(x) = 6x - 6x^2$ $f'(x) = 0 \quad \rightarrow 6x(1 - x) = 0 \quad \rightarrow x = 0 \, , x = 1$ مجموعة قيم x الحرجة ضمن الفترة (1 ,5−)هي: $x = 0$ نقارن قيم الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي الفترة: $f(0) = 0$ $f(1) = 1$ $f(-5) = 75 + 250 = 325$ إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(-5) = 325$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(0) = 0$
10	$f(x) = \frac{x}{x+3} \quad ,[-1, 6]$ $f'(x) = \frac{x+3-x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$ $f'(x) > 0$ لجميع قيم x ولذا فإن $f(x)$ متصل ومتزايد على مجاله. ولا يوجد له قيم حرجة ضمن (6 ,1−)، قيمه القصوى تكون عند طرفي مجاله. $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ، $f(6) = \frac{2}{3}$ إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(6) = \frac{2}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-1) = \frac{-1}{2}$

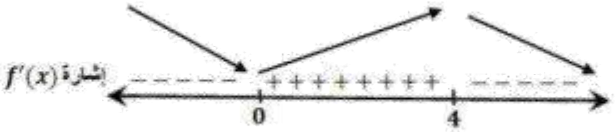
$f(x) = xe^{\frac{x}{2}} \quad ,[-3,1]$ $f'(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ $f'(x)=0 \ \rightarrow x=-2$ له قيمة حرجة وحيدة هي: $x=-2$ نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال $f(-3) = -3e^{\frac{-3}{2}} = \frac{-3}{\sqrt{e^3}} \approx -0.6694$ $f(-2) = -2e^{-1} = \frac{-2}{e} \approx -0.7358$ $f(1) = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$ إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(1) = e^{\frac{1}{2}}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-2) = \frac{-2}{e}$	11
$f(x) = 3\cos x \quad ,[0,2\pi]$ $f'(x) = -3\sin x$ $f'(x) = 0 \ \rightarrow \sin x = 0 \ \rightarrow x = 0 , x = \pi , 2\pi$ له قيمة حرجة وحيدة هي: $x = \pi$ نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال $f(0) = 3$ $f(\pi) = -3$ $f(2\pi) = 3$ إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي 3 $= f(0) = f(2\pi)$ ، وقيمة صغرى مطلقة هي 3− $= f(\pi)$	12
$f(x) = x^5 + x^3$ $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$ $f'(x) = 0 \ \rightarrow x^2(5x^2+3) = 0 \ \rightarrow x = 0$  الاقتران f متزايد على R وليس له قيم قصوى محلية ولا مطلقة.	13

14

$f(x) = x^4 e^{-x}$

$f'(x) = -x^4 e^{-x} + 4x^3 e^{-x} = e^{-x} x^3 (4 - x)$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow x = 0 \, , x = 4$



الاقتران f متزايد على $(0, 4)$ ومتناقص على $(-\infty, 0)$ و $(4, \infty)$

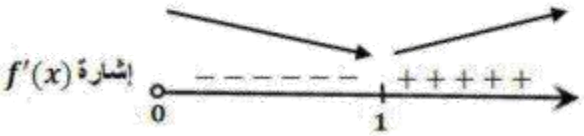
وله قيمة عظمى محلية هي $f(4) = \frac{256}{e^4}$ ، وقيمة صغرى محلية ومطلقة هي $f(0) = 0$

15

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x \, , \qquad x > 0$

$f'(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow x^2 = \frac{1}{x} \rightarrow x^3 = 1 \ \rightarrow x = 1$



الاقتران f متزايد على $(1, \infty)$ ومتناقص على $(0, 1)$

وله قيمة صغرى محلية ومطلقة هي $f(1) = \frac{1}{3}$

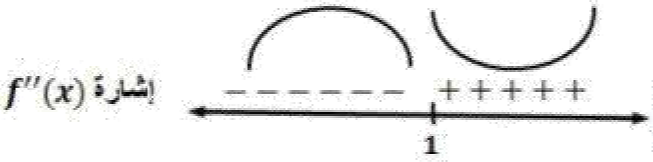
16

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \ \rightarrow x = 1$



الاقتران مقعر للأعلى في $(1, \infty)$ ومقعر للأسفل في $(-\infty, 1)$

وله نقطة انعطاف هي: $(1, -7)$

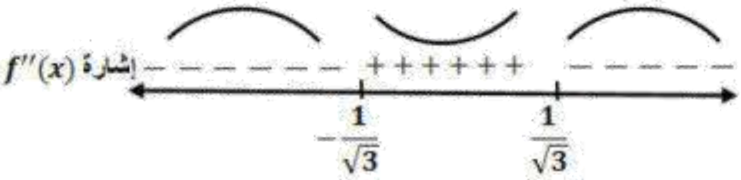
17

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0\ \to x^2=\frac{1}{3}\ \to x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



الاقتران مقعر للأعلى في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ومقعر للأسفل في $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$

وله نقطتا انعطاف هما: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$

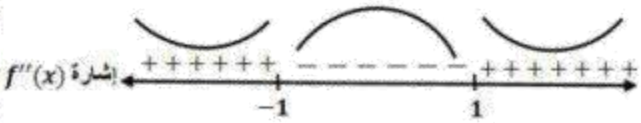
18

$$f(x)=(3-x^2)^2$$

$$f'(x)=2(3-x^2)(-2x)=4x^3-12x$$

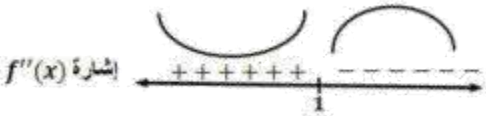
$$f''(x)=12x^2-12$$

$$f''(x)=0\ \to x^2=1\ \to x=\pm 1$$



الاقتران مقعر للأسفل في $(-1,1)$ ومقعر للأعلى في $(-\infty,-1)$ و $(1,\infty)$

وله نقطتا انعطاف هما: $(-1,4)(1,4)$

نلاحظ من الشكل أن إشارة الاقتران f'' كالآتي:  إذن منحنى f مقعر للأعلى في الفترة $(-\infty,1)$ ومقعر للأسفل في الفترة $(1,\infty)$	19
للاقتران f نقطة انعطاف عند $x = 1$	20
سعر المنتج الواحد هو: $p(x) = 5 - 0.002x$ إذن اقتران الإيراد: $R(x) = xp(x) = 5x - 0.002x^2$	21
$P(x) = R(x) - C(x) = 5x - 0.002x^2 - 3 - 1.1x$ $= 3.9x - 0.002x^2 - 3$	22
$P'(x) = 3.9 - 0.004x$ $P'(x) = 0 \quad \rightarrow x = \frac{3.9}{0.004} = \frac{3900}{4} = 975$ $P''(x) = -0.004 \quad \rightarrow P''(975) = -0.004 \quad < 0$ إذن أكبر ربح ممكن يتحقق عند إنتاج وبيع 975 قطعة أكبر ربح ممكن يساوي: $P(975) = 3.9(975) - 0.002(975)^2 - 3 = 1898.25\ JD$	23
$p(975) = 5 - 0.002(975) = 5 - 1.950 = 3.05\ JD$	24
$(b, f(b))$ نقطة قيمة صغرى محلية $(c, f(c))$ نقطة قيمة عظمى محلية $(r, f(r))$ نقطة قيمة صغرى محلية ومطلقة $(s, f(s))$ نقطة قيمة عظمى مطلقة	25

26

ليكن y طول الضلع الثالث لهذا الحقل

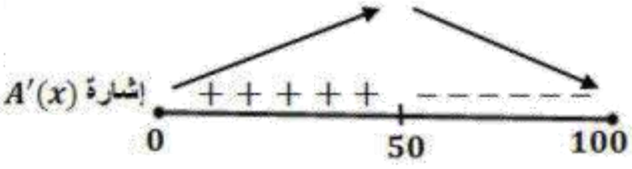
$$400 = x + 3x + y \ \to 4x + y = 400$$

$$A = \frac{1}{2}(x + 3x)(y) = \frac{1}{2}(4x)(400 - 4x)$$

$$A(x) \ = 800x - 8x^2 \quad ,0 \le x \le 100$$

$$A'(x) = 800 - 16x$$

$$A'(x) = 0 \ \to x = \frac{800}{16} = 50$$



إذن أكبر مساحة ممكنة هي: $A(50)$

$$A(50) = 800(50) - 8(50)^2 \ = 20000 \text{ m}^2$$

27

المعدلات المعطاة: سرعة البالون $\frac{dy}{dt} = 1ft/s$ ، وسرعة الدراجة $\frac{dx}{dt} = 17\ ft/s$

المطلوب: $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3}$

بعد t ثانية من مرور الدراجة يكون ارتفاع البالون فوق سطح الأرض هو: y = 65 + t

وتكون الدراجة قطعت مسافة أفقية هي: x = 17t

وتكون المسافة بين الدراجة والبالون هي s

ومن نظرية فيثاغورس نجد أن:

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$s^2 = (17t)^2 + (65 + t)^2$$

$$s = \sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(17t)(17) + 2(65 + t)(1)}{2\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}} = \frac{289t + 65 + t}{\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}}$$

$$= \frac{290t + 65}{\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = \frac{290(3) + 65}{\sqrt{(17 \times 3)^2 + (65 + 3)^2}} = \frac{935}{85} = 11 \text{ ft/s}$$

إذن تتزايد المسافة بين البالون والدراجة بمعدل 11 قدما في الثانية وذلك بعد مرور 3 ثوان من لحظة مرور الدراجة تحت البالون.

جيل

2005

الرياضيات كما ينبغي أن تكون

تتضمن الوحدة:

١ - الأمثلة

٢ - أتحقق من فهمي

٣ - التمارين

٤ - اختبار نهاية الوحدة

مع الاجابات الكاملة لكل منها