الوحدة الرابعة

التكامل

الثاني الثانوي الأدبي

حل تمارين الكتاب

اعداد المعلمة : ميسون الحسنين

٠٧٩٨٩٥٩٠٧١

الأسئلة

التكامل غير المحدود

١) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\int \frac{١}{٢}\,\text{دس}$

ب) $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{٥}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

جـ) $\int (٢ - \text{س}^{٢})\,\text{دس}$

د) $\int ٣\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

هـ) $\int \frac{-٢}{\text{س}^{-٥}}\,\text{دس}$

٢) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\int (١٠\text{س}^{٢} - \sqrt[٦]{\text{س}} + ٣\text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

ب) $\int (٢ - \text{س})(٤\text{س} + ١)\,\text{دس}$

جـ) $\int ٣\text{ظاس جتاس}\,\text{دس}$

د) $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨}{\text{س} + ٢}\,\text{دس}$ ، $\text{س} \neq -٢$

٣) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = ٥$، حيث $\text{ص} = \int \frac{٤\text{س}+١}{\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{س} \neq ٠$

٤) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان $\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س} - ٨\text{س}^{٣} + ٥$، وكان $\text{ق}(-١) = ٢٠$،

فجد قاعدة الاقتران ق.

٥) إذا كان $\int \text{ع}'(\text{س})\,\text{دس} = ٦\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٥$، فجد $\text{ع}'(١)$.

٦) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٢س − ٥ ، وكان ق(٢) = ٤، فجد قيمة ق(١).

٧) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٣س(٦ − ٥س) + ٤س^٣ ، وكان ق(٢) = −١، فجد قيمة ق(١).

٨) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = $\frac{\text{س}^2 + ٦\text{س} + ٨\text{س}^3}{\text{س}}$، س ≠ صفرًا، وكان ق(١) = ١٢، فجد قاعدة الاقتران ق.

٩) إذا كان ل اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان لَ(س) = ٦س^٢ − ٦س^٣ − ٢س، فجد قيمة ل(٣) − ل(١).

س١ جد كلاً مما يأتي:

أ) $\int \frac{1}{2}\,.\,d\text{س} = \frac{1}{2}\text{س} + \text{جـ}$

ب) $\int \frac{d\text{س}}{\text{س}^{5}} = \int \text{س}^{-5}\,.\,d\text{س}$

$= \frac{\text{س}^{-5+1}}{-5+1} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{-4}}{-4} + \text{جـ}$

$-\frac{1}{4\text{س}^{4}} + \text{جـ}$.

جـ) $\int (2 - \text{س}^{2})\,.\,d\text{س} =$

$2\text{س} - \frac{\text{س}^{3}}{3} + \text{جـ}$.

د) $\int 3\text{س}^{2}\,d\text{س} =$

$\frac{3\text{س}^{3}}{3} + \text{جـ} = \text{س}^{3} + \text{جـ}$

هـ) $\int \frac{-2}{\text{س}^{-5}}\,.\,d\text{س} =$

$\int -2\,\text{س}^{5}\,.\,d\text{س} =$

$\frac{-2}{6}\text{س}^{6} + \text{جـ}$

$-\frac{1}{3}\text{س}^{6} + \text{جـ}$.

س٢ جد كلاً مما يلي:

أ) $\int (10\text{س}^{2} - \sqrt[6]{\text{س}} + 3\,\text{قا}^{2}\text{س})\,.\,d\text{س}$

$= \int (10\text{س}^{2} - \text{س}^{\frac{1}{6}} + 3\,\text{قا}^{2}\text{س})\,d\text{س}$

$= \frac{10}{3}\text{س}^{3} - \frac{\text{س}^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + 3\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

$= \frac{10}{3}\text{س}^{3} - \frac{\text{س}^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + 3\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

$= \frac{10}{3}\text{س}^{3} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{\text{س}^{7}} + 3\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

ب) $\int (2 - \text{س})(4\text{س} + 1)\,d\text{س} =$

$\int (8\text{س} + 2 - 4\text{س}^{2} - \text{س})\,d\text{س} =$

$\int (7\text{س} + 2 - 4\text{س}^{2})\,.\,d\text{س} =$

$\frac{7\text{س}^{2}}{2} + 2\text{س} - \frac{4\text{س}^{3}}{3} + \text{جـ}$.

جـ) $\int 3\,\text{ظاس}\,\text{جتاس}\,d\text{س}$

$\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\int 3\,\frac{\text{جاس}}{\cancel{\text{جتاس}}}\,\cancel{\text{جتاس}}\,d\text{س}$.

$\int 3\,\text{جاس}\,d\text{س} = -3\,\text{جتاس} + \text{جـ}$

تابع اسئلة الكتاب

س٢ د) $\int \frac{س^٢ + ٦س + ٨}{س + ٢} \, .دس$.

نحلل البسط .

$\int \frac{(س+٤)\cancel{(س+٢)}}{\cancel{س+٢}} \, .دس$

$\int (س+٤) \, .دس = \frac{س^٢}{٢} + ٤س + جـ$

س٣ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٥$ حيث

$ص = \int \frac{٤س + ١}{س} \, دس$ نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس} = \frac{د}{دس} \int \frac{٤س + ١}{س} \, .دس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤س + ١}{س}$.

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٥} = \frac{٤ \times ٥ + ١}{٥} = \frac{٢١}{٥}$.

س٤ $ق'(س) = ٦س - ٨س^٣ + ٥$ ، $ق(-١) = ٢$

جد قاعدة الاقتران ق .

$ق(س) = \int ق'(س) \, .دس$.

$ق(س) = \int (٦س - ٨س^٣ + ٥) \, .دس$

$= \frac{٦س^٢}{٢} - \frac{٨س^٤}{٤} + ٥س + جـ$

$ق(س) = ٣س^٢ - ٢س^٤ + ٥س + جـ$

لكن $ق(-١) = ٢$

$ق(-١) = ٣(-١)^٢ - ٢(-١)^٤ + ٥(-١) + جـ$

$٢ = ٣ - ٢ - ٥ + جـ$

$\underset{+٤}{٢} = \underset{+٤}{-٤} + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٦}$

$ق(س) = ٣س^٢ - ٢س^٤ + ٥س + ٦$.

س٥ $\int ع'(س) \, دس = ٦س^٣ - ٣س^٢ + ٦س - ٥$ جد $ع'(١)$

$ع(س) + جـ = ٦س^٣ - ٣س^٢ + ٦س - ٥$

$ع'(س) = ١٨س^٢ - ٦س + ٦$

$ع'(١) = ١٨(١)^٢ - ٦(١) + ٦$

$= ١٨ - ٦ + ٦$

$ع'(١) = ١٨$.

س٦ $ق'(س) = ٢س - ٥$ ، $ق(٢) = ٤$ جد $ق(١)$.

$ق(س) = \int ق'(س) \, .دس$.

$= \int (٢س - ٥) \, .دس$

$ق(س) = \frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}} - ٥س + جـ$

$ق(٢) = ٢^٢ - ٥ \times ٢ + جـ$

$٤ = ٤ - ١٠ + جـ$

$\underset{+٦}{٤} = \underset{+٦}{-٦} + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ١٠}$

$ق(س) = س^٢ - ٥س + ١٠$

$ق(١) = ١^٢ - ٥ \times ١ + ١٠$

$= -٤ + ١٠ = ٦$

س٧ $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}(٦ - ٥\text{س}) + ٤\text{س}^٣$

$\text{ق}(٢) = -١$ جد قيمة $\text{ق}(١)$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}(٦ - ٥\text{س}) + ٤\text{س}^٣$

$= ١٨\text{س} - ١٥\text{س}^٢ + ٤\text{س}^٣$

$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س}) \cdot \text{دس}$.

$= \int (١٨\text{س} - ١٥\text{س}^٢ + ٤\text{س}^٣)\,\text{دس}$

$= \frac{١٨\text{س}^٢}{٢} - \frac{١٥\text{س}^٣}{٣} + \frac{٤\text{س}^٤}{٤} + \text{جـ}$

$\text{ق}(\text{س}) = ٩\text{س}^٢ - ٥\text{س}^٣ + \text{س}^٤ + \text{جـ}$

$\text{ق}(٢) = ٩(٢)^٢ - ٥(٢)^٣ + ٢^٤ + \text{جـ}$

$-١ = ٣٦ - ٤٠ + ١٦ + \text{جـ}$

$-١ = ١٢ + \text{جـ}$

$-١٢ \qquad -١٢$

$\text{جـ} = -١٣$

$\text{ق}(\text{س}) = ٩\text{س}^٢ - ٥\text{س}^٣ + \text{س}^٤ - ١٣$

$\text{ق}(١) = ٩(١)^٢ - ٥(١)^٣ + (١)^٤ - ١٣$

$= ٩ - ٥ + ١ - ١٣$

$= -٨$.

س٨ $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٨\text{س}^٣}{\text{س}}$

$\text{ق}(١) = ١٢$ ، جد قاعدة الاقتران ق .

$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س}) \cdot \text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٨\text{س}^٣}{\text{س}} \cdot \text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س} + ٦ + ٨\text{س}^٢)}{\cancel{\text{س}}} \cdot \text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \int (\text{س} + ٦ + ٨\text{س}^٢) \cdot \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٦\text{س} + \frac{٨\text{س}^٣}{٣} + \text{جـ}$

$\text{ق}(١) = \frac{(١)^٢}{٢} + ٦(١) + \frac{٨(١)^٣}{٣} + \text{جـ}$

$١٢ = \frac{١}{٢} + ٦ + \frac{٨}{٣} + \text{جـ}$

$١٢ = \frac{٥٥}{٦} + \text{جـ} \leftarrow \text{جـ} = ١٢ - \frac{٥٥}{٦}$

$\text{جـ} = \frac{١٧}{٦}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٦\text{س} + \frac{٨\text{س}^٣}{٣} + \frac{١٧}{٦}$.

س٩ $\text{ل}'(\text{س}) = ٦\text{س}^٢ - ٦\text{س}^٣ - ٢\text{س}$ جد $\text{ل}(٣) - \text{ل}(١)$

$\text{ل}(\text{س}) = \int (٦\text{س}^٢ - ٦\text{س}^٣ - ٢\text{س}) \cdot \text{دس}$

$= \frac{\cancel{٦}\text{س}^٣}{\cancel{٣}} - \frac{\cancel{٦}\text{س}^٤}{\cancel{٤}} - \frac{\cancel{٢}\text{س}^٢}{\cancel{٢}} + \text{جـ}$

$\text{ل}(٣) - \text{ل}(١) =$

$٢(٣)^٣ - \frac{٣}{٢}(٣)^٤ - ٣^٢ + \cancel{\text{جـ}} - ٢(١) + \frac{٣(١)}{٢} + ١ - \cancel{\text{جـ}}$

$٥٤ - \frac{٢٤٣}{٢} - ٩ - ٢ + \frac{٣}{٢} + ١$

$٤٤ - \frac{٢٤٠}{٢} = ٤٤ - ١٢٠ = -٧٦$

التكامل المحدود

الأسئلة

١) احسب قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{١}^{٦} -٢ \, \text{ءس}$

ب) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{٨\sqrt[٣]{\text{س}}} \, \text{ءس}$

جـ) $\int_{٠}^{٦} (٢\text{س} + ٨\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٤} + ٧) \, \text{ءس}$

هـ) $\int_{-٢}^{٢} (٣\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) \, \text{ءس}$

٢) إذا كان $\int_{-١}^{\text{م}} ٤ \, \text{ءس} = ٢٠$، فجد قيمة الثابت م.

٣) إذا كان الاقتران ق مُعرَّفًا على الفترة [١، ٥]، وكان $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$، فجد قيمة ق(٥) − ق(١).

٤) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_{٢}^{٢} (٤\text{س} - ٦\text{س}^{٢} + ٣) \, \text{ءس}$

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{١}^{٢} ٣\text{س}(٤ - ٢\text{س}^{٢}) \, \text{ءس}$

ب) $\int_{١}^{-١} (٢\text{س} - ٣)^{٢} \, \text{ءس}$

جـ) $\int_{٠}^{-٢} \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٧}{\text{س} - ١} \, \text{ءس}$

٦) إذا كان $\int_{٥}^{٢} \text{ق}'(\text{س}) \, \text{ءس} = ١٣$، وكان ق(٥) = −١٧، فجد قيمة ق(٢).

س١ احسب قيم التكاملات التالية :

أ) $\int_{1}^{6} -2\,دس = -2س\Big]_{1}^{6}$

$= -2\times6 - -2\times1$

$= -12 + 2 = -10$

ب) $\int_{8}^{1} \frac{1}{8\sqrt[3]{س}}\,.دس = \int_{8}^{1} \frac{1}{8س^{\frac{1}{3}}}\,.دس$

$\int_{8}^{1} \frac{1}{8} س^{-\frac{1}{3}}\,.دس = \frac{1}{8} \frac{س^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\Big]_{8}^{1}$

$\frac{1}{8} \frac{س^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big]_{8}^{1} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{س^2}\Big]_{8}^{1}$

$\frac{3}{16}\sqrt[3]{1^2} - \frac{3}{16}\sqrt[3]{8^2}$

$\frac{3}{16}\times1 - \frac{3}{16}\times2^2$

$\frac{3}{16} - \frac{12}{16}$

$\frac{-9}{16}$

ج) $\int_{0}^{6} (2س + 8س^3 - 5س^4 + 7)\,دس$

$\frac{2س^2}{2} + \frac{8س^4}{4} - \frac{5س^5}{5} + 7س\Big]_{0}^{6}$

$س^2 + 2س^4 - س^5 + 7س\Big]_{0}^{6}$

$6^2 + 2(6)^4 - 6^5 + 7\times6 - صفر$

$36 + 2\times1296 - 7776 + 42$

$= 36 + 2592 - 7776 + 42 =$

$78 - 5184 = -5106$

د) $\int_{-2}^{2} (3س-2)(س+1)\,دس =$

$= \int_{-2}^{2} (3س^2 + 3س - 2س - 2)\,دس =$

$\int_{-2}^{2} (3س^2 + س - 2)\,دس$

$\frac{\cancel{3}س^3}{\cancel{3}} + \frac{س^2}{2} - 2س\Big]_{-2}^{2}$

$2^3 + \frac{2^2}{2} - 2\times2 - \left((-2)^3 + \frac{(-2)^2}{2} - 2\times-2\right)$

$8 + 2 - 4 - (-8 + 2 + 4)$

$= 6 - -2$

$= 6 + 2$

$= 8$

س٢ $\int_{-1}^{\text{م}} ٤\,\text{دس} = ٢٠$ جد قيمة م ؟

الحل : $٤\text{س}\Big]_{-1}^{\text{م}} = ٢٠$

$٤\text{م} - ٤ \times -١ = ٢٠$

$٤\text{م} + ٤ = ٢٠$
$\quad\; -٤ \qquad -٤$

$\frac{٤\text{م}}{٤} = \frac{١٦}{٤} \Leftarrow \text{م} = ٤ .$

س٣ $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$ جد قيمة $\text{ق}(٥) - \text{ق}(١)$

$\int_{1}^{5} \text{ق}'(\text{س}) . \text{دس} = \int_{1}^{5} ٢\text{س} + ١ . \text{دس}$

$\text{ق}(\text{س})\Big]_{1}^{5} = \frac{\cancel{٢}\text{س}^٢}{\cancel{٢}} + \text{س}\Big]_{1}^{5}$

$\text{ق}(٥) - \text{ق}(١) = ٥^٢ + ٥ - (١^٢ + ١)$

$= ٢٥ + ٥ - ٢$

$\text{ق}(٥) - \text{ق}(١) = ٢٨$

س٤ $\int_{2}^{2} (٤\text{س} - ٦\text{س}^٢ + ٣)\,\text{دس} = \text{صفر} .$

س احسب قيمة التكاملات التالية :

أ) $\int_{1}^{2} ٣\text{س}\,(٤ - ٢\text{س}^٢)\,\text{دس} =$

$\int_{1}^{2} (١٢\text{س} - ٦\text{س}^٣) . \text{دس} =$

$\Big[\frac{١٢\text{س}^٢}{٢} - \frac{٦\text{س}^٤}{٤}\Big]_{1}^{2}$

$\Big[٦\text{س}^٢ - \frac{٣}{٢}\text{س}^٤\Big]_{1}^{2}$

$٦(٢)^٢ - \frac{٣}{٢}(٢)^٤ - (٦(١)^٢ - \frac{٣}{٢}(١)^٤)$

$٢٤ - ٢٤ - (٦ - \frac{٣}{٢})$

$\text{صفر} - \frac{٩}{٢} = -\frac{٩}{٢} .$

ب) $\int_{1}^{-1} (٢\text{س} - ٣)^٢\,\text{دس}$

تذكر $(\text{أ}+\text{ب})^٢$ = مربع الاول + ٢× الاول × الثاني + مربع الثاني
$(\text{أ}+\text{ب})^٢ = \text{أ}^٢ + ٢ \times \text{أ} \times \text{ب} + \text{ب}^٢$

$\int_{1}^{-1} (٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٩)\,\text{دس}$

$\Big[\frac{٤\text{س}^٣}{٣} - \frac{١٢\text{س}^٢}{٢} + ٩\text{س}\Big]_{1}^{-1}$

$\Big(\frac{٤(-١)^٣}{٣} - ٦(-١)^٢ + ٩(-١)\Big) - \Big(\frac{٤(١)^٣}{٣} - ٦(١)^٢ + ٩\Big)$

$-\frac{٤}{٣} - \cancel{٦} - ٩ - \frac{٤}{٣} + \cancel{٦} - ٩$

$-١٨ - \frac{٨}{٣} = \frac{-٥٤ - ٨}{٣} = \frac{-٦٢}{٣}$

خصائص التكامل المحدد

الأسئلة

١) إذا كان $\int_{١}^{٤}$ ٢ق(س) دس = ١٢، $\int_{٤}^{٥}$ ق(س) دس = ٤، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٤}^{١}$ ٣ق(س) دس　　　　ب) $\int_{٥}^{١}$ ق(س) دس

جـ) $\int_{٥}^{٤}$ (ق(س) + ٢س) دس

٢) إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ $\frac{\text{ل(س)}}{٢}$ دس = ٣، $\int_{٢}^{-١}$ (هـ(س) + ١) دس = ٥، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٢}^{-١}$ هـ(س) دس　　　　ب) $\int_{-١}^{٢}$ (٣هـ(س) − ٢س + ٣ل(س)) دس

٣) إذا كان $\int_{أ-١}^{٥أ+٧}$ ق(س) دس = ٠، فجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان $\int_{٣}^{م}$ (٢ − ٤س) دس = ٠، فجد قيمة الثابت م.

٥) إذا كان $\int_{٤}^{١}$ (٣ق(س) − ٥) دس = ٩، فجد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{١}^{٤}$ (٢ق(س) + ١) دس

٦) إذا كان $\int_{٠}^{ل}$ (٢س − ١) دس = ٦، فجد قيمة الثابت ل.

س١ إذا كان $\int_{1}^{4} 2ق(س)\, دس = 12$ ، $\int_{4}^{5} ق(س)\, دس = 4$ جد قيمة ما يلي :

أ) $\int_{4}^{1} 3ق(س)\, دس = 3\int_{4}^{1} ق(س)\, دس$

$= 3 \times -6$

$= -18$

$\frac{2}{2}\int_{1}^{4} ق(س) . دس = \frac{12}{2}$

$\int_{1}^{4} ق(س) . دس = 6 \Leftarrow \int_{4}^{1} ق(س) . دس = -6$

ب) $\int_{5}^{1} ق(س)\, دس = \int_{5}^{4} ق(س)\, دس + \int_{4}^{1} ق(س)\, دس$

$= -4 + -6$

$= -10$

جـ) $\int_{5}^{4} (ق(س) + 2س)\, دس =$

$= \int_{5}^{4} ق(س)\, دس + \int_{5}^{4} 2س . دس$

$-4 + \left[\frac{2س^{2}}{2}\right]_{5}^{4}$

$-4 + (4^{2} - 5^{2})$

$-4 + 16 - 25 = -13$

س٢ إذا كان $\int_{-1}^{2} \frac{ل(س)}{2}\, دس = 3$ ، $\int_{2}^{-1} (هـ(س) + 1)\, دس = 5$ فجد قيمة كل مما يلي

أ) $\int_{2}^{-1} هـ(س) . دس$.

$\int_{2}^{-1} (هـ(س) + 1)\, دس = 5$

$\int_{2}^{-1} هـ(س)\, دس + \int_{2}^{-1} 1 . دس = 5$

$\int_{2}^{-1} هـ(س)\, دس + 1(-1-2) = 5$

$\int_{2}^{-1} هـ(س)\, دس + -3 = 5$

$\int_{2}^{-1} هـ(س)\, دس = 8$.

ب) $\int_{-1}^{2} (3هـ(س) - 2س + 3ل(س))\, دس$

$3\int_{-1}^{2} هـ(س)\, دس - \int_{-1}^{2} 2س . دس + 3\int_{-1}^{2} ل(س)\, دس$

$3 \times -8 - [س^{2}]_{-1}^{2} + 3 \times 6$

$-24 - (4 - 1) + 18$

$-24 - 3 + 18 = -27 + 18$

$= -9$.

$\int_{-1}^{2} \frac{ل(س)}{2}\, دس = 3 \Leftarrow \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} ل(س) . دس = 3$

$\Leftarrow \int_{-1}^{2} ل(س) . دس = 6$

س٣ اذا كان $\int_{\text{أ}-١}^{٥\text{أ}+٧} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} = \text{صفر}$ فجد قيمة أ ؟

الحل:

$٥\text{أ} + ٧ = \text{أ} - ١$

$-\text{أ} \qquad -\text{أ}$

$٤\text{أ} + ٧ = -١ \Leftarrow \frac{٤\text{أ}}{٤} = \frac{-٨}{٤}$

$\boxed{\text{أ} = -٢}$

س٤ اذا كان $\int_{٣}^{\text{م}} (٢ - ٤\text{س}) \, \text{دس} = \text{صفر}$ جد قيمة م ؟

الحل: $\left[٢\text{س} - \frac{٤\text{س}^٢}{٢} \right]_{٣}^{\text{م}} = \text{صفر} .$

$\left[٢\text{س} - ٢\text{س}^٢ \right]_{٣}^{\text{م}} = \text{صفر}$

$٢\text{م} - ٢\text{م}^٢ - (٢ \times ٣ - ٢ \times ٣^٢) = \text{صفر}$

$٢\text{م} - ٢\text{م}^٢ - (٦ - ١٨) = \text{صفر}$

$٢\text{م} - ٢\text{م}^٢ - -١٢ = \text{صفر}$

$(-٢\text{م}^٢ + ٢\text{م} + ١٢ = \text{صفر})$ نقسم على -٢

$\text{م}^٢ - \text{م} - ٦ = \text{صفر}$

$(\text{م} - ٣)(\text{م} + ٢) = \text{صفر}$

$\text{م} - ٣ = \text{صفر} \Leftarrow \text{م} = ٣$

$\text{م} + ٢ = \text{صفر} \Leftarrow \text{م} = -٢ .$

س٥ $\int_{٤}^{١} (٣\text{ق(س)} - ٥) \, \text{دس} = ٩ \Leftarrow$

$٣\int_{٤}^{١} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} - \int_{٤}^{١} ٥ \cdot \text{دس} = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} - ٥(١ - ٤) = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} - ٥ \times -٣ = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} \text{ق(س)} \, \text{دس} + ١٥ = ٩$

$-١٥ \qquad -١٥$

$\frac{٣}{٣}\int_{٤}^{١} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} = \frac{-٦}{٣}$

$\int_{٤}^{١} \text{ق(س)} \, \text{دس} = -٢$

$\int_{١}^{٤} (٢\text{ق(س)} + ١) \, \text{دس} =$

$٢\int_{١}^{٤} \text{ق(س)} \, \text{دس} + \int_{١}^{٤} ١ \, \text{دس} .$

$٢ \times ٢ + ١(٤ - ١)$

$٤ + ٣ = ٧ .$

س٦ $\int_{٠}^{\text{ل}} (٢\text{س} - ١) \, \text{دس} = ٦$

$\left[\text{س}^٢ - \text{س} \right]_{٠}^{\text{ل}} = ٦$

$\text{ل}^٢ - \text{ل} = ٦$

$\text{ل}^٢ - \text{ل} - ٦ = \text{صفر}$

$(\text{ل} - ٣)(\text{ل} + ٢) = \text{صفر}$

$\text{ل} - ٣ = \text{صفر} \Leftarrow \text{ل} = ٣$

$\text{ل} + ٢ = \text{صفر} \Leftarrow \text{ل} = -٢$

الأسئلة

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (١ - ٢س)(س - س^{٢})^{٤} \, ءس$

ب) $\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٢)^{٢}} \, ءس$

جـ) $\int (٢س - ٣س^{٢}) \, قا^{٢}(س^{٢} - س^{٣}) \, ءس$

د) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}} \, ءس$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[٣]{(٣س - ٢)^{٢}} \, ءس$

ب) $\int (س - ١)(٢س^{٢} - ٤س + ١)^{٥} \, ءس$

جـ) $\int ٢ \, قا^{٢}(٢ - س) \, ءس$

د) $\int ٢س^{٣} \, جا(س^{٤} + ١) \, ءس$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤س + ١} \, ءس$

ب) $\int_{-١}^{-١} ٣س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٣} \, ءس$

جـ) $\int_{١}^{٢} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١} \, ءس$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}} \, ءس$

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٢}^{٣} ٣س^{٢} \, قَ(س^{٣}) \, ءس$

٥) إذا علمت أن $\int_{٠}^{٢} ق(س) \, ءس = ٣$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢} ٨س \, ق(س^{٢} + ١) \, ءس$

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

س١ أ) $\int (1-2\text{س})(\text{س}-\text{س}^2)^4 \, \text{دس}$.

$\text{ص} = \text{س} - \text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 - 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{1-2\text{س}} = \text{دس}$

$\int \cancel{(1-2\text{س})}\, \text{ص}^4 \frac{\text{دص}}{\cancel{1-2\text{س}}} = \int \text{ص}^4 \, \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ} = \frac{(\text{س}-\text{س}^2)^5}{5} + \text{جـ}$

ب) $\int 6\text{س}^2 \sqrt[5]{(2\text{س}^3-2)^2} \, \text{دس}$

$\text{ص} = 2\text{س}^3 - 2 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{6\text{س}^2} = \text{دس}$

$\int \cancel{6\text{س}^2} \sqrt[5]{\text{ص}^2} \frac{\text{دص}}{\cancel{6\text{س}^2}} = \int \text{ص}^{\frac{2}{5}} \, \text{دص}$

$\frac{\text{ص}^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + \text{جـ} = \frac{\text{ص}^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \text{جـ}$

$= \frac{5}{7} \sqrt[5]{\text{ص}^7} + \text{جـ}$

$= \frac{5}{7} \sqrt[5]{(2\text{س}^3-2)^7} + \text{جـ}$

جـ) $\int (2\text{س}-3\text{س}^2)\, \text{قا}^2(\text{س}^3-\text{س}^2) \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 - 2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{3\text{س}^2-2\text{س}} = \text{دس}$.

$\int \cancel{(2\text{س}-3\text{س}^2)}^{(-1)}\, \text{قا}^2\text{ص} \, \frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2-2\text{س}}}$

$\int -\text{قا}^2\text{ص} \cdot \text{دص} = -\text{ظاص} + \text{جـ}$

$= -\text{ظا}(\text{س}^3-\text{س}^2) + \text{جـ}$

د) $\int \frac{3\text{س}-9}{(\text{س}^2-6\text{س})^2} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 - 6\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 6 \Leftarrow$

$\frac{\text{دص}}{2\text{س}-6} = \text{دس}$.

$\int \frac{3\text{س}-9}{\text{ص}^2} \times \frac{\text{دص}}{2\text{س}-6} =$

$\int 3\cancel{(\text{س}-3)} \times \text{ص}^{-2} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س}-3)}} =$

$\frac{3}{2} \frac{\text{ص}^{-2+1}}{-2+1} + \text{جـ} = \frac{3}{2} \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$

$-\frac{3}{2\text{ص}} + \text{جـ} = -\frac{3}{2(\text{س}^2-6\text{س})} + \text{جـ}$

س٣) أ) $\int \sqrt[٣]{(٣س-٢)^{٢}}\ دس =$

$\int (٣س-٢)^{\frac{٢}{٣}}\ دس = \dfrac{(٣س-٢)^{\frac{٢}{٣}+١}}{٣\times(١+\frac{٢}{٣})} + ث$

$\dfrac{(٣س-٢)^{\frac{٥}{٣}}}{\cancel{٣\times\frac{٥}{٣}}} + ث = \dfrac{١}{٥}\sqrt[٣]{(٣س-٢)^{٥}} + ث$

ب) $\int (س-١)(٢س^{٢}-٤س+١)^{٥}\ دس$

$ص = ٢س^{٢}-٤س+١ \Leftarrow \dfrac{دص}{دس} = ٤س-٤$

$دس = \dfrac{دص}{٤س-٤} \Leftarrow دس = \dfrac{دص}{٤(س-١)}$

$\int \cancel{(س-١)} \times ص^{٥} \times \dfrac{دص}{٤\cancel{(س-١)}} = \dfrac{١}{٤}\int ص^{٥}\ دص$

$= \dfrac{ص^{٦}}{٦\times٤} + ث = \dfrac{(٢س^{٢}-٤س+١)^{٦}}{٢٤} + ث$

ج) $\int ٢\ قا^{٢}(٢-س)\ دس =$

$\dfrac{٢\ ظا(٢-س)}{-١} + ث$

$-٢\ ظا(٢-س) + ث$

د) $\int ٢س^{٣}\ جا(س^{٤}+١)\ دس$

$ص = س^{٤}+١ \Leftarrow \dfrac{دص}{دس} = ٤س^{٣} \Leftarrow$

$دس = \dfrac{دص}{٤س^{٣}}$

$\int ٢\cancel{س^{٣}}\ جا ص\ \dfrac{دص}{٤\cancel{س^{٣}}} =$

$\int \dfrac{١}{٢}\ جا ص\ دص = -\dfrac{١}{٢}\ جتا ص + ث$

$= -\dfrac{١}{٢}\ جتا(س^{٤}+١) + ث$

س٣) أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤س+١}\ دس = \int_{٠}^{٢} (٤س+١)^{\frac{١}{٢}}\ دس$

$\left[\dfrac{(٤س+١)^{\frac{١}{٢}+١}}{٤\times(١+\frac{١}{٢})}\right]_{٠}^{٢} = \left[\dfrac{(٤س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤\times\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٢}$

$\left[\dfrac{\sqrt{(٤س+١)^{٣}}}{٦}\right]_{٠}^{٢}$

$\dfrac{١}{٦}\left[\sqrt{(٤\times٢+١)^{٣}} - \sqrt{(٤\times٠+١)^{٣}}\right]$

$\dfrac{١}{٦}\left(\sqrt{٩}^{\,٣} - \sqrt{١}^{\,٣}\right)$

$\dfrac{١}{٦}(٢٧-١)$

$\dfrac{١}{٦}\times٢٦ = \dfrac{١٣}{٣}$

س٣ ب) $\int_{-١}^{١} ٣س^{٢} (س^{٣} - ١)^{٣}\, ءس = صفر$.

ج) $\int_{١}^{٠} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}\, .ءس =$

$\int_{١}^{٠} ٢س (س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٣}}\, ءس$

$ص = س^{٢} - ١ \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٢س \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{٢س}$

$\int_{١}^{٠} \cancel{٢س}\, ص^{\frac{١}{٣}} \frac{ءص}{\cancel{٢س}} = \int_{١}^{٠} ص^{\frac{١}{٣}}\, ءص$

$\left[\frac{ص^{\frac{١}{٣}+١}}{\frac{١}{٣}+١}\right]_{١}^{٠} = \left[\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}\right]_{١}^{٠}$

$= \frac{٣}{٤}\left[\sqrt[٣]{(س^{٢}-١)^{٤}}\right]_{١}^{٠}$

$\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{(٠^{٢}-١)^{٤}} - \sqrt[٣]{(١-١)^{٤}}\right)$

$\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{١} - \sqrt[٣]{٠}\right)$

$\frac{٣}{٤}\left(١ - ٠\right)$

$\frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$.

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\, ءس =$

$\int_{١}^{٢} (٣ - ٢س)(س^{٢} - ٣س)^{-٢} .\, ءس$

$ص = س^{٢} - ٣س \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣ \Leftarrow$

$ءس = \frac{ءص}{٢س - ٣}$

$\int_{١}^{٢} \cancel{(٣ - ٢س)}^{-١}\, ص^{-٢} \frac{ءص}{\cancel{٢س - ٣}} =$

$= - \int_{١}^{٢} ص^{-٢}\, ءص =$

$= \left[\frac{-ص^{-٢+١}}{-٢+١}\right]_{١}^{٢}$

$\left[\frac{-ص^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{١}{ص}\right]_{١}^{٢}$

$= \left[\frac{١}{س^{٢} - ٣س}\right]_{١}^{٢}$

$\frac{١}{٢^{٢} - ٣\times٢} - \frac{١}{١^{٢} - ٣\times١} = \frac{١}{-٢} - \frac{١}{-٢}$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{١}{٢} = صفر$.

س٤ : ق(-٨) = ٥ ، ق(٢٧) = -٦ جد

$$\int_{-٢}^{٣} ٣\text{س}^{٢}\,\text{ق}'(\text{س}^{٣})\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٣} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}} = \text{دس}$$

$$\int_{-٢}^{٣} \cancel{٣\text{س}^{٢}}\,\text{ق}'(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{\cancel{٣\text{س}^{٢}}} = \int_{-٢}^{٣} \text{ق}'(\text{ص})\,.\,\text{دص} =$$

$$\Big[\text{ق}(\text{ص})\Big]_{-٢}^{٣} = \Big[\text{ق}(\text{س}^{٣})\Big]_{-٢}^{٣}$$

$$= \text{ق}(٣^{٣}) - \text{ق}((-٢)^{٣}) =$$

$$\text{ق}(٢٧) - \text{ق}(-٨) = -٦ - ٥$$

$$= -١١$$

س٥ : $\int_{٠}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٣$ جد قيمة

$$\int_{-١}^{٢} ٨\text{س}\,\text{ق}(\text{س}^{٢}+١)\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢}+١ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{٢\text{س}} = \text{دس}$$

$$\int_{-١}^{٢} ٨\cancel{\text{س}}\,\text{ق}(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}} = \int_{-١}^{٢} ٤\,\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$$

عندما س = -١ ← ص = $(-١)^{٢}+١ = ٢$

عندما س = ٢ ← ص = $٢^{٢}+١ = ٥$

$$\int_{٢}^{٥} ٤\,\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = ٤\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$$

$$= ٤ \times -٣$$

$$= -١٢$$

س٦ : $\int_{٠}^{٤} ٢\text{س}\,\sqrt{\text{س}^{٢}+٩}\,\text{دس}$

$$\int_{٠}^{٤} ٢\text{س}\,(\text{س}^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\,.\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢}+٩ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \Leftarrow$$

$$\frac{\text{دص}}{٢\text{س}} = \text{دس}\,.$$

$$\int_{٠}^{٤} \cancel{٢\text{س}}\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,.\,\frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}} =$$

$$\int_{٠}^{٤} \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,.\,\text{دص} =$$

$$\Big[\frac{\text{ص}^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}\Big]_{٠}^{٤} = \Big[\frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\Big]_{٠}^{٤}$$

$$\frac{٢}{٣}\Big[\sqrt{(\text{س}^{٢}+٩)^{٣}}\Big]_{٠}^{٤}$$

$$\frac{٢}{٣}\Big(\sqrt{(٤^{٢}+٩)^{٣}} - \sqrt{(٠+٩)^{٣}}\Big)$$

$$\frac{٢}{٣}\big(٥^{٣} - ٣^{٣}\big) = \frac{٢}{٣}\big(١٢٥ - ٢٧\big)$$

$$= \frac{٢}{٣} \times ٩٨ = \frac{١٩٦}{٣}$$

تطبيقات هندسية

الأسئلة

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٦ − ٢س + ٩س^{٣})، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن ق(٠) = ٥

٢) جد قاعدة الاقتران ق، إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: قَ(س) = $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$ ، وكان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٠، ٤).

٣) جد قيمة ق(١)، علمًا بأن ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي ٢٥(٥س + ٤)^{٤}، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (−١، ٧).

٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة:
لَ(س) = ٢س(٤ − ٣س)، فجد قاعدة الاقتران ل، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٣).

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ يعطى بالقاعدة هـَ(س) = $\frac{٢س^{٢} - ٥س}{س}$ س ≠ ٠،
فجد هـ(٢)، علمًا بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة (−١، ٥).

س١ ميل المماس = $\text{ق}'(\text{س}) = ٦ - ٢\text{س} + ٩\text{س}^{٣}$

جد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(٠) = ٥

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \int (٦ - ٢\text{س} + ٩\text{س}^{٣})\, \text{دس}$

$$= ٦\text{س} - \frac{\cancel{٢}\text{س}^{٢}}{\cancel{٢}} + \frac{٩\text{س}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(٠) = ٦\times ٠ - ٠ + \frac{٩}{٤}\times ٠ + \text{جـ}$$

$$٥ = \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٦\text{س} - \text{س}^{٢} + \frac{٩}{٤}\text{س}^{٤} + ٥.$$

س٢ ميل المماس = $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٨}}$

المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٤) جد قاعدة الاقتران ق.

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \int \dfrac{٢\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+٨}} \cdot \text{دس}$

$$= \int ٢\text{س}\,(\text{س}^{٢}+٨)^{-\frac{١}{٣}} \cdot \text{دس}$$

نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٨ \Leftarrow \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \Leftarrow$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}.$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \cancel{٢\text{س}}\, \text{ص}^{-\frac{١}{٣}} \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ص}^{-\frac{١}{٣}}\, \text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢}+٨)^{٢}} + \text{جـ}$$

ق يمر بالنقطة (٠، ٤) $\Leftarrow$ ق(٠) = ٤

$$\text{ق}(٠) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(٠+٨)^{٢}} + \text{جـ}$$

$$٤ = \frac{٣}{٢} \times ٢^{٢} + \text{جـ}$$

$$\underset{-٦}{٤} = \underset{-٦}{٦} + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = -٢.$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢}+٨)^{٢}} - ٢.$$

س٣ الحل = $\text{ق}'(\text{س}) = ٢٥\,(٥\text{س}+٤)^{٤}$

ق يمر بالنقطة (−١، ٧) جد ق(١).

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \int ٢٥\,(٥\text{س}+٤)^{٤}\, \text{دس}$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\cancel{٢٥}(٥\text{س}+٤)^{٥}}{\cancel{٥\times٥}} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(-١) = (٥\times -١ + ٤)^{٥} + \text{جـ}$$

$$٧ = (-١)^{٥} + \text{جـ}$$

$$\underset{+١}{٧} = \underset{+١}{-١} + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ٨$$

$$\text{ق}(\text{س}) = (٥\text{س}+٤)^{٥} + ٨$$

$$\text{ق}(١) = ٩^{٥} + ٨$$

س٤ ميل المماس = ل'(س) = ٢س (٤ - ٣س)

جد قاعدة الاقتران ل علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٣) .

الحل: ل(س) = $\int$ ٢س (٤ - ٣س) دس .

= $\int$ (٨س - ٦س^2) دس

ل(س) = $\frac{\text{٨س}^2}{٢}$ - $\frac{\text{٦س}^3}{٣}$ + جـ

= ٤س^2 - ٢س^3 + جـ

ل(٠) = ٠ - ٠ + جـ

٣ = جـ

ل(س) = ٤س^2 - ٢س^3 + ٣

س٥ ميل المماس = هـ'(س) = $\frac{\text{٢س}^2 - \text{٥س}}{\text{س}}$

جد هـ(٢) علماً بأن منحنى هـ يمر بالنقطة (-١ ، ٥) .

هـ(س) = $\int$ $\frac{\text{٢س}^2 - \text{٥س}}{\text{س}}$ دس ،

= $\int$ $\frac{(\text{٢س} - ٥)\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}}$ دس ،

هـ(س) = $\int$ (٢س - ٥) دس ،

هـ(س) = س^2 - ٥س + جـ

هـ(-١) = (-١)^2 - ٥×-١ + جـ

٥ = ١ + ٥ + جـ

٥ = ٦ + جـ

-٦   -٦

جـ = -١

هـ(س) = س^2 - ٥س - ١

هـ(٢) = ٢^2 - ٥×٢ - ١

= ٤ - ١٠ - ١

= -٦ - ١

= -٧

تطبيقات فيزيائية

الأسئلة

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (١٢جتا(٢ن – ١)) م/ث. جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

٢) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث. جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها، علمًا بأن موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م.

٣) إذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة:
ت(ن) = ٤٨(١– ٢ن)^{٣} م/ث^{٢}، وكان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢ م/ث، فجد:

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة: ع(ن) = (٣ن – ١) (٤ن + ١) م/ث. جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧م.

س١ ع(ن) = (١٢ جتا (٢ن − ١)) م/ث

جد القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

الحل: ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن

= ∫ ١٢ جتا (٢ن − ١) . دن

= (١٢ جا(٢ن − ١))/٢ + جـ

ف(ن) = ٦ جا (٢ن − ١) + جـ

س٢ ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث . جد موقع النقطة بعد مرور اربع ثوانٍ من بدء حركتها علماً بأن ف(٠) = ٢م .

الحل: المطلوب ف(٤) = ؟

ف(ن) = ∫ (٤ن + ٨) . دن

= ٤ن^{٢}/٢ + ٨ن + جـ

ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + جـ

ف(٠) = جـ

٢ = جـ

ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + ٢

ف(٤) = ٢×٤^{٢} + ٨×٤ + ٢

= ٣٢ + ٣٢ + ٢ = ٦٦ م

س٣ ت(ن) = ٤٨ (١ − ٢ن)^{٣} م/ث^{٢}

ف(٠) = ٣ م ، ع(٠) = ٢ م/ث .

أ) سرعة الجسم بعد مرور ثانية واحدة ← ع(١)

ب) موقع الجسم بعد مرور ثانيتين ← ف(٢)

الحل: ع(ن) = ∫ ت(ن) . دن

أ) = ∫ ٤٨(١ − ٢ن)^{٣} . دن

= ٤٨(١ − ٢ن)^{٤} / (٤ × −٢) + جـ

ع(ن) = −٦(١ − ٢ن)^{٤} + جـ

ع(٠) = −٦(١ − ٠)^{٤} + جـ

٢ = −٦ + جـ ⟸ جـ = ٨
+٦   +٦

ع(ن) = −٦(١ − ٢ن)^{٤} + ٨

ع(١) = −٦(١ − ٢)^{٤} + ٨

= −٦ + ٨

= ٢

ب) ف(ن) = ∫(−٦(١ − ٢ن)^{٤} + ٨) . دن

ف(ن) = −٦(١ − ٢ن)^{٥} / (٥ × −٢) + ٨ن + جـ

ف(ن) = ٣/٥ (١ − ٢ن)^{٥} + ٨ن + جـ

٣ = ٣/٥ + جـ ⟸ جـ = ٣ − ٣/٥ = ١٢/٥

ف(ن) = ٣/٥ (١ − ٢ن)^{٥} + ٨ن + ١٢/٥

ف(٢) = ٣/٥ (−٣)^{٥} + ١٦ + ١٢/٥ = −٧٢٩/٥ + ١٢/٥ + ١٦

= −٧١٧/٥ + ١٦ = −٦٣٧/٥

المسافة يجب ان تكون موجبة

س٤ ع(ن) = (٣ن - ١)(٤ن + ١) م/ث .

جد
أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة ← المطلوب ف(ن)

ب) موقع الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، ف(٠) = ٧ م .

الحل: (٣ن - ١)(٤ن + ١) =

= ١٢ن^٢ + ٣ن - ٤ن - ١

١٢ن^٢ - ن - ١

ع(ن) = ١٢ن^٢ - ن - ١ .

ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن .

= ∫ (١٢ن^٢ - ن - ١) . دن

ف(ن) = ١٢ن^٣/٣ - ن^٢/٢ - ن + جـ

ف(ن) = ٤ ن^٣ - ½ ن^٢ - ن + جـ

القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة .

ف(ن) = ٤ن^٣ - ½ ن^٢ - ن + جـ

ف(٠) = ٠ + جـ

٧ = جـ

ف(ن) = ٤ن^٣ - ½ ن^٢ - ن + ٧

ف(٢) = ٤ (٢)^٣ - ½ (٢)^٢ - ٢ + ٧

= ٤ × ٨ - ½ × ٤ + ٥

= ٣٢ - ٢ + ٥

= ٣٠ + ٥

= ٣٥ م موقع الجسم بعد ثانيتين .

الأسئلة

١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ١٢ ، س = −١ ، س = ٢

ب) ق(س) = ٥ − ٢س ، س = −٢ ، س = ٢

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} − ٣ ، س = −٢ ، س = −٤

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ − ٦س^{٢} ، على الفترة [−٢، ٠].

ب) ق(س) = ٤س^{٣} ، على الفترة [−١، ١].

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} − ٤٨ ، على الفترة [٣، ٥].

د) ق(س) = −س^{٢} − ٤ ، على الفترة [−١، ١].

٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات في كل مما يأتي:

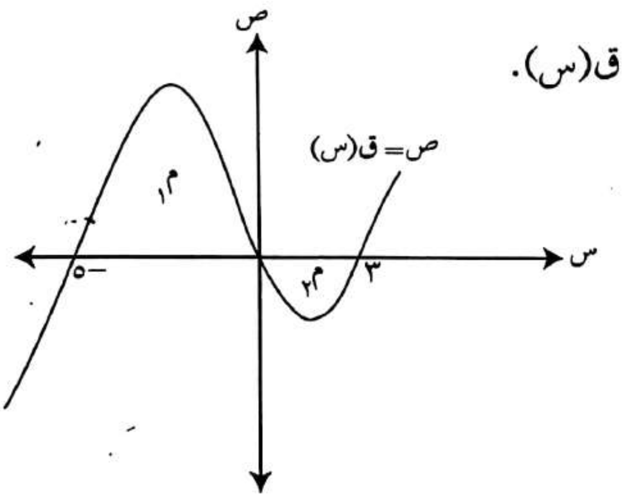
أ) ق(س) = ٤س − س^{٢} ب) ق(س) = ٤س^{٣} − ١٢س^{٢}

٤) يمثل الشكل (٤− ١١) منحنى الاقتران ص = ق(س).

فإذا كانت المساحة م$_{١}$ = ١٣ وحدة مربعة،

والمساحة م$_{٢}$ = ٣ وحدات مربعة،

فجد قيمة $\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) ءس، مبرِّرًا إجابتك.



الشكل (٤−١١).

٥) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

س١ جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ١٢ ، س = −١ ، س = ٢

$$م = \int_{-1}^{2} 12 \, دس$$

$$= \left[12س \right]_{-1}^{2}$$

$$= 12 \times 2 - 12 \times -1$$

$$= 24 + 12$$

$$= 36$$ وحدة مربعة

ب) ق(س) = ٥ − ٢س ، س = −٢ ، س = ٢

$$5 - 2س = 0 \Leftarrow \frac{2س}{2} = \frac{5}{2} \Leftarrow س = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$م = \int_{-2}^{2} (5 - 2س) \, دس$$

$$= \left[5س - س^2 \right]_{-2}^{2}$$

$$= 5 \times 2 - 2^2 - \left(5 \times -2 - (-2)^2\right)$$

$$= 10 - 4 - (-10 - 4)$$

$$= 6 - 14^-$$

$$= 6 + 14$$

$$= 20$$

جـ) ق(س) = ٣س² − ٣ ، س = −٢ ، س = −٤

$$3س^2 - 3 = صفر \Leftarrow \frac{3س^2}{3} = \frac{3}{3} \Leftarrow س^2 = 1$$

س = ±١ لا تنتمي للفترة.

$$م = \int_{-4}^{-2} (3س^2 - 3) \, دس$$

$$= \left[س^3 - 3س \right]_{-4}^{-2}$$

$$= (-2)^3 - 3 \times -2 - \left((-4)^3 - 3 \times -4\right)$$

$$= -8 + 6 - (-64 + 12)$$

$$= -2 - 52^-$$

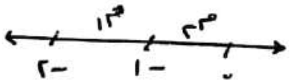
$$= -2 + 52$$

$$= 50$$

س٢ أ) ق(س) = ٦ − ٦س² ، [−٢ ، ٠]

$$6 - 6س^2 = 0 \Leftarrow \frac{6س^2}{6} = \frac{6}{6} \Leftarrow س^2 = 1 \Leftarrow$$

$$س = \pm 1$$



$$م_1 = \int_{-2}^{-1} (6 - 6س^2) \, دس$$

$$= \left[6س - 2س^3 \right]_{-2}^{-1}$$

$$= 6 \times -1 - 2(-1)^3 - \left(6 \times -2 - 2(-2)^3\right)$$

$$= -6 + 2 - (-12 + 16)$$

$$= -4 - 4$$

$$م_1 = |-8| = 8$$ وحدة مربعة

تابع س ٢ م

$\text{م}_٢ = \int_{-١}^{٠} (-٦ - ٦\text{س}^٢)\,.\,\text{دس}$

$= -٦\text{س} - ٢\text{س}^٣ \Big]_{-١}^{٠}$

$= ٦ \times ٠ - ٢(٠)^٣ - \left(٦ \times -١ - ٢(-١)^٣\right)$

$= \text{صفر} - (-٦ + ٢)$

$= - -٤$

$\text{م}_٢ = ٤$ وحدة مربعة

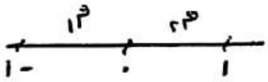
$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

$= ٨ + ٤$

$= ١٢$ وحدة مربعة.

ب) $\text{ق(س)} = ٤\text{س}^٣$ ، $[-١ ، ١]$

$٤\text{س}^٣ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}^٣ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = \text{صفر}$



$\text{م}_١ = \int_{-١}^{٠} ٤\text{س}^٣\,.\,\text{دس} = \text{س}^٤ \Big]_{-١}^{٠}$

$= ٠^٤ - (-١)^٤ = |-١|$

$\text{م}_١ = ١$ وحدة مربعة

$\text{م}_٢ = \int_{٠}^{١} ٤\text{س}^٣\,.\,\text{دس} = \text{س}^٤ \Big]_{٠}^{١}$

$= ١^٤ - ٠^٤ = ١ \Leftarrow \text{م}_٢ = ١$ وحدة مربعة

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

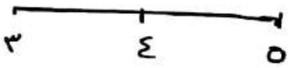
$= ١ + ١ = ٢$ وحدة مربعة.

جـ) $\text{ق(س)} = ٣\text{س}^٢ - ٤٨$ ، $[٣ ، ٥]$

$٣\text{س}^٢ - ٤٨ = \text{صفر} \Leftarrow \frac{٣}{٣}\text{س}^٢ = \frac{٤٨}{٣}$

$\text{س}^٢ = ١٦ \Leftarrow \text{س} = \mp ٤$

٤ تنتمي للفترة



$\text{م}_١ = \int_{٣}^{٤} (٣\text{س}^٢ - ٤٨)\,.\,\text{دس}$

$= \text{س}^٣ - ٤٨\text{س} \Big]_{٣}^{٤}$

$= ٤^٣ - ٤٨ \times ٤ - (٣^٣ - ٤٨ \times ٣)$

$= ٦٤ - ١٩٢ - (٢٧ - ١٤٤)$

$= -١٢٨ - -١١٧$

$= -١٢٨ + ١١٧$

$\text{م}_١ = |-١١| = ١١$

$\text{م}_٢ = \int_{٤}^{٥} (٣\text{س}^٢ - ٤٨)\,.\,\text{دس}$

$= \text{س}^٣ - ٤٨\text{س} \Big]_{٤}^{٥}$

$= ٥^٣ - ٤٨ \times ٥ - (٤^٣ - ٤٨ \times ٤)$

$= ١٢٥ - ٢٤٠ - (٦٤ - ١٩٢)$

$= -١١٥ - -١٢٨$

$= -١١٥ + ١٢٨$

$= ١٣$ وحدة مربعة.

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

$= ١١ + ١٣$

$= ٢٤$ وحدة مربعة.

تابع س٢

د) $\text{ق(س)} = -\text{س}^{٢} - ٤$ ، $[-١ ، ١]$

$-\text{س}^{٢} - ٤ = \text{صفر} \Leftarrow -\text{س}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{س}^{٢} = -٤$

لا يوجد أصفار للاقتران

$\text{م} = \int_{-١}^{١} (-\text{س}^{٢} - ٤) \, . \, \text{دس}$

$= \left[-\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س} \right]_{-١}^{١}$

$= -\frac{١}{٣} - ٤ \times ١ - \left(-\frac{(-١)^{٣}}{٣} - ٤ \times -١ \right)$

$= -\frac{١}{٣} - ٤ - \frac{١}{٣} - ٤$

$= -\frac{٢}{٣} - ٨$

$= -\frac{٢}{٣} - \frac{٢٤}{٣}$

$= \left| \frac{-٢٦}{٣} \right|$

$\text{م} = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة

س٣ أ) $\text{ق(س)} = ٤\text{س} - \text{س}^{٢}$

$٤\text{س} - \text{س}^{٢} = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}(٤ - \text{س}) = \text{صفر}$

$\text{س} = \text{صفر}$ ، $٤ - \text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = ٤$

$\text{م} = \int_{٠}^{٤} (٤\text{س} - \text{س}^{٢}) \, . \, \text{دس}$

$= \left[٢\text{س}^{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{٤}$

$\text{م} = ٢(٤)^{٢} - \frac{٤^{٣}}{٣} - \left(٢ \times ٠^{٢} - \frac{٠^{٣}}{٣} \right)$

$= ٢ \times ١٦ - \frac{٦٤}{٣} - \text{صفر}$

$= ٣٢ - \frac{٦٤}{٣}$

$= \frac{٩٦}{٣} - \frac{٦٤}{٣}$

$\text{م} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

ب) $\text{ق(س)} = ٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢}$

$٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} = \text{صفر} \Leftarrow ٤\text{س}^{٢}(\text{س} - ٣) = \text{صفر}$

$٤\text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{صفر}}$

$\text{س} - ٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٣}$

$\text{م} = \int_{٠}^{٣} ٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} \, . \, \text{دس}$

$= \left[\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} \right]_{٠}^{٣}$

$= ٣^{٤} - ٤(٣)^{٣} - \left(٠^{٤} - ٤(٠)^{٣} \right)$

$= ٨١ - ٤ \times ٢٧$

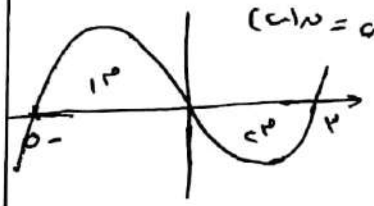
$= ٨١ - ١٠٨$

$\text{م} = |-٢٧|$

$\text{م} = ٢٧$ وحدة مربعة.

حل تمارين الكتاب

س٤



م١ = ١٣ وحدة مربعة

م٢ = ٣ وحدات مربعة

جد قيمة $\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس .

الحل:

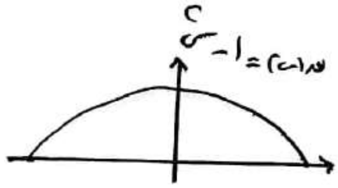
$\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس = $\int_{-٥}^{٠}$ ق(س) دس + $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس

= ١٣ + -٣ (لأنها تحت محور السينات)

= ١٠

س٥

يمثل الشكل المجاور نافذة طول قاعدتها ٢م محصورة بمنحنى الاقتران



ص = ق(س) = ١ - س^{٢} ، اذا اردنا وضع زجاج على النافذة ، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير ، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة ؟

الحل: ١ - س^{٢} = صفر
+ س^{٢} + س^{٢}

⇐ س^{٢} = ١ ⇐ س = ∓١

م = $\int_{-١}^{١}$ (١ - س^{٢}) دس

= $\left[س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-١}^{١}$

م = $\left(١ - \frac{١}{٣}\right) - \left(-١ - \frac{(-١)^{٣}}{٣}\right)$

= $\frac{٢}{٣} - \left(-١ + \frac{١}{٣}\right)$

= $\frac{٢}{٣} - \frac{-٢}{٣}$

م = $\frac{٤}{٣}$ م^{٢} .

التكلفة = المساحة × سعر المتر المربع الواحد

= $\frac{٤}{٣} \times ٥$

= $\frac{٢٠}{٣}$

= ٦,٦ دينار

أسئلة الوحدة

١) جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل مما يأتي:

أ) ص = $\int \frac{٤س-١}{س^٢+٥}$ ءس

ب) ص = $\int_{-١}^{٣}$ (٣س) (٤س - ٢) ءس

جـ) ص = $\int$ ظا(٤+ س) ءس

د) ص = $\int_{٢}^{٢}$ (لـو$_{هـ}$ س - هـ^{٢س}) ءس

هـ) ص = لـو$_{هـ}$ (س^٢ + ٦) - هـ$^{٢س-١}$ + س^٣ - ١

و) ص = جاس لـو$_{هـ}$ س

٢) إذا كان ق(س) = هـ$^{٢س^٢-١}$ ، فجد قً(س).

٣) إذا كان ق(س) = $\int$ س(٢ - س^٢) ءس، فجد قَ(٢).

٤) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{س^٢-٧س}{\sqrt[٣]{س}}$ ءس

ب) $\int \frac{٦}{س^{-٥}}$ ءس

جـ) $\int$ (س - ٢) (س + ٢) ءس

د) $\int$ (٣س + ٢)^٢ ءس

هـ) $\int$ (٢س - ١) (س^٢ - س)^٥ ءس

و) $\int \frac{س^٢}{\sqrt{س^٣+١}}$ ءس ، س > -١

ز) $\int (\frac{٢}{س} - هـ^س + ٣)$ ءس

ح) $\int \frac{١٢س^٣}{س^٤+٣}$ ءس

ط) $\int$ ٦س هـ$^{س^٢+٥}$ ءس

ي) $\int \frac{٢س+١}{جتا^٢(س^٢+س)}$ ءس

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{-١}^{-٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\, \text{ءس}$

ب) $\int_{١}^{٤} \text{هـ}\ \text{ءس}$، حيث هـ العدد النيبيري

جـ) $\int_{٤}^{١} \left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}} \right) \text{ءس}$

د) $\int_{-١}^{١} \frac{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} + ٤}\, \text{ءس}$

هـ) $\int_{٣}^{٠} \frac{٢}{٢\text{س} + ١}\, \text{ءس}$

و) $\int_{١}^{٠} ٤\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\, \text{ءس}$

ز) $\int_{٢}^{٦} \frac{١٠}{\sqrt{٥\text{س} + ٦}}\, \text{ءس}$

٦) إذا كان $\int_{\text{ب}^{٢}+\text{ب}}^{-\text{ب}+٣} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \text{صفرًا}$، فجد قيمة الثابت ب.

٧) إذا كان $\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ٤$، $\int_{-١}^{٥} (\text{ق(س)} + ٣)\ \text{ءس} = ٢٠$، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٥}^{-١} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$

ب) $\int_{١}^{-١} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$

جـ) $\int_{٥}^{١} (٣\text{ق(س)} - ٤\text{س})\ \text{ءس}$

٨) جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي:

أ) $\int_{-1}^{3} ٢\text{ب}\, ءس = ١٢$ ب) $\int_{4}^{\text{ب}} (٢\text{س} - ١)\, ءس = ٠$

جـ) $\int_{0}^{3} (\text{ب}\,\text{س}^{2} + ٢)\, ءس = -٢١$ د) $\int_{2}^{\text{ب}} (١ - ٤\text{س})\, ءس = ٥\text{ب}$

٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة (١ + س) (٣س + ٢)، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٢، −١).

١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٣س^{2} − ٢٧، ومحور السينات في الفترة [−٤، ٠].

١١) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم، بتسارع مقداره ت(ن) = ١٢ن(١ − ن) م/ث^{2}، حيث ن الزمن بالثواني. فإذا كانت سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث، وموقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م، فجد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

١٢) يتزايد ثمن تحفة فنية بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة ٢,٥٪ سنويًا. فإذا كان ثمنها الأصلي ٣٠٠٠ دينار، فكم يصبح ثمنها بعد مرور ٨٠ عامًا؟

حل اسئلة الوحدة

س١ جد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي

أ) $ص = \int \frac{٤س - ١}{س^٢ + ٥} \, دس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤س - ١}{س^٢ + ٥}$

ب) $ص = \int_{-١}^{٣} (٣س)(٤س - ٢) \, دس$

$\frac{دص}{دس} =$ صفر (لأن التكامل محدود وجواب التكامل المحدود = ثابت ومشتقة الثابت = صفر)

جـ) $ص = \int ظا(٤ + س) \, . \, دس$

$\frac{دص}{دس} = ظا(٤ + س)$.

د) $ص = \int_{٢}^{٢} (لو_{هـ} س - هـ^{٢س}) \, . \, دس$

$\frac{دص}{دس} =$ صفر .

هـ) $ص = لو_{هـ}(س^٢ + ٦) - هـ^{٢س-١} + س^٣ - ١$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{س^٢ + ٦} - ٢هـ^{٢س-١} + ٣س^٢$.

و) $ص = جاس \; لو_{هـ} س$

$\frac{دص}{دس} =$ الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$= جاس \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س \times جتاس$

$= \frac{جاس}{س} + جتاس \; لو_{هـ} س$

س٢ اذا كان $ق(س) = هـ^{٢س^٢ - ١}$ ، جد $ق''(س)$

الحل: $ق'(س) = ٤س \, . \, هـ^{٢س^٢ - ١}$ (حاصل ضرب)

$ق''(س) = ٤س \times ٤س \, هـ^{٢س^٢ - ١} + هـ^{٢س^٢ - ١} \times ٤$

$= ١٦س^٢ \, هـ^{٢س^٢ - ١} + ٤ هـ^{٢س^٢ - ١}$

$= هـ^{٢س^٢ - ١} (١٦س^٢ + ٤)$

س٣ اذا كان $ق(س) = \int س(٢ - س^٢) \, دس$

جد $ق'(٢)$.

الحل: نشتق الطرفين

$ق'(س) = س(٢ - س^٢)$

$ق'(٢) = ٢(٢ - ٢^٢)$

$= ٢(٢ - ٤)$

$= ٢ \times -٢$

$= -٤$

س٤ جد كلاً من التكاملات التالية:

أ) $\int \frac{\text{س}^2 - 7\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س}}} \cdot d\text{س} =$

$\int \frac{\text{س}^2 - 7\text{س}}{\text{س}^{\frac{1}{3}}} \cdot d\text{س} = \int (\text{س}^2 - 7\text{س})\,\text{س}^{-\frac{1}{3}} \cdot d\text{س}$

$\int (\text{س}^{2-\frac{1}{3}} - 7\,\text{س}^{1-\frac{1}{3}}) \cdot d\text{س}$

$\int (\text{س}^{\frac{5}{3}} - 7\,\text{س}^{\frac{2}{3}}) \cdot d\text{س}$

$\frac{\text{س}^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7\,\frac{\text{س}^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \text{جـ}$

$\frac{\text{س}^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - 7\,\frac{\text{س}^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \text{جـ}$

$\frac{3}{8}\sqrt[3]{\text{س}^8} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{\text{س}^5} + \text{جـ}$

ب) $\int \frac{6}{\text{س}^{-5}} \cdot d\text{س} = \int 6\,\text{س}^5 \cdot d\text{س}$

$\frac{6\,\text{س}^6}{6} + \text{جـ} = \text{س}^6 + \text{جـ}$

جـ) $\int (\text{س} - 2)(\text{س} + 2)\, d\text{س} =$

$\int (\text{س}^2 - 4) \cdot d\text{س} = \frac{\text{س}^3}{3} - 4\text{س} + \text{جـ}$

تذكر:
$\text{س}^2 - \text{أ}^2 = (\text{س} - \text{أ})(\text{س} + \text{أ})$

د) $\int (3\text{س} + 2)^2\, d\text{س} =$

$\int (9\text{س}^2 + 12\text{س} + 4)\, d\text{س} =$

$= \frac{9\text{س}^3}{3} + \frac{12\text{س}^2}{2} + 4\text{س} + \text{جـ}$

$3\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 4\text{س} + \text{جـ}$

تذكر:
$(\text{س} + \text{ص})^2 =$ مربع الأول + ٢ × الأول × الثاني + مربع الثاني
$= \text{س}^2 + 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2$

هـ) $\int (2\text{س} - 1)(\text{س}^2 - \text{س})^5 \cdot d\text{س} =$

$\text{ص} = \text{س}^2 - \text{س}$

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 2\text{س} - 1$

$d\text{س} = \frac{d\text{ص}}{2\text{س} - 1}$

$\int \cancel{(2\text{س} - 1)}\,\text{ص}^5 \cdot \frac{d\text{ص}}{\cancel{2\text{س} - 1}}$

$\int \text{ص}^5 \cdot d\text{ص} =$

$\frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ} = \frac{(\text{س}^2 - \text{س})^6}{6} + \text{جـ}$

تابع س٤

و) $\int \frac{\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^3+1}} \cdot \text{دس} = \int \frac{\text{س}^2}{(\text{س}^3+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{دس}$

$\int \text{س}^2 (\text{س}^3+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$

$\frac{\text{دص}}{3\text{س}^2} = \text{دس}$

$\int \cancel{\text{س}^2}\, \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2}}$

$\frac{1}{3} \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{دص} =$

$\frac{1}{3} \frac{\text{ص}^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \text{جـ} = \frac{1}{3} \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$

$= \frac{2}{3} \sqrt{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{2}{3} \sqrt{\text{س}^3 + 1} + \text{جـ}$

ز) $\int \left(\frac{2}{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + 3\right) \cdot \text{دس} =$

$2\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| - \text{هـ}^{\text{س}} + 3\text{س} + \text{جـ}$

ع) $\int \frac{12\text{س}^3}{\text{س}^4+3}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^4 + 3$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^3$

$\frac{\text{دص}}{4\text{س}^3} = \text{دس}$

$\int \frac{\cancel{12\text{س}^3}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{4\text{س}^3}}$

$\int \frac{3}{\text{ص}} \cdot \text{دص} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ}$

$= 3\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^4 + 3| + \text{جـ}$

ط) $\int 6\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}^2+5} \cdot \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 5$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{2\text{س}} = \text{دس}$

$\int \cancel{6\text{س}}\, \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س}}}$

$\int 3\, \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \text{دص}$

$3\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = 3\,\text{هـ}^{\text{س}^2+5} + \text{جـ}$

ي) $\int \frac{2\text{س} + 1}{\text{جتا}^2(\text{س}^2+\text{س})} \cdot \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 1$

$\frac{\text{دص}}{1+2\text{س}} = \text{دس}$

$\int \frac{\cancel{2\text{س}+1}}{\text{جتا}^2\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س}+1}}$

$\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{ص}} \cdot \text{دص} = \int \text{قا}^2\text{ص} \cdot \text{دص}$

$= \text{ظاص} + \text{جـ}$

$= \text{ظا}(\text{س}^2 + \text{س}) + \text{جـ}$

تذكر: $\text{قاس} = \frac{1}{\text{جتاس}}$

$\text{قا}^2\text{س} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$

س٥ أ) $\int_{-١}^{-٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}} \cdot دس = \int_{-١}^{-٨} \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} \cdot دس$

$\int_{-١}^{-٨} س^{-\frac{١}{٣}} \cdot دس = \left[\frac{س^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} \right]_{-١}^{-٨}$

$\frac{٣}{٢} \left[\sqrt[٣]{س^{٢}} \right]_{-١}^{-٨} = \frac{٣}{٢} \left(\sqrt[٣]{(-٨)^{٢}} - \sqrt[٣]{(-١)^{٢}} \right)$

$= \frac{٣}{٢} \left((-٢)^{٢} - (-١)^{٢} \right) = \frac{٣}{٢} \left(٤ - ١ \right)$

$= \frac{٣}{٢} \times ٣ = \frac{٩}{٢}$.

ب) $\int_{١}^{٤} هـ \cdot دس$ حيث هـ العدد النيبيري .

$\int_{١}^{٤} هـ \cdot دس = \left[هـ س \right]_{١}^{٤} = هـ \times ٤ - هـ \times ١$

$٤هـ - هـ = ٣ هـ$.

جـ) $\int_{٤}^{١} \left(\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{\sqrt{س}} \right) دس =$

$= \int_{٤}^{١} \left(س^{-٢} - س^{-\frac{١}{٢}} \right) \cdot دس$

$\left[\frac{س^{-٢+١}}{-٢+١} - \frac{س^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١} \right]_{٤}^{١}$

$\left[\frac{س^{-١}}{-١} - \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right]_{٤}^{١}$

$= ٢\sqrt{س} + \frac{١}{س} \Big]_{٤}^{١}$

$= ٢\sqrt{١} + \frac{١}{١} - \left(٢\sqrt{٤} + \frac{١}{٤} \right)$

$= ٢ + ١ - ٤ - \frac{١}{٤}$

$= -١ - \frac{١}{٤}$

$= -\frac{٤}{٤} - \frac{١}{٤} = -\frac{٥}{٤}$.

د) $\int_{-١}^{١} \frac{س^{٢} + ٧س + ١٢}{س + ٤} دس =$

$= \int_{-١}^{١} \frac{(س+٣)\cancel{(س+٤)}}{\cancel{س+٤}} \cdot دس$

$\int_{-١}^{١} (س+٣) \cdot دس = \left[\frac{س^{٢}}{٢} + ٣س \right]_{-١}^{١}$

$= \frac{١}{٢} + ٣ \times ١ - \left(\frac{١}{٢} - ٣ \right) =$

$\frac{١}{٢} + ٣ - \cancel{\frac{١}{٢}} + ٣ = ٦$

هـ) $\int_{٣}^{٠} \frac{٢}{٢س+١} \cdot دس$

ص = ٢س + ١

$\frac{دص}{دس} = ٢$

$\frac{دص}{٢} = دس$

$\int_{٣}^{٠} \frac{\cancel{٢}}{ص} \times \frac{دص}{\cancel{٢}} =$

$\int_{٣}^{٠} \frac{١}{ص} \cdot دص = لو_{هـ} |ص| \Big]_{٣}^{٠}$

$لو_{هـ} |٢س+١| \Big]_{٣}^{٠} = لو_{هـ} |٢\times٠+١| - لو_{هـ} |٢\times٣+١|$

$لو_{هـ} ١ - لو_{هـ} ٧ = صفر - لو_{هـ} ٧ = - لو_{هـ} ٧$

س٥ و) $\int_{١}^{٠} ٤\text{س} \times \text{ه}^{\text{س}^٢} . \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{٢\text{س}} = \text{دس}$

$\int_{١}^{٠} \cancel{٤\text{س}} \times \text{ه}^{\text{ص}} . \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$\int_{١}^{٠} ٢\,\text{ه}^{\text{ص}}\,\text{دص} = ٢\,\text{ه}^{\text{ص}} \Big]_{١}^{٠}$

$= ٢\,\text{ه}^{\text{س}^٢} \Big]_{١}^{٠}$

$= ٢\text{ه}^{٠} - ٢\text{ه}^{١} = ٢ - ٢\text{ه}$.

$= ٢(١ - \text{ه})$.

ز) $\int_{٢}^{٦} \frac{١٠}{\sqrt{٥\text{س}+٦}} . \text{دس} = \int_{٢}^{٦} \frac{١٠}{(٥\text{س}+٦)^{\frac{١}{٢}}} . \text{دس}$

$\int_{٢}^{٦} ١٠\,(٥\text{س}+٦)^{-\frac{١}{٢}} . \text{دس}$

$\text{ص} = ٥\text{س} + ٦$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥$

$\frac{\text{دص}}{٥} = \text{دس}$

$= \int_{٢}^{٦} ١٠\,\text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\,\frac{\text{دص}}{٥}$

$\int_{٢}^{٦} ٢\,\text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{دص} = ٢\,\frac{\text{ص}^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١} \Big]_{٢}^{٦}$

$= ٢\,\frac{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \Big]_{٢}^{٦} = ٤\sqrt{٥\text{س}+٦} \Big]_{٢}^{٦}$

$٤\left(\sqrt{٥\times٦+٦} - \sqrt{٥\times٢+٦}\right) = ٤\left(\sqrt{٣٦} - \sqrt{١٦}\right)$

$٤(٦ - ٤) = ٤ \times ٢ = ٨$.

س٦ إذا كان $\int_{\text{ب}^٢+\text{ب}}^{-\text{ب}+٣} \text{د(س)}.\text{دس} = \text{صفراً}$

جد قيمة الثابت ب ؟

الحل: بما أن الناتج = صفر ⇐

الحد الأدنى = الحد الأعلى

$\text{ب}^٢ + \text{ب} = -\text{ب} + ٣$ ⇐

$\text{ب}^٢ + \text{ب} + \text{ب} - ٣ = \text{صفر}$

$\text{ب}^٢ + ٢\text{ب} - ٣ = \text{صفر}$

$(\text{ب} + ٣)(\text{ب} - ١) = \text{صفر}$

$\text{ب} + ٣ = \text{صفر} \Leftarrow \text{ب} = -٣$

$\text{ب} - ١ = \text{صفر} \Leftarrow \text{ب} = ١$

س٧ إذا كان $\boxed{\int_{١}^{٥} \text{د(س)}\,\text{دس} = ٤}$ ،

$\int_{-١}^{٥} (\text{د(س)} + ٣)\,\text{دس} = ٣٠ \rightarrow$ نجد $\int_{-١}^{٥} \text{د(س)}.\text{دس}$

$\int_{-١}^{٥} \text{د(س)}.\text{دس} + \int_{-١}^{٥} ٣\,\text{دس} = ٣٠$

$\int_{-١}^{٥} \text{د(س)}.\text{دس} + ٣\text{س} \Big]_{-١}^{٥} = ٣٠$

$\int_{-١}^{٥} \text{د(س)}.\text{دس} + ٣\times٥ - ٣\times-١ = ٣٠$

$\int_{-١}^{٥} \text{د(س)}.\text{دس} + ١٥ + ٣ = ٣٠$

$\int_{-١}^{٥} \text{د(س)}.\text{دس} + ١٨ = ٣٠$
$\quad -١٨ \qquad -١٨$

$\boxed{\int_{-١}^{٥} \text{د(س)}\,\text{دس} = ١٢}$

تابع س٧

$\int_{1}^{5}$ ق(س) . دس = ٤ ، $\int_{-1}^{5}$ ق(س) دس = ٢

جد قيمة ما يلي:

أ) $\int_{5}^{-1}$ ق(س) . دس = -٢

ب) $\int_{1}^{-1}$ ق(س) . دس = $\int_{1}^{5}$ ق(س) . دس + $\int_{5}^{-1}$ ق(س) . دس

= ٤ + -٢

= ٢ (خاصية الإضافة)

جـ) $\int_{5}^{1}$ (٣ق(س) - ٤س) . دس =

= $\int_{5}^{1}$ ٣ق(س) . دس - $\int_{5}^{1}$ ٤س . دس =

= ٣ × -٤ - $\left[\frac{٤س^{٢}}{٢}\right]_{5}^{1}$ =

= -١٢ - ٢(١ - ٥^{٢}) =

= -١٢ - ٢(١ - ٢٥) =

= -١٢ - ٢ × -٢٤ =

= -١٢ + ٤٨ =

٣٦ .

س٨ جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي:

أ) $\int_{-1}^{3}$ ٢ب . دس = ١٢

$\left[٢ب س\right]_{-1}^{3}$ = ١٢

٢ب (٣ - -١) = ١٢

٢ب × ٤ = ١٢ ⟸ $\frac{٨ب}{٨}$ = $\frac{١٢}{٨}$ ⟸ ب = $\frac{٣}{٢}$

ب) $\int_{4}^{ب}$ (٢س - ١) دس = ٠

$\left[س^{٢} - س\right]_{4}^{ب}$ = ٠

ب^{٢} - ب - (٤^{٢} - ٤) = ٠

ب^{٢} - ب - ١٢ = ٠

(ب - ٤)(ب + ٣) = صفر

ب - ٤ = صفر ⟸ ب = ٤

ب + ٣ = صفر ⟸ ب = -٣

جـ) $\int_{0}^{3}$ (ب س^{٢} + ٢) دس = -٢١

$\left[\frac{ب س^{٣}}{٣} + ٢س\right]_{0}^{3}$ = -٢١

$\frac{ب (٣)^{٣}}{٣}$ + ٢ × ٣ - صفر = -٢١

٩ب + ٦ = -٢١

$\frac{٩ب}{٩}$ = $\frac{-٢٧}{٩}$

ب = -٣

حل أسئلة الوحدة

س٨) د) $\int_{2}^{ب} (1-4س)\, دس = 5ب$

$\left[س - \frac{4س^2}{2} \right]_{2}^{ب} = 5ب$

$ب - 2ب^2 - (2 - 2(2)^2) = 5ب$

$ب - 2ب^2 - -6 = 5ب$
$\quad -5ب \qquad -5ب$

$(-2ب^2 - 4ب + 6 = صفر) \div -2$

$ب^2 + 2ب - 3 = صفر$

$(ب+3)(ب-1) = صفر$

$ب + 3 = صفر \Leftarrow ب = -3$

$ب - 1 = صفر \Leftarrow ب = 1$

س٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة $(1+س)(3س+2)$، فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (2، -1)

الحل: ميل المماس = $ق'(س) = (1+س)(3س+2)$

$ق'(س) = 3س + 2 + 3س^2 + 2س$

$= 3س^2 + 5س + 2$

$ق(س) = \int ق'(س)\, دس$

$= \int (3س^2 + 5س + 2)\, دس$

$= س^3 + \frac{5س^2}{2} + 2س + جـ$

$ق(س) = س^3 + \frac{5}{2}س^2 + 2س + جـ$

$ق(2) = 2^3 + \frac{5}{2} \times 2^2 + 2 \times 2 + جـ$

$-1 = 8 + 10 + 4 + جـ$

$-1 = 22 + جـ \Leftarrow جـ = -23$
$-22 \qquad -22$

$ق(س) = س^3 + \frac{5}{2}س^2 + 2س - 23$.

س١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = 3س^2 - 27$ ومحور السينات في الفترة $[-4، 0]$

الحل: $3س^2 - 27 = 0 \Leftarrow \frac{3س^2}{3} = \frac{27}{3} \Leftarrow$

$س^2 = 9 \Leftarrow س = \mp 3$

-3 تنتمي للفترة $[-4، 0]$

م١ م٢ : -٤ ، -٣ ، ٠

$م_1 = \int_{-4}^{-3} (3س^2 - 27)\, دس = \left[س^3 - 27س \right]_{-4}^{-3}$

$(-3)^3 - 27 \times -3 - ((-4)^3 - 27 \times -4)$

$-27 + 81 + 64 - 108 = -135 + 145$

$م_1 = 10$ وحدة مربعة.

$م_2 = \int_{-3}^{0} (3س^2 - 27)\, دس = \left[س^3 - 27س \right]_{-3}^{0}$

$م_2 = 0 - ((-3)^3 - 27 \times -3)$

$= 27 - 81 = |-54|$

$م_2 = 54$ وحدة مربعة

$م = م_1 + م_2 = 54 + 10 = 64$ وحدة مربعة.

حل اسئلة الوحدة

س٥ تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بتسارع مقداره $ت(ن) = ١٢ن(١ - ن)$ م/ث^{٢}

فإذا كانت سرعتها الابتدائية $ع(٠) = ٣$ م/ث وموقعها الابتدائي $ف(٠) = ٢$م جد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة

ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

الحل: $ع(ن) = \int ت(ن) \, دن$

$= \int ١٢ن(١ - ن) \, دن$

$= \int (١٢ن - ١٢ن^{٢}) \, دن$

$ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + جـ$

$ع(٠) = ٠ - ٠ + جـ$

$٣ = جـ$

$ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ٣$

سرعة النقطة بعد ٤ ثوانٍ هي ع(٤)

$ع(٤) = ٦×٤^{٢} - ٤×٤^{٣} + ٣$

$= ٦×١٦ - ٤×٦٤ + ٣$

$= ٩٦ - ٢٥٦ + ٣$

$= -١٦٠ + ٣ = -١٥٧$ م/ث.

$ف(ن) = \int ع(ن) \, دن$

$= \int ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ٣ \, دن$

$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ن^{٤} + ٣ن + جـ$

$ف(٠) = ٠ - ٠ + ٠ + جـ$

$٢ = جـ$

$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ن^{٤} + ٣ن + ٢$

موقع النقطة بعد مرور ثانيتين هو ف(٢)

$ف(٢) = ٢(٢)^{٣} - ٢^{٤} + ٣(٢) + ٢$

$= ٢×٨ - ١٦ + ٦ + ٢ = ٨$ م

س٦ يتزايد ثمن تحفة فنية بمرور الزمن وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو بنسبة ٢,٥٪ سنوياً. فاذا كان ثمنها الأصلي ٣٠٠٠ دينار فكم يصبح ثمنها بعد مرور ٨٠ عام؟

الحل: ع. = ٣٠٠٠ ، ن = ٨٠ ، $م = \frac{٢,٥}{١٠٠} = \frac{٢٥}{١٠٠٠}$

$ع(ن) = ع. × هـ^{من}$

$ع(٨٠) = ٣٠٠٠ × (٢,٧)^{\frac{٢٥}{١٠٠٠}×٨٠}$

$= ٣٠٠٠ × (٢,٧)^{٢}$

$= ٣٠٠٠ × ٧,٢٩$

$= ٢١٨٧٠$ دينار ثمن التحفة بعد مرور ٨٠ عام.