المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

المادة التعليمية المساندة

الرياضيات

9

الفصل الدراسي الأول

الصف التاسع الأساسي

النّاشر
وزارة التّربية والتّعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسيّة

يسرّ إدارة المناهج والكتب المدرسيّة استقبال ملحوظاتكم وآرائكم الخاصة بهذا الكتيب على العناوين الآتية:
هاتف: 9-4617304/5 فاكس: 4637569 ص.ب (1930) الرّمز البريديّ: 11118
أو على البريد الإلكترونيّ Scientific.Division@ moe.gov.jo

أشرف على تأليف هذه المادة التعليمية كل من:

د. نــواف العقيل العجــارمــة — الأمين العام للشؤون التعليمية
أ. صالح محمد أمين العمري — مدير إدارة المناهج والكتب المدرسية
د. أسامـــة كامـل جرادات — مدير المناهج
د. زايــد حســـن عكـــور — مدير الكتب المدرسية
نـــقين أحمـــــد جوهـــــر — عضو مناهج الرياضيات (مقررًا)

لجنة تأليف المادة التعليمية:

د. أريج حسن عبدالله السعيد — إبراهيـم سليـمان شلطف
حسن محمد لافي ربابعــة — آلاء أحمد يوسف أبو يابس

التحرير العلمي: نقين أحـمد جـوهر — التحرير اللغوي: د. غـالب شـريم
التحـرير الفني: محمود بركات المطر — التصـميم: عـائد فـؤاد سمـور
الرســم: إبراهيم محمد شـاكر — الإنتـاج: سليمان أحـمد الخلايلـة

دقق الطباعة: إبراهيم سليمان شلطف — راجع الطباعة: نقين أحمد جوهر

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الطبعة الأولى (تجريبية) — **1443هـ / 2022م**

قائمةُ المحتوياتِ

منهاجي
متعة التعليم الهادف

بسمِ اللّهِ الرحمنِ الرحيمِ

المُقَدّمةُ

الحمدُ للهِ ربِّ العالمينَ، والصلاةُ والسلامُ على سيدِ المرسلينَ سيدنِا محمدٍ وعلى آلِهِ وَصحْبِه أجمعينَ.

وبعدُ؛ فانطلاقًا من رؤية وزارة التربية والتعليم في تحقيق التعليم النوعي المتميّز على نحوٍ يلائم حاجات الطلبة، ويمكنهم من امتلاك المعارف والمهارات الأساسية اللازمة للتكيّف مع متطلبات الحياة وتحدياتها، مزوّدين بمعارف ومهارات وقِيَم تساعد على بناء شخصياتهم بصورة متوازنة، فقد أُعدّت المادة التعليمية المساندة لمبحث الرياضيات على شكل أنشطة بسيطة رشيقة مختزلة ومكثّفة وجاذبة تتيح للطلبة ممارسة التعلم الذاتي النشط وتنبثق من متطلبات التعلم السابق وتبني عليها وتدعم تعلمهم، وتعالج مواطن الضعف لديهم، وتراعي فروقاتهم الفردية ودرجات إتقانهم المتفاوتة للمفاهيم والمهارات اللازمة، وبشكل يسهل على المعلم متابعة تقدم سير التعلم لدى طلبته.

ونضع بين أيديكم كتاب المادة التعليمية المساندة في مبحث الرياضيات للصف التاسع، مُعينًا ومُيسِّرًا؛ على وجه الإفادة والاسترشاد وسعيًا إلى الانتقال بالطالب انتقالًا سلسًا في تحقيق نتاجات التعلّم السّابقة لتعويض ما يكون قد فات الطالب تعلّمه، و تعزيز ما يمتلكه؛ ليتمكّن من امتلاك المعارف والمهارات المطلوبة منه في صفّه الحاليّ جنبًا إلى جنب مع ما يحويه المقرّر الدّراسيّ.

وسنستمرّ في تطوير هذه النسخة وفق التغذية الراجعة، بما يسهم في الوصول إلى المستوى المنشود من جودة التعليم.

واللهُ وليُّ التوفيقِ

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الوحدةُ (1) المتبايناتُ الخطيةُ

1

المَجْموعاتُ والفتراتُ

- أكتبُ المَجْموعاتِ باستعمالِ طريقتَيْ سردِ العناصرِ والصفةِ المميزةِ للمجموعةِ.
- أعبرُ عن المتبايناتِ باستعمالِ الفتراتِ.

2

حَلُّ المتبايناتِ المركبةِ

- أحَلُّ متبايناتٍ مركبةً تحتوي على أداةِ الربطِ (و)/ (أو).
- أمثلُ مجموعةَ الحَلِّ على خطِّ الأعدادِ.

3

حَلُّ معادلاتِ القيمةِ المطلقةِ ومتبايناتِها

- أحَلُّ معادلاتِ القيمةِ المطلقةِ ومتبايناتِها.

4

تَمثيلُ المتبايناتِ الخطيَّةِ بمتغيرينِ بيانيًّا

- أمُثلُ المتبايناتِ الخطيةَ بمتغيرينِ بيانيًّا.

المَجْموعاتُ والفتراتُ

1

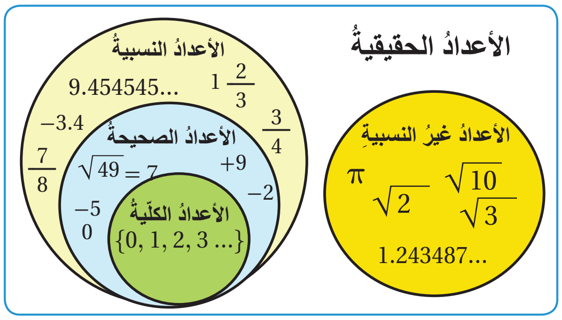
النتاجاتُ: • أكتبُ المَجْموعاتِ باستعمالِ طريقتيْ سردِ العناصرِ والصفةِ المميزةِ.
• أعبرُ عن المتبايناتِ باستعمالِ الفتراتِ.

نشاط 1 المَجْموعاتُ

أولًا: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ

أتذكرُ

الأعدادُ الحقيقيةُ تتكون من الأعدادِ النسبيةِ وغيرِ النسبيةِ معًا.
العددُ غيرُ النسبيِّ (جذرٌ أصمٌ أو كسرٌ عشريٌّ غيرُ منتهٍ وغيرُ دوري).



أصنفُ الأعدادَ الحقيقيَةَ الآتيةَ، وأبررُ إجابتي

العددُ	غير نسبيٍّ	نسبيٌّ	المبررُ
$\frac{3}{7}$		نسبيٌّ	3 ، 7 عددانِ صحيحانِ، فالعددُ $\frac{3}{7}$ هو نسبيٌّ
$\sqrt{81}$		نسبيٌّ	$\sqrt{81}=9$ 9 عدُد كليٌّ، إذنْ $\sqrt{81}$ عددٌ نسبيٌّ
0.5555......		نسبيٌّ	العددَ كسرٌ عشريٌّ دوريٌّ، وغيرُ منتهٍ
0.42310459...	غير نسبيٍّ		العددَ كسرٌ عشريٌّ دوريٌّ غيرُ منتهٍ وغير دوريٍّ
$\sqrt{19}$	غير نسبيٍّ		$\sqrt{19}=4.35889894...$ فالعددُ كسرٌ عشريٌّ غيرُ منتهٍ وغيرُ دوريٍّ
$\sqrt{12}$			$\sqrt{12}=3.4641016...$
$\sqrt{64}$			
−3.4			

ثانيًا: المجموعاتُ، وطرائقُ التعبيرِ عنها

أتعلمُ

المجموعةُ: تجمعُ أشياءَ متمايزةً بحسبِ صفةٍ مشتركةٍ.

المجموعةُ الخاليةُ لا تحتوي على عناصرَ، مثلُ مجموعةِ الأعدادِ الصحيحةِ التي تزيدُ على 1 وتقلُّ عن 2

ونرمزُ إليها بالرمزِ { } أو Ø

1) أصنفُ الأشياءَ الآتيةَ بحسبِ الصفةِ المشتركةِ إلى: مجموعةِ اللونِ C أو مجموعةِ الأعدادِ N

أحمرُ، 0، أصفرُ، 1، بنفسجيٌّ، -1

$N = \{\quad,\quad,\quad\}$ $C = \{\quad,\quad,\quad\}$

أتعلمُ

مجموعة الأعدادِ

مجموعةُ الأعدادِ الكليةِ، ويرمزُ إليها بالرمزِ W وتساوي $\{0, 1, 2, 3, ...\}$

مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ، ويرمزُ إليها بالرمزِ Z وتساوي $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، ويرمزُ إليها بالرمزِ R وتحتوي الأعدادَ النسبيةَ والأعدادَ غيرَ النسبيةِ.

المجموعةُ

مجموعةٌ منتهيةٌ
تحتوي عددًا محددًا من العناصرِ

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, ..., 10000000\}$

$C = \{2\}$ مجموعةٌ مفردةٌ

$D = \{\ \}$ مجموعةٌ خاليةٌ

مجموعةٌ غيرُ منتهيةٍ
تحتوي عددًا لا نهائيًّا من العناصرِ

مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ الزوجيةِ

مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ أقلُّ من 16

يُعبرُ عنها بطريقةِ سردِ العناصرِ

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

يُعبرُ عنها باستعمالِ الصفةِ المميزةِ للعناصرِ

$A = \{x \mid$ x عددُ زوجيٌّ موجبٌ وأقلُّ من 15 $\}$

$B = \{x \mid x = 2k, 0 < k < 8\}$

$C = \{y \mid y < -5, y \in Z\}$

$D = \{-6, -7, -8, -9, ...\}$

أنواعُ المَجْموعاتِ: (1) خاليةٌ (2) مفردةٌ (3) منتهيةٌ (4) غيرُ منتهيةٍ

2) أعبرُ عنِ المجموعةِ، وأصنفُها مبررًا إجابتي:

المجموعةُ	الصفةُ المميزةُ	سردُ العناصرِ	
مجموعةُ الأعدادِ الكليةِ من مضاعفاتِ العددِ 4 التي تقلُّ عن 24	$C = \{x \mid x = 4k, k \in W, x < 24\}$ وتقرأ: مُجموعةُ الأعدادِ x، حيث x عددٌ كليٌّ من مضاعفاتِ العددِ 4 الأقلِّ من 24.	$R = \{4, 8, \quad , \quad ,20\}$	مجموعةٌ منتهيةٌ لأنَّ عددَ عناصرِها 5
مجموعةُ حَلِّ المعادلةِ $5x - 15 = 0$	$S = \{x: 5x - 15 = 0\}$	$S = \{3\}$	مجموعةٌ .... لأنَّ ....
تمثلُ P مجموعةَ الأعدادِ الصحيحةِ التي تزيدُ على -4		$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, ...\}$	مجموعةٌ .... لأنَّ ....
تمثلُ C مجموعةَ أطوالِ طلابِ الصفِّ التاسعِ التي تزيدُ أطوالُهم على مترين.		$C = \emptyset$	مجموعةٌ .... لأنَّ................
تمثلُ M مجموعةَ الأعدادَ الكليةِ التي تقلُّ عن 5.			

3) أحَدِّدُ فيما إذا كانتِ العناصرُ الآتيةُ تنتمي ($\in$) أم لا تنتمي ($\notin$) إلى المجموعةِ:

1. هلِ العنصرُ 2 ينتمي إلى مجموعةِ $A = \{2,4,6,8\}$؟

   نعمْ، لأنهُ أحدُ عناصرِها

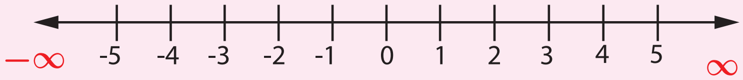
2. هلِ العنصرُ 2- ينتمي إلى مجموعةِ $B = \{0,1,2,3,...\}$ ؟

نشاط 2 الفتراتُ

الفترةُ: مجموعةٌ جزئيةٌ من مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ تحددُ وفقًا لشروطٍ معينةٍ.

∞ يُقرأُ الرّمزُ: المالانهاية الموجبة، وَيُستعمَلُ للدّلالةِ على أنَّ الفترةَ غيرُ محدودةٍ في الاتّجاهِ الموجبِ.

$-\infty$ يُقرأُ الرّمزُ: المالانهاية السالبةُ، وَيُستعمل للدّلالةِ على أنَّ الفترةَ غيرُ محدودةٍ في الاتّجاهِ السالبِ.



المتباينةُ: جملةٌ رياضيةٌ تقارنُ بينَ مقدارين، وتشملُ أحدَ الرموزِ $>$ $<$ $\le$ $\ge$

- يستعملُ الرمزُ [أو] عندما يكونُ رمزُ المتباينةِ $\ge$ أو $\le$ ليدلَّ على انتماءِ طرفِ الفترةِ.
- يستعملُ الرمزُ) أو (عندما يكونُ رمزُ المتباينةِ $<$ أو $>$ ليدلَّ على عدمِ انتماءِ طرفِ الفترةِ.

أطبقُ العملياتِ الحسابيةَ على المتباينةِ كما أطبقُها على المعادلةِ معَ فارقٍ وحيدٍ هو: عندَ ضربِ الطرفينِ بعددٍ سالبٍ فإنَّ رمزَ التباينِ ينقلبُ.

$A < B, \quad -A > -B$

$x > 15, \ -x < -15$

$x-2 > y-1, \ -x+2 < 1-y$

1) أحلُّ المتباينةَ وأمثلُها على خطِّ الأعدادِ

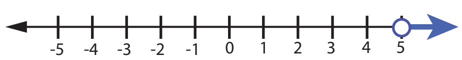
1 $\boldsymbol{x-2>3}$

أضيفُ 2 إلى الطرفين

$x-2+2 > 3+2$

أبسطُ وأمثلُ على خطِّ الأعدادِ

$x > 5$



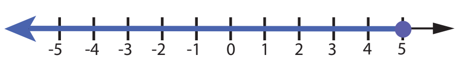
2 $\boldsymbol{-3k \ge -15}$

أقسمُ طرفي المتباينةِ على -3 وأغيرُ إشارةَ المتباينةِ

$\dfrac{-3k}{-3} \le \dfrac{-15}{-3}$

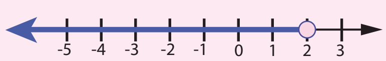
أبسطُ وأمثلُ على خطِّ الأعدادِ

$k \le 5$

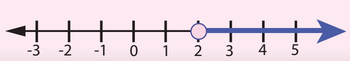


أتعلمُ

الأعدادُ الحقيقيةُ التي تقلُّ عن 2 يعبرُ عنها بـ: $(-\infty, 2)$



الأعدادُ الحقيقيةُ التي تزيدُ على 2 يعبرُ عنها بـ: $(2, \infty)$



2) أكتبُ مجموعةَ حَلّ كلّ متباينةٍ مما يأتي:

1 $4x-3 \geq 7x+12$

المتباينةُ الأصليةُ $4x-3 \geq 7x+12$

بجمعِ 3 إلى طرفي المتباينةِ $4x-3+3 \geq 7x+12+3$

بطرحِ $7x$ من الطرفين $4x-7x \geq 7x-7x+15$

عند القسمةِ على عدد سالبٍ
يُقلَبُ رمزُ المتباينةِ

بقسمةِ طرفي المتباينةِ على -3 $\dfrac{-3x}{-3} \leq \dfrac{15}{-3}$

تبسيطٌ $x \leq -5$

مجموعةُ الحَلّ هي الفترةُ $(-\infty, -5]$

2 $4x+1 \leq 13$

المتباينةُ الأصليةُ ....

بطرحِ .... $4x+1-1 \leq 13-1$

بقسمةِ طرفي المتباينةِ على 4 ....

تبسيطٌ $x \leq 3$

مجموعةُ الحَلّ هي الفترةُ ....

3 $3x+6 < 2x-5$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أوْ معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أعبرُ عن المتبايناتِ باستعمالِ الفتراتِ ( ).	• أميزُ المَجْموعاتِ وأكتبُها باستعمالِ طريقتي سردِ العناصرِ والصفةِ المميزةِ ( ).	

2 حَلُّ المتبايناتِ المركبةِ

النتاجاتُ: • أحَلُّ متبايناتٍ مركبةً تحتوي على أداةِ الربطِ (و)/ (أو).
• أمثلُ مجموعة الحَلِّ على خطِّ الأعداد.

نشاط 1 المتبايناتُ المركبةُ

أولًا: كتابةُ المتبايناتِ، وتمثيلُها على خطِّ الأعدادِ

أتعلمُ

متبايناتٌ بسيطةٌ	متبايناتٌ مركبةٌ
تحتوي على رمزِ متباينةٍ واحدةٍ	ناتجةٌ من ربطِ متباينتينِ باستعمالِ أداةِ الربطِ (**و**) وباللغةِ الإنجليزيَة **and**، أو باستعمالِ أداةِ الربطِ (**أو**) وباللغةِ الإنجليزية **or**
$x < 4$ $x \geq 5$	$2 \leq x$ and $x \leq 6$ وتُكتب $2 \leq x \leq 6$ $x < 0$ or $x \geq 5$

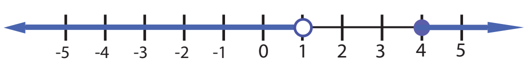
فتراتٌ تحتوي أداةَ الربطِ (و)

إذا كانَ a وَ b عددينِ حقيقيّين؛ حيثُ $a < b$، فيمكنُ التعبيرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المُتبايناتِ المُركَّبَةِ الآتيةِ باستعمالِ فترةٍ محدودةٍ

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ	رَمزُ الفترةِ	المُتباينةُ
	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
	(a, b)	$a < x < b$
	$[a, b)$	$a \leq x < b$
	$(a, b]$	$a < x \leq b$

فتراتٌ تحتوي أداةَ الربطِ (أو):

مثلُ: $x < 1$ or $x \geq 4$



وتكتب باستعمالِ رمزِ الفتراتِ على الصورةِ: $(-\infty, 1) \cup [4, \infty)$

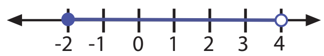
أكتبُ المتباينات باستعمالِ رمزِ الفترةِ، وأمثلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 عددٌ أكبرُ من أو يساوي -2 و أقلُّ من 4

اختارُ متغيرًا: ليكن x ممثلًا للعدد

أكتبُ المتباينةَ: $-2 \leq x < 4$

أمثلُ على خطِّ الأعدادِ



ألاحظُ أنَّ العددَ x محصورٌ، لأنّه منطقةُ تقاطعٍ،

وألاحظُ حرفَ « و» يعني التقاطُعَ

رمزُ الفترةِ: $[-2,4)$

أتذكرُ

الرموزُ $>$ ، $<$ تدلُّ على أن الدائرةَ مفتوحةٌ لعدمِ وجودِ المساواةِ.

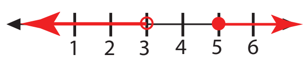
الرموزُ $\geq$ ، $\leq$ تدلُّ على أنَّ الدائرةَ مغلقةٌ لوجودِ المساواةِ.

2 عددٌ أقلُّ منْ 3 أو لا يقلُّ عن 5

اختارُ متغيرًا: وليكنْ y ممثلًا للعددِ

أكتبُ المتباينةَ: $y < 3$ or $y \geq 5$

أمثلُ على خطِّ الأعدادِ



ألاحظُ أنَّ رمزَ «أو» يشملُ جميعَ مناطقِ الحلولِ

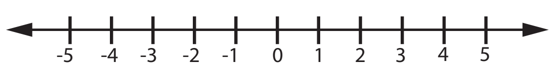
رمزُ الفترةِ: $(-\infty,3) \cup [5,\infty)$

3 عددٌ أكبرُ من -3 وأقلُّ من 4

اختارُ متغيرًا: وليكنْ u ممثلا للعددِ

أكتبُ المتباينةَ: ....

أمثلُ على خطِّ الأعدادِ



رمزُ الفترةِ $(-3, 4)$

4 عددٌ أقلُّ من 2 أو أكبرُ من 4

....

....

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ثانيًا: حَلُّ المتبايناتِ المركبةِ

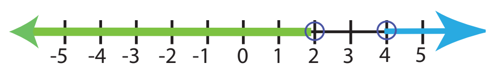
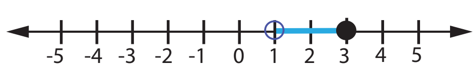
أتعلمُ

المتباينةُ المركبةُ التي تحتوي أداةَ الربطِ (أو) تكونُ صحيحةً، إذا كانتْ إحدى المتباينتينِ المكونتينِ على الأقلِّ صحيحةً.

أتعلمُ

مجموعةُ حلِّ المتباينةِ المركبةِ التي تحتوي على أداةِ الربطِ (و)، هي مجموعةُ الأعدادِ التي تحققُ المتباينتينِ المكونتين للمتباينةِ المركبة معا $1<x\le 4$ التي تحقِّقُ المتباينتين $x>1$ و $x\le 4$ معا.

المتبايناتُ المركبةُ

أداةُ الربطِ أو	أداةُ الربطِ و
$2x+4<8$ or $x+7>11$	$-3<x-4\le-1$
المتباينةُ الأصليةُ $2x+4<8$ or $x+7>11$ بالطرحِ $2x+4-4<8-4$ or $x+7-7>11-7$ بالتبسيطِ $2x<4$ or $x>4$ بالقسمةِ $\frac{2x}{2}<\frac{4}{2}$ بالتبسيطِ $x<2$ or $x>4$ مجموعةُ الحلِّ: $\{x\mid x<2 \text{ or } x>4\}$ أو $(-\infty,2)\cup(4,\infty)$	المتباينةُ المعطاةُ $-3<x-4\le-1$ إضافةُ 4 $-3+4<x-4+4\le-1+4$ بالتبسيطِ $1<x\le3$ مجموعةُ الحلِّ $\{x\mid 1<x\le 3\}$ أو $(1,3]$
	

أجدُ مجموعةَ حَلِّ كلِّ متباينةِ مما يأتي، ثم أمثلُها على خطِّ الأعدادِ:

1) $-4<-2x+2<10$

المتباينةُ المعطاةُ $-4<-2x+2<10$

2) $x-2>1$ or $x+2>7$

$x-2+2>1+2$ or $x+2-2>7-2$

أقيِّمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحلُّ متبايناتٍ مركبةً تحتوي على أداةِ الربطِ (و)/ (أو) ( ).	• أمثلُ حلَّ متباينةٍ مركبةٍ على خطِّ الأعدادِ ( ).	

3 حَلُّ معادلاتِ القيمةِ المطلقةِ ومتبايناتِها

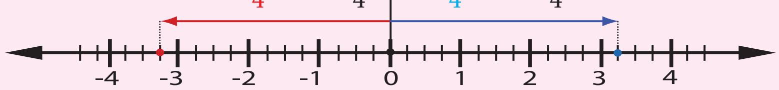
النتاجاتُ: • أحَلُّ معادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ ومُتبايناتِها.

نشاط 1 معادلاتُ القيمةِ المُطلقةِ

أتذكرُ

القيمةُ المطلقةُ للعددِ هي المسافةُ بينَ العددِ والصفرِ على خطِّ الأعدادِ.

$\left|-3\frac{1}{4}\right| = 3\frac{1}{4}$ $\quad$ $\left|3\frac{1}{4}\right| = 3\frac{1}{4}$



أتعلمُ

معادلةُ القيمةِ المطلقةِ: هي معادلةٌ تحتوي على قيمةٍ مطلقةٍ

لحلِّ المعادلةِ $|ax+b| = c$ حيثُ $c \geq 0$، أحلُّ المعادلتينِ المرتبطتينِ بها، وهما:

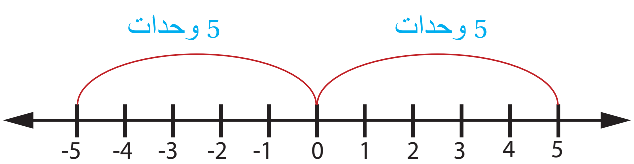
$$ax+b = c \quad \text{or} \quad ax+b = -c$$

أحَلُّ كلًّا من المعادلاتِ الآتيةِ، وأمثلُ مجموعةَ الحَلِّ على خطِّ الأعدادِ، وأتحققُ من صحةِ الحلِّ.

1 $|x| = 5$

$x = 5 \quad \text{or} \quad x = -5$

ألاحظُ أن المسافةَ بينَ x والعددِ 0 هي 5 وحداتٍ



أتحققُ: أعوضُ الحلولَ في المعادلةِ الأصليةِ، فأجدُ

$|5| = 5$ و $|-5| = 5$

✓ ✓

2 $2\,|x-3|+2=4$

$2|x-3|+2=4$ المعادلةُ المعطاةُ

$2|x-3|+2-2=4-2$ بطرحِ 2 من طرفي المعادلةِ

$2|x-3|=2$ تبسيطٌ

$\frac{2}{2}|x-3|=\frac{2}{2}$ بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 2

$|x-3|=1$ تبسيطٌ

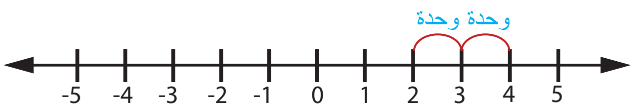
أكتبُ معادلتينِ مرتبطتينِ بالمعادلةِ $|x-3|=1$، ثمَّ أحَلُّ كلًّا منهما

$x-3=1$ or $x-3=-1$ بكتابةِ المعادلتينِ المرتبطَتينِ

$x-3+3=1+3$ or $x-3+3=-1+3$ بجمعِ 3 إلى كلِّ الأطرافِ

$x=4$ or $x=2$

مجموعةُ الحلِّ = $\{2,4\}$



أتحققُ: أعوضُ الحلولَ في المعادلةِ المعطاةِ (الأصليةِ) $2|x-3|+2=4$

$x=4 \rightarrow 2|4-3|+2=4$ ✓

$x=2 \rightarrow 2|2-3|+2=4$ ✓

3 ٣| x−٦|−٥ = ٤

$3|x-6|-5=4$ المعادلةُ المعطاةُ

$3|x-6|-5+5=4+5$ بجمعِ 5 إلى طرفي المعادلةِ

بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 3

مجموعةُ الحلِّ{ , }

أتحققُ:

4 $7|x-10|+4=25$

نشاط 2 متبايناتُ القيمةِ المطلقةِ

أتعلمُ

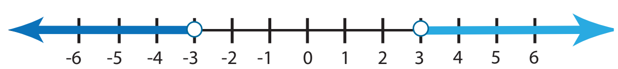
متباينةُ القيمةِ المطلقة: هي متباينةٌ تحتوي على قيمةٍ مطلقةٍ.

يدلُّ عليها متباينةُ القيمةِ المطلقةِ الأقلِّ	متباينةُ القيمةِ المطلقةِ الأكبرِ
$\lvert ax+b\rvert < c \quad (c>0)$	$\lvert ax+b\rvert > c$
يدلُّ عليها رمزُ التباين $\le$ أو $<$	يدلُّ عليها رمزُ التباين $\ge$ أو $>$
لحَلِّ المتباينةِ $\lvert ax+b\rvert < c$ $-c < ax+b < c$	لحَلِّ المتباينةِ $\lvert ax+b\rvert > c$ $ax+b < -c \quad \text{or} \quad ax+b > c$

1) أحَلُّ كلًّا من المتبايناتِ الآتيةِ، وأمثلُ مجموعةَ الحَلِّ على خطِّ الأعدادِ إن أمكنَ:

1 $\lvert A\rvert > 3$

$A < -3$ or $A > 3$



2 $\lvert B\rvert < 3$

$-3 < B < 3$

3 $\lvert 2x+1\rvert \ge 3$

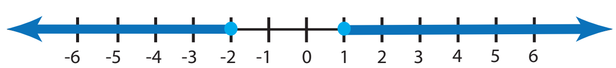
المتباينةُ المركبةُ $2x+1 \le -3 \quad \text{or} \quad 2x+1 \ge 3$

بطرحِ 1 $2x+1-1 \le -3-1 \quad \text{or} \quad 2x+1-1 \ge 3-1$

بالقسمةِ على 2 $2x \le -4 \quad \text{or} \quad 2x \ge 2$

$x \le -2 \quad \text{or} \quad x \ge 1$

مجموعة الحَلِّ: $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$



4 $-2\lvert x+3\rvert - 2 \ge 4$

بجمعِ 2 $-2\lvert x+3\rvert - 2 + 2 \ge 4 + 2$

$-2\lvert x+3\rvert \ge 6$

بالقسمةِ على -2 $\frac{-2}{-2}\lvert x+3\rvert \le \frac{6}{-2}$

لا يمكنُ أن تكونَ $\lvert x+3\rvert$ سالبةً، $\lvert x+3\rvert \le -3$

مجموعةُ الحَلِّ $\varnothing$

2) أحلُّ كلًّا من المتبايناتِ الآتيةِ، وأمثلُ مجموعةَ الحَلِّ على خطِّ الأعدادِ (إنْ أمكنَ) :

2 $\|x-3\|<1$ $-1< x-3<1$ بجمع 3 إلى كافةِ الأطرافِ تبسيطٌ مجموعةُ الحلِّ: $(2,4)$	1 $\|x-3\| > 1$ $x-3 < -1$ or $x-3 > 1$ $x-3+3<-1+3$ or $x-3+3>1+3$ جمعُ 3 تبسيطٌ مجموعةُ الحلِّ:
4 $\|x-2\| \leq 4$	3 $\|x-10\| \geq 5$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحلُّ معادلةَ القيمةِ المطلقةِ ( ).	• أحلُّ متباينةً على القيمةِ المطلقةِ ( ).	

4 تمثيلُ المتبايناتِ الخطيةِ بمتغيرينِ بيانيًّا

النتاجاتُ: • أمثلُ المتبايناتِ الخطيةَ بمتغيرينِ بيانيًّا.

نشاط 1 تمثيلُ مُتباينةٍ خطيّةٍ بِمُتَغَيِّرَيْنِ بيانيًا

أولًا: تمثيلُ النقاطِ على المستوى الإحداثيِّ

أتذكرُ

كل نقطةٍ في المستوى الاحداثيِّ يتمُّ تحديدُها بزوجٍ مرتبٍ.

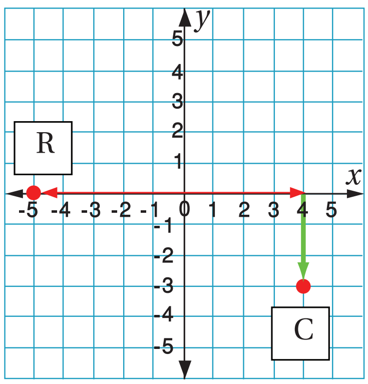
$(x \, , y)$

الإحداثيُّ x ← x ، الإحداثيُّ y ← y

لتعيينِ النقطةِ (-2,4) أتجهُ إلى اليسارِ وحدتين بدءًا من نقطةِ الأصلِ ثم إلى الأعلى بمقدارِ 4 وحدات.

1) أمثلُ الأزواجَ المرتبةَ على المستوى الإحداثيِّ المجاورِ

- $F(-1, -2)$
- $A(4,3)$
- $E(-1, 3)$
- $D(3, -1)$



2) النقطةُ التي تمثلُ إحداثياتُها (٤,−٣) هي ....

النقطةُ التي تمثلُ إحداثياتُها (٠ ,−٥) هي ....

ثانيًا: تمثيلُ المُتباينةِ الخطيّةِ بِمُتَغَيِّرَيْنِ بيانيًا

أتعلمُ

المتباينةُ الخطيةُ بمتغيرينِ هي مُتباينةٌ يمكن كتابتُها على إحدى الصورِ الآتيةِ:

$ax + by < c$ و $ax+ by \leq c$

$ax+ by > c$ و $ax + by \geq c$

a ,b ,c هي أعدادٌ حقيقيةٌ.

وحلُّ المتباينةِ الخطيةِ بمتغيرينِ يُكتَبُ على شكلِ زوجٍ مرتبٍ (x ,y).

لكلِّ مُتباينةٍ خطيَّةٍ مُعادلةٌ خطيَّةٌ مُرتبطةٌ بها.

مثلًا:

$x + 2y > 1$ هِيَ مُتباينةٌ خطيَّةٌ، وَ $x + 2y = 1$ هِيَ المُعادلةُ الخطيَّةُ المُرتبطةُ بها.

لتمثيلِ المتبايناتِ الخطيةِ بمتغيرينِ بيانيًّا، أتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ (1) أرسمُ منحنى المعادلةِ المرافقةِ للمتباينةِ بأنْ أستبدلَ الرمزَ ($\leq$، $\geq$ ، $<$ ، $>$) برمزِ المساواة (=)؛ حيثُ تمثلُ المعادلةُ الناتجةُ المستقيمَ الحدوديَّ.

الخطوةُ (2) اختارُ نقطةً لا تقعُ على المستقيمِ الحدوديِّ، ثمَّ أعوضُها في المتباينةِ الخطيةِ لتحديدِ ما إذا كانت تمثلُ حلًّا للمتباينةِ أم لا.

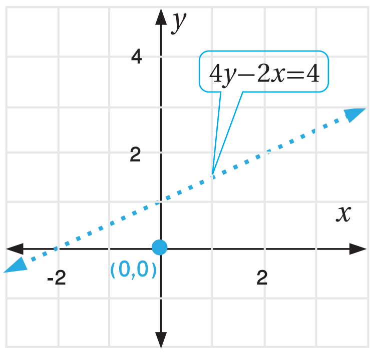
الخطوةُ (3) إذا كانتِ النقطةُ تحققُ المتباينةَ؛ أي تعطي نتيجةً صحيحةً، فأظللُ الجزءَ منَ المستوى الإحداثيِّ الذي تقع فيهِ تلكَ النقطةُ، وإلا فأُظللُ الجزءَ الآخرَ الذي لا تقعُ فيه تلكَ النقطةُ.

1) أمثلُ المتباينةَ الخطيةَ $4y - 2x < 4$ على المستوى الإحداثيِّ

الخطوةُ (1) أمثلُ المستقيمَ الحدوديَّ

أمثلُ المستقيمَ الحدوديَّ $4y-2x = 4$ ، وأنشئ جدولَ قيمٍ يبينُ نقاطَ تقاطعِ المستقيمِ مع المحورينِ على المستوى الإحـــداثيِّ $(0,1)$,$(-2,0)$ أعينُ النقطتينِ ثم أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بهما. وبما أنَّ رمزَ المتباينـــةِ ($<$) لا يحتــوي مساواةً فإنه يرسمُ متقطعًا كما في الشكلِ الآتي.

	$4y-2x=4$
$x = 0$	$4y-2(0)=4$ $4y = 4 \rightarrow y=1 \rightarrow (0,1)$
$y = 0$	$4(0)-2x = 4$ $-2x=4 \rightarrow x=-2 \rightarrow (-2,0)$



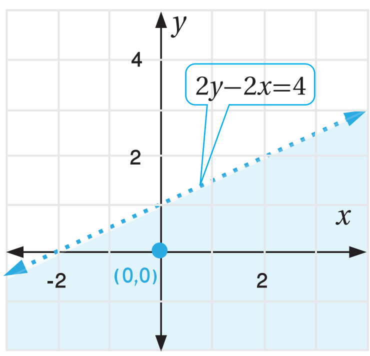
الخطوة (2) أحددُ منطقةَ الحلولِ الممكنةِ

أختارُ نقطةً لا تقعُ علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ مثل (0,0)، ثمَّ أتَحقَّقُ ما إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها فِي المُتباينةِ:

المتباينةُ الخطيةُ $4y - 2x < 4$

بتعويض النقطة $(0, 0)$ $4(0)-2(0) \overset{?}{<} 4$

$0<4$



إذنْ، $(0 ,0)$، تقعُ في منطقةِ حلِّ المتباينةِ.

الخطوةُ (3) أظللُ منطقةَ الحلولِ الممكنةِ

بما أنَّ النقطةَ أعطتنْا ناتجًا صحيحًا، فَأُظَلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي تقعُ فيه النقطةُ.

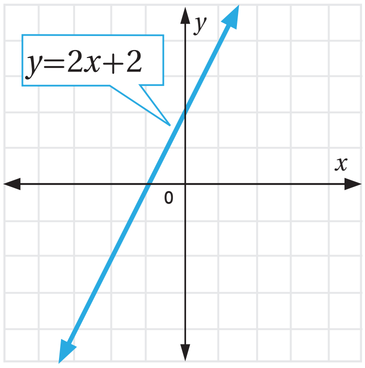
2) أمثلُ المتباينةَ الخطيةَ $2y \geq 4x + 4$ على المستوى الإحداثيِّ

الخطوةُ (١) أمثلُ المستقيمَ الحدوديَّ

أبسطُ المعادلة فينتج $y = 2x + 2$

أمثلُ المستقيمَ الحدوديَّ $y=2x+2$ ، وأنشئ جدولَ قيمٍ يبين نقاطَ تقاطعِ المستقيمِ مع المحورينِ على المستوى الإحداثيِّ $(-1,0),(٠،٢)$. أعينُ النقطتينِ ثم أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بهما. وبما أنَّ رمزَ المتباينةِ $(\geq)$ يحتوي مساواةً، فإنه يرسمُ متصلًا كما في الشكلِ الآتي.

	$y = 2x + 2$
$x = 0$	$y = 2 \rightarrow (\ldots, \ldots)$
$y = 0$	$0 = 2x+2 \rightarrow x = \ldots\ldots$ $2x = \ldots\ldots \rightarrow x = \ldots\ldots$ $(\ldots, \ldots)$



الخطوةُ (2) أحددُ منطقةَ الحلولِ الممكنةِ

أختارُ نقطةً لا تقعُ علَى المُستقيمِ الحُدوديِّ مثل (,)، ثمَّ أتَحقَّقُ ما إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها فِي المُتباينةِ:

المتباينةُ الخطية ....

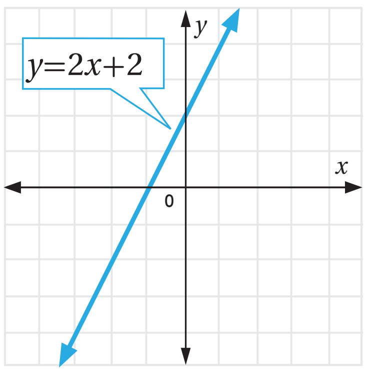
بتعويضِ النقطة $(0, 0)$ ....

الناتجُ صحيحٌ أم لا؟ ....

إذن النقطةُ $(0, 0)$ .... في منطقةِ حلِّ المتباينةِ.

الخطوةُ (3) أظللُ منطقةَ الحلولِ الممكنةِ

بما أنَّ النقطةَ أعطتنْا ناتجًا خاطئًا، فَأُظَلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي لا تقعُ فيه النقطةُ.



3) أمثل المتباينةَ الخطيةَ $3y - 6x < -6$ على المستوى الإحداثيِّ

ثالثًا: تمثيلُ المتبايناتِ الخطيةِ بمتغيرٍ واحدٍ

1) ما معنى المعادلةِ $y = 3$ ؟

(قيمةُ y لجميعِ قيمِ x تساوي 3) $(2,3), (\ldots,3\ ),(\ldots,3)$

2) ما معنى المعادلةِ $x = 3$ ؟

(قيمةُ x لجميعِ قيمِ y تساوي 3) $(3,2), (3, \ldots),(3,\ldots)$

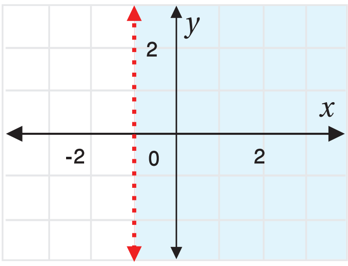
أتعلمُ

عندَ تمثيلِ المُتبايِنةِ الخطيَّةِ بِمُتَغَيِّرٍ واحدٍ علَى المُستوى الإحداثيِّ، يكونُ المُستقيمُ الحُدوديُّ، إمّا أُفُقيًّا أوْ عَموديًّا.

3) أمثلُ المتباينةَ $x > -1$ على المستوى الإحداثيِّ

الخطوةُ (1) أمثلُ المستقيمَ الحدوديَّ $x = -1$ وبما أنَّ رمزَ المتباينةِ ($>$)لا يحتوي مساواةً، فإنَّه يرسم متقطعًا كما في الشكلِ الآتي.

x	-1	-1	-1
y	-2	1	3



الخطوةُ (2) اختيارُ نقطةٍ لا تقعُ على الخطِّ مثلِ(0,0)

إذنْ، منطقةُ الحَلِّ من جهتِها $0 \overset{?}{>} -1$

4) أمثل المتباينةَ $y \leq 6$ على المستوى الإحداثيِّ

الخطوةُ (1) أمثلُ المستقيمَ الحدوديَّ .... =y

وبما أنَّ رمزَ المتباينةِ يحتوي مساواةً، فإنَّه يرسمُ ....

x			
y	6	6	

الخطوةُ (2) اختيارُ نقطةٍ لا تقعُ على الخطِّ مثلِ (...,...)

إذن منطقةُ الحلِّ...

أمثلُ كلًّا مما يأتي على المستوى الإحداثيِّ:

2 $y < -3$

1 $x \geq 6$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أمثلُ المتبايناتِ الخطيةِ بمتغيرينِ بيانيًّا. ( ).		

الوحدةُ (2) العلاقاتُ والاقتراناتُ

1
الاقتراناتُ

- أميزُ العلاقةَ من الاقترانِ.
- أحددُ مجالَ الاقترانِ ومداهُ.

2
تفسيرُ التمثيلاتِ البيانيةِ للعلاقاتِ

- أفسرُ الرسومَ البيانيةَ للمواقفِ الحياتيةِ.

3
الاقترانُ التربيعيُّ

- أذكرُ خصائصَ الاقترانِ التربيعيِّ.
- أمثلُ الاقترانَ التربيعيَّ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ.

4
التحويلاتُ الهندسيةُ للاقترانِاتِ التربيعيةِ

- أمثلُ منحنياتِ الاقتراناتِ التربيعيةِ الناتجةِ عن تطبيقِ تحويلٍ هندسيٍّ أو أكثرَ على منحنى الاقترانِ الرئيسِ.

1

النتاجات: • أميزُ العلاقةَ من الاقترانِ.

• أحددُ مجالَ الاقترانِ ومداهُ.

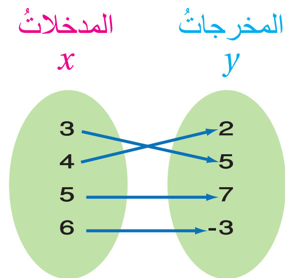
نشاط 1 تمييزُ العلاقةِ والاقترانِ

أولًا: العلاقاتُ

أتعلم

العلاقةُ: هي مجموعةُ الأزواجِ المرتبةِ المكونةِ من المدخلاتِ (المجالِ) والمخرجاتِ (المدى).

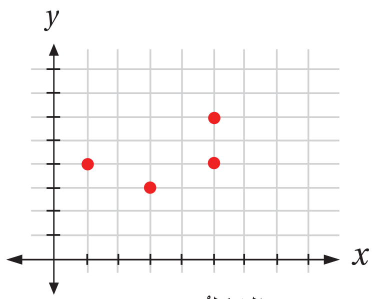
1) أتأملُ التمثيلاتِ الآتيةَ:



الشكلُ (1)

x	٢	٢	٣
y	٣	١	٤

الشكلُ (2)



الشكلُ (3)

1 في الشكلِ (1)

مجموعةُ قيمِ x التي تمثلُ المدخلاتِ: $\{3, 4, 5, 6\}$ وتسمى قيمَ المجالِ.

مجموعةُ قيمِ y التي تمثلُ المخرجاتِ: $\{2 , 5, 7,-3\}$ وتسمى قيمَ المدى

مجموعةُ الأزواجِ المرتبةِ (x, y) الناتجةِ من الشكلِ (1): $\{(3, 5), (4, 2), (5, 7), (6 ,-3)\}$

وتسمى العلاقةُ الممثلةُ اقترانًا، لأن كلَّ عنصرٍ في المجالِ ارتبط بعنصرٍ واحدٍ فقط في المدى

2 في الشكلِ (2)

مجموعةُ قيمِ x التي تمثلُ المجالَ: $\{2, 3\}$

مجموعةُ قيمِ y التي تمثلُ المدى: $\{3, 1, 4\}$

مجموعةُ الأزواجِ المرتبةِ (x, y) الناتجةِ من الشكلِ (2): $\{(2, 3) ,(2, 1) ,(3, 4)\}$

3 في الشكلِ (3)

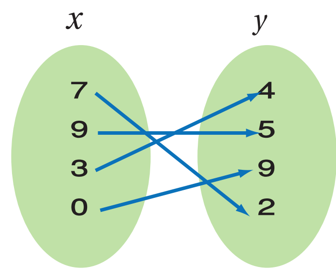
مجموعةُ قيمِ x التي تمثلُ المجالَ: $\{1, 3, 5\}$

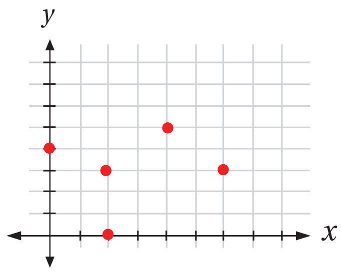
مجموعةُ قيمِ y التي تمثلُ المدى: $\{3, 4, 6\}$

مجموعةُ الأزواجِ المرتبةِ (x, y) الناتجةِ من الشكلِ (3): $\{(1, 4) ,(3, 3), (5, 4) ,(5, 6)\}$

ألاحظُ أنه في الشكلِ (2) و(3) هناكَ عنصرٌ في المجالِ يرتبطُ بعنصرينِ من عناصرِ المدى، لذلك فإنَّ كلًّا منهما لا يُمَثِّلُ اقترانًا.

2) أجدُ مجالَ العلاقاتِ الآتيةِ ومداها، ثُمَّ أحُددُ ما إذا كانت تمثلُ اقترانًا أم لا:





x	-1	-1	7	8
y	3	5	6	4

المجالُ ....

المدى...............

المخططُ السهميُّ يمثلُ.....

المجالُ ....

المدى.............

التمثيلُ البيانيُّ يمثلُ.......

المجالُ ....

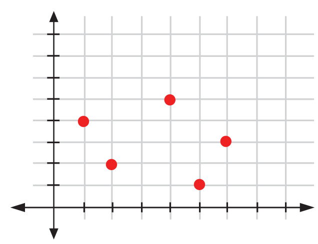
المدى...............

الجدولُ يمثلُ.......

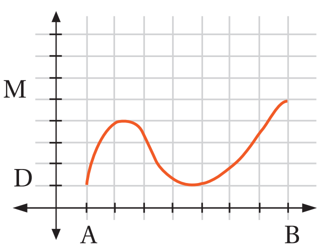
ثانياً: الاقترانُ المتصلُ والاقترانُ المنفصلُ

الاقترانُ: هو العلاقةُ التي تربطُ كلَّ عنصرٍ في المجال بعنصرٍ واحدٍ فقط من المدى، فدلالةُ الزوجِ المرتبِ (x,y) تعني: أنَّ x أحدُ عناصرِ المجالِ، وأن y أحدُ عناصرِ المدى.
يسمى الاقترانُ الذي يمثَّل بخطٍّ أو منحنىً من دونَ انقطاعٍ في المستوى الإحداثي اقترانًا متصلا، والاقترانُ الممثلُ بنقاطٍ غيرِ متصلةٍ اقترانًا منفصلا.

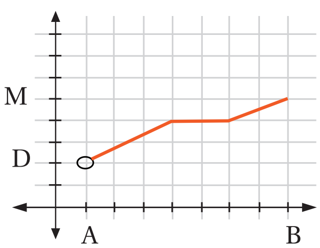
1) أحدّدُ أيًّا مما يأتي يعتبرُ اقترانًا متصلًا وأيَّها منفصلا، ثم أجدُ المجالَ والمدى له:



الشكلُ (1)



الشكلُ (2)



الشكلُ (3)

ألاحظُ أن الشكلَ (1) ممـثلٌ بنقاطٍ غيرِ متصلةٍ، لذلك يعتبرُ اقترانًا منفصلا، مجالُه $\{1,2,4,5, 6\}$ ومـداه $\{1,2,3,4, 5\}$

بينما الشكلُ (2) ممثلٌ بخطٍّ منحنٍ فيعتبرُ اقترانًا متصلا مجالهُ يبدأُ من النقطةِ A وينتهي بالنقطةِ B، ونعبرُ عنه بالفترةِ $[1,8]$ او $\{x \mid 1\leq x \leq 8\}$ ومداه يبدأُ من النقطةِ D وينتهي بالنقطةِ M، ونعبرُ عنه بالفترةِ $[1,5]$ أو $\{y \mid 1\leq y \leq 5\}$.

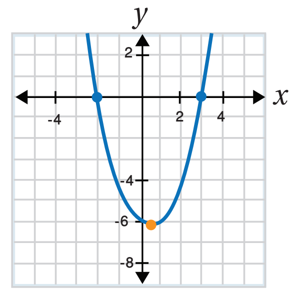
والشكلُ (3) ممثلٌ بخطوطٍ مستقيمةٍ متصلةٍ ببعضِها، فيعتبرُ اقترانًا متصلًا أيضًا، لذلك نعبرُ عنه بالفترةِ $(1,8]$ أو $\{x| \ 1< x \leq 8\}$ ومداه $(2,5]$.

أتذكرُ

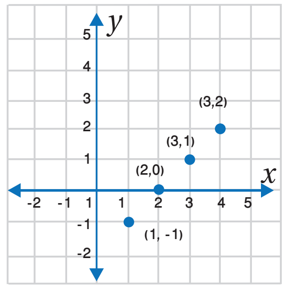
الحلقاتُ المفتوحةُ نعبرُ عنها بفتراتٍ مفتوحةٍ.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

2) معتمدًا على التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ، أكملِ العباراتِ الآتيةِ لتصبحَ صحيحةً:



الشكلُ (1)



الشكلُ (2)

1 يعتبرُ الشكلُ (1) تمثيلًا بيانيًّا لاقترانِ.........متصلٍ........

2 يعتبرُ الشكلُ (2) تمثيلًا بيانيًّا لاقترانِ........................

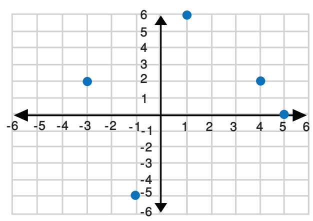
3 مجالُ الاقترانِ الممثلِ في الشكلِ (1) هو..................

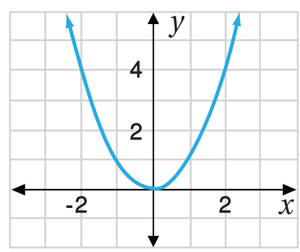
4 مجالُ الاقترانِ الممثلِ في الشكلِ (2) هو..................

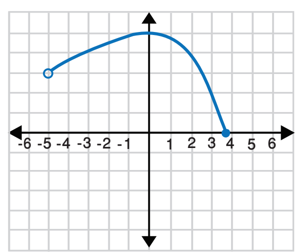
5 مـدى الاقترانِ الممثلِ في الشكلِ (1) هو...................

6 مـدى الاقترانِ الممثلِ في الشكلِ (2) هو...................

3) أصلُ بينَ الشكلِ والعبارةِ المناسبةِ:







الاقترانُ متصلٌ مجالُه $[-5, 4)$

الاقترانُ متصلٌ مداه $[0, \infty)$

الاقترانُ منفصلٌ مجالُه $\{5, 4, 1, -1, -3\}$

الاقترانُ متصلٌ مجالُه $(-\infty, \infty)$

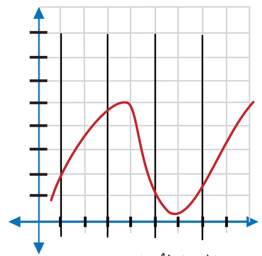
الاقترانُ منفصلٌ مداه $\{6, 2, 0, -5\}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

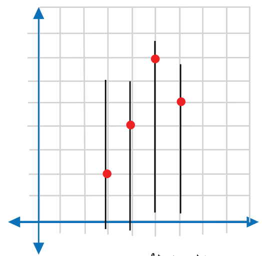
ثالثًا: اختبارُ الخطِّ الرأسيِّ

يُستعملُ اختبارُ الخطِّ الرأسيِّ لتحديدِ ما إذا كان التمثيلُ البيانيُّ هو تمثيلًا لاقترانٍ أم علاقة. فإذا تقاطعَ الخطُّ الرأسيُّ مع التمثيلِ البيانيِّ أكثرَ من مرةٍ، فإنَّ التمثيلَ البيانيَّ لا يمثلُ اقترانًا، أما إذا تقاطعَ كُلُّ خطٍّ رأسيٍّ معَ التمثيلِ البيانيِّ مرةً واحدةً فقط، فيعتبرُ تمثيلًا لاقترانٍ.

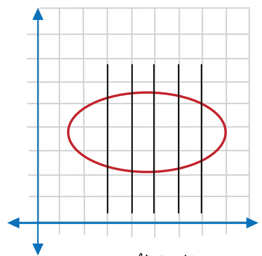
1) أتأملُ التمثيلاتِ الآتيةَ ثم أجيبُ عن الأسئلةِ التي تليها:



الشكلُ (1)



الشكلُ (2)



الشكلُ (3)

في الشكلينِ (1) و(2)، ما عددُ مراتِ تقاطعِ كلِّ خطٍّ من الخطوطِ الرأسيةِ مع منحنى التمثيل البيانيِّ للعلاقة؟

مرةً واحدةً فقط.

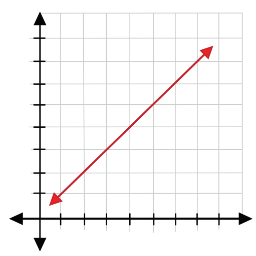
في الشكلِ (3) ما عددُ مراتِ تقاطعِ كلِّ خطٍّ من الخطوطِ الرأسيةِ معَ منحنى التمثيلِ البيانيِّ للعلاقةِ؟

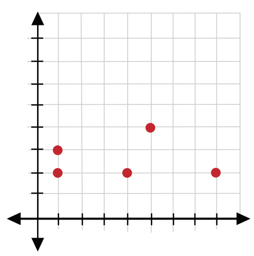
كلُّ خطٍّ تقاطعَ مرتينِ معَ منحنى التمثيلِ البيانيِّ للعلاقةِ.

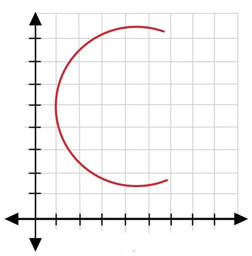
لذلك يعتبرُ كلٌّ من التمثيلينِ (1) و (2) اقترانين،

أما التمثيلُ البيانيُّ للشكلِ (3)، فلا يمثلُ اقترانًا.

2) أرسمُ خطوطًا رأسيّةً، ثم أحددُ أيًّا مما يأتي يعتبرُ اقترانًا، وأيًّا منها لا يعتبرُ اقترانًا:







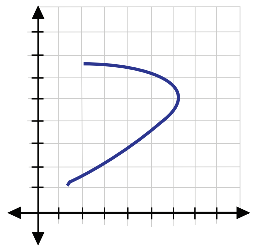
الشكلُ (1) يمثلُ ...اقترانًا... لأنَّ ...كلَّ خطٍّ رأسيٍّ يتقاطعُ... معَ التمثيلِ البيانيِّ ...مرةً واحدةً فقط

الشكلُ (2) .... لأنَّ .... معَ التمثيلِ البيانيِّ..................

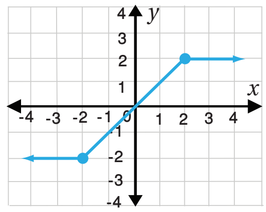
الشكلُ (3) .... لأنَّ .... معَ التمثيلِ البيانيِّ ....

منهاجي
متعة التعليم الهادف

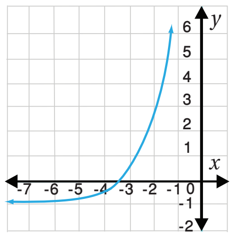
3) أستعملُ اختبارَ الخطِّ الرأسيِّ لتحديدِ، إذا كانتِ العلاقةُ الممثلةُ تعتبرُ تمثيلًا لاقترانٍ أم لا.



(1)



(2)



(3)

رابعًا: الاقترانُ الخطيُّ والاقترانُ غيرُ الخطيِّ

أتعلمُ

يمكنُ أنَّ نرمزَ إلى الاقترانِ كما يأتي:

$f(x)$, g(x) , $h(x)$, y

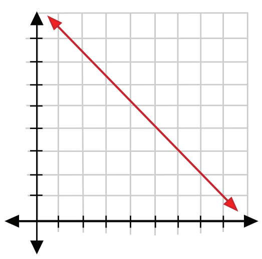
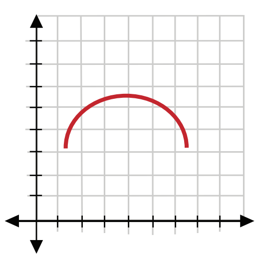
أتذكرُ

يسمَّى الاقترانُ $y=mx+b$ بالاقترانِ الخطيِّ مقطعُهُ من المحورِ y هو العددُ b، ويكتبُ على صورةِ الزوجِ $(0, b)$ والتمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ الخطِّيِّ هو خطٌّ مستقيمٌ.

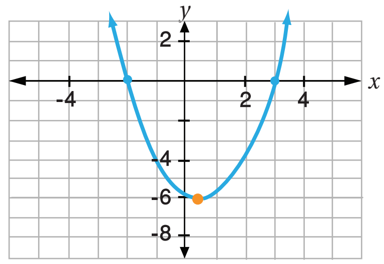
أتعلمُ

الاقترانُ غيرُ الخطيِّ هو اقترانٌ لا يمكنُ كتابتهُ بالصيغةِ $y= mx+b$ وتمثيلُه البيانيُّ ليس خطًّا مستقيمًا.

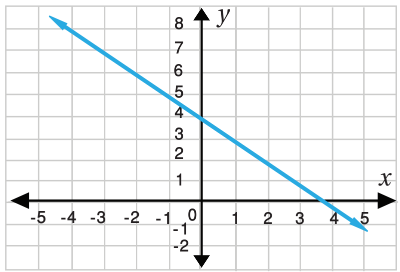
1) أحددُ الاقترانَ الخطيَّ في كلٍّ مما يأتي وأبررُ إجابتي:

التبريرُ	غيرُ خطيٍّ	خطيٌّ	الاقترانُ
لأنَّ أسَّ المتغيرِ فيه يساوي 1		✓	$f(x)=3x+2$
لأنَّ أسَّ المتغيرِ فيه يساوي 3	✓		$g(x) = 2x^3+5$
....		✓	$y=1-x$
....	✓		$f(x) = x^2+x$
لأنَّ التمثيلَ البيانيَّ خطٌّ مستقيمٌ		✓	
....	✓		

2) اعتمادًا على الشكلينِ الآتيينِ، أملأُ الفراغاتِ الآتيةَ:



الشكلُ (1)



الشكلُ (2)

يعتبرُ الشكلُ .... تمثيلًا بيانيًّا لاقترانٍ خطيٍّ، لأنَّه ....

يعتبرُ الشكلُ .... تمثيلًا بيانيًّا لاقترانٍ غيرِ خطيٍّ، لأنَّه......................

خامساً: ايجاد صورةِ أيِّ قيمةٍ من قيمِ المجالِ من قاعدةِ اقترانٍ معطىً

اذا كان $f(x) = x^2 + x - 3$ ، فما قيمةُ كلٍّ مما يأتي:

$f(2)$, $f(0)$, $f(3) + f(1)$

خطواتُ الحَلِّ بالكلمات	خطواتُ الحَلِّ جبريًّا	المقدارُ
أعوضُ العددَ 2 بدلاً من المتغيرِ x في الاقترانِ $f(x)$	$= (2)^2 + 2 - 3$	1 $f(2)$
أجدُ نواتجَ المقاديرِ الناتجةِ مراعيًا أولوياتِ العملياتِ الحسابيةِ	$= 4+2-3$	
أبسطُ المقاديرَ الناتجةَ وأجدُ الناتجَ النهائيَّ للمقدارِ	$= 6 - 3 = 3$	
أعوضُ العددَ 0 بدلاً من المتغيرِ x في الاقترانِ $f(x)$	=	2 $f(0)$
أجدُ نواتجَ المقاديرِ الناتجةِ مراعيًا أولوياتِ العملياتِ الحسابيةِ	=	
أبسطُ المقاديرَ الناتجةَ وأجدُ الناتجَ النهائيَّ للمقدارِ	=	
أجدُ f(٣) أولاً	=	3 $f(3) + f(١) =$
أجدُ f (١)	=	
أجمعُ ناتجَي المقدارينِ $f(3) + f(١)$	=	

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدربُ" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.

• أحددُ ما إذا كانت العلاقةُ اقترانًا أم لا ( ).	• أميزُ الاقترانَ الخطيَّ منْ غيرِ الخطيِّ ( ).

تفسيرُ التمثيلاتِ البيانيةِ للعلاقاتِ

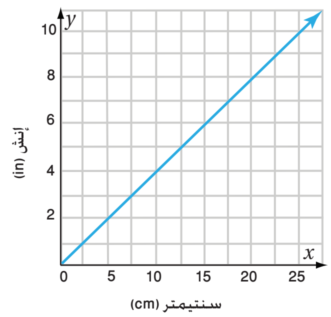
2

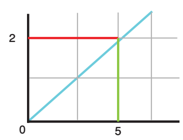
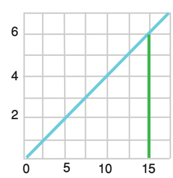
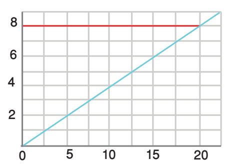
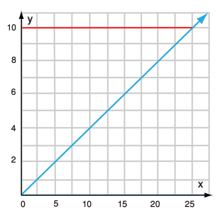
النتاجاتُ: • أفسرُ الرسومَ البيانيةَ للمواقفِ الحياتيةِ.

نشاط 1 تفسيرُ التمثيلاتِ البيانيةِ

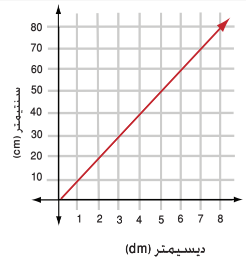
أولًا: التحويلُ بين وحداتِ قياس الطولِ

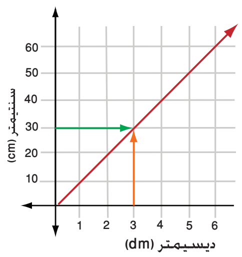
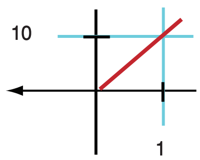
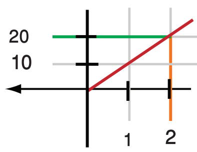
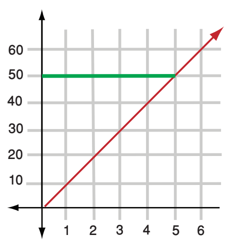
1) اعتمادًا على الشكلِ الآتي الذي يمثل العلاقةَ التقريبية (لأقربِ عددٍ صحيحٍ) بين السنتيمترِ (cm) والإنشِ (in)، أجيبُ عن الأسئلة الآتية:



السؤالُ	الحلُّ	التبريرُ
1 أحولُ (5 cm) إلى إنشٍ	2 إنش	 ألاحظُ أنَّ الخطَّ الأفقيَّ والخطَّ الرأسيَّ يلتقيانِ عندَ النقطةِ (5,2)
2 أحولُ (15 cm) إلى إنشٍ		 ما القيمةُ التي يقابلُها نهايةُ الخطِّ الأخضرِ على محورِ الإنشِ؟
3 أحولُ (8 in) إلى سنتيمترٍ	20 سنتيمتر	 ما القيمةُ التي يقابلُها نهايةُ الخطِّ الأحمرِ على المحورِ x (السنتيمترِ)؟
4 أحولُ (10 in) إلى سنتيمترٍ		 أجدُ إحداثياتِ نقطةِ تقاطعِ الخطينِ الأفقيِّ والرأسيِّ عندَ 10 in، وما يقابلُها على المحورِ x (السنتيمترِ).

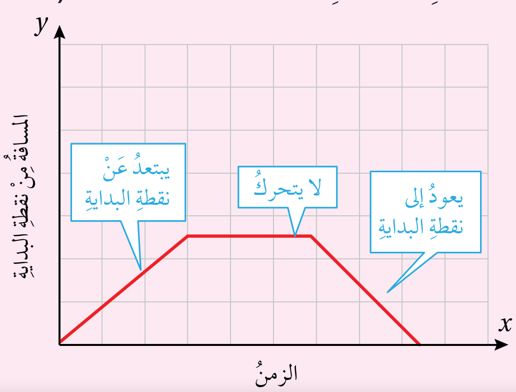
2) اعتمادًا على الشكلِ الآتي الذي يمثلُ العلاقةَ بين الديسيمترِ (dm) والسنتيمترِ (cm)، أجيب عن الأسئلة الآتيةِ:



السؤالُ	الحلُّ	التبريرُ
1 أحولُ (3 dm) إلى سنتيمتر	30 cm	
2 أحولُ (1 dm) إلى سنتيمتر		
3 أحولُ (20 cm) إلى ديسيمتر	2 dm	
4 أحولُ (50 cm) إلى ديسيمتر		

ثانيًا: منحنى المسافةِ ـ الزمنِ

لتمثيلِ المسافةِ التي يقطعُها جسمٌ متحركٌ في فترةٍ زمنيةٍ بين نقطتينِ زمنيتينِ، فإنَّنا نستعملُ منحنى (المسافةِ الزمنِ) كَما هو مُمثلٌ في الشكلِ المعطى جانبًا.

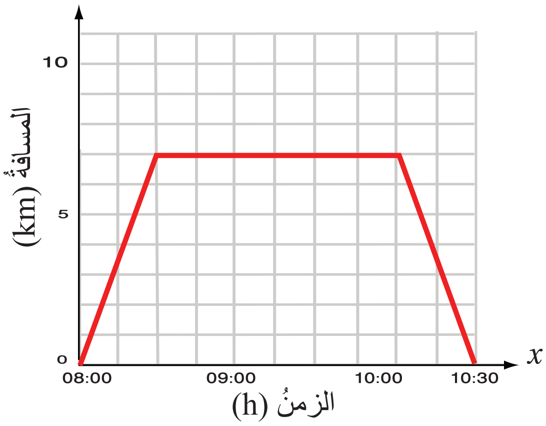


حيثُ تحسبُ السرعةُ بحسبِ القانونِ الآتي:

$$v = \frac{\text{التغيرُ في المسافةِ}}{\text{التغيرُ في الزمنِ}} = \text{السرعةُ}$$

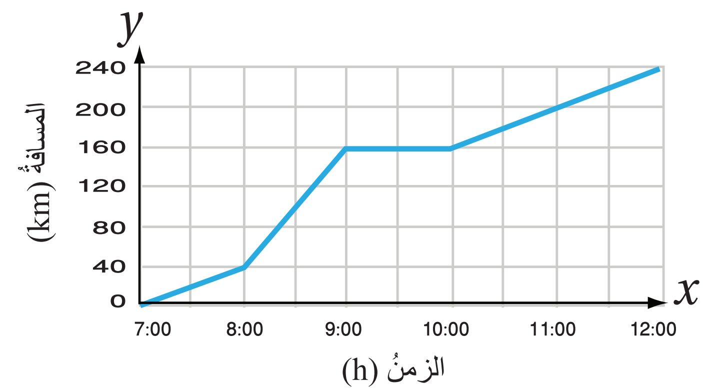
وبالرمزِ: $v = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

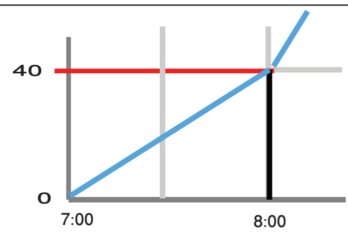
1) يمثلُ الشكلُ الآتي المسافةَ التي يقطعُها سامرٌ على دراجتِه الهوائيةِ من منزلِه إلى المكتبةِ.
أجيبُ عن الاسئلةِ الآتيةِ:



السؤالُ	الحلُّ	التبريرُ
1 في أيِّ ساعةٍ انطلقَ سامرٌ من منزلِه؟	الساعةُ 8:00	ألاحظُ أن بدايةَ خطِّ التمثيلِ البيانيِّ هو عندَ الساعةِ 8:00.
2 متى وصلَ سامرٌ إلى المكتبةِ؟	الساعةُ 8:30 وتساوي 8.5	بدايةُ الخطِّ الأفقيِّ يشيرُ إلى الساعةِ 8:30.
3 ما سرعةُ سامرٍ في المدةِ الزمنيةِ 8:30 - 8:00؟	$v = m = \frac{7-0}{8.5-8}$ $= \frac{7}{0.5}$ $= 14 \text{ km/h}$	لإيجادِ السرعةِ، نجدُ الزوجَ المرتبَ الممثلَ عندَ الساعةِ 8:00 وهو(8,0)، وعندَ الساعةِ 8:30 وهو (8.5, 7) ثم نستخدمُ قانونَ ميلِ الخطِّ المستقيمِ الذي يمثلُ السرعةَ: $v = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
4 كم المسافةُ بينَ بيتِ سامرٍ والمكتبةِ؟		بدايةُ الخطِّ الأفقيِّ يشيرُ إلى العددِ .... على محورِ المسافةِ.
5 ما المدةُ الزمنيةُ التي أمضاها سامرٌ في المكتبةِ؟	....	بدايةُ الخطِّ الأفقيِّ كانت عندَ الساعةِ ..... وانتهتْ عندَ الساعةِ ....
6 ما سرعة سامرٍ في المدةِ الزمنيةِ 10:30- 10:00 ؟ **أتعلّم** القيمةُ السالبةُ للسرعةِ تعني أنَّ الحركةَ تكونُ باتجاهِ تتناقصُ فيه المسافةُ.		الزوجُ المرتبُ الممثلُ عندَ الساعةِ 10:00 هو.............. الزوجُ المرتبُ الممثلُ عندَ الساعةِ 10:15 هو .... نطبقُ قانونَ السرعةِ : $v = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2) انطلقتْ رحلَةٌ مدرسيةٌ من عمانَ إلى البتراءِ. ويمثلُ الشكلُ الآتي المسافةَ التي قطعها الطلبةُ في الباصِ انطلاقًا من عمانَ، وصولًا إلى البتراءِ. أتأملُ الشكلَ ثم أجيبُ عن الأسئلةِ التي تليه :



السؤالُ	الحلُّ	التبريرُ
1 في أي ساعةٍ انطلقتِ الرحلةُ؟		بدايةُ خطِّ التمثيلِ البيانيِّ
2 في أي ساعةٍ كانتِ المسافةُ المقطوعةُ 40km؟		 نلاحظُ أنَّ الخطَّ الأفقيَّ والخطَّ الرأسيَّ يلتقيانِ عند النقطةِ (8,40).
3 ما سرعةُ الباصِ في الفترةِ الزمنيةِ 8:00-9:00؟		الزوجُ المرتبُ عندَ الساعةِ 8:00 هو............ والزوجُ المرتبُ عندَ الساعةِ 9:00 هو.......... نطبقُ قانونَ السرعةِ: $v = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
4 متى كانتِ استراحةُ الطلبةِ في أثناءِ الرحلةِ؟		بدايةُ الخطِّ الأفقيِّ عندَ الساعةِ .... ونهايةُ الخطِّ الأفقيِّ عندَ الساعةِ ....
5 ما سرعةُ الباصِ في الفترةِ الزمنيةِ 10:00-12:00		
6 متى وصلَ الطلبةُ إلى البتراءِ؟		نهايةُ خطِّ التمثيلِ البيانيِّ

أقيِّمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدربُ" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أجدُ سرعةَ جسمٍ متحركٍ في فترةٍ زمنيةٍ محددةٍ ( ).	• أفسرُ التمثيلاتِ البيانيةَ للعلاقاتِ ( ).	

الاقترانُ التربيعيُّ

النتاجات: • أذكرُ خصائصَ الاقترانِ التربيعيِّ.
• أمثلُ الاقترانَ التربيعيَّ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ.

نشاط 1 خصائصُ الاقترانِ التربيعيِّ

أتعلمُ

الاقترانُ التربيعيُّ: هو كلُّ اقترانٍ يكتبُ على الصيغةِ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيثُ a,b,c أعدادٌ حقيقيةٌ $a \neq 0$
ويسمى الاقترانُ $f(x) = ax^2$ بالاقترانِ الرئيسِ، لأنه أبسطُ صورة للاقترانِ التربيعيِّ.

أتعلمُ

القطعُ المكافئُ: هو الشكلُ الناتجُ عن تمثيلِ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا $f(x) = ax^2 + bx + c$ ويكونُ على شكلِ $\cap$ إذا كان $a<0$، أو على شكلِ $\cup$ إذا كانت $a>0$.

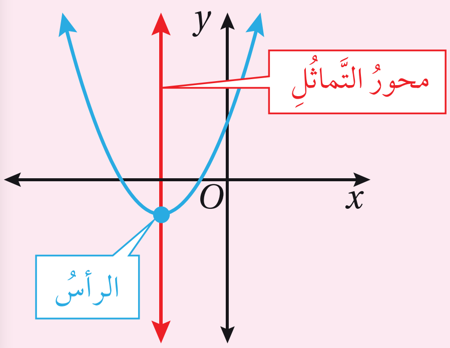
محـورُ التماثلِ: الخطُّ الرأسيِّ الذي يقسمُ الشكلَ إلى قسمين متماثلين ومعادلتهُ $x = -\frac{b}{2a}$

رأسُ القطـــعِ: نقطةُ تقاطعِ محورِ التماثلِ مَع منحنى القطعِ، وإحداثياتُهُ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

وتكـــــونُ: $\begin{cases} \text{قيمةً عظمى إذا كانت } a<0 \\ \text{قيمةً صغرى إذا كانت } a>0 \end{cases}$

المجـــــال: مجالُ الاقترانِ التربيعيِّ دائما هو $(-\infty, \infty)$

المــــدى: $\begin{cases} \{y \mid y \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right)\} \text{ إذا كانت } a>0 \\ \{y \mid y \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right)\} \text{ إذا كانت } a<0 \end{cases}$



منهاجي
متعة التعليم الهادف

1) أميزُ الاقترانَ التربيعيَّ في كلٍّ مما يأتي وأبررُ إجابتي:

الاقترانُ	تربيعيٌّ ومعاملاتهُ	غيرُ تربيعيٍّ	التبريرُ
$f(x)=x^2+3x-2$	✓ $a=1$ b $=3$ c $=-2$		لأنه على الصيغةِ $f(x)=ax^2+bx+c$
$f(x)=x^3+3x$		✓	لأنَّ أكبرُ قوةٍ للمتغيرِ فيه تساوي 3
$g(x)=4x^2+6$	✓ $a=4$ b $=0$ c $=6$		لأنه على الصيغةِ $f(x)=ax^2+bx+c$ **أتذكر** أيُّ حدٍّ من حدودِ الاقترانِ التربيعيِّ غيرُ موجودٍ يكونُ معاملهُ 0
$g(x)=4x-6$			لأنَّ قوةَ المتغيرِ فيه تساوي 1
$f(x)=2x^3-3x^2+4$		✓	
$f(x)=x^2$	✓ $a=$, b $=$, c $=$		
$f(x)=8x^3-1$			لأنَّ قوةَ المتغيرِ فيه تساوي 3

2) أجدُ معادلةَ محورِ التماثلِ وإحداثياتِ رأسِ القطعِ والقيمةِ العظمى أو الصغرى ومدى الاقتراناتِ الآتيةِ:

الاقترانُ	قيمُ المعاملاتِ a, b, c	معادلةُ محورِ $x=\frac{-b}{2a}$	إحداثياتُ رأسِ القطعِ $\left(\frac{-b}{2a},\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$	القيمةُ العظمى $a<0$ القيمةُ الصغرى $a>0$	المدى
$f(x)=x^2+2x+1$	$a=1$ b $=2$ c $=1$	$x=\frac{-2}{2(1)}=-1$	$f(-1)=(-1)^2+2(-1)+1$ $=1-2+1=0$ إحداثياتُ رأسِ القطعِ $(-1, 0)$	بما أنَّ $a=1$ للاقترانِ قيمةٌ صغرى مقدارُها 0	$[0, \infty)$ $\{y\|y\geq \cdot\}$
$f(x)=x^2-6x-5$	$a=1$ b$=-6$ c $=-5$	$x=\frac{-(-6)}{2(1)}$	$f(3)=$ $=-14$ إحداثياتُ رأسِ القطعِ $(3,\ )$	بما أنَّ $a=1$ للاقترانِ قيمةٌ.......... مقدارُها......	$[....., \infty)$ $\{y\|y\geq......\}$
$f(x)=-2x^2+4x$	$a=$ b $=$ c $=0$	$x=.......$ $=1$	$f(\ )=$ $=2$ إحداثياتُ رأسِ القطعِ $(\ ,\ )$	بما أنَّ $a=...$ للاقترانِ قيمةٌ عظمى مقدارُها......	$(-\infty,.....]$ $\{y\|y\leq......\}$
$f(x)=4x^2-7$	$a=$ b $=$ c $=$	$x=.......$	$f(\ )=$ إحداثياتُ رأسِ القطعِ $(\ ,\ )$	بما أنَّ $a=...$ للاقترانِ قيمةٌ .... مقدارُها......	$[....., \infty)$ $\{y\|y\geq......\}$
$f(x)=-3x^2-6x-5$					
$f(x)=x^2-2x+4$					

نشاط 2 تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا

خطواتُ تمثيلِ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا

أحددُ اتجاهَ القطعِ: $a > 0$ مفتوحٌ للأعلى $\cup$ ، $a < 0$ مفتوحٌ للأسفلِ $\cap$

↓

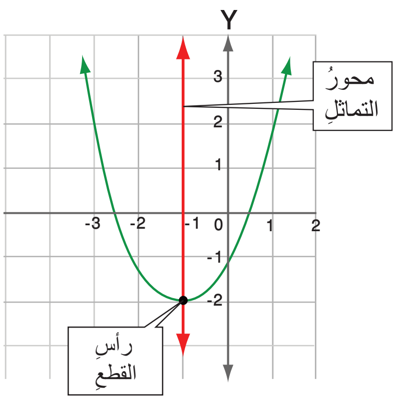
أجدُ معادلةَ محورِ التماثلِ ثم إحداثياتِ رأسِ القطعِ

↓

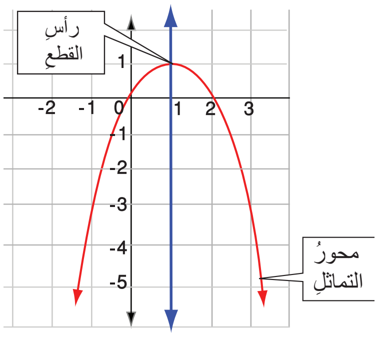
أجدُ نقاطًا أخرى

أجدُ أحداثياتِ المقطعِ y ، أختارُ قيمةً للمتغيرِ x تقعُ في جهةِ المقطعِ y نفسِها.

1) أمثلُ الاقترانَ $f(x) = x^2 + 2x - 1$ بيانيًّا

الخطوةُ	الحلُّ	التمثيلُ البيانيُّ
1 أجدُ قيمَ المعاملاتِ a,b,c	a = b = c =	
2 أحددُ اتجاهَ القطعِ	بما أنَّ $a=1$ فإنَّ المنحنى مفتوحٌ للأعلى.	
3 أجدُ معادلةَ محورِ التماثلِ	$x =$ $x = -1$	
4 أجدُ إحداثياتِ رأسِ القطعِ	$f(-1)=$ إحداثياتِ الرأسِ (,)	
5 أجدُ المقطعَ y	المقطعُ y هو قيمةُ الثابتِ c فالمقطعُ يساوي -1 إذنْ إحداثياتِ المقطعِ y هو $(0,-1)$	
6 أختارُ قيمةً للمتغيرِ x والقيمةَ المناظرةَ لها في الاقترانِ $f(x)$	أختارُ قيمةَ $x = ...$ $f(1)=1^2+2(1)-1=2$ أحصلُ على الزوجِ المرتبِ (1,2)	المجالُ $(-\infty,\infty)$ المدى $\{y \mid y \geq -2\}$ أو $[-2, \infty)$ وتكون القيمةُ الصغرى هي -2
7 أعينُ النقاطَ على المنحنى وأصلُ بينَها بخطٍّ منحنٍ ثم أرسمُ الخطَّ المنحنى نفسَه على الطرفِ الثاني من محورِ التماثلِ، فيظهرُ الشكلُ في التمثيلِ البيانيِّ.	إحداثياتُ الرأسِ (,) إحداثياتُ المقطعِ y (,) إحداثياتُ نقطةٍ على المنحنى (,)	

2) أمثلُ الاقترانَ $f(x) = -x^2 + 2x$ بيانيًّا

الخطوةُ	الحلُّ	التمثيلُ البيانيُّ
1 أجدُ قيمَ المعاملاتِ a,b,c	a = b = c =	
2 أحدد اتجاهَ القطع	بما انَّ $a = -1$ فإنَّ المنحنى مفتوحٌ................	
3 أجدُ معادلةَ محورِ التماثلِ		
4 أجدُ إحداثياتِ رأسِ القطعِ	إحداثياتُ الرأسِ (,)	
5 أجدُ المقطعَ y	المقطع y يساوي............ إذنّ احداثياتُ المقطعِ y (,)	المجالُ .... المدى .... القيمةُ العظمى.........
6 أختارَ قيمةً للمتغيرِ x والقيمةَ المناظرةَ لها في الاقترانِ $f(x)$	أختارُ قيمةَ x =........ $f($ $)$ ....=(.......) أحُصل على الزوجِ المرتبِ (,)	
7 أعينُ النقاطَ على المنحنى وأصلُ بينها بخطٍّ منحنٍ، ثم أرسمُ الخطَّ المنحنى نفسَه على الطرفِ الثاني من محورِ التماثلِ، فيظهرُ الشكلُ في التمثيل البيانيِّ.	إحداثياتُ الرأسِ (,) إحداثياتُ المقطعِ y (,) إحداثياتُ نقطةٍ على المنحنى (,)	

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ ( ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدربُ" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ مَعَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحددُ خواصَّ الاقترانِ التربيعيِّ ( ).		• أمثلُ الاقترانَ التربيعيَّ بيانيًّا ( ).

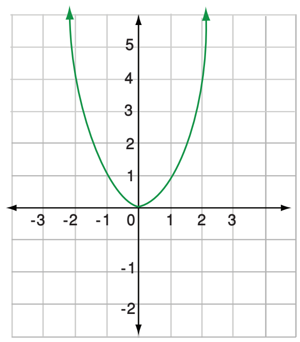
منهاجي
متعة التعليم الهادف

4 التحويلاتُ الهندسيةُ للاقترانات التربيعيةِ

النتاجاتُ: • أمثلُ منحنياتِ الاقترانات التربيعيةِ الناتجةِ عن تطبيقِ تحويلٍ هندسيٍّ أو أكثرَ على منحنى الاقترانِ الرئيسِ.

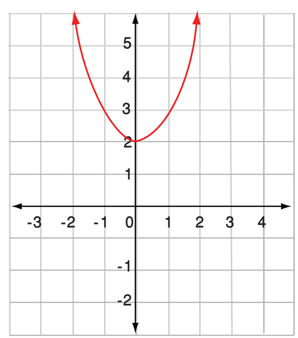
نشاط 1 تمثيلُ منحنى الاقترانِ الرئيسِ بيانيًّا والتحويلاتُ الهندسيةُ عليه

1) أقارنُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ بالتمثيلِ البيانيِّ للاقتراناتِ الممثلةِ، وأجيبُ عن الأسئلةِ التي تليه:



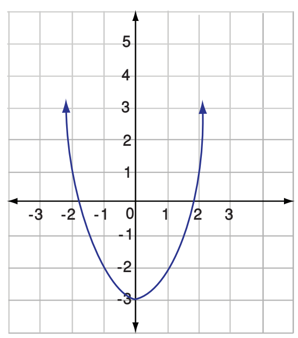
الشكلُ (1)

$f(x) = x^2$



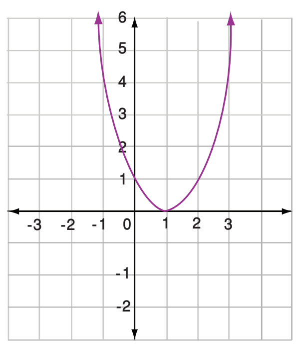
الشكلُ (2)

$f(x) = x^2 + 2$



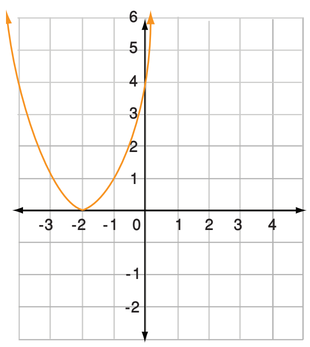
الشكلُ (3)

$f(x) = x^2 - 3$



الشكلُ (4)

$f(x) = (x - 1)^2$



الشكلُ (5)

$f(x) = (x + 2)^2$

الشكلُ (2) هو الشكلُ (1) أُجريَ عليه انسحابٌ بمقدارِ خطوتين إلى الأعلى، ويسمى انسحابًا رأسيًّا (للأعلى).

الشكلُ (3) هو الشكلُ (1)، أُجريَ عليه انسحابٌ بمقدارِ 4 خطوات إلى .... ويسمى انسحابًا رأسيًّا (للأسفل).

الشكلُ..... هو الشكلُ (1)، أُجريَ عليه انسحابُ خطوةٍ واحدةٍ إلى......... ويسمى انسحابًا أفقيًّا (لليمين).

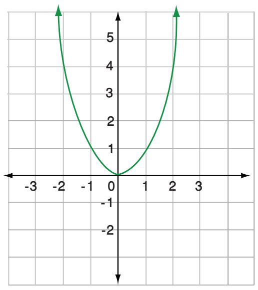
الشكلُ..... هو الشكلُ (1)، أُجريَ عليه انسحابٌ بمقدارِ خطوتينِ إلى .... ويسمى انسحابًا......... (لليسار).

أستنتجُ أنَّ الانسحابَ يحافظُ على .... ويغيرُ من .... فقط.

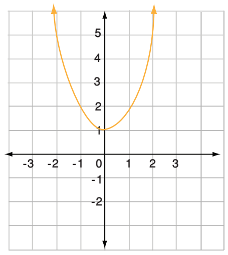
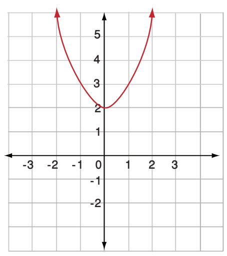
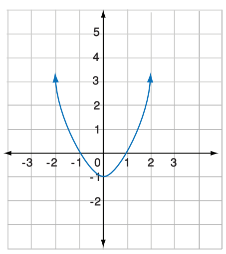
أستنتجُ:

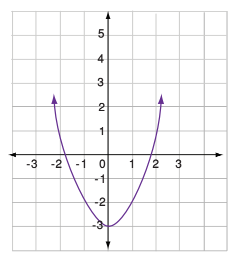
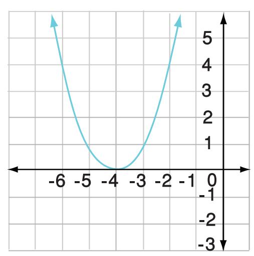
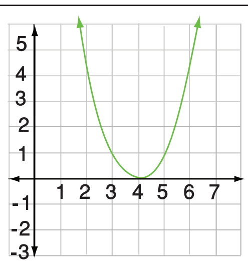
الانسحابُ	قاعدةُ الانسحابِ	مثالٌ	الوصفُ بالكلماتِ
إلى الأعلى	$f(x)=x^2+k$	$f(x)=x^2+4$	انسحابٌ إلى الأعلى بمقدارِ $k=4$ وحدة
إلى الاسفلِ	$f(x)=x^2-k$	$f(x)=x^2-4$	انسحابٌ إلى الأسفلِ بمقدارِ $k=4$ وحدة
إلى اليمينِ	$f(x)=(x-k)^2$	$f(x)=(x-1)^2$	انسحابٌ إلى اليمينِ بمقدارِ $k=1$ وحدة
إلى اليسارِ	$f(x)=(x+k)^2$	$f(x)=(x+1)^2$	انسحابٌ إلى اليسارِ بمقدارِ $k=1$ وحدة

2) أصفُ الانسحابَ المطبقَ على الاقترانِ الرئيسِ بالكلماتِ ثم أجُد قاعدةَ الاقترانِ في كلِّ مما يأتي:



$f(x)=x^2$

الشكلُ			
الوصفُ	الشكلُ يمثلُ انسحابًا...... بمقدارِ	الشكلُ يمثلُ انسحابًا...... بمقدارِ	الشكلُ يمثلُ انسحابًا...... بمقدارِ ....
قاعدةُ الاقترانِ	$f(x)=x^2+$.......	$f(x)=x^2+$.......	$f(x)=x^2-$.......

الشكلُ			
الوصفُ	الشكلُ يمثلُ انسحابًا...... بمقدارِ	الشكلُ يمثلُ انسحابًا...... بمقدارِ	الشكلُ يمثلُ انسحابًا...... بمقدارِ ....
قاعدةُ الاقترانِ	$f(x)=x^2-$.......	$f(x)=(x+\quad)^2$	$f(x)=(x-\quad)^2$

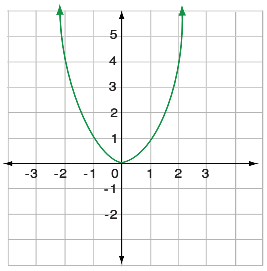
أتذكرُ

التمددُ هو تحويلٌ يؤدي إلى توسيعِ الشكلِ أو تضييقهِ، وقاعدتُهُ $f(x)=ax^2$

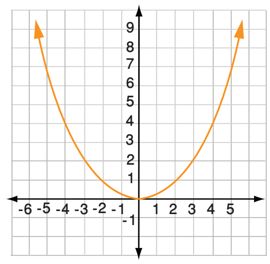
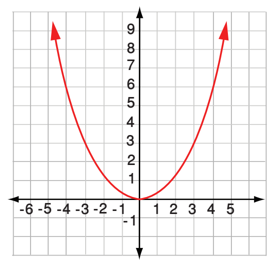
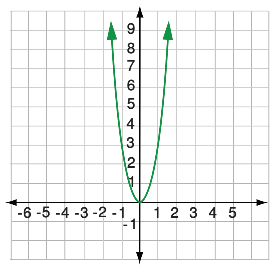
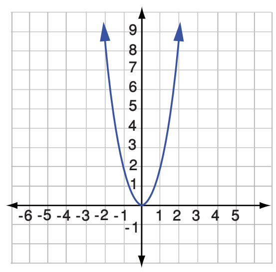
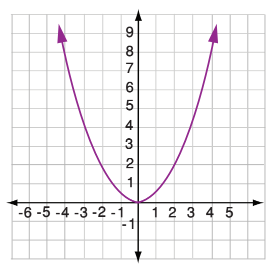
التوسيعُ: عندما تكونُ قيمةُ $a>1$

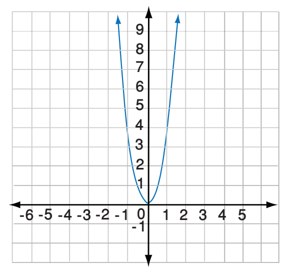
التضييقُ: عندما تكونُ قيمةُ $0<a<1$

3) أقارنُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ الرئيسِ بالتمثيلِ البيانيِّ للاقتراناتِ الممثلةِ وأجيبُ عن الأسئلةِ التي تليه:



$f(x) = x^2$

الشكلُ	الوصفُ	قاعدةُ الاقترانِ
	الشكلُ يمثلُ تضييقاً رأسيًّا بمعاملٍ مقدارهُ $a = \frac{1}{4}$ لأن $0 < a < 1$	$f(x) = \frac{1}{4}x^2$ $a = \frac{1}{4}$
	الشكلُ يمثلُ........ بمعاملٍ مقدارهُ........	$f(x) = \frac{1}{3}x^2$ $a = \frac{1}{3}$
	الشكلُ يمثلُ توسيعاً رأسيًّا بمعاملٍ مقدارهُ $a = 3$	$f(x) = \ldots x^2$
	الشكلُ يمثلُ....... بمعاملٍ مقدارهُ......	$f(x) = 2x^2$
	الشكلُ يمثلُ....... بمعاملٍ مقدارهُ $a = \frac{1}{2}$	$f(x) = \ldots x^2$

	الشكلُ يمثلُ.......بمعاملٍ مقدارهُ $a = 4$	$f(x)=\ldots x^2$

أتعلمُ

الانعكاسُ هو تحويلٌ هندسيٌّ يعكسُ منحنى الاقترانِ حولَ مستقيمٍ معلومٍ الانعكاسُ حولَ محورِ x

$f(x) = x^2 \longrightarrow f(x)=-x^2$

الانعكاسُ حولَ محورِ y لا يؤثرُ في الشكلِ

$f(x) = x^2 \longrightarrow f(-x)=(-x)^2=x^2$

أتعلمُ

$f(x)=a(x-h)^2+k$

a: يحددُ التمددَ والانعكاسَ

h: يحددُ الانسحابَ الأفقيَّ

k: يحددُ الانسحابَ الرأسيَّ

التمددُ	الانعكاسُ	الانسحابُ الأفقيُّ	الأنسحابُ الرأسيُّ
التوسيعُ الرأسيُّ $\lvert a\rvert>1$	إشارةُ a سالبة	لليمينِ، إشارةُ h موجبةٌ	إلى الأعلى، إشارةُ k موجبةٌ
التضييقُ الرأسي $0<\lvert a\rvert<1$	انعكاسٌ حولَ محورِ x	لليسارِ، إشارةُ h سالبةٌ	إلى الأسفلِ، إشارةُ k سالبة

إحداثياتُ الرأسِ (h, k)

4) أصفُ التحويلَ الهندسيَّ بالكلماتِ وأبررُ إجابتي ثمَّ أجدُ إحداثياتِ الرأسِ

الاقترانُ	الوصفُ بالكلماتِ	التبريرُ	إحداثياتُ الرأسِ
1 $f(x)=-2x^2$	يوجدُ انعكاسٌ حولَ محورِ x	$a<0$ (سالب)	$(0,0)$
	توسيعٌ رأسيٌّ معاملُه 2 وحدَة	$\lvert a\rvert>1$	
2 $f(x)=3(x+2)^2$	لا يوجدُ انعكاسٌ	....	$(-2,0)$
	يوجدُ توسيعٌ.... معاملُه.....	....	
	يوجدُ انسحابٌ أفقيٌّ إلى اليسارِ بمقدارِ.......	h=2	
3 $f(x)=-(x-1)^2+1$	يوجدُ .....حولَ محورِ....	$a<0$	(,)
	لا يوجدُ	$\lvert a\rvert=1$	
	يوجدُ انسحابٌ.... بمقدارِ...	h=1	
	يوجدُ انسحابٌ رأسي إلى الأعلى بمقدارِ وحدةٍ واحدة	k=1	
4 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-5$	لا يوجدُ	a......	(0 ,)
	يوجدُ تضييقٌ رأسيٌّ معاملُه......	a......	
	يوجدُ ....بمقدارِ......	k......	
5 $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2-1$	يوجدُ	$a=$......	(,)
	يوجدُ .....معاملُه.....	$a=$......	
	يوجدُ .....بمقدارِ......	h=......	
	يوجدُ ......بمقدارِ....	k=......	

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ ( ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أنْ أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.

• أصفُ تأثيرَ تحويلٍ هندسيٍّ أو أكثرَ على منحنى الاقترانِ الرئيسِ ( ).

الوحدةُ (3) حَلُّ المعادلاتِ

1

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًّا

- أحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بيانيًّا.

2

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ (1)

- أحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليل.

3

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ (2)

- أحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ على الصورةِ

$ax^2 + bx + c = 0$

4

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المربعِ

- أحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بإكمالِ المربعِ.

5

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

- أحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

6

حَلُّ معادلاتٍ خاصةٍ

- أحُلُّ معادلاتٍ أسُّ المتغيرِ فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبرُ من 2.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًّا

النتاجاتُ: • أحلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بيانيًّا.

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًّا

أولًا: حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًّا

أتذكرُ

المعادلةُ: هي جملةٌ تتضمنُ رمز مساواةٍ تدلُ على تساوي المقدارينِ في طرفيها، وقد تتضمن أعدادًا ومتغيراتِ مثل: x, y

حلُّ المعادلةِ: هو قيمةٌ عدديةٌ للمتغيرِ تجعلُ المساواة صحيحةً.

مثال: (المعادلةُ) $2x + 1 = 5$ فإن (حلَّ المعادلةِ) $x = 2$.

أتعلمُ

المعادلةُ التربيعيةُ: هي معادلةٌ يمكنُ كتابتُها على الصورةِ: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$.

حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بيانيًّا: هو تحديدُ القيمِ التي يقطعُ عندها منحنى الاقترانِ المرتبط المحورَ x، وتسمى تلك القيمُ جذورَ المعادلةِ أو أصفارَ الاقترانِ.

مثالٌ: (المعادلةُ التربيعيةُ) $x^2 - 2x - 8 = 0$ فإن (حلَّ المعادلةِ التربيعيةِ) $x = -2, 4$

لحلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ يمكنُ استعمالُ إحدى الطريقتين:

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًّا:

1- أكتب المعادلة بالصورةِ القياسية $ax^2 + bx + c = 0$

2- أمثلُ بيانيًّا الاقترانَ المرتبطَ $f(x) = ax^2 + bx + c$

3- أجدُ القيمَ التي يقطعُ عندَها المنحنى المحورَ x

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ جبريًّا:

1- حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ.

2- حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المربعِ.

3- حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

1) أحلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2 - 4x = -3$ بيانيًّا:

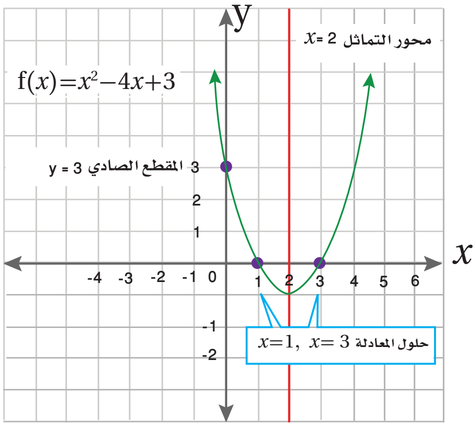
الصورةُ القياسيةُ للمعادلةِ: $x^2 - 4x + 3 = 0$

أمثلُ الاقترانَ المرتبطَ بيانيًّا: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

ألاحظُ أن القيمَ التي يقطعُ عندَها المنحنى المحورَ x:

$x = 1, x = 3$

إذن: حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ هو $x = 1, x = 3$



2) أحلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x - x^2 = -6$ بيانيًّا:

الصورةُ القياسيةُ للمعادلةِ: ....

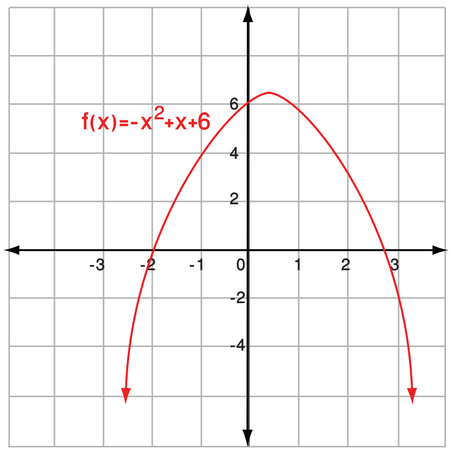
أمثلُ الاقترانَ المرتبطَ بيانيًّا: $f(x) =$ ....

ألاحظُ أن القيمَ التي يقطعُ عندَها المنحنى المحورَ x:

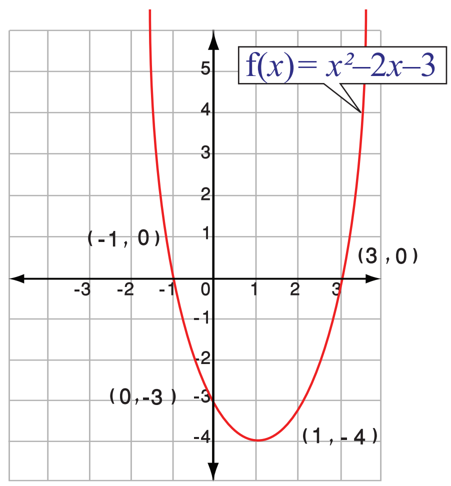
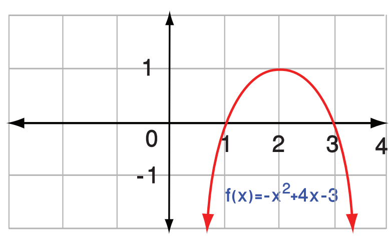
$x =$............, $x =$............

إذن: حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ

هو $x =$............, $x =$............

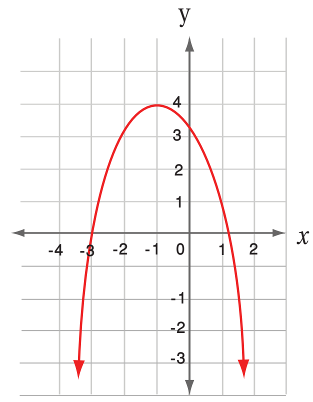
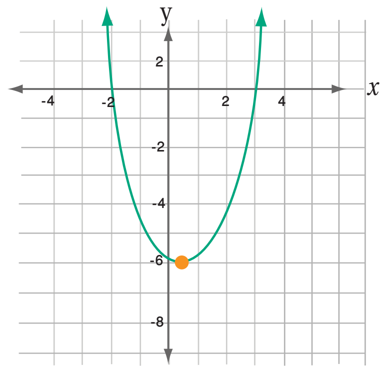
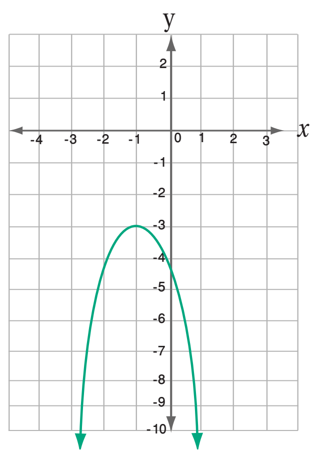
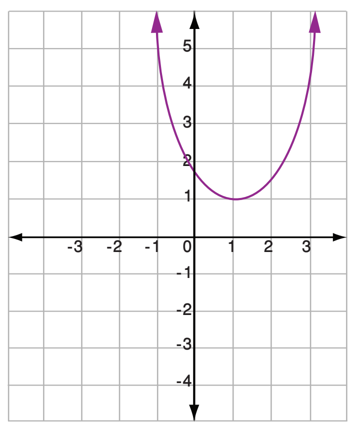
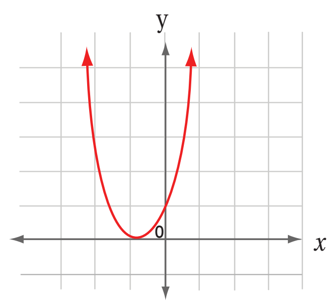
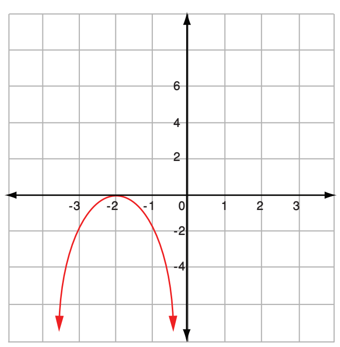


3) أكتبُ حلولَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ بيانيًّا:

تمثيلُ الاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ بيانيًّا	حَلُّ المعادلةِ
	$x_1 =$................ $x_2 =$................
	$x_1 =$................ $x_2 =$................

ثانيًا: عددُ حلولِ المعادلةِ التربيعيةِ

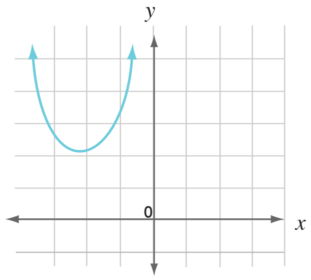
1) أحددُ عددَ قيمِ x التي تمثلُ حلولًا للمعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ (أصفار الاقترانِ، جذورُ المعادلةِ)، ثم أبررُ إجابتي:

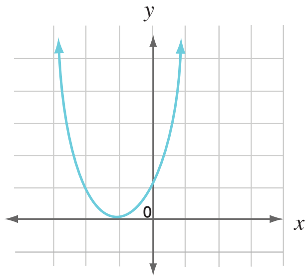
منحنى الاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ التربيعيةِ	حلولُ المعادلةِ
 	عددُ الحلولِ (عددُ قيمِ x): .... التبريرُ: ....
 	عددُ الحلولِ (عددُ قيمِ x): .... التبريرُ: ....
 	عددُ الحلولِ (عددُ قيمِ x): .... التبريرُ: ....

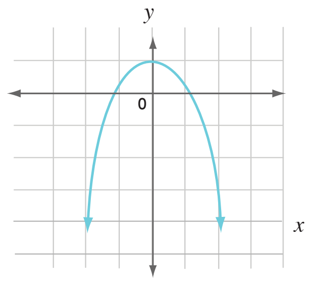
أتعلمُ

يمكنُ أن يكونَ للمعادلةِ التربيعية **حلان حقيقيانِ مختلفانِ**، أو **حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ**، أو **ألا يكونَ لها حلولٌ حقيقيةٌ**.

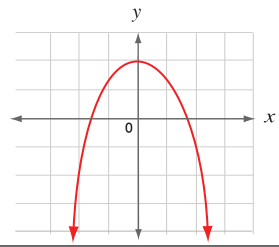
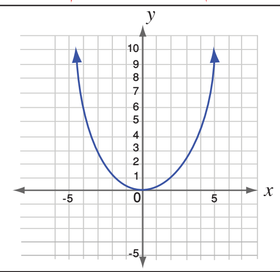
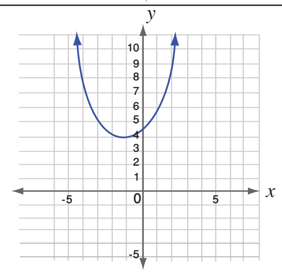
2) **أحددُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ التربيعيةِ التي لا يوجدُ لها حَلٌّ حقيقيٌّ.**







3) **أصلُ العمودَ الأولَ بما يناسبُه في العمودِ الثاني:**

التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ التربيعيةِ	عددُ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلةِ التربيعيةِ
	0
	1
	2

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أجدُ حلَّ معادلةٍ تربيعيةٍ بيانيًّا ( ).		

النتاجاتُ: • أحلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليلِ.

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ

أولًا: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

بعضُ طرائقِ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

عددُ الحدودِ الجبريةِ	طريقةُ التحليلِ	
2 أوْ أكثرُ	إخراجُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ	
2	الفرقُ بَيْنَ مربعَيْنِ	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
3	مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
3	$x^2 + bx + c$	$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ $m + n = b$ and $mn = c$
4 أوْ أكثرُ	التحليلُ بتجميعِ الحدودِ	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

1) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $6x^2 + 8x$:

الخطوةُ (1) أجدَ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: $2x$؛

لأنَّ $6x^2 = 2 \times 3 \times x \times x,\ 8x = 2 \times 2 \times 2 \times x$

الخطوةُ (2) أخرجُ المقدارَ $(2x)$ عاملًا مشتركًا: $2x\ (3x+4)$

الخطوةُ (3) هل المقدارُ الجبريُّ $6x^2 + 8x = 2x(3x+4)$ تمَّ تحليلُه تحليلًا كاملًا؟ أبررُ إجابتي.

نعمْ؛ لأنَّه تمَّ كتابةُ كلِّ حدٍّ من الحدودِ الجبريةِ للمقدارِ بالصورةِ التحليليةِ.

إذنْ، تمَّ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ تحليلًا كاملًا.

أتذكرُ

حينَ لا تساوي قيمةُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ حدودَ المقدارِ الجبريِّ 1، فإنَّ من الأسهلِ البدءَ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، ثمَّ اختيارَ طريقةِ التحليلِ المناسبةِ.

2) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $x^2 - 6x + 8$:

الخطوةُ (1) أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: 1

الخطوةُ (2) أختارُ طريقةَ التحليلِ المناسبةَ: تحليلُ ثلاثيةِ الحدودِ

$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$

$m + n = b$ and $mn = c$

أتذكرُ

إذا كانتْ c موجبةً، وb سالبةً في ثلاثيِّ الحدودِ $x^2 + bx + c$، فإنَّ لكلٍّ من n, m إشارةً سالبةً.

بما أنَّ $c = 8$، و $b = -6$، فيجبُ إيجادُ عددينِ سالبينِ مجموعُهما .... وحاصلُ ضربِهما ....

الخطوةُ (3) أنشىءُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 8 السالبة، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 6-:

أزواجُ عواملِ العددِ 8 السالبةُ	$-1, -8$	$-2, -4$
مجموعُ العاملَينِ	-9	-6

العاملانِ الصحيحانِ

الخطوةُ (4) أكتبُ القاعدة: $x^2 - 6x + 8 = (x + \mathbf{m})(x + \mathbf{n})$

الخطوةُ (5) أعوضُ $m = -2, n = -4$ $= (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

3) أحللُ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ:

1) $x^2 + 3x + 2$

2) $2x^2 + 14x + 24$

ثانيًا: حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ

1) أحلُّ المعادلةَ $4x^2 + 20x + 25 = 0$ بالتحليلِ

أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:

$$4x^2 + 20x + 25 = 0$$

خاصيةُ الضربِ الصفريِّ: إذا كان حاصلُ ضربِ عددينِ حقيقيينِ صفرًا، فإن أحدَهما على الأقلِّ يجبُ أنْ يكونَ صفرًا، **مثالٌ:** $x(x + 1) = 0$، فإن إما $x = 0$، أو $x + 1 = 0$.

ألاحظُ

المقدارُ الجبريُّ $4x^2 + 20x + 25$ يتكونُ من 3 حدودٍ؛ أختارُ تحليلهُ بإحدى الطرائقِ الثلاث: (إخراج العاملِ المشتركِ الأكبرِ، أو مربعِ كاملٍ ثلاثيٍّ، أو تحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ $(x^2 + bx + c)$؛ وبمَا أنَّ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدودِ الجبريةِ الثلاثةِ هو 1؛ فلا يمكنُ استعمالُ الطريقةِ الأولى، فأتحققُ من شروطِ طريقةِ تحليلِ مربعِ كاملِ ثلاثيِّ الحدودِ.

$$4x^2 \quad + \quad 20x \quad + \quad 25$$

1) الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ $4x^2 = (2x)^2$

2) الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ $25 = 5^2$

3) الحدُّ الأوسطُ يساوي ضعفَ ناتجِ ضربِ الجذرِ التربيعيِّ لكلٍّ مِنَ الحدّينِ: الأولِ، والأخيرِ. $20x = 2(2x)(5)$

إذنْ، أحللُ المقدارَ الجبريَّ باستعمالِ مربعِ كاملِ ثلاثيِّ الحدودِ:

مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

تحليلُ المقدارِ الجبريِّ هو: $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2 = (2x + 5)(2x + 5)$

أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وبما أنَّ العاملينِ متساويانِ فأحَلُّ المعادلةَ الخطيةَ (بينَ القوسينِ):

$$4x^2 + 20x + 25 = 0$$
$$(2x + 5)^2 = 0$$
$$2x + 5 = 0$$
$$x = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

إذن، للمعادلةِ جذرانِ حقيقيانِ متساويانِ (حَلٌّ واحدٌ) هو: $-2\frac{1}{2}$

لحلِّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ، أتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:
الخطوةُ (1) أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ.
الخطوةُ (2) أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ.
الخطوةُ (3) أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةِ الضربِ الصفريِّ)، وأحلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ.
حلولُ المعادلةِ التربيعيةِ هي حلولُ المعادلتينِ الخطيتينِ.

2) أحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2 = 12x - 36$

الخطوةُ (1) أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ:

....

الخطوةُ (2) أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:

- أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: ....
- هل الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ ....
- هل الحدُّ الأوسطُ يساوي $2(x)(6)$؟ ....
- هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ ....
- هل يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ باستعمالِ طريقةِ المربعِ الكاملِ ثلاثيِّ الحدودِ؟ ......
- أحللُ المقدارَ الجبريَّ: $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2 = (x - 6)(x - 6)$

(وبما أن العاملينِ متساويانِ أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، فأحُلُّ المعادلةَ الخطيةَ (بين القوسين):

....

....

إذن، للمعادلةِ جذرانِ حقيقيانِ متساويانِ (حَلٌّ واحدٌ) هو: ....

3) أحُلُّ المعادلتينِ التربيعيتينِ الآتيتينِ:

1) $x^2 + 6x + 9 = 0$

2) $9x^2 - 42x + 49 = 0$

أقيِّمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخل (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحللُ المقاديرَ الجبريةَ ( ).		• أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ جبريًّا ( ).

3 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ (2)

النتاجاتُ: • أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ على صورةِ $ax^2 + bx + c = 0$.

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ على صورةِ $ax^2 + bx + c = 0$

أولًا: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ بتجميعِ الحدودِ

أتذكرُ

بعضَ طرائقِ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

عددُ الحدودِ الجبريةِ	طريقةُ التحليلِ	
4 أوْ أكثرُ	التحليلُ بتجميعِ الحدودِ	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

1) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $x - 2x^2 - 18x + 9$

أُجمِّعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ

$x - 2x^2 - 18x + 9 = (x - 2x^2) + (-18x + 9)$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= x(1- 2x) + 9(-2x + 1)$

أخرِجُ $(1\text{-}2x)$ عاملًا مشتركًا

$= (1- 2x)(x + 9)$

أتذكرُ

$-2x + 1 = 1 - 2x$

2) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $2x^2 - 12x + 42 - 7x$

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ

$2x^2 - 12x + 42 - 7x = (\ldots\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= 2x(\ldots\ldots\ldots) - 7(\ldots\ldots\ldots)$

أخرجُ $(2x\text{-}7)$ عاملًا مشتركًا

$= (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

3) أحللُ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ:

1. $x^2 + 5x - x - 5$
2. $3x^2 + 15x - 4x - 20$

ثانيًا: تحليلُ ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

أتذكرُ

طرائقُ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

عددُ الحدودِ الجبريةِ	طريقةُ التحليلِ	
3	$x^2 + bx + c$	$x^2 + bx + c = (x+m)(x+m)$ $m + n = b$ and $mn = c$

أتذكرُ

طرائقُ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

لتحليلِ ثلاثـيِّ الحدودِ $ax' + bx + c$ ، أَجِدُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m و n حاصلُ ضربِهما يُساوي (ac)، ومجموعُهُما يُساوي b، ثمَّ أكتبُ $ax' + bx + c$ علـى الصورةِ $ax' + mx + nx + c$ ، ثمَّ أُحَلِّلُ بتجميعِ الحدودِ.

1) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $2x^2 + 5x + 3$

بمــا أنَّ $c = 3$، و $b = 5$، و $a = 2$، فيــجبُ إيجــادُ عــددينِ موجبينِ مجمــوعهُما 5، وحاصــلُ ضربِهما $ac = (2)(3) = 6$ ، أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 6 الموجبةِ، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 5:

أزوجُ عواملِ العددِ 6 الموجبةُ	1, 6	2 , 3
مجموعُ العاملَينِ	7	5

العاملانِ الصحيحانِ: 2 , 3

أكتبُ القاعدةَ: $2x^2 + 5x + 3 = 2x^2 + mx + nx + 3$

أعوضُ $m = 2, n = 3$: $= 2x^2 + 2x + 3x + 3$

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ: $= (2x^2 + 2x) + (3x + 3)$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ: $= 2x(x + 1) + 3(x + 1)$

أخرجُ $(x+1)$ عاملًا مشتركًا: $= (x + 1)(2x + 3)$

ألاحظ

إذا كانت إشارةُ $a.c$ موجبةً في ثلاثيِّ الحـــدودِ $ax^2 + bx + c$، فإن لكلٍّ من m و n الإشارةَ نفسَها، ويعتمدُ تحديدُ إشارتيّ m و n على إشارة b، فإذا كانت b موجبةً فإنَّ إشارةَ كلٍّ منهما موجبةٌ، وإذا كانت إشارةُ b سالبةً فإنَّ إشارةَ كلٍّ منهما سالبةٌ.

2) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $6x^2 - x - 12$

بما أن $a =$.................. و $b =$............ و $c =$............، فيجبُ إيجادُ عددينِ مجموعُهما .... وحاصلُ ضربِهما ....

ألاحظُ

إذا كانت $a.c$ سالبةً في ثلاثيِّ الحدود $ax^2 + bx + c$، فإنَّ لـ m و n إشارتين مختلفتين.

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 72 مختلفةَ الإشارةِ (إشارةُ الأكبرِ سالبةٌ)، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما -1

أزواجُ عواملِ العددِ 72 مختلفةُ الإشارةِ	مجموعُ العاملينِ
1, -72	-71
2, -36	-34
3, -24	-21
4, -18	-14
6, -12	-6
العاملانِ الصحيحانِ 8, -9	-1

أكتبُ القاعدةَ $6x^2 - x - 12 =$ ....

أعوضُ $m = 8, n = -9$ $=$..............................

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ $= (\ldots\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ $=\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots) -3 (\ldots\ldots\ldots)$

أخرجُ $(3x+4)$ عاملًا مشتركًا $= (\ldots\ldots\ldots\ldots) (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

3) أحللُ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ:

1 $6x^2 + 22x - 8$

2 $12x^2 - x - 20$

ثالثًا: حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ على صورةِ $ax^2 + bx + c$

1) أحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $2x^2 = 13x + 7$

أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ: $2x^2 - 13x - 7 = 0$

أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:

ملاحظًا أنَّ الطرفَ الأيسرَ من المعادلةِ على صورةِ $ax^2 + bx + c$

بما أن $c = -7$، و$b = -13$، و$a = 2$، فإنَّ $ac = -14$ (إشارةُ ac سالبةٌ، وإشارةُ b سالبةٌ)؛ فيجبُ إيجادُ عددينِ مختلفي الإشارةِ مجموعُهما -13 وحاصلُ ضربِهما -14

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ -14 مختلفةَ الإشارةِ (إشارةُ الأكبرِ سالبةٌ)، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما -13

أزواجُ عواملِ العددِ 14 مختلفةُ الإشارةِ	مجموعُ العاملينِ
العاملانِ الصحيحانِ 1, -14	-13
2,-7	-5

أكتبُ القاعدةَ: $2x^2 - 13x - 7 = 2x^2 + mx + nx - 7$

أعوضُ $m = -14, n = 1$: $= 2x^2 - 14x + 1x - 7$

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ: $= (2x^2 - 14x) + (x - 7)$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ: $= 2x(x - 7) + (x - 7)$

أخرجُ $(x-7)$ عاملًا مشتركًا: $= (x - 7)(2x + 1)$

أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وأحَلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ:

$x - 7 = 0 \quad , \quad 2x + 1 = 0$

$x = 7 \quad , \quad x = \frac{-1}{2}$

إذن، للمعادلةِ جذرانِ هما: $x = 7 \quad , \quad x = \frac{-1}{2}$

2) أحلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $3x^2 + 13x + 12 = 0$

- ألاحظُ أنَّ جميعَ الحدودِ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، والصفرَ في الطرفِ الأيمنِ: $3x^2 + 13x + 12 = 0$
- أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:
- ألاحظُ أنَّ الطرفَ الأيسرَ من المعادلةِ على صورةِ $ax^2 + bx + c$

بما أنَّ c =……. ، و b =……. ، و a =……. ، فإن ac =…….. (إشارةُ ac ………، وإشارةُ b ………)؛ فيجبُ إيجادُ عددينِ موجبينِ مجموعُهما ……… وحاصلُ ضربِهما ………..

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 36 موجبةَ الإشارةِ، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 13

أزواجُ عواملِ العددِ 36 موجبةُ الإشارةِ	مجموعُ العاملينِ
1, 36	37
2, 18	20
3, 12	15
العاملانِ الصحيحانِ — 4, 9	13
6, 6	12

أكتبُ القاعدةَ $3x^2 + 13x + 12 = ...$

أعوضُ $m = 9,\ n = 4$ $= ....$

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ $= (..........) + (........)$

أحللُ كُلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ $= 3x\ (.......) + 4\ (......)$

أخرجُ $(x+3)$ عاملًا مشتركًا $= (........)\ (........)$

- أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وأحلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ: $..........= 0\ ,\ ....= 0$

$x = ...\ ,\ x = ...$

إذنْ للمعادلةِ جذرانِ هما: $x =.........\ ,\ x =................$

3) أحلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ الآتيةَ:

2 $14x^2 + 5 = 17x$ **1** $2x^2 = x + 6$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ ( ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحللُ المقاديرَ الجبريةَ بتجميعِ الحدودِ ( ).	• أحللُ ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$ ( ).	• أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ على صورةِ $ax^2 + bx + c = 0$ ( ).

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المربعِ

4

النتاجاتُ: • أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بإكمالِ المربعِ.

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المربعِ

أولًا: أحُلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بتحليلِ المربعِ الكاملِ ثلاثيِّ الحدودِ

1) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $9x^2 + 12x = -4$

أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ: $9x^2 + 12x + 4 = 0$.

أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:

وألاحظُ أنَّ الطرفَ الأيسرَ من المعادلةِ على صورةِ $ax^2 + bx + c$

ألاحظُ

المقدارُ الجبريُّ $9x^2 + 12x + 4$ يتكونُ من 3 حدودٍ؛ وثلاثيُّ الحدودِ يمكنُ تحليلُهُ بثلاثِ طرائقَ: (إخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، أو تحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ ax^2+bx+c، أو بتحليلِ مربعٍ كاملٍ ثلاثيٍّ)؛ وبما أنَّ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدودِ الجبريةِ الثلاثةِ هو 1؛ فلا يمكنُ استعمالُ الطريقةِ الأولى؛ لذلك عليَّ أنْ أتحققَ من شروطِ الطريقتينِ المتبقيتينِ: تحليلِ مربعٍ كاملٍ ثلاثيِّ الحدودِ، وتحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$.

الطريقةُ الأولى: تحليلُ مربعٍ كاملٍ ثلاثيِّ الحدودِ:

$$9x^2 + 12x + 4$$

1 الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ $9x^2 = (3x)^2$

2 الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ $4 = 2^2$

3 الحدُّ الأوسطُ يساوي ضعفَ ناتجِ ضربِ الجذرِ التربيعيِّ لكلٍّ مِنَ الحدّينِ: الأولِ، والأخيرِ. $12x = 2(3x)(2)$

أحللُ المقدارَ الجبريَّ باستعمالِ مربعٍ كاملٍ ثلاثيِّ الحدودِ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$9x^2+12x+4 = (3x+2)^2$$
$$= (3x+2)(3x+2)$$

أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وأحَلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ:

$$9x^2+12x+4 = 0$$
$$(3x+2)(3x+2) = 0$$

العاملانِ متساويانِ، فأحُلُّ أحدَهُما

$$3x+2 = 0$$
$$x = \frac{-2}{3}$$

إذنْ، للمعادلةِ جذرٌ واحدٌ (حَلٌّ واحدٌ) هوَ: $-\frac{2}{3}$

الطريقةُ الثانيةُ: تحليلُ ثلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$:

بما أنَّ $c = 4$، و $b = 12$، و $a = 9$، فإن $ac = 36$ (إشارةُ ac موجبةٌ، وإشارةُ b موجبةٌ)؛ فيجبُ إيجادُ عددينِ موجبينِ مجموعُهما 12، وحاصلُ ضربِهما 36.

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 36 موجبةِ الإشارةِ، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 12

أزواجُ عواملِ العددِ 36 موجبةِ الإشارةِ	مجموعُ العاملين
1, 36	37
2, 18	20
3, 12	15
4, 9	13
العاملانِ الصحيحانِ 6, 6	12

أكتبُ القاعدةَ
$$9x^2 + 12x + 4 = x^2 + mx + nx + 4$$
أعوضُ $m = 6, n = 6$
$$= 9x^2 + 6x + 6x + 4$$
أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ
$$= (9x^2 + 6x) + (6x + 4)$$
أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ
$$= 3x(3x + 2) + 2(3x + 2)$$
أخرجُ $(3x+2)$ عاملًا مشتركًا
$$= (3x + 2)(3x + 2)$$

العاملانِ متساويانِ، فأساوي أحدَهُما بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وأحَلُّ المعادلةَ الخطيةَ:

$$3x + 2 = 0,$$
$$x = \frac{-2}{3}$$

إذن، للمعادلةِ جذرٌ واحدٌ (حَلٌّ واحدٌ) هوَ: $\frac{-2}{3}$

ألاحظُ

يمكنُ حلُّ المعادلةِ بأكثرَ من طريقةٍ؛ لذلك عليَّ اختيارُ الطريقةِ الأسهلِ والأنسبِ للحلِّ.

2) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $25x^2 = 40x - 16$ بتحليلِ المربعِ الكاملِ ثلاثيِّ الحدودِ:

أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ: $.................= 0$

أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملين:

$$25x^2 \quad - \quad 40x \quad + \quad 16$$

(1) الحدُّ الأول مربعٌ كاملٌ

$25x^2 = (5x)^2$

(2) الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ

$16 = 4^2$

(3) الحدُّ الأوسط يساوي ضعفَ ناتجِ ضربِ الجذرِ التربيعيِّ لكلٍّ مِنَ الحدّينِ: الأولِ، والأخيرِ.

$40x = 2(5x)(4)$

أحللُ المقدارَ الجبريَّ باستعمالِ مربعٍ كاملٍ ثلاثي الحدودِ: $25x^2 - 40x + 16 =$

$(..........)^2 = (.........)(..........)$

أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وأحَلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ: $(.........)(........) = 0$

$............... = 0$

$x = \frac{-4}{5}$

إذن للمعادلةِ جذرٌ واحدٌ (حَلٌّ واحدٌ) هو: $\frac{-4}{5}$

3) أحَلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ الآتيةَ:

1 $16x^2 = 56x - 49$

2 $4x^2 + 81 = -36x$

ثانيًا: حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المربعِ

1) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $4x^2 = 12x + 9$

أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ: $4x^2 - 12x - 9 = 0$

أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملين:

ما طرقُ التحليلِ الممكنُ استعمالُها للمقدارِ الجبريَّ على صورةِ $ax^2 + bx + c$؟

الطريقةُ الأولى: تحليلُ ثلاثيِّ الحدودِ

الطريقةُ الثانيةُ: مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ

لاختيارِ طريقةِ التحليلِ الأنسبِ، أجيبُ عن الأسئلةِ الآتيةِ:

- هــل يمكنُ إيجادُ عددينِ مختلفي الإشارةِ (إشارةُ b السالبةُ للأكبرِ) حـاصُل ضربِهما $ac = 36$ ومجموعُهما $b = -12$؟ لا يمكنُ؛ لأنَّ أزواجَ عواملِ العددِ 36 هيَ: $\boxed{(6, -6)}$, $\boxed{(4, -9)}$, $\boxed{(3, -12)}$, $\boxed{(2, -18)}$, $\boxed{(1, -36)}$

إذنْ، لا يمكنُ استعمالُ طريقةِ تحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ

- هلِ الحدُّ الأولُ $(4x^2)$ مربعٌ كاملٌ؟ نعم

- هلِ الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ لا؛ لأنَّ إشارتَه سالبةٌ

- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $2 \times 2x \times 3$ ؟ نعمْ

إذنْ، لا يمكنُ استعمالُ طريقةِ تحليلِ المربعِ الكاملِ ثلاثيِّ الحدودِ.

أتعلمُ

لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ علَى الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$؛ حيث $a \neq 1$، أقسِمُ كلَّ حدٍّ فِي المُعادلةِ على a، ثمَّ أفصِلُ الحدَّيْنِ اللذيْنِ يحتويانِ على x^2 و x فِي الطرفِ الأيسرِ أوَّلًا، ثمَّ أُكمِلُ المُرَبَّعَ.

لإكمالِ مربعِ أيِّ مقدارٍ تربيعيٍّ على صورةِ $x^2 + bx$، أتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ (1) أجد نصفَ b

الخطوةُ (2) أُربعِّ الناتجَ من الخطوةِ 1

الخطوةُ (3) أضيفُ الناتجَ من الخطوةِ 2 إلى طرفي المعادلةِ.

الخطوةُ (4) حلولُ المعادلةِ التربيعيةِ هي حلولُ المعادلتينِ الخطيتينِ $x^2 + bx$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

يمكنُ استعمالُ إكمالِ المربعِ لحَلِّ المعادلةِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

المعادلةِ الأصليةِ
$$4x^2 - 12x - 9 = 0$$

أقسمُ كلَّ حدٍّ في المعادلةِ على 4
$$x^2 - 3x - \frac{9}{4} = 0$$

أفصلُ الحدينِ اللذينِ يحتويانِ على x^2 و x في الطرفِ الأيسرِ
$$x^2 - 3x = \frac{9}{4}$$

أجدُ نصفَ (b=3)
$$\frac{3}{2}$$

أربِّعُ الناتجَ
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

أضيفُ الناتجَ $\frac{9}{4}$ إلى طرفي المعادلةِ
$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$$

أحلُ المربعَ الكاملَ $(x-\frac{3}{2})^2=\frac{18}{4}$

آخذُ الجذرَ التربيعيَّ للطرفين $x-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{18}{4}}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

أضيفُ إلى الطرفين $x=\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

أفصلُ الحلين $x=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ or $x=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

بالتبسيط $x=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$ or $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$

إذن، جذرا المعادلةِ (حلانِ) هما: $\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$

2) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2+4x=6$ بإكمال المربعِ

أفصلُ الحدين اللذين يحتويانِ على x^2 و x في الطرفِ الأيسر ....

أجدُ نصفَ $(b = 4)$ ....

أُربِّعُ الناتجَ ....

أضيفُ الناتجَ إلى طرفي المعادلةِ ....

أحلُ المربعَ الكاملَ $(.............)^2=$ ....

آخُذُ الجذرَ التربيعيَّ للطرفين $x+2=\pm\sqrt{\dots}$

أطرحُ 2 من الطرفين $x=-2\pm\sqrt{\dots}$

أفصلُ الحلين $x=$ .... or $x=$ ....

إذن، جذرا المعادلةِ (حلانِ) هما: ....،................

3) أحَلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ الآتيةَ:

1) $x^2=-10x-23$

2) $3x^2+6x+2=0$

أقيِّمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.

• أحَلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ بتحليلِ المربعِ الكاملِ ثلاثيِّ الحدودِ ( ).	• أحَلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ بإكمالِ المربعِ ( ).

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

5

النتاجات: • أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

أولًا: حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

أتعلمُ

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانونِ العامِّ على النَّحوِ الآتي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيثُ $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac \geq 0$.

1) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $5x^2 - 2x - 4 = 0$ باستعمالِ القانونِ العامِّ

أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ

$5x^2 - 2x - 4 = 0$

أكتبُ القانونَ العامَّ

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

أعوضُ $c = -4$, $b = -2$, $a = 5$ في القانونِ العامِّ

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(5)(-4)}}{10}$

بالتبسيطِ

$x = \frac{2 \pm \sqrt{84}}{10}$

$= \frac{2 \pm 2\sqrt{21}}{10}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{21}}{5}$

إذنْ، جذرا المعادلةِ (حلانِ) هما: $\frac{1 + \sqrt{21}}{5}$ ، $\frac{1 - \sqrt{21}}{5}$

2) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $3x^2 + 3 = 7x$ باستعمالِ القانونِ العامِّ:

أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ:

.... = 0

أكتبُ القانونَ العامَّ

$x =$

أعوضُ c =...... , b =........., a =.......... في القانونِ العامِّ:

$x =$

بالتبسيطِ

$x =$

إذنْ، جذرا المعادلةِ (حلانِ) هما: .... ، ....

3) أحَلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ الآتيةَ:

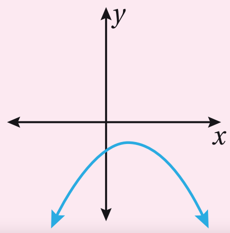
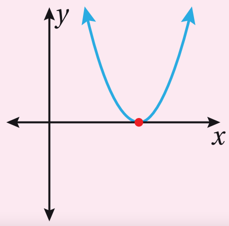
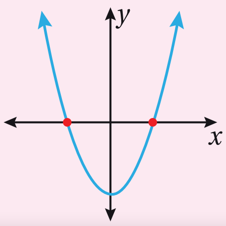
1) $2x^2 = 3x - 2$

2) $x^2 + 6x + 2 = 0$

ثانيًا: عددُ حلولِ المعادلةِ التربيعيةِ باستعمالِ المميزِ

أتعلمُ

مُميّزُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ هو $\Delta = b^2 - 4ac$ حيث، ويمكنُ استعمالهُ لتحديدِ عددِ حلولِ المُعادلةِ التربيعيَّةِ كما يأتي:

إشارةُ المُميِّزِ Δ	$\Delta < 0$ سالبٌ	$\Delta = 0$ صفرٌ	$\Delta > 0$ موجبٌ
عددُ الحُلولِ	لا توجدُ حُلولٌ حقيقيَّةٌ	حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ	حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ
مثالٌ بيانيٌّ			

1) أحددُ عددَ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلةِ التربيعيةِ $5x^2 - 2x - 3 = 0$ باستعمالِ المميزِ

أكتبُ صيغةَ المميزِ $\Delta = b^2 - 4ac$

أعوضُ $a = 5 , b = -2 , c = -3$ في صيغةِ المميزِ $\Delta = (-2)^2 - 4(5)(-3)$

بالتبسيطِ $\Delta = 4 + 60 = 64$

بما أن Δ موجبٌ، إذن للمعادلةِ حلانِ حقيقيانِ مختلفانِ

2) أحددُ عددَ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلةِ التربيعيةِ $x^2-2x+3=0$ باستعمالِ المميزِ:

أكتبُ صيغةَ المميزِ $\Delta=$..........................

أعوضُ $a =$........., $b =$........, $c =$......... في صيغةِ المميزِ: $\Delta=$.............................

بالتبسيطِ $\Delta=$.............................

بما أنَّ Δ ....، إذن ....

3) أحددُ عددَ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ:

2) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

1) $x^2 = 7x - 1$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ باستعمالِ القانونِ العامِّ ( ).	• أحددُ عددَ حلولِ المعادلةِ التربيعيةِ باستعمالِ المميزِ ( ).	

حَلُّ معادلاتٍ خاصةٍ

النتاجاتُ: • أحَلُّ معادلاتٍ أسُّ المتغيرِ فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبرُ من 2 .

نشاط 1 حَلُّ معادلاتٍ أسُّ المتغيرِ فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبرُ من 2

أولًا : تحليلُ مجموعِ مكعبين أو الفرقِ بينَهما

أملأ الجدولَ الآتيَ:

التحليلُ	مجموعُ مكعبينِ
$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	a^3+b^3
$(x+2)(x^2-2x+4)$	x^3+8
$(2x+\ ...)(4x^2-\ ...+1)$	$8x^3+1$
	$27x^3+8$
التحليلُ	**فرقُ مكعبينِ**
$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	a^3-b^3
$(x-3)(x^2+3x+9)$	x^3-27
$(3x-\ ...)(x^2+\ ...+4)$	$27x^3-8$
	$8x^3-125$

ثانيًا : حَلُّ معادلاتِ مجموعِ مكعبينِ أو الفرقِ بينَهما

أحَلُّ كلًّا من المعادلاتِ الآتيةِ:

1) $27x^3+1=0$ المعادلةُ المعطاةُ

$(3x)^3+(1)^3=0$ أكتبُ كلَّ حدٍّ على صورةِ مجموعِ مكعبينِ

$(3x+1)(9x^2-3x+1)=0$ أحللُ مجموعَ مكعبينِ

$3x+1=0$ او $9x^2-3x+1=0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

$3x+1=0$ أحلُّ المعادلةَ

$\rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$9x^2-3x+1=0$ مميزُها سالبٌ، فليسَ لها حلولٌ حقيقيةٌ

إذن، حلُّ المعادلةِ: $x=-\frac{1}{3}$

طريقةٌ بديلةٌ:

المعادلةُ المعطاةُ $27x^3 + 1 = 0$

أطرحُ 1 من طرفي المعادلةِ $27x^3 = -1$

أقسمُ طرفي المعادلةِ على 27 $x^3 = -\frac{1}{27}$

آخذُ الجذرَ التكعيبيَّ للطرفينِ $x = -\frac{1}{3}$

2 $8x^3 - 125 = 0$ المعادلةُ المعطاةُ

أكتبُ كلَّ حدٍّ على صورةِ فرقِ مكعبينِ $(2x)^3 - (5)^3 = 0$

أحللُ فرقَ المكعبينِ $(2x - \ ...)(4x^2 + 10x + \ ...) = 0$

خاصيةُ الضربِ الصفريِّ $2x - \ ... = 0$ أو $4x^2 10x + \ ... = 0$

أحلُّ المعادلةَ الخطيةَ، والمعادلةُ التربيعيةُ، ليس لها حلولٌ حقيقيةٌ $\rightarrow 2x - \ ... = 0$

إذن، حلُّ المعادلةِ هو: ....

3 $\frac{x^3}{8} + 1 = 0$

ثالثاً: حَلُّ معادلاتٍ على الصورةِ التربيعيةِ

أحلُّ كلًّا من المعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ المعادلةُ المعطاةُ

أكتبُ المعادلةَ على الصورةِ التربيعيةِ $(x^3)^2 - 9x^3 + 8 = 0$

أحللُ على الصورةِ التربيعيةِ $(x^3 - 1)(x^3 - 8) = 0$

أحلُّ المعادلتينِ مستعملًا خاصيةَ الضربِ الصفريِّ $(x^3 - 1) = 0$ و $(x^3 - 8) = 0$

فأجدُ أنَّ حلَّ المعادلةِ : $x = 2$, $x = 1$

طريقةٌ بديلةٌ: (التعويضُ)

المعادلةُ المعطاةُ	$x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
أفرضُ أنَّ $u = x^3$	$u^2 - 9u + 8 = 0$
أحللُ المعادلةَ التربيعيةَ	$(u-1)(u-8) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$(u-1) = 0$ و $(u-8) = 0$
أحَلُّ المعادلتينِ	$u = 1 \quad , \quad u = 8$
أعوضُ $u = x^3$	$x^3 = 1 \quad , \quad x^3 = 8$
آخذُ الجذرَ التكعيبيَّ لكلِّ معادلةٍ	$\rightarrow \; x = 1 \quad , \quad x = 2$

2 $x^4 - 81 = 0$

المعادلةُ المعطاةُ	$x^4 - 81 = 0$
أكتبُ المعادلةَ على صورةِ فرقِ مربعينِ	$(x^2)^2 - (9)^2 = 0$
أحللُ على الصورةِ التربيعيةِ	$(x^2 - \ldots)(\ldots + 9) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$(x^2 - 9) = 0, \; (x^2 + 9) = 0$
أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ	$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$
ليس لها حلولٌ حقيقيةٌ	$x^2 + 9 = 0$

إذن، حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ هو: $x = -3 , x = 3$

3 $x^4 - x^2 - 12 = 0$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحللُ مجموعَ مكعبينِ أو الفرقِ بينَهما ( ).	• أحَلُّ معادلاتِ مجموعِ مكعبينِ أو الفرقِ بينَهما ( ).	• أحَلُّ معادلاتٍ على الصورةِ التربيعيةِ ( ).

الوحدةُ (4) الهندسة الإحداثية

1

المسافةُ في المستوى الإحداثيِّ

- أجدُ المسافةَ بينَ نقطتين في المستوى الإحداثيِّ .
- أجدُ نقطةَ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المستوى الإحداثيِّ .

2

البعدُ بين نقطةٍ ومستقيمٍ

- أجدُ البعدُ بين نقطةٍ ومستقيمٍ .
- أجدُ البعدُ بين مستقيمين متوازيينِ.

3

البرهانُ الإحداثيُّ

- أوظفُ الهندسةَ الإحداثيةَ لبرهنةِ نظرياتٍ هندسيةٍ .

1 المسافةُ في المستوى الإحداثيِّ

النتاجات: • أجدُ المسافةَ بين نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ .

• أجدُ نقطةً منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المستوى الإحداثيِّ.

نشاط 1 المسافةُ بين نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ

أولًا: تمثيلُ النقاطِ على المستوى الإحداثيِّ

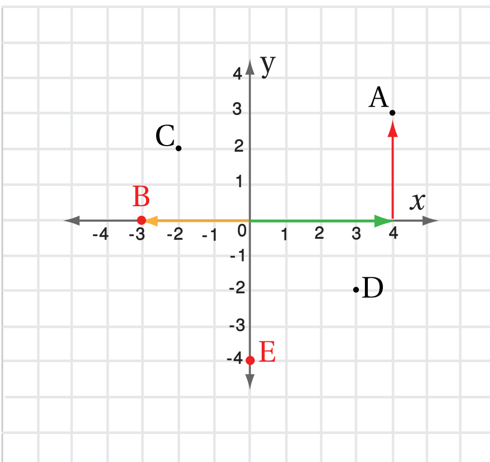
أتذكرُ

كلُّ نقطةٍ في المستوى الإحداثيِّ يتمُّ تحديدُها بزوجٍ مرتبٍ.

(x , y)

الإحداثيُّ y الإحداثيُّ x

1) أمثلُ الأزواجَ المرتبةَ على المستوى الإحداثيِّ المجاورِ



• **A (4,3)**

أبدأ من نقطةِ الأصلِ، وأتجه إلى العددِ 4 على محورِ x الموجبِ، ثمَّ أتجهُ ثلاثَ وحداتٍ 3 إلى الأعلى لأصلَ إلى النقطةِ A

• **B (−3, 0)**

أبدأ من نقطةِ الأصلِ، وأتجه إلى العددِ 3 على محورِ x السالبِ، ولا أصعدُ إلى الأعلى أو أنزلُ إلى الأسفلِ، لأنَّ الإحداثيَّ y يساوي 0

• **F (−1, −2): ....**

2) أجدُ احداثياتِ كلٍّ من النقاطِ الآتيةِ الممثلةِ على المستوى الإحداثيِّ المجاورِ :

1. النقطةُ C : تقابلُ العددَ 2− على المحورِ x وتقابلُ العددَ 2 على المحورِ y، إذنْ الزوجُ المرتَّبُ الذي يحددُ موقعَ النقطةِ هو (2 , 2−)
2. النقطةُ D: هي (.......,3)
3. النقطةُ E: هي (.....,....)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ثانيًا: المسافةُ بينَ نقطتينِ على خَطِّ الأَعدادِ

- يستعملُ الرمزُ $\overline{AB}$ ليدلَّ على القطعةِ المستقيمةِ التي نقطةُ بدايتِها A ونهايتُها B، ويرمزُ إلى طولِها بالرمزِ AB
- القيمةُ المطلقةُ للعددِ هي المسافةُ بين العددِ والصفرِ على خطِّ الاعدادِ، ويرمزُ إليها بالرمزِ | |

تمثلُ المسافةُ بينَ 2 و 0 القيمةَ المطلقةَ للعددِ 2

1 $DE = |2| = 2$

تمثلُ المسافةُ بينَ -5 و 0 القيمةَ المطلقةَ للعددِ -5

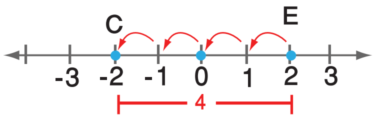
2 $BD = |-5| = 5$

تمثلُ المسافةُ بينَ -8 و 0 القيمةَ المطلقةَ للعددِ -8

3 $AD = |......| =$

تمثلُ المسافةُ بينَ -2 و 2 عددَ القفزاتِ منْ C الى E

4 CE



وأيضاً تمثلُ القيمةُ المطلقةُ للفرقِ بينَ 2 و -2

$= |2-(-2)| = 4$

تمثلُ المسافةُ بينَ -2 و -5 على خطِّ الأعدادِ

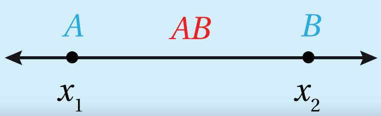
5 $CB = |-2-(-5)| = 3$

تمثلُ المسافةُ بينَ 2 و -8 على خطِّ الأعدادِ

6 EA: ....

ألاحظُ

لإيجادِ المسافةِ بين نقطتينِ على خَطِّ الأعدادِ، أجدُ القيمةَ المطلقةَ للفرقِ بينَ موقعِ كلٍّ منهما.

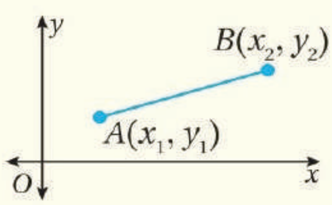


$AB = |x_1 - x_2|$ or $AB = |x_2 - x_1|$

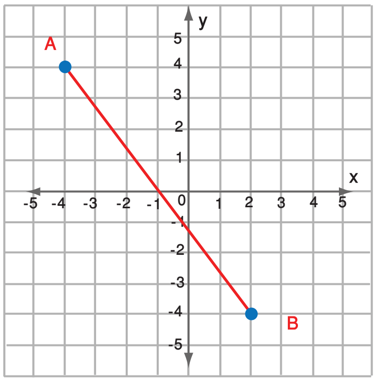
ثالثا: المسافةُ بين نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ

المسافةُ بينَ النقطتَيْنِ $A(x_1, y_1)$ وَ $B(x_2, y_2)$، هِيَ:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



1) أجدُ AB في الشكلِ المجاورِ



أجدُ إحداثياتِ كلٍّ منْ A و B

$A=(-4, 4), B=(2, -4)$

أكتبُ صيغةَ المسافةِ بين نقطتينِ

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عرضُ إحداثياتِ النقاطِ

$A:(x_1, y_1)=(-4, 4)$

$B:(x_2, y_2)=(2, -4)$

$$= \sqrt{(2-(-4))^2 + (-4-4)^2}$$

أجدُ مربعَ كلِّ عددٍ، ثمَّ أجمعُ

$$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$

أبسطُ

$$= \sqrt{100} = 10$$

2) أجدُ CD ، حيثُ $C(0, -2)$ و $D(-1, -1)$.

أكتبُ صيغةَ المسافةِ بينَ نقطتينِ

$$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أعوضُ إحداثياتِ النقاطِ حيث

$D:(x_2, y_2)=(\dots, \dots)$ $C:(x_1, y_1)=(\dots, \dots)$

$$= \sqrt{(\dots - \dots)^2 + (\dots - \dots)^2}$$

أجدُ مربعَ كلِّ عددٍ، ثمَّ أجمعُ

$$= \sqrt{(\qquad)^2 + (\qquad)^2}$$

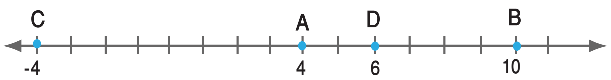
أبسطُ

$$= \sqrt{\qquad}$$

3) أجدُ EF ، حيثُ $E(-1, -2)$ و $F(2, 2)$.

نشاط 2 نقطةُ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المستوى الإحداثيِّ

أولًا :إيجادُ منتصفِ نقطتينِ على خطِّ الأعدادِ



أستعملُ خَطَّ الأعدادِ المجاورِ لأجدَ كلًّا مما يأتي:

1 الوسطُ الحسابيُّ للنقطتينِ C, B

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

أعوضُ $B: x_2 = 10$, $C: x_1 = -4$ $= \dfrac{-4 + 10}{2}$

أبسطُ $= 3$

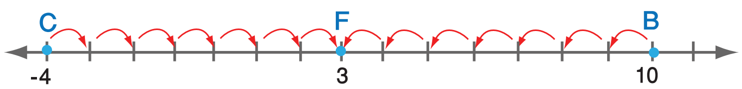
أتذكرُ

الوسطُ الحسابيُّ

$\bar{x} = \dfrac{\text{مجموعُ القيمِ}}{\text{عددِها}}$

الاحظُ أنَّ F هي منتصفِ CB

وتساوي الوسط الحسابيَّ للنقطتينِ C,B



2 إحداثيُّ منتصفِ D, B

منتصفُ المسافةِ، وليكن النقطة E $E = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

أعوضُ $D: x_1 = \ldots, B: x_2 = \ldots$ $= \dfrac{\ldots + \ldots}{2}$

أبسطُ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

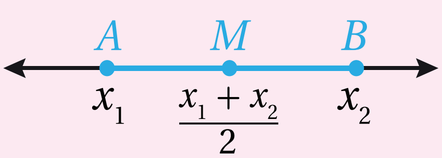
الاحظُ أنَّ E هي منتصفِ DB وتساوي ....

3 إحداثيُّ منتصفِ A,B = ...

أتعلمُ

إذا كانَ موقعُ النقطةِ A على خطِّ الأعدادِ هُوَ x_1 وَموقعُ النقطةِ B هُوَ x_2، وكانتْ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فإنَّ موقعَ M هُوَ:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

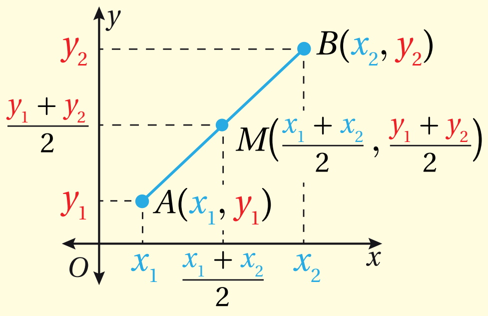


x_1 $\quad \dfrac{x_1 + x_2}{2} \quad$ x_2

ثانيا: إيجادُ نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المستوى الإحداثيِّ

إذا كانـــتْ $A(x_1 , y_1)$ وَ $B(x_2 , y_2)$ نقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ، وَ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فــإنَّ إحداثيَّيْ M هُما:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



النقطةُ M نقطةُ منتصفِ $\overline{AB}$ ونقطةُ منتصفِ $\overline{BA}$

1) أجدُ إحداثيَّ النقطةِ M ، التي تمثلُ منتصفَ $\overline{AB}$، حيثُ $A\ (-4, 4)$, $B\ (2, -4)$

صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

أعوضُ $A\ (\overset{x_1}{-4}, \overset{y_1}{4})$, $B\ (\overset{x_2}{2}, \overset{y_2}{-4})$

$$M\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{4+(-4)}{2}\right)$$

$M\ (-1 , 0)$

2) أجدُ احداثيَّ النقطةِ F ، التي تمثلُ منتصفَ $\overline{DE}$ ، حيثُ $D\ (2, 6)$, $E\ (-2, 3)$

صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

أعوضُ $D\ (\overset{x_1}{2}, \overset{y_1}{....})$, $E\ (\overset{x_2}{...}, \overset{y_2}{3})$

$$F\left(\frac{... + (-2)}{2}, \frac{6+...}{2}\right)$$

3) إذا كانت النقطةُ N منتصفَ $\overline{DL}$ ، وكانتْ $N\ (0, -2)$, $L\ (-4, 6)$ ، فأجدُ إحداثيَّ النقطةِ D.

أقيِّمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ مع بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.

• أجدُ المسافةَ بين نقطتين في المستوى الإحداثيِّ ( ).	• أجدُ منتصفَ قطعةٍ مستقيمةٍ في المستوى الإحداثيِّ ( ).

2 البعدُ بين نقطةٍ ومستقيمٍ

النتاجات: • أجدُ البعدَ بين نقطةٍ ومستقيمٍ .
• أجدُ البعدَ بين مستقيمينِ متوازيينِ.

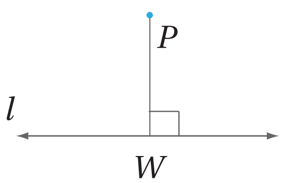
نشاط 1 البعدُ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ والبعدُ بين مستقيمينِ متوازيينِ

أولًا : البعدُ بين نقطةٍ ومستقيمٍ

البعدُ بينَ المستقيمِ l، الذي معادلَتُهُ: $Ax + By + C = 0$، وَالنقطةِ $P(x_1, y_1)$ تُعطى بالصيغةِ:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

بشرطِ ألّا تكونَ قيمتا A وَB معًا صِفرًا.



1) أجدُ البعدَ بينَ النقطةِ $P\ (2, -4)$ و المستقيمِ L الذي معادلتُه $3y = 4x + 2$

الخطوةُ (1) أكتبُ المعادلةَ على الصورةِ $Ax + By + c = 0$

معادلةُ المستقيمِ المُعطى $3y = 4x + 2$

كتابةِ المعادلةِ على الصورةِ $Ax+By+c=0$ $4x - 3y + 2 = 0$

إيجادُ قيمِ A, B, C $A = 4\ ,\ B = -3\ ,\ C = 2$

الخطوةُ (2) أجدُ البعدَ بين النقطةِ والمستقيمِ

صيغةُ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

أعوضُ $A = 4\ ,\ B = -3\ ,\ C = 2$

$(x_1, y_1) = (2, -4)$

$$d = \frac{|4(2) + -3(-4) + 2|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}}$$

$$\frac{22}{5} = 4.4$$

إذنْ، البعدُ يساوي 4.4 وحدةَ طولٍ.

2) أجد البعدَ بينَ النقطةِ $(1, -4)$ والمستقيمِ L الذي معادلتُه $y = 2$

الخطوةُ (1) أكتبُ المعادلةَ على الصورةِ $Ax + By + c = 0$

معادلةُ المستقيمِ المُعطى $y = 2$

كتابةُ المعادلةِ على الصورةِ $Ax + By + c = 0$ ....

أجدُ قيمَ A, B, C $A = \dots,\ B = \dots,\ C = \dots$

الخطوةُ (2) أجدُ البعدَ بينَ النقطةِ و المستقيمِ

صيغةُ البعدِ بين نقطةٍ ومستقيمٍ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

أعوضُ $A = \dots,\ B = \dots,\ C = \dots$

$(x_1, y_1) = (1, -4)$

$$d = \frac{|\dots + \dots + \dots|}{\sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2}}$$

$$= \frac{|\dots\dots|}{\sqrt{\dots\dots}} = \dots\dots$$

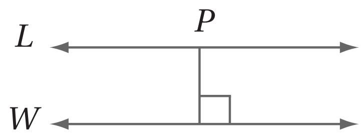
إذنْ، البعدُ يساوي .... وحدة طولٍ

3) أجدُ البعدَ بينَ النقطةِ $P\ (0, 2)$ و المستقيمِ L الذي معادلتهُ $8y = 6x - 3$

ثانيا: البعدُ بينَ مستقيمينِ متوازيينِ

1) أجدُ البعدَ بينَ المستقيمينِ المتوازيينِ L و W , حيثُ:

$$W: 4x + 3y + 8 = 0\ ,\ L: 4x + 3y + 3 = 0$$



الخطوةُ (1) أجدُ إحداثيَّ نقطةٍ تقعُ على أحدِ المستقيمين

ولتكنِ النقطةُ P تقعُ على المستقيمِ L $\quad 4x + 3y + 3 = 0$

أفرضُ أيَّ قيمةٍ للمتغيرِ x $\quad x = 0$

أعوضُ $x = 0$ بمعادلةِ L $\quad 0 + 3y + 3 = 0$

أطرحُ 3 من طرفي المعادلةِ $\quad 3y = -3$

أقسمُ 3 على طرفي المعادلةِ $\quad y = -1$

إذن، تقعُ النقطةُ $P\ (0, -1)$ على المستقيمِ L

الخطوةُ (2) أجدُ البعدَ بين النقطةِ p والمستقيمِ W الذي يمثّلُ البعدُ بين L و W

أستخدمُ صيغةَ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

أعوضُ $A=4\,,B=3\,,C=8$

$(x_2\,,y_2)=(0,-1)$

$$d=\frac{|4(0)+3(-1)+8|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}$$

أبسطُ

$$d=1$$

إذنْ، البعدُ بين المستقيمين المتوازيين يساوي وحدةَ طولٍ واحدةٍ.

2) أجدُ البعدَ بينَ المستقيمينِ المتوازيين N و M , حيثُ:

$$M: 3x+4y-8=0\,,N:\ 6x+8y+8=0$$

الخطوةُ (1) أجدُ إحداثييْ نقطةٍ تقعُ على أحدِ المستقيمينِ

ولتكنِ النقطةُ F تقعُ على المستقيمِ M

أفرضَ أيَّ قيمةٍ للمتغيرِ x

إذن تقعَ النقطةُ $F\,(0,\ldots)$ على المستقيمِ M

الخطوةُ (2) أجدُ البعدَ بين النقطةِ F والمستقيمِ N التي تمثّلُ المسافةَ بينَ M و N

أستخدمُ صيغةَ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

أعوضُ $A=\ldots\,,B=\ldots.\,,C=\ldots$

أبسطُ $(x_2\,,y_2)=(0,1)$

3) أجدُ البعدَ بين المستقيمينِ المتوازيين J و H , حيث:

$$H: 9x+12y=12\ \ ,\ J:\ 3x+4y=-11$$

أجدُ نقطةً على أحدِ المستقيمين وأكتبُ الآخرَ بالصيغةِ العامةِ

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ مَعَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أجدُ البعدَ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ في المستوى الإحداثيِّ ( ).	• أجدُ البعدَ بينَ مستقيمينَ متوازيين ( ).	

منهاجي
متعة التعليم الهادف

3 البرهانُ الإحداثيُّ

النتاجات: • أوظفُ الهندسةَ الإحداثيةَ لبرهنةِ نظرياتٍ هندسيةٍ.

نشاط 1 الهندسةُ الإحداثيةُ لبرهنةِ نظرياتٍ هندسيةٍ

أولًا: تمثيلُ المضلّعِ في المستوى الإحداثيِّ

أتعلمُ

لتمثيل مضلعٍ فِي المستوى الإحداثيِّ، أستعملُ الإحداثياتِ التي تجعلُ الحساباتِ أبسطَ ما يمكن.

الخطوةُ (1) أجعلُ نقطةَ الأصلِ رأسًا للمضلعِ.

الخطوةُ (2) أرسمُ ضلعًا واحدًا على الأقلّ من أضلاعِ المضلعِ على أحدِ المحورينِ، ثم أرسمُ المضلعَ في الربعِ الأولِ إن أمكنَ.

1) أرسمُ المثلثَ MNP القائمَ الزاويةِ في N ، حيث:

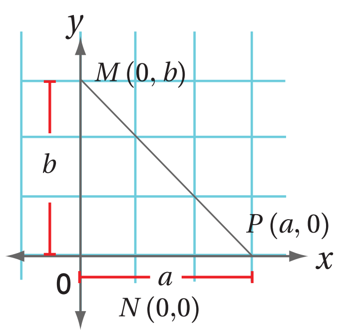
$MN=b$ و $PN=a$

الخطوةُ (1) أجعلُ نقطةَ الأصلِ رأسًا للمثلث ولتكنْ النقطةَ N

الخطوةُ (2) أرسمُ المثلثَ في الربعِ الأولِ، حيثُ

P: على محورِ x ، وبما أنَّ $PN=a$ فإن $P\,(a,0)$

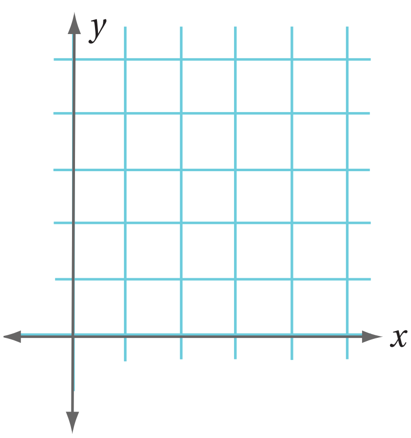
M: على محورِ y ، بما أنَّ $MN=b$ فإن $M\,(0,b)$



2) أرسمُ متوازيَ الأضلاعِ $ABCD$

الخطوةُ (1) أجعلُ نقطةَ الأصلِ أحدَ رؤوسِ متوازي الأضلاعِ، ولتكنْ النقطةَ A .

الخطوةُ (2) أرسمُ متوازي الأضلاعِ في الربعِ الاولِ، حيث أرسمُ $\overline{AB}$ على محورِ x الموجبِ.

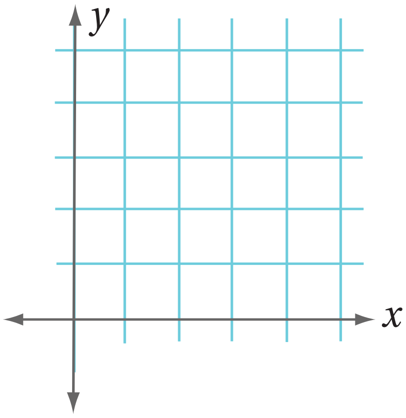


منهاجي
متعة التعليم الهادف

:B على محورِ x، وبما أنَّ $AB=a$ فإن $B\ (a,0)$

:D أفرضُ أي قيمةٍ للإحداثيِّ x وَالإحداثيِّ y $D\ (e,b)$

:C تقاطعُ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$، الإحداثيُّ x هو مجموعُ الإحداثيِّ x للنقطتينِ B و D، والإحداثيُّ y هو نفسهُ الإحداثيُّ y للنقطةِ D، وعليه، فإن $C\ (a+e,b)$



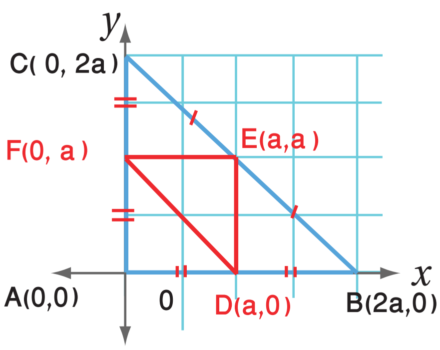
متوازي الأضلاعِ
شكلٌ رباعيٌّ فيه كلُّ ضلعينِ متقابلينِ متساويانِ ومتوازيانِ.
المستطيلُ
فيه كُلُّ ضلعينِ متقابلينِ متساويانِ وأربعُ زوايا قائمةٍ.

3) أرسمُ المربعُ $KLMN$ ، الذي طولُ ضلعهِ a

ثانيًا: البرهانُ الإحداثيُّ

خطواتُ البرهانِ الإحداثيِّ ← 1 **تمثيل الشكل بيانيًّا** ← 2 **المعطياتُ والمطلوبُ** ← 3 **البرهانُ**

1) أكتبُ برهاناً إحداثيًّا لأثبتَ أن القطعَ المستقيمةَ الثلاث الواصلةَ بين نقاطِ منتصفاتِ أضلاعِ مثلثٍ متطابقِ الضلعين تشكلُ مثلثًا متطابقَ الضلعينِ أيضًا.



الخطوةُ (1) أرسمُ المثلثَ ABC في المستوى الإحداثيِّ، وأحددُ إحداثياتِ كلِّ رؤوسهِ باستعمالِ مضاعفاتِ العددِ، وذلك لتسهيلِ الحساباتِ عندَ تطبيقِ صيغةِ نقطةِ المنتصفِ التي تتضمنُ قسمةَ مجموعِ الإحداثيين على 2.

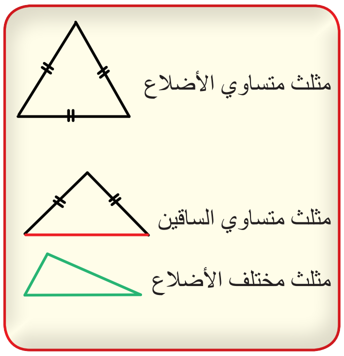
الخطوةُ (2) أحددُ المعطياتِ والمطلوبَ

المعطياتُ $AB = AC$, D منتصفُ $\overline{AB}$, F منتصفُ $\overline{AC}$, E منتصفُ $\overline{BC}$

المطلوبُ: أثبتُ أن المثلثَ FDE متطابقُ الضلعينِ (أي إن $FE = ED$)

الخطوةُ (3) البرهانُ

باستعمالِ صيغةِ نقطةِ المنتصفِ، فإن إحداثييْ كلٍّ من D , E , F:



إحداثيَّا النقطةِ F $\quad F\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+2a}{2}\right)=(0,a)$

إحداثيَّا النقطةِ D $\quad D\left(\frac{0+2a}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(a,0)$

إحداثيَّا النقطةِ E $\quad E\left(\frac{0+2a}{2},\frac{2a+0}{2}\right)=(a,a)$

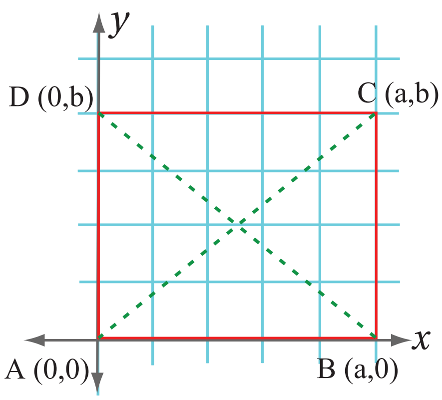
أستعملُ صيغةَ المسافةِ بين نقطتينِ فأجدُ ED , FD , FE

طولُ $\overline{FE}$ $\quad FE=\sqrt{(0-a)^2+(a-a)^2}=\sqrt{a^2}=|a|=a$

طولُ $\overline{ED}$ $\quad ED=\sqrt{(a-a)^2+(a-0)^2}=\sqrt{a^2}=|a|=a$

ألاحظُ في المثلثِ أنَّ $FE=ED$ ، متطابقُ الضلعينِ.

2) أكتبُ برهاناً إحداثيًّا لأثبتَ أنهُ: إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ مستطيلًا فإنَّ قطريهِ متطابقانِ.



الخطوةُ (1) أرسمُ المستطيلَ $ABCD$ في المستوى الإحداثيِّ وأحددُ إحداثياتِ كلِّ رؤوسِه، (انظرِ الشكلَ).

الخطوةُ (2) أحددُ المعطياتِ والمطلوبَ

المعطياتُ: $AB = CD, AD = CB$

المطلوبُ : $AC=BD$

الخطوةُ (3) البرهانُ

$$AC=\sqrt{(\ldots-\ \ldots)^2+(\ldots-\cdots)^2}=$$

$$DB=\sqrt{(\ldots-\ \ldots)^2+(\ldots-\cdots)^2}=$$

ألاحظُ : ....

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ ( ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدربُ" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أكتبُ برهانًا احداثيًّا لبرهنةِ نظرياتٍ هندسيةٍ ( ).	• أرسمُ مضلعاتٍ في المستوى الإحداثيِّ ( ).	

تم بحمد الله تعالى

منهاجي

متعة التعليم الهادف