الوحدة الثانية
التفاضل
ثاني ثانوي علمي
حل أسئلة الكتاب

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

٠٧٩٨٩ ٥٩٠٧١

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تمارين ومسائل

١) إذا كان ق(س) = س^{٢} – س ، فجد مقدار التغير في قيمة الاقتران ق إذا تغيرت س من :

أ) ٣ إلى ٤ ب) س$_{١}$ = ٢ إلى س$_{٢}$ = ٢ + هـ

٢) إذا كان ق(س) = س^{٢} – ٣ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من (١) إلى (١ + هـ).

٣) تحرك جُسيم في المستوى الإحداثي على خط مستقيم من النقطة أ (س ، ص) إلى النقطة ب (٢، ٥). إذا كانت Δس = ٠,١ ، Δ ص = ٠,٦ فجد إحداثيي النقطة أ.

٤) صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، إذا زاد طول ضلعها من ٦سم إلى ٦,١ سم، فَجِد معدل تغير مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها.

٥) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [–١ ، ٢] يساوي ٥ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = ٤ س^{٢} – ٣ق(س) على الفترة نفسها .

٦) قُذف جسم رأسيًا للأعلى بحيث يكون بُعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بَعد (ن) ثانية معطىً بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن – ٥ن^{٢} جد:

أ) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥].

ب) السرعة المتوسطة للجسم بدلالة Δ ن ؛ إذا تغيرت ن من صفر إلى Δ ن.

اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [١ ، ٤] يساوي ٣ ، وكان ق(١) + ق(٤) = ٢،
جد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = ق^{٢}(س) على الفترة [١ ، ٤] .

كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢ ، ٥] يساوي ٧ ، و كان معدل تغيره على
رة [٥ ، ٩] يساوي ١٤، فجد معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢ ، ٩].

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٩) إذا كان القاطع المارُّ بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٢ ، ٤) الواقعتين على منحنى الاقتران ق يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi ٣}{٤}$ راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد ق(١).

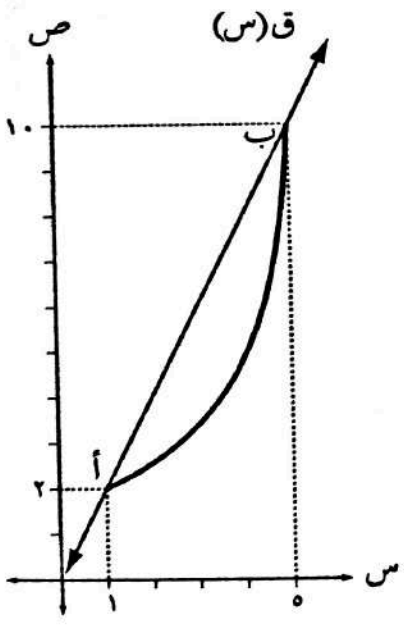
١٠) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |٢س - ٣| & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ [س + ١] & ، \quad ٢ \leq س < ٦ \end{cases}$

فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

١١) إذا كان ق(س) = $(س^{٢} + س)^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى $س_{٢}$ يساوي $(-\frac{١}{٣})$ ، فجد قيمة $س_{٢}$ حيث $س_{٢} > ٠$.

١٢) يمثل الشكل (٢-٢) منحنى الاقتران ق على الفترة [١، ٥] .

جد ميل العمودي على القاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$.



الشكل (٢-٢)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١ المطلوب مقدار التغير في قيم الاقتران = Δص.

أ) س١ = ٣ ، س٢ = ٤

$\Delta ص = ق(٤) - ق(٣)$

$= ٤^٢ - ٤ - (٣^٢ - ٣)$

$= ١٢ - ٦ = ٦$.

ب) س١ = ٢ ، س٢ = ٢ + هـ

$\Delta ص = ق(٢+هـ) - ق(٢)$

$= (٢+هـ)^٢ - (٢+هـ) - (٢^٢ - ٢)$

$= ٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٢ - هـ - ٤ + ٢$

$= ٣هـ + هـ^٢$.

س٢ $ق(س) = س^٢ - ٣$ ، س١ = ١

س٢ = ١ + هـ.

معدل التغير = $\frac{ق(س٢) - ق(س١)}{س٢ - س١}$

$= \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{١+هـ - ١}$

$= \frac{(١+هـ)^٢ - ٣ - (١^٢ - ٣)}{هـ}$

$= \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ - ٣ + ٢}{هـ}$

$= \frac{٢هـ + هـ^٢}{هـ}$

$= \frac{هـ(٢ + هـ)}{هـ} = ٢ + هـ$.

س٣ م(س، ص) ، ب(٢، ٥)

$\Delta س = او$ ، $\Delta ص = ٦.$ جد م ؟

$\Delta ص = س٢ - س١$

$او = ٢ - س$

$س = ٢ - او$

$س = ٩و١$.

$\Delta ص = ٥ - ص$

$٦. = ٥ - ص$

$ص = ٥ - ٦.$

$ص = ٤و٤$.

∴ م(٩و١ ، ٤و٤)

س٤ س١ = ٦ ، س٢ = ١و٦

المساحة = (الضلع)^٢

م = س^٢.

معدل التغير = $\frac{\Delta م}{\Delta س}$

$= \frac{م(١و٦) - م(٦)}{١و٦ - ٦} = \frac{٣٦ - ٢٧و٢١}{او}$

$= \frac{١٢و١}{او} = \frac{١٢١}{١٠} = ١و١٢$.

س٥ معدل تغير ق $= \frac{ق(٢) - ق(-١)}{٢ - -١}$

$٥ = \frac{ق(٢) - ق(-١)}{٣}$

$\boxed{١٥ = ق(٢) - ق(-١)}$

معدل تغير هـ $= \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٢ - -١}$

منهاجي متعة التعليم الهادف

تابع س٥

معدل تغير الاقتران هـ = $\frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٣}$

$= \frac{٤ \times ٤ - ٣ق(٢) - (٤ - ٣ق(-١))}{٣}$

$= \frac{١٦ - ٣ق(٢) - ٤ + ٣ق(-١)}{٣}$

$= \frac{١٢ - ٣(ق(٢) - ق(-١))}{٣}$

$= \frac{١٢ - ١٥ \times ٣}{٣} = \frac{١٢ - ٤٥}{٣} = \frac{-٣٣}{٣} = -١١$

س٦ ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢}

أ) السرعة المتوسطة = $\frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{(٦٠ \times ٥ - ٥ \times ٢٥) - (٦٠ \times ٢ - ٥ \times ٤)}{٣}$

$= \frac{٣٠٠ - ١٢٥ - ١٠٠}{٣} = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥$

ب) السرعة المتوسطة = $\frac{ف(٥ن) - ف(ن)}{٥ن}$

$= \frac{٦٠ \times ٥ن - ٥(٥ن)^{٢} - صفر}{٥ن}$

$= \frac{٥ن(٦٠ - ٥ \times ٥ن)}{٥ن}$

$= ٦٠ - ٥ \times ٥ن$

س٧ معدل تغير ق = $\frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{ق(٤) - ق(١)}{٣}$

$٣ = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٣}$

$٩ = ق(٤) - ق(١)$

معدل تغير هـ = $\frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{(ق(٤))^{ج} - (ق(١))^{ج}}{٣}$ فرق بين مربعين

$= \frac{(ق(٤) - ق(١))(ق(٤) + ق(١))}{٣}$

$= \frac{٣ \times ٩}{٣} = ٦$

س٨ معدل تغير ق = $\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$ [٥،٢]

$٧ = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٣}$

$٢١ = ق(٥) - ق(٢)$

معدل تغير هـ = $\frac{ق(٩) - ق(٥)}{٩ - ٥}$ [٩،٥]

$١٤ = \frac{ق(٩) - ق(٥)}{٤}$

$٥٦ = ق(٩) - ق(٥)$

منصات متعة التعليم الهادف

تابع س٨

$$\text{مـ}(٢) = \text{مـ}(٥) - \text{مـ}(٣) = ٢١$$
$$+$$
$$\text{مـ}(٥) = \text{مـ}(٩) - \text{مـ}(٥) = ٥٦$$
$$\text{مـ}(٢) = \text{مـ}(٩) - \text{مـ}(٢) = ٧٧$$

المطلوب معدل تغير مـ في الفترة $[٢، ٩]$

$$\frac{\text{مـ}(٩) - \text{مـ}(٢)}{٩ - ٢} = \frac{٧٧}{٧} = ١١$$

س٩ ميل القاطع $= \frac{\text{مـ}(٢) - \text{مـ}(١)}{٢ - ١}$

$$\frac{\text{مـ}(١) - ٤}{١} = \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{مـ}(١) - ٤ = -١$$

$$\text{مـ}(١) = ٤ + ١ = ٥ \Leftarrow$$

س١٠ معدل التغير $= \frac{\text{مـ}(٤) - \text{مـ}(١)}{٤ - ١}$

$$= \frac{٥ - ١}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

س١١ $س_١ = ١$ ، $س_٢ = ص_٢$ ، $\Delta ص = -\frac{١}{٣}$

$$\text{مـ}(س_٢) - \text{مـ}(س_١) = -\frac{١}{٣}$$

$$(س_٢^{٢} + ص_٢)^{-١} - ٢^{-١} = -\frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{ص_٢^{٢} + ص_٢} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{ص_٢^{٢} + ص_٢} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{ص_٢^{٢} + ص_٢} = \frac{١}{٦} \Leftarrow ص_٢^{٢} + ص_٢ = ٦$$

$ص_٢^{٢} + ص_٢ - ٦ = ٠ \Leftarrow (ص_٢ + ٣)(ص_٢ - ٢) = ٠$

$ص_٢ = -٣$ ، $ص_٢ = ٢$

لكن $س_٢ > ٠ \Leftarrow ص_٢ = ٢$

س١٢ ميل القاطع $= \frac{\text{مـ}(٥) - \text{مـ}(١)}{٥ - ١}$

$$= \frac{١٠ - ٢}{٤}$$

$$= \frac{٨}{٤} = ٢$$

فيكون ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تمارين ومسائل

١) استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = ٨ − ٥س ، س = ٣

ب) م(س) = $س^{٣} + س^{٢}$ ، س = −١

جـ) ل(س) = $\sqrt{س - ١}$ ، حيث س ≥ ١ ، س = ٥

د) ع(س) = $\begin{cases} س^{٢} - س & ، ٠ < س \geq ٣ \\ ٥س - ٩ & ، ٣ < س < ٦ \end{cases}$

عند س = ٠ ، س = ٣، س = ٦

هـ) ك(س) = $|س^{٢} - ٤|$ ، س = ١ ، س = ٢

و) ص = $\frac{٢س}{س + ٣}$ ، س = −١

٢) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية مستخدمًا تعريف المشتقة:

أ) ص = $س^{٢} - \frac{٤}{س}$ ، س ≠ ٠

ب) ص = $\sqrt{٢س - ٦}$ ، س > ٣

جـ) ص = $س^{٣}$

د) ص = $\sqrt[٣]{س}$

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلا للاشتقاق، فأثبت أنَّ:

أ) $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س-هـ)}{هـ} = ٢ق'(س)$

ب) $\text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع\, ق(س) - س\, ق(ع)}{ع - س} = ق(س) - س\, ق'(س)$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

جـ) $\lim_{ع \to س} \frac{٣ ع ق(ع) - ٣س ق(س)}{ع - س} = ٣ق(س) + ٣ س قَ(س)$

٤) إذا كان قَ(٥) = ٦ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٥ - ٢هـ) - ق(٥ + ٤هـ)}{هـ}$

٥) إذا كان ق(س) = (س − أ) ل(س) ، حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ ، أ ثابت، فبيّنْ باستخدام تعريف المشتقة أن قَ(أ) = ل(أ) .

٦) أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين، سُخِّن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظًا على شكله، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته؛ عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦ سم .

٧) إذا كان معدل التغير للاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي (٦ س^{٢}هـ − ٣س هـ^{٢})، حيث: هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر، فجد قَ (−٢).

٨) مكعب معدني يتمدد بانتظام محافظًا على شكله، جد معدّل تغير حجم المكعب بالنسبة إلى طول ضلعه، عندما يكون طول ضلعه وحدتَيْ طولٍ.

٩) أثبت أنَّ معدل تغير حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أية قيمة)، يساوي مساحة سطحها.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س ٢) $ن(س) = ٨ - ٥س$

$ن'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ٥(٣+هـ) - (٨ - ٥\times٣)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ١٥ - ٥هـ - ٨ + ١٥}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٥هـ}{هـ} = -٥$

ب) $م(س) = س^٣ + س^٤$ ، $س = -١$

$م'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{م(س) - م(-١)}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{س^٣ + س^٤ - ((-١)^٣ + ١)}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{س^٣ + س^٤}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{س^٤(س + ١)}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} س^٤$

$= (-١)^٤$

$= ١$

جـ) $ل(س) = \sqrt{س - ١}$ ، $س \geq ١$ ، $س = ٥$

$ل'(٥) = \lim_{س \to ٥} \frac{ل(س) - ل(٥)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س - ١} + ٢}{\sqrt{س - ١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ١ - ٤}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{\sqrt{س - ١} + ٢} = \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$.

د) $ع(٠)$ ، $ع(٦)$ غير معرفة $\Rightarrow ع'(٠)$ ، $ع'(٦)$ غير موجودة

$ع'(٣)^+ = \lim_{س \to ٣^+} \frac{ع(س) - ع(٣)}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٥ - ٩ - ٦}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٥ - ١٥}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥(س - ٣)}{س - ٣} = ٥$

$ع'(٣)^- = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٤ - س - ٦}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س - ٣)(س + ٢)}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^-} س + ٢ = ٥$.

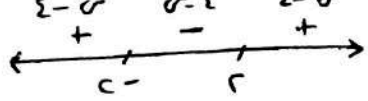
$ع'(٣)^+ = ع'(٣)^-$

$\Rightarrow ع'(٣) = ٥$

منهلي
منصة التعليم الهادف

تابع س١

هـ) $|س^٢ - ٤| = 0 \Leftarrow س = \pm ٢$



$$|س^٢ - ٤| = \begin{cases} س^٢ - ٤ & ، س > ٢ \text{ أو } س < -٢ \\ ٤ - س^٢ & ، -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

$$ك'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ك(س) - ك(١)}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{٤ - س^٢ - ٣}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{١ - س^٢}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(١ - س)(١ + س)}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} -(١ + س) = -٢$$

$$ك'(٢)^+ = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤ - ٠}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٢ + ٢ = ٤ \cdot$$

$$ك'(٢)^- = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٤ - س^٢ - ٠}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س - ٢}$$

$$= -(٢ + ٢) = -٤ \cdot$$

$$ك'(٢)^+ \neq ك'(٢)^-$$

$\Leftarrow ك'(٢)$ غير موجودة

و) $د(س) = \frac{٢س}{٣ + س}$ ، $س = -١$

$$د'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{\frac{٢س}{٣ + س} - \frac{-٢}{٢}}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{\frac{٢س}{٣ + س} + ١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{٣ + ٣س + ٢س}{٣ + س} \times \frac{١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{٣ + ٥س}{٣ + س} \times \frac{١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{٣(س + ١)}{٣ + س} \times \frac{١}{س + ١} = \frac{٣}{٢} \cdot$$

ز) $ص = س^٢ - \frac{٤}{س}$

$$\frac{د ص}{د س} = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - \frac{٤}{ع} - س^٢ + \frac{٤}{س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٤}{س} - \frac{٤}{ع}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٤ع - ٤س}{س ع} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} (ع + س) + \lim_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)}{س ع} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= (س + س) + \frac{٤}{س^٢}$$

$$= ٢س + \frac{٤}{س^٢} \cdot$$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

ب) ص = $\sqrt{٦-٢س}$ ، س < ٣

$$\frac{دص}{دس} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt{٦-٢ع} - \sqrt{٦-٢س}}{ع-س} \times \frac{\sqrt{٦-٢ع} + \sqrt{٦-٢س}}{\sqrt{٦-٢ع} + \sqrt{٦-٢س}}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{٦-٢ع - ٦+٢س}{(ع-س)(\sqrt{٦-٢ع} + \sqrt{٦-٢س})}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{-٢(ع-س)}{(ع-س)(\sqrt{٦-٢ع} + \sqrt{٦-٢س})} \times \frac{١}{\sqrt{٦-٢س}}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٦-٢س}} .$$

جـ) ص = $س^{٣}$

$$\frac{دص}{دس} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^{٣} - س^{٣}}{ع-س}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{(ع-س)(ع^{٢}+سع+س^{٢})}{ع-س}$$

$$= س^{٢} + س^{٢} + س^{٢} = ٣س^{٢} .$$

د) ص = $\sqrt[٣]{س}$

$$\frac{دص}{دس} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt[٣]{ع} - \sqrt[٣]{س}}{ع-س} \times \frac{\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع} \times \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^{٢}}}{\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع} \times \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}} .$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع-س}{(ع-س)(\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع} \times \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^{٢}})}$$

س ٣ ب) طرح واضافة ه(س)

$$\text{نها}_{ه \to ٠} \frac{ه(س+ه) - ه(س) + ه(س) - ه(س-ه)}{ه}$$

$$= \text{نها}_{ه \to ٠} \frac{ه(س+ه) - ه(س)}{ه} + \text{نها}_{ه \to ٠} \frac{ه(س) - ه(س-ه)}{ه}$$

$س - ه = ص$ ، $س = ه + ص$

عندما $ه \to ٠$ فإن $ص \to س$

$$\text{نها}_{ه \to ٠} \frac{ه(ص+ه) - ه(ص)}{ه} + \text{نها}_{ه \to ٠} \frac{ه(ص) - ه(ص-ه)}{ه}$$

$$ه'(س) + ه'(ص) = ه'(س) + ه'(س)$$

$$= ٢ه'(س) .$$

ب) طرح واضافة س ه(س) .

$$\text{نها}_{ع \to س} \frac{ع ه(ع) - س ه(س) + س ه(س) - س ه(ع)}{ع-س}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ه(س)(ع-س)}{ع-س} + \text{نها}_{ع \to س} \frac{س(ه(س) - ه(ع))}{ع-س}$$

$$= ه(س) + س \times -ه'(س)$$

$$= ه(س) - س ه'(س) .$$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س٣ ج) طرح واضافة ٣س د(ع).

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ع^{٣} د(ع) - ٣س^{٣} د(س) + ٣س^{٣} د(ع) - ٢ك د(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ٢ د(ع) \frac{(ع - س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} ٣ك \frac{(د(ع) - د(س))}{ع - س}$$

$$= ٣ د(س) + ٣ك \times د'(س) .$$

س٥ $د'(P) = \lim_{س \to P} \frac{د(س) - د(P)}{س - P}$

$$= \lim_{س \to P} \frac{(س - P) ل(س) - (P - P) ل(P)}{س - P}$$

$$= \lim_{س \to P} \frac{(س - P) ل(س)}{س - P}$$

$$\lim_{س \to P} ل(س) = ل(P) .$$

س٤ طرح واضافة د(٥) .

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٥ - ٢هـ) - د(٥) + د(٥) - د(٥ + ٤هـ)}{هـ}$$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٥ - ٢هـ) - د(٥)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٥) - د(٥ + ٤هـ)}{هـ}$$

نفرض $-٢هـ = و$ ، $هـ = \frac{-و}{٢}$ ، $و \to ٠$ ، $هـ \to ٠$

نفرض $٤هـ = م$ ، $هـ = \frac{م}{٤}$ ، $م \to ٠$ ، $هـ \to ٠$

$$= \lim_{و \to ٠} \frac{د(٥ + و) - د(٥)}{\frac{-و}{٢}} + \lim_{م \to ٠} \frac{د(٥) - د(٥ + م)}{\frac{م}{٤}}$$

$$-٢ \lim_{و \to ٠} \frac{د(٥ + و) - د(٥)}{و} - ٤ \lim_{م \to ٠} \frac{د(٥ + م) - د(٥)}{م}$$

$$= -٢ \times د'(٥) - ٤ \times د'(٥)$$

$$-٦ \times د'(٥) \quad \text{لكن } د'(٥) = ٦$$

$$-٦ \times ٦ = -٣٦$$

س٦ ع = نفـ + ٢ .

$$م = ٢\pi نفـ ع = ٢\pi نفـ (نفـ + ٢)$$

$$م = ٢\pi نفـ^{٢} + ٤\pi نفـ$$

$$م'(٦) = \lim_{نفـ \to ٦} \frac{٢\pi نفـ^{٣} + ٤\pi نفـ^{٢} - (٢\pi \times ٦^{٣} + ٤\pi \times ٦^{٢})}{نفـ - ٦}$$

$$= \lim_{نفـ \to ٦} \frac{٢\pi نفـ^{٣} + ٤\pi نفـ^{٢} - ٢\pi \times ٦^{٣} - ٤\pi \times ٦^{٢}}{نفـ - ٦}$$

$$= \lim_{نفـ \to ٦} \frac{٢\pi (نفـ^{٣} - ٦^{٣})}{نفـ - ٦} + \lim_{نفـ \to ٦} \frac{٤\pi (نفـ - ٦)}{نفـ - ٦}$$

$$= \lim_{نفـ \to ٦} ٢\pi (نفـ^{٢} + ٦نفـ + ٦^{٢}) + ٤\pi$$

$$= \lim_{نفـ \to ٦} ٢\pi (نفـ + ٦)(نفـ - ٦) + ٤\pi$$

$$= \lim_{نفـ \to ٦} ٢\pi (نفـ + ٦) + ٤\pi$$

$$= ٢\pi \times ١٢ + ٤\pi$$

$$= ٢٤\pi + ٤\pi$$

$$م'(٦) = ٢٨\pi$$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

٧) معدل التغير $= 6س^2هـ - 3سهـ^2$

معدل التغير $= \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

$= \frac{6س^2هـ - 3سهـ^2}{هـ}$

$= \frac{هـ(6س^2 - 3سهـ)}{هـ}$

$= 6س^2 - 3سهـ$.

$ق'(س)$ = نهـا معدل التغير
$هـ \to 0$

= نهـا $(6س^2 - 3سهـ)$
$هـ \to 0$

$ق'(س) = 6س^2$

$ق'(-2) = 6 \times 4 = 24$.

٨) $ح = س^3$

$ح'(س)$ = نهـا $\frac{س^3 - ص^3}{س - ص}$
$ص \to س$

= نهـا $\frac{(س-ص)(س^2 + سص + ص^2)}{س-ص}$
$ص \to س$

$= س^2 + س \times س + س^2 = 3س^2$

٩) $ح = \frac{4}{3}\pi نق^3$ ← حجم الكرة .

$ح'$ = نهـا $\frac{\frac{4}{3}\pi ع^2 - \frac{4}{3}\pi س^3}{ع - س}$
$ع \to س$

= نهـا $\frac{\frac{4}{3}\pi (ع^2 - س^3)}{ع - س}$
$ع \to س$

$ح' = $ نهـا $\frac{\frac{4}{3}\pi (ع-س)(ع^2 + عس + س^2)}{ع - س}$
$ع \to س$

= نهـا $\frac{4}{3}\pi (ع^2 + عس + س^2)$
$ع \to س$

$= \frac{4}{3}\pi (س^2 + س^2 + س^2)$

$= \frac{4}{3}\pi \times 3س^2$

$= 4\pi س^2$ مساحة سطح الكرة .

منهاجي
منصة التعليم الهادف

تمارين ومسائل

١) ابحث في قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = $\frac{س}{س-١}$ ، س = ١

ب) ع(س) = (س − ٢)[س] ، س = ٢

جـ) ل(س) = [٣ − ٢س] ، س = $\frac{١}{٤}$ ، س = − ١

د) ك(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، \ ٠ \leq س < ٣ \\ ٦س - ٣ & ، \ ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$ س = ٠ ، س = ٣، س = ٥

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} & ، \ س \neq ٩ \\ ٦ & ، \ س = ٩ \end{cases}$

فجد قَ(٩) إن وُجدت.

٣) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، \ س \geq ١ \\ ٢س + أ & ، \ س < ١ \end{cases}$

اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = ١ ، فَجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} -١ - ٢س & ، \ س < -١ \\ س^{٢} & ، \ -١ \leq س \leq ١ \\ س & ، \ س > ١ \end{cases}$

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ(س).

٥) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س & ، \ س < ٢ \\ ٢س - س^{٢} & ، \ س \geq ٢ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ع للاشتقاق عند س = ٢

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٠ & ، \quad س \geq ٠ \\ ٥ - س & ، \quad ٠ < س < ٤ \\ \frac{١}{٥ - س} & ، \quad س \leq ٤ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ (س).

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [\, س \,] & ، \quad ١ \leq س < ٢ \\ |س - ٣| & ، \quad ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ(س).

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١ أ) $ه(س) = \frac{س}{س-١}$ ، $س = ١$

$ه$ غير متصل عند $س = ١$ لذلك $ق$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$

ب) $ع(س) = (س-٢)[س]$ ، $س = ٢$

$ل = ١$

$[س] = \begin{cases} ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

$ع(س) = \begin{cases} (س-٢) & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢(س-٢) & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

نهاية الاتصال عند $س = ٢$

١) $ع(٢) =$ صفر

٢) نهاية $ع(س) =$ صفر
$س \to ٢^+$

نهاية $ع(س) =$ صفر
$س \to ٢^-$

$\Leftarrow$ نهاية $ع(س) =$ نهاية $ع(س) =$ صفر
$س \to ٢$

٣) نهاية $ع(س) = ع(٢)$
$س \to ٢$

$\therefore ع(س)$ متصل عند $س = ٢$

$ع'(س) = \begin{cases} ١ & ، ١ < س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

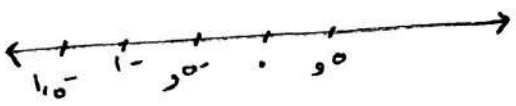
$ع'(٢)^+ = ٢$

$ع'(٢)^- = ١$ $\Leftarrow$ $ع'(٢)$ غير موجودة

لأن $ع'(٢)^+ \neq ع'(٢)^-$.

ج) $ل(س) = [٣ - ٢س]$ ، $س = \frac{١}{٢}$ ، $س = -١$

$ل = \frac{١}{٢}$



$ل(س) = \begin{cases} ٥ & ، -١٫٥ < س \leq -١ \\ ٤ & ، -١ < س \leq -٠٫٥ \\ ٣ & ، -٠٫٥ < س \leq ٠ \\ ٢ & ، ٠ < س \leq ٠٫٥ \end{cases}$

عندما $س = \frac{١}{٤} \Leftarrow ل(س) = ٢$ ، $٠ < س \leq ٠٫٥$

$\therefore$ اقتران ثابت متصل عند $س = \frac{١}{٤}$.

$ل'(\frac{١}{٤}) = $ نهاية $\frac{ل(س) - ل(\frac{١}{٤})}{س - \frac{١}{٤}}$
$س \to \frac{١}{٤}$

$=$ نهاية $\frac{٢ - ٢}{س - \frac{١}{٤}} =$ صفر.
$س \to \frac{١}{٤}$

عندما $س = -١$

١) $ل(-١) = ٥$

٢) نهاية $ل(س) = ٥$
$س \to -١^-$

نهاية $ل(س) = ٤$
$س \to -١^+$

$\Leftarrow$ نهاية $ل(س)$ غير موجودة
$س \to -١$

$\therefore ل(س)$ غير متصل عند $س = -١$

$\therefore ل'(-١)$ غير موجودة.

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س١ ق $\begin{cases} س^٢ + ٤س + ٥ & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٦س - ٣ & ، ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$

$س = ٠ ، س = ٣ ، س = ٥$

الحل: $ق'(٠)$ ، $ق'(٥)$ غير موجودة لأنها أطراف الفترة.

عند $س = ٣$ ، $ق(٣)$ غير معرفة

$\Rightarrow$ $ق(س)$ غير متصل عند $س = ٣$ لذلك $ق'(٣)$ غير موجودة.

س٢ $د(س) = \begin{cases} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} & ، س \neq ٩ \\ ٦ & ، س = ٩ \end{cases}$

عند $س = ٩$

١) $د(٩) = ٦$

٢) $\lim_{س \to ٩} د(س) = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣}$

$= ٣ + ٣ = ٦$

٣) $\lim_{س \to ٩} د(س) = د(٩)$

$\therefore$ $د$ متصل عند $س = ٩$.

$د'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{د(س) - د(٩)}{س - ٩}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{\frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} - ٦}{س - ٩}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣) - ٦}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣ - ٦}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٩}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{-(٣ - \sqrt{س})}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{-١}{\sqrt{س} + ٣} = \frac{-١}{٦}$.

س٣ $هـ$ قابل للاشتقاق عند $س = ١$ فهو متصل

عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^+} سـ(س) = \lim_{س \to ١^-} (ق س + ب)$

$ق + ب = ١ \Leftarrow ق + ب = ١$

$ق = -١$.

س٤ عند $س = -١$

١) $د(-١) = ١$

٢) $\lim_{س \to -١^+} د(س) = ١$

$\lim_{س \to -١^-} د(س) = ١$ $\Rightarrow$ $\lim_{س \to -١} د(س) = ١$

٣) $د(-١) = \lim_{س \to -١} د(س)$ $\therefore$ $د$ متصل عند $س = -١$

عند $س = ١$

١) $د(١) = ١$

٢) $\lim_{س \to ١^+} د(س) = ١$

$\lim_{س \to ١^-} د(س) = ١$ $\Rightarrow$ $\lim_{س \to ١} د(س) = ١$

٣) $\lim_{س \to ١} د(س) = د(١)$ $\therefore$ $د$ متصل عند $س = ١$

$د(س) = \begin{cases} -٢ & ، س < -١ \\ ق س & ، -١ < س < ١ \\ ١ & ، س > ١ \end{cases}$

$د'(١)^+ = ١$ ، $د'(١)^- = ٢$ $\Rightarrow$ $د'(١)$ غير موجودة

$د'(-١)^+ = -٢$ ، $د'(-١)^- = -٢$ $\Rightarrow$ $د'(-١) = -٢$.

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س١١ ع (٢) = صفر

٢) نهـا ع (س) = صفر ⇔ نهـا ع (س) = صفر
س→٢⁻ ، س→٢⁺

٣) نهـا ع (س) = ع (٢) ∴ ع متصل عندما س = ٢
س→٢

$$ع'(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، س > ٢ \\ ٢ - ٢س & ، س < ٢ \end{cases}$$

ع'(٢)⁻ = −٢
ع'(٢)⁺ = ٢
⇐ ع'(٢) غير موجودة

س٦ عند س = ١

١) هـ (١) = ٠

٢) نهـا هـ (س) = ٠ ⇔ نهـا هـ (س) = ٠
س→١⁺ ، س→١⁻

٣) نهـا هـ (س) = هـ (١) ∴ هـ متصل عند س = ١
س→١

عند س = ٤

١) هـ (٤) = ١

٢) نهـا هـ (س) = ١ ⇔ نهـا هـ (س) = ١
س→٤⁺ ، س→٤⁻

٣) نهـا هـ (س) = هـ (٤) ∴ هـ متصل عند س = ٤
س→٤

هـ غير معرفة عند س = ٥ لذلك
هـ (٥) غير موجودة

$$هـ'(س) = \begin{cases} صفر & ، س < ٠ \\ -١ & ، ٠ < س < ٤ \\ \frac{١}{(٥-س)^{٢}} & ، س > ٤ ، س \neq ٥ \end{cases}$$

هـ'(٠)⁺ = −١ ، هـ'(٠)⁻ = صفر ⇐
هـ'(٠) غير موجودة

هـ'(٤)⁺ = ١ ، هـ'(٤)⁻ = −١ ⇐
هـ'(٤) غير موجودة .

س٧

$$هـ(س) = \begin{cases} ١ & ، ١ \geq س > ٢ \\ ٢ - س & ، ٢ \geq س > ٣ \\ س - ٣ & ، ٣ \geq س \geq ٤ \end{cases}$$

عند س = ٢

هـ (٢) = نهـا هـ (س) = ١ ⇐ هـ متصل عندما س = ٢
س→٢

هـ (٣) = نهـا هـ (س) = صفر ⇐ هـ متصل عندما س = ٣
س→٣

$$هـ'(س) = \begin{cases} صفر & ، ١ < س < ٢ \\ -١ & ، ٢ < س < ٣ \\ ١ & ، ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

هـ'(١) ، هـ'(٤) غير موجودة لأنها أطراف فترة .

هـ'(٢)⁺ = −١
هـ'(٢)⁻ = صفر
⇐ هـ'(٢) غير موجودة .

هـ'(٣)⁺ = ١
هـ'(٣)⁻ = −١
⇐ هـ'(٣) غير موجودة .

منهاجي
منصة التعليم الهادف

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = $\sqrt{٣٠}$ ب) ص = ٤ س^{١٠}

جـ) ص = ٤ π ^{٢} د) ق(س) = $(\frac{١}{٢}س)^{٤}$

٢) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = س^{٢} + ٣س − ٤ ب) ص = $\frac{١}{٤}$ (س^{٢} + ٨)

جـ) ص = $\frac{٤}{٣}$ π س^{٣} د) ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} ، س = − ١

ب) ق(س) = س^{٢} + | ٣س − ٦ | ، س = ٣

جـ) ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س + ٥] − ٤س^{٢} ، س = ٢,٤

د) ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] − | س | ، س = − ١

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(− ٢) = ٤ ، هـَ(− ٢) = − ٣ ، فجد قَ(− ٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ ل(س) − ٢هـ (س)

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ ل(س) + هـ (س) + س^{٣}

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ س^{٢} + ب س & ، س \geq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + أ س & ، س < ١ \end{cases}$

وكانت قَ (١) موجودة ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب.

منهاجي
منصة التعليم الهادف

تابع تمارين وحسائل قواعد الاشتقاق (١)

٦) إذا كان ق(س) = { ل(س) ، س ≥ جـ ; لَ(جـ) (س−جـ) ، س < جـ }

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س= جـ ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.
فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد قَ(جـ) .

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١ م) $ق(س) = ٣٠٧$

$ق'(س) = صفر$

ب) $ص = ٤ س^{١٠}$

$ص' = ٤٠ س^{٩}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ (ثابت)

$ص' = صفر$

د) $ق(س) = (\frac{١}{٢} س)^{٤}$

$ق(س) = \frac{١}{١٦} س^{٤}$

$ق'(س) = \frac{١}{١٦} \times ٤ س^{٣}$

$= \frac{١}{٤} س^{٣}$

س٢ $ص = س^{٢} + ٣س - ٤$

م) $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٣$

ب) $ص = \frac{١}{٤} س^{٢} + ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٤} \times ٢ س + صفر$

$= \frac{١}{٢} س$

جـ) $ص = \frac{٤}{٣} \pi س^{٣}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ س^{٢}$

$= ٤ \pi س^{٢}$

د) $ص = \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٤} \times ٤ س^{٣} + \frac{١}{٣} \times ٣ س^{٢} - ١$

$= س^{٣} + س^{٢} - ١$

س٣ م) $ق(س) = \frac{١}{٢} س^{٤}$

$ق'(س) = \frac{١}{٢} \times ٤ س^{٣} = ٢ س^{٣}$

$ق'(-١) = ٢(-١)^{٣} = ٢ \times -١ = -٢$

ب) $ق(س) = س^{٢} + |٣س - ٦|$ عندما $س = ٣$

$|٣س - ٦| = ٣س - ٦$ عندما $س = ٣$

$ق(س) = س^{٢} + ٣س - ٦$

$ق'(س) = ٢س + ٣$

$ق'(٣) = ٦ + ٣ = ٩$

جـ) $[\frac{١}{٢} س + ٥]$ $ل = \frac{١}{٢}$

$[\frac{١}{٢} س + ٥] = ٦$ ، $٢ \leq س < ٤$

$ق(س) = ٦ - ٤ س^{٢}$

$ق'(س) = -٨ س$

$ق'(٢,٤) = -٨ \times ٢,٤ = -١٩,٢$

د) $[س + ١٠] = -١٠$ حول $س = -١$

$ق(س) = ٣س - ١ + س$

$ق(س) = ٤ س - ١$

$ق'(س) = ٤$

$ق'(-١) = ٤$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٤ ب) $هـ(س) = ٦ل(س) - ٢ط(س)$

$هـ'(س) = ٦ل'(س) - ٢ط'(س)$

$هـ'(-٢) = ٦ل'(-٢) - ٢ط'(-٢)$

$= ٦ \times ٤ - ٢ \times -٣$

$= ٢٤ + ٦ = ٣٠$

ب) $هـ(س) = \frac{١}{٢}ل(س) + ط(س) + س^{٣}$

$هـ'(س) = \frac{١}{٢}ل'(س) + ط'(س) + ٣س^{٢}$

$هـ'(-٢) = \frac{١}{٢}ل'(-٢) + ط'(-٢) + ٣(-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ + -٣ + ١٢$

$= ٢ - ٣ + ١٢$

$= ١١$

س٥ $هـ(س) = \begin{cases} ل(س) & ، س \leq جـ \\ ل'(جـ)(س - جـ) & ، س > جـ \end{cases}$

هـ متصل عند $س = ٢$

$هـ'(س) = \begin{cases} ل'(س) & ، س < جـ \\ ل'(جـ) \times ١ & ، س > جـ \end{cases}$

$هـ'(جـ)^{+} = ل'(جـ)$

$هـ'(جـ)^{-} = ل'(جـ)$

$\therefore$ $هـ'(جـ)$ موجودة $= ل'(جـ)$.

س٥ $هـ'(١)$ موجودة $\Leftarrow$ هـ متصل عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ١^{-}} هـ(س)$

$ب + ٤ - ٤ = ٩ + ب$

$ب - ٩ = ٩ + ب$

$-٢ب = ١٨$

$ب = -٩ \Leftarrow \frac{٤}{٢} = \frac{-٢ب}{٢}$

$هـ'(١)^{+} = هـ'(١)^{-}$

$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ب & ، س < ١ \\ -٢ب س + ٩ & ، س > ١ \end{cases}$

$٣ + ب = -٢ب + ٩$

$٣ + ٤ = ٣ب + ٩$

$٣ب = -٤$

$ب = -\frac{٤}{٣}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تمارين ومسائل

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ في كلٍّ مما يأتي:

أ) ص = س^{٢} (١ + س^{٣})

ب) ص = (س^{٣} − ٢س + ١) (٤س − ٣)

جـ) ص = $\frac{س^{٣}}{١ - س}$

د) ص = $\frac{س^{٢} - ١}{٢س + ٣}$

٢) جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = س(س + ٢) (س^{٢} − ٣س − ٦)

ب) ق(س) = | س − ٣ | (س^{٢} + س)

جـ) ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٢س + ٤}{س^{٢} + ٤}$

د) ق(س) = $\frac{|س^{٢} - ٥س + ٤|}{س(س - ١)}$ ، س ∈ (١، ٥]

٣) إذا علمت أنَّ هـ (س) قابلٌ للاشتقاق وأنَّ هـ (٢) = ٣ ، هـَ(٢) = −١، فجد قَ (٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = س هـ (س)

ب) ق(س) = ٣س^{٢}هـ (س) − ٥س

جـ) ق(س) = هـ (س) − $\frac{١}{هـ(س)}$

د) ق(س) = $\frac{٢س + ١}{٣ هـ (س)}$

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل (−٢) = ٣ ،لَ(−٢) = − ١ ، هـ(−٢) = ٤ هـَ (−٢) = −٦ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ل(س) × هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س) + ١}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قواعد الاشتقاق (٢)

٥) جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي، عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = س^{٢} − [٢س + ١] ، س = ١,٤

ب) ق(س) = $\frac{[\frac{١}{٤}\text{س} + ٣]}{|٢\text{س} - ١|}$ ، س = ٢

جـ) ق(س) = $\frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$ ، س = −١

٦) إذا كانت ل، م، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند س، فاستخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين لإثبات أنَّ:

$\frac{د}{د\text{س}}$ (ل(س) × م(س) × هـ(س))

= ل(س) × م(س) × هـَ(س) + ل(س) × هـ(س) × مَ(س) + م(س) × هـ(س) × لَ(س)

٧) اعتمد على النتيجة في السؤال(٦) لإثبات أنَّ :

$\frac{د}{د\text{س}}$ (ل(س))^{٣} = ٣(ل(س))^{٢} × لَ(س)

٨) إذا كان ق(س) = { ٤س^{٣} ، س ≥ ١ ؛ ٣س^{٤} + ١ ، س < ١ }

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١ ، ثم اكتب قاعدة قَ(س).

٩) إذا كان ق(س) = | س | (س^{٢} + ٦س) ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح .

١٠) إذا كان ق(س) = { أس^{٢} − ب س ، س ≥ ٢ ؛ ٤ − ب س^{٣} + أس ، س < ٢ }

وكان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = ٢ ، فجد كلًّا من الثابتين أ ، ب .

Nafalnain
متعة التعليم الهادف

أ) $ص = س^{٤}(١ + س^{٣}) \cdot س^{٤} + س^{٥}$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣} + ٥س^{٤}$

ب) $ص = (س^{٣} - ٢س + ١)(٤س - ٣)$

$\frac{دص}{دس} = (٣س^{٢} - ٢)(١ + س)(٤) + (٤س - ٣)(٣س^{٢} - ٢)$

ج) $ص = \frac{س^{٣}}{١ - س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(١ - س) \times ٣س^{٢} - س^{٣} \times -١}{(١ - س)^{٢}}$

$= \frac{٣س^{٢} - ٣س^{٣} + س^{٣}}{(١ - س)^{٢}}$

$= \frac{٣س^{٢} - ٢س^{٣}}{(١ - س)^{٢}}$.

د) $ص = \frac{س^{٤} - ١}{٣ + ٢س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(٣ + ٢س) \times ٤س^{٣} - (س^{٤} - ١) \times ٢}{(٣ + ٢س)^{٢}}$

$= \frac{٤س^{٤} + ٦س^{٣} - ٢س^{٤} + ٢}{(٣ + ٢س)^{٢}}$

$= \frac{٢س^{٤} + ٦س^{٣} + ٢}{(٣ + ٢س)^{٢}}$.

منهاجي
منصة التعليم الهادف

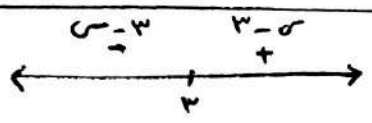
س٥ م) $ق(س) = س(س + ٢)(س^{٤} - ٣س - ٦)$

$ق(س) = (س^{٤} + ٢س)(س^{٤} - ٣س - ٦)$

$ق'(س) = (س^{٤} + ٢س)(٤س^{٣} - ٣) + (س^{٤} - ٣س - ٦)(٢س + ٢)$

ب) $س - ٢ = ٠$

$س = ٣$



$ق(س) = \begin{cases} (س - ٣)(س^{٤} + س) & ، س \geq ٣ \\ (٣ - س)(س^{٤} + س) & ، س < ٣ \end{cases}$

ق متصل عند $س = ٣$ لأن $ق(٣) = ٣ + ٣$ ، $ق(٣) = ٣ + ٣$

$ق'(س) = \begin{cases} (س - ٣)(٣س^{٢} + ١) + (س^{٣} + س) \times ١ & ، س < ٣ \\ (٣ - س)(٣س^{٢} + ١) + (س^{٣} + س) \times -١ & ، س > ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٤س - ٣ & ، س < ٣ \\ -٣س^{٢} + ٤س + ٣ & ، س > ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \end{cases}$

ج) $ق'(س) = \frac{(س^{٤} + ٤)(٤س - ٣) - (س^{٤} - ٤س + ٤) \times ٤س}{(س^{٤} + ٤)^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{٢س^{٤} - ٨}{(س^{٤} + ٤)^{٢}}$.

د) $س^3 - ٥س + ٤ = صفر$

$(س - ٤)(س - ١) = صفر$

$س = ٤ ، ١$

$(س-٤)(س-١) - (س-٤)(س-١)$

+ | − | +

١ | ٤ | ٥

$س^3 - ٥س + ٤ = \begin{cases} -(س-٤)(س-١) & ، ١ \le س < ٤ \\ (س-٤)(س-١) & ، ٤ \le س \le ٥ \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} \frac{-(س-٤)(س-١)}{س(س-١)} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{(س-٤)(س-١)}{س(س-١)} & ، ٤ \le س \le ٥ \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} \frac{٤-س}{س} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{س-٤}{س} & ، ٤ \le س \le ٥ \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} ١ - \frac{٤}{س} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{٤}{س} - ١ & ، ٤ \le س \le ٥ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س^2} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{٤}{س^2} & ، ٤ < س < ٥ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٤ ، س = ٥ \end{cases}$

$ه'(٤)^+ \neq ه'(٤)^- \Rightarrow ه'(٤)$ غير موجودة

$ه'(٥)$ غير موجودة لأنها طرف فترة

٣) $ه(س) = س \, و(س)$

$ه'(س) = س \, و'(س) + و(س) \times ١$

$ه'(٢) = ٢ \, و'(٢) + و(٢)$

$= ٢ \times -١ + ٣ = -٢ + ٣ = ١$

ب) $ه(س) = ٣س^2 \, و(س) - ٥س$

$ه'(س) = ٣س^2 \, و'(س) + و(س) \times ٦س - ٥$

$ه'(٢) = ٣ \times ٤ \times و'(٢) + و(٢) \times ٦ \times ٢ - ٥$

$= -١٢ + ١٢ \times ٣ - ٥$

$= -١٧ + ٢٦ = ٩$

ج) $ه(س) = و(س) - \frac{١}{و(س)}$

$ه'(س) = و'(س) + \frac{و'(س)}{(و(س))^2}$

$ه'(٢) = و'(٢) + \frac{و'(٢)}{(و(٢))^2}$

$= -١ + \frac{-١}{٣^2} = -١ - \frac{١}{٩} = -\frac{١٠}{٩}$

د) $ه(س) = \frac{٢س + ١}{٣ \, و(س)}$

$ه'(س) = \frac{٣ \, و(س) \times ٢ - (٢س+١) \times ٣ \, و'(س)}{(٣ \, و(س))^2}$

$ه'(٢) = \frac{٣ \, و(٢) \times ٢ - ٥ \times ٣ \, و'(٢)}{(٣ \, و(٢))^2}$

$= \frac{١٨ + ١٥}{٨١}$

$= \frac{٣٣}{٨١} = \frac{١١}{٢٧}$

منهاجي متعة التعليم الهادف

ج) $\text{ه}(س) = \text{ل}(س) \times \text{هـ}(س)$

$\text{ه}'(س) = \text{ل}(س) \times \text{هـ}'(س) + \text{هـ}(س) \times \text{ل}'(س)$

$\text{ه}'(-٢) = \text{ل}(-٢) \times \text{هـ}'(-٢) + \text{هـ}(-٢) \times \text{ل}'(-٢)$

$= ٣ \times -٦ + ٤ \times -١$

$= -١٨ - ٤ = -٢٢$

ب) $\text{ه}(س) = \dfrac{\text{هـ}(س)}{\text{ل}(س) + ١}$

$\text{ه}'(س) = \dfrac{(\text{ل}(س)+١) \times \text{هـ}'(س) + \text{هـ}(س) \times \text{ل}'(س)}{(\text{ل}(س)+١)^{٢}}$

$\text{ه}'(-٢) = \dfrac{(\text{ل}(-٢)+١) \times \text{هـ}'(-٢) + \text{هـ}(-٢) \times \text{ل}'(-٢)}{(\text{ل}(-٢)+١)^{٢}}$

$= \dfrac{(٣+١) \times -٦ - ٤ \times -١}{(٣+١)^{٢}}$

$= \dfrac{-٢٤ + ٤}{٤^{٢}} = \dfrac{-٢٠}{١٦} = \dfrac{-٥}{٤}$.

ب) $[\frac{١}{٤}س + ٣] = ٣$ ، $٠ \leq س < ٤$

$١ \leq ٢س - ١ < ٢$ حول س = ٢

$\text{ه}(س) = \dfrac{٣}{٢س - ١}$

$\text{ه}'(س) = \dfrac{-٢ \times ٢}{(٢س-١)^{٢}}$

$\text{ه}'(٢) = \dfrac{-٦}{٩} = \dfrac{-٢}{٣}$.

ج) $\text{ه}(س) = \dfrac{٢س + ١}{س^{٢} - ٤}$ ، $س = -١$

$\text{ه}'(س) = \dfrac{(س^{٢}-٤) \times ٢ - (٢س+١) \times ٢س}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

$\text{ه}'(-١) = \dfrac{(١-٤) \times ٢ - (-١) \times -٢}{(-٣)^{٢}}$

$= \dfrac{-٦-٢}{٩} = \dfrac{-٨}{٩}$.

هـ) $\text{ه}(س) = س^{٣} - [٢س+١]$ ، $س = ١٫٤$

$[٢س+١] = ٣$ حول $س = ١٫٤$

$\text{ه}(س) = س^{٣} - ٣$

$\text{ه}'(س) = ٣س^{٢}$

$\text{ه}'(١٫٤) = ٣ \times ١٫٤^{٢}$

$= ٢٫٨$

و) $\dfrac{د}{دس}((\text{ل} \times \text{م}) \times \text{هـ}) =$

$(\text{ل} \times \text{م}) \times \text{هـ}' + \text{هـ} \times (\text{ل} \times \text{م})' =$

$\text{ل} \times \text{م} \times \text{هـ}' + \text{هـ} \times (\text{ل} \times \text{م}' + \text{م} \times \text{ل}') =$

$\text{ل} \times \text{م} \times \text{هـ}' + \text{هـ} \times \text{ل} \times \text{م}' + \text{هـ} \times \text{م} \times \text{ل}'$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٧ $\frac{د}{دس}(ل(س))^{٣}$

$= \frac{د}{دس}(ل \times ل \times ل)$

$= ل' \times ل \times ل + ل \times ل' \times ل + ل \times ل \times ل'$

$= ل^{٢} \times ل' + ل^{٢} \times ل' + ل^{٢} \times ل'$

$= ل'(ل^{٢} + ل^{٢} + ل^{٢})$

$= ل' \times ٣ل^{٢} = ٣ل^{٢} \times ل'$.

س٨ هـ متصل عند س = ١ لأن

هـ(١) = نهـا هـ(س)
س→١

هـ'(س) = $\begin{cases} ١٢س^{٢} & ، س < ١ \\ ١٢س^{٣} & ، س > ١ \end{cases}$

هـ'(١)$^{+}$ = ١٢

هـ'(١)$^{-}$ = ١٢

$\Leftarrow$ هـ'(١) = ١٢.

س٩ هـ(س) = $\begin{cases} س(س^{٢} + ٦ك) & ، س \geq ٠ \\ -س(س^{٢} + ٦ك) & ، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^{٣} + ٦ك^{٢}س & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣} - ٦ك^{٢}س & ، س < ٠ \end{cases}$

هـ متصل عند س = ٠

هـ'(س) = $\begin{cases} ٣ك^{٢} + ١٢ك & ، س > ٠ \\ صفر & ، س = ٠ \\ -٣ك^{٢} - ١٢ك & ، س < ٠ \end{cases}$

هـ'(٠)$^{+}$ = هـ'(٠)$^{-}$ = صفر

مثال هـ متصل عند س = ٢

نهـا هـ(س) = نهـا هـ(س)
س→٢$^{+}$ س→٢$^{-}$

٤ - ٨ب + ٢م = ٤م - ٢ب

٤ - ٦ب = ٢م $\Leftarrow$ **م = ٢ - ٣ب**

هـ(س) = $\begin{cases} ٢م س - ب & ، س > ٢ \\ -٣ب س^{٢} + م & ، س < ٢ \end{cases}$

هـ'(٢)$^{+}$ = هـ'(٢)$^{-}$

-١٢ب + م = ٤م - ب

+ب + ب

$\frac{-١١ب}{٣} = \frac{٣م}{٣}$ $\Leftarrow$ **م = $\frac{-١١}{٣}$ب**

٣ × ($\frac{-١١}{٣}$ب = ٢ - ٣ب)

-١١ب = ٦ - ٩ب

+٩ب +٩ب

-٢ب = ٦ $\Leftarrow$ **ب = -٣**

م = $\frac{-١١}{٣}$ب

م = $\frac{-١١}{٣}$ × -٣

م = ١١

منهاجي
منصة التعليم الهادف

المشتقات العليا

تمارين ومسائل

١) جد المشتقة الثانية لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = ٤س^{٣} − $\frac{٧}{٢}$ س^{٢} − ٦ س

ب) ص = $\frac{س^{٢}+١}{س}$

جـ) ص = |س| (س^{٢} + س)

٢) إذا كان ق(س) = (س^{٢} + ٤س) (س^{٣} + ١)، فجد قيمة قَ (−١)× قً(−١)

٣) إذا كان ق(س) = س ^{ن} ، ن عدد صحيح موجب وكانت قً(س) = أ س فجد قيمة الثابت أ .

٤) إذا كان ص = $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فأثبت أنَّ صً = $\frac{١}{٢}$ ص^{٣}

٥) إذا كان ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٣} − ٦ س^{٢} − س ، فجد قيم س التي تحقق ما يأتي :

أ) قً(س) = ٠

ب) قً(س) ≤ ٠

جـ) قً(س) < ٠

٦) جد المشتقة الثالثة لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = س^{٤} − ٣س$^{-٥}$

ب) ص = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س ، حيث أ ، ب، جـ ثوابت.

٧) جد قيمة كلٍّ مما يأتي :

أ) قً(π) حيث ق(س) = س^{٢} − ٦س

ب) قً(−١) حيث ق(س) = $\frac{١}{٢٠}$ س^{٥} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}

جـ) ق$^{(٤)}$(١) حيث ق (س) = $\frac{١}{س}$

) إذا كان كلٌّ من ل ، لَ ، لً قابلًا للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = س^{٢} ل(س)

فجد قً (س) ، قً (س).

منهاجي
متعة التعليم الهادف

المشتقات العليا

٩) إذا كان كلٌّ من الاقترانين ل، هـ قابلًا للاشتقاق مرتين، فأثبت أنَّ :

$(ل \times هـ)'' (س) = (ل'' \times هـ)(س) + ٢(ل' \times هـ')(س) + (ل \times هـ'')(س)$

١٠) جد قاعدة اقتران كثير الحدود ق من الدرجة الثانية الذي فيه ق(١) = ٣، قَ (١) = −٢ ، قً(١) = ٤ .

١١) إذا كان كلٌّ من الاقترانين ل، هـ قابلًا للاشتقاق مرتين فأثبت أنَّ :

$ل(س) هـ'' (س) - ل''(س) هـ(س) = \frac{ك}{ق^٢س}(ل(س) هـ' (س) - ل'(س) هـ(س))$

١٢) إذا كانت ل، ق، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثالثة وكان

هـ (س) = ل(س) × ق(س) ، لَ(س) × قَ(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت فأثبت أنَّ:

هـً (س) = ل(س) × قً(س) + ق(س) × لً(س)

١٣) إذا كان ق(س) = أ س^٤ + $\frac{١٦}{س}$ ، أ ثابت ، وكان قً(٢) = ٩٠ فجد قيمة الثابت أ.

١٤) إذا كان ق(س) = ٨ س − ٤(م − ٣) س^٢ ، فجد قيم الثابت م التي تجعل قً(س) < ٠

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١ أ) $ص = ٤س^{٣} - \frac{٢}{٣}س^{٣} - ٦س$

$ص' = ١٢س^{٢} - ٧س - ٦$

$ص'' = ٢٤س - ٧$

ب) $ص = \frac{س^{٤}+١}{س} = \frac{س^{٤}}{س} + \frac{١}{س}$

$ص = س + س^{-١}$

$ص' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$

$ص'' = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

جـ) $ص = |س| (س^{٢} + س)$

$$ص = \begin{cases} س(س^{٢}+س) & ، س \geq ٠ \\ -س(س^{٢}+س) & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$ص = \begin{cases} س^{٣} + س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣} - س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$$

ص متصل عند $س = ٠$

$$ص' = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٢س & ، س > ٠ \\ -٣س^{٢} - ٢س & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$ص'' = \begin{cases} ٦س + ٢ & ، س > ٠ \\ -٦س - ٢ & ، س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ \end{cases}$$

س٢ $و(س) = (س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ١)$

$و'(س) = (س^{٢} + ٤س) \times ٣س^{٢} + (س^{٣}+١)(٢س+٤)$

$و'(-١) = (١-٤) \times ٣ + (-١+١)(-٢+٤)$

$= -٩ + ٠ = -٩$

$و''(س) = (س^{٢}+٤س) \times ٦س + ٣س^{٢}(٢س+٤) +$

$(س^{٣}+١) \times ٢ + (٢س+٤) \times ٣س^{٢}$

$و''(-١) = (١-٤) \times -٦ + ٣(-٢+٤) +$

$(-١+١) \times ٢ + (-٢+٤) \times ٣$

$= ١٨ + ٦ + ٠ + ٦ = ٣٠$

س٣ $و(س) = س^{ن}$

$و'(س) = ن س^{ن-١}$

$و''(س) = ن(ن-١) س^{ن-٢}$

$و'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$

$ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣} = ٤ س^{١}$

$ن - ٣ = ١ \Leftarrow \boxed{ن = ٤}$

$٤ = ٤(٤-١)(٤-٢)$

$٤ = ٤ \times ٣ \times ٢$

$٤ = ٢٤$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٤ ص $= \frac{٢}{س}$ اثبت أن

ص″ $= \frac{١}{٢}$ ص^{٣}

الحل: ص $= ٢$ س$^{-١}$

ص′ $= -٢$ س$^{-٢}$

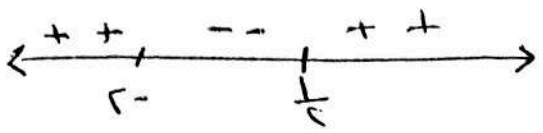
ص″ $= ٤$ س$^{-٣} = \frac{٤}{س^{٣}}$.

$\frac{١}{٢}$ ص$^{٣} = \frac{١}{٢}\left(\frac{٢}{س}\right)^{٣}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٨}{س^{٣}}$

$= \frac{٤}{س^{٣}} =$ ص″.

ب) قد′(س) ≥ ٠.



قد′(س) ≥ ٠ في $(-\infty, -٢] \cup [\frac{١}{٢}, \infty)$

جـ) قد′(س) < صفر في $(-٢, \frac{١}{٢})$

س٥ ق(س) = س^{٤} + ٣ك^{٣} − ٦ك^{٢} س − ك

أ) قد′(س) = ٠

قد′(س) = ٤س^{٣} + ٩ك^{٢} − ١٢ك − ١

قد″(س) = ١٢ك^{٢} + ١٨ك − ١٢

١٢ك^{٢} + ١٨ك − ١٢ = صفر (÷ ٦)

٢ك^{٢} + ٣ك − ٢ = صفر

(٢ك − ١)(ك + ٢) = ٠

٢ك − ١ = ٠ ⇐ ك = $\frac{١}{٢}$

ك + ٢ = ٠ ⇐ ك = −٢

س٦ ص = س^{٤} ÷ ٣ك^{٥}

أ) ص′ = ٤س^{٣} + ١٥س$^{-٦}$

ص″ = ١٢س^{٢} − ٩٠س$^{-٧}$

ص‴ = ٢٤س − ٦٣٠س$^{-٨}$.

س٧ أ) ص = ٢س^{٣} + بك^{٢} + جك.

ص′ = ٦س^{٢} + ٢بك + ج

ص″ = ١٢س + ٢ب

ص‴ = ١٢.

س٧ أ) ق(س) = س^{٢} − ٦ك

قد′(س) = ٢س − ٦

قد″(س) = ٢

قد‴(س) = صفر

قد′(٣) = صفر

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٦ ب) $هـ(س) = \frac{1}{ب} س^{٥} - \frac{1}{٣} س^{٣}$

$هـ'(س) = \frac{1}{٤} س^{٤} - س^{٢}$

$هـ''(س) = س^{٣} - ٢س$

$هـ''(-١) = (-١)^{٣} - ٢(-١)$

$= -١ + ٢ = ١$

جـ) $هـ(س) = \frac{١}{س} = س^{-١}$

$هـ'(س) = -س^{-٢}$

$هـ''(س) = ٢س^{-٣}$

$هـ'''(س) = -٦س^{-٤}$

$هـ^{(٤)}(س) = ٢٤ س^{-٥} = \frac{٢٤}{س^{٥}}$.

$هـ^{(٤)}(١) = \frac{٢٤}{١} = ٢٤$.

س٧ $هـ(س) = س^{٤} ل(س)$

$هـ'(س) = س^{٤} ل'(س) + ل(س) \times ٤س^{٣}$

$هـ''(س) = س^{٤} ل''(س) + ل'(س) \times ٤س^{٣}$

$+ ل(س) \times ١٢س^{٢} + ل'(س) \times ٤س^{٣}$

$هـ''(س) = س^{٤} ل''(س) + ٨س^{٣} ل'(س) + ١٢ل(س)$

$هـ'''(س) = س^{٤} ل'''(س) + ل''(س) \times ٤س^{٣}$

$+ ٢٤س^{٢} ل''(س) + ل'(س) \times ٢٤ + ٢ل'(س)$

$= س^{٤} ل'''(س) + ٣٦س^{٢} ل''(س) + ٣٦ل'(س)$

س٨ $(ل \times هـ)'(س) = ل \times هـ' + هـ \times ل'$

$(ل \times هـ)''(س) = ل \times هـ'' + هـ' \times ل' + هـ \times ل'' + ل' \times هـ'$

$(ل \times هـ)''(س) = (ل \times هـ'') + ٢(ل' \times هـ') + (هـ \times ل'')$

س٩ $هـ$ كثير حدود من الدرجة الثانية

$هـ(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ$

$هـ'(س) = ٢أ س + ب$

$هـ''(س) = ٢أ$.

$هـ''(١) = ٤ = ٢أ \Rightarrow \boxed{أ = ٢}$

$هـ'(١) = ٢ \times ٢ \times ١ + ب$

$-٢ = ٤ + ب \Rightarrow \boxed{ب = -٦}$

$هـ(١) = ٢(١)^{٢} - ٦(١) + جـ$

$٣ = -٤ + جـ \Rightarrow \boxed{جـ = ٧}$

$هـ(س) = ٢س^{٢} - ٦س + ٧$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

المشتقات العليا

١١) $\frac{د}{دس}(ل \times هـ' - ل' \times هـ) =$

$= (ل \times هـ'' + هـ' \times ل' - (ل' \times هـ' + هـ \times ل''))$

$= ل \times هـ'' + هـ' \times ل' - ل' \times هـ' - هـ \times ل''$

$= ل \times هـ'' - هـ \times ل''$.

١٢) بما أن $ل' \times قـ' = جـ$

فيكون $ل' \times قـ'' + قـ' \times ل'' = صفر$

$هـ = ل \times قـ$

$هـ' = ل \times قـ' + قـ \times ل'$

$هـ'' = ل \times قـ'' + قـ' \times ل' + قـ \times ل'' + ل' \times قـ'$

$= ل \times قـ'' + جـ + قـ \times ل'' + جـ$

$هـ'' = ل \times قـ'' + قـ \times ل'' + ٢جـ$

$هـ''' = ل \times قـ''' + قـ'' \times ل' + قـ' \times ل'' + قـ \times ل''' + ٠$

لكن $ل' \times قـ'' + قـ' \times ل'' = صفر$

$\Leftarrow$

$هـ''' = ل \times قـ''' + قـ \times ل'''$.

١٣) $ع(س) = ٩س^{٤} + \frac{١٦}{س}$

$ع'(س) = ٣٦س^{٣} - ١٦س^{-٢}$

$ع''(س) = ١٠٨س^{٢} + ٣٢س^{-٣}$

$ع'''(س) = ٢١٦س - ٩٦س^{-٤}$

$ع''(م) = ٩٠ = \frac{٩٦}{١٦} - ٢٤٨م$

$٢٤٨م - ٦ = ٩٠ \Leftarrow \frac{٢٤٨م}{٢٤٨} = \frac{٩٦}{٢٤٨}$

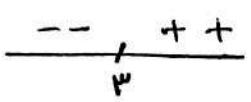
$\Leftarrow$ $\boxed{م = ٢}$

١٤) $ع(س) = ٨س - ٤(م-٣)س^{٢}$

$ع'(س) = ٨ - ٨(م-٣)س$

$ع''(س) = -٨(م-٣) = ٠$

$م - ٣ = صفر \Leftarrow م = ٣$



$ع$ حصر عندما $م \in (٣، \infty)$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تمارين ومسائل

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = ٣جاس − جتاس

ب) ص = س^{٢}جاس

جـ) ص = $\frac{س}{جتاس}$

د) ص = ظا س − $\sqrt{٣\pi}$ س

هـ) ص = جا^{٢}س + جتا^{٢} س

و) ص = قتا س − س ظتا س

٢) إذا كان ص = جاس ، فجد صً + ٦ص بدلالة ص .

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ق(س) = جاس جتا س ، س = $\frac{\pi}{٣}$

ب) ق(س) = جا(− س) + جتا(− س) ، س = $\frac{\pi}{٤}$

جـ) ق(س) = $\frac{جتاس}{١ + جاس}$ ، س = π

د) ق(س) = س قاس ، س = $\frac{\pi}{٦}$

هـ) ق(س) = $\frac{ظاس + س}{جاس}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$

٤) أثبت أنَّ كلًّا من ص= جتاس ، ص = جاس يُعتبَرُ حلًّا للمعادلة ص + صً = صفرًا

٥) جد قيم س في الفترة [−٢ π ، ٢ π] التي تحقق المعادلة قَ(س) = ٠ في كلٍّ مما يأتي :

أ) ق(س) = س + جتاس

ب) ق(س) = قا س

٦) إذا كان ص = أ جاس + ب جتاس ، أ ، ب ∋ ح، فأثبت أنَّ:

(صَ)^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}

منهاجي
متعة التعليم الهادف

مشتقات الاقترانات المثلثية

٧) جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ لكلٍّ مما يأتي:

أ) ص = قتاس　　ب) ص = س جتا س − ٤ جا س

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{جتاس} & ، \ س \leq ٠ \\ \text{أس} + ب & ، \ س > ٠ \end{cases}$

فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب التي تجعل الاقتران ق قابلًا للاشتقاق عند س = ٠

٩) إذا كان ق(س) = |جا س| ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = π .

١٠) إذا كان ق(س) = حاس − $\frac{١}{٢}$ س ، س ∈ [٠ ، ٢ π] فجد قيمة (قيم) س التي تجعل المماس لمنحنى ق أفقيًا.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أ) ص = ٣ جاس − ظاك .

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ جتا س + جاك

ب) ص = $س^{٢}$ جاس

$\frac{دص}{دس}$ = $س^{٢}$ × جتاك + جاك × ٢س

ج) ص = $\frac{س}{ظاك}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{ظتاس \times ١ - س \times -جاك}{ظتا^{٢}س}$

= $\frac{ظتاس + س جاك}{ظتا^{٢}س}$

د) ص = ظاس − $\sqrt{٣}$ س

$\frac{دص}{دس}$ = $قا^{٢}$س − $\sqrt{٣}$

هـ) ص = $جا^{٢}$س + $جتا^{٢}$س

ص = ١

$\frac{دص}{دس}$ = صفر .

و) ص = قتاس − س ظتاك .

$\frac{دص}{دس}$ = − قتاس ظتاك − (س × $قتا^{٢}$ك + ظتاك)

= − قتاس ظتاك + س $قتا^{٢}$ك − ظتاك

أ) ص = جاس

ص$'$ = جتاس

ص$''$ = − جاس

المطلوب ص$''$ + ٦ص =

= − جاك + ٦ جاس =

٥ جاس = ٥ ص .

ب) $ق^{٣}$ (س) = جاس جتاك

ق$'$(س) = جاس × − جاك + جتاك × جتاك

= − $جا^{٢}$س + $جتا^{٢}$س .

ق$'$($\frac{\pi}{٣}$) = − $جا^{٢}\frac{\pi}{٣}$ + $جتا^{٢}\frac{\pi}{٣}$

= − $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{-٢}{٤}$ = $\frac{-١}{٢}$

ب) ق(س) = جا(−س) + جتا(−س)

ق(س) = − جاك + جتاك

ق$'$(س) = − جتاك − جاك

ق$'$($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

ج) ق(س) = $\frac{جتاك}{١ + جاك}$

ق$'$(س) = $\frac{(١+جاك) \times -جاك - جتاس \times جتاك}{(١+جاس)^{٢}}$

= $\frac{-جاك - جا^{٢}ك - جتا^{٢}س}{(١+جاس)^{٢}}$

= $\frac{-جاس - (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)}{(١+جاس)^{٢}}$

منهاجي

مشتقات الاقترانات المثلثية

تابع س٣ ج)

$$\text{هـ}'(س) = \frac{-\text{جتا}س - (-\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س)}{(1+\text{جا}س)^2}$$

$$= \frac{-\text{جا}س - 1}{(1+\text{جا}س)^2}$$

$$\text{هـ}'(\pi) = \frac{0-1}{(1+0)^2} = -1$$

د) $\text{هـ}(س) = س\ \text{قا}س$

$$\text{هـ}'(س) = س \times \text{قا}س\text{ظا}س + \text{قا}س \times 1$$

$$\text{هـ}'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{9} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

هـ) $\text{هـ}(س) = \frac{\text{ظا}س + ك}{\text{جا}س}$

$$\text{هـ}'(س) = \frac{\text{جا}س(\text{قا}^2 س + 1) - (\text{ظا}س + ك)\text{جتا}س}{\text{جا}^2 س}$$

$$\text{هـ}'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\frac{3}{4}(4+1) - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}) \times \frac{1}{2}}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{\frac{15}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}}{\frac{3}{4}}$$

$$= (\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}) \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{9}$$

عكس ص = جتاس

$ص' = -\text{جا}س$ ، $ص'' = -\text{جتا}س$

$ص + ص'' = \text{جتا}س - \text{جتا}س = 0$

$\therefore ص = \text{جتا}س$ حل للمعادلة

ص = جاس

$ص' = \text{جتا}س$ ، $ص'' = -\text{جا}س$

$ص + ص'' = \text{جا}س - \text{جا}س = 0$

$\therefore ص = \text{جا}س$ حل للمعادلة.

س٥ ع) $\text{هـ}(س) = س + \text{جتا}س$

$\text{هـ}'(س) = 1 - \text{جا}س$

$1 - \text{جا}س = 0 \Leftarrow \text{جا}س = 1$

$س = \frac{\pi}{2}$ ، $-\frac{3\pi}{2}$

و) $\text{هـ}(س) = \text{قا}س$.

$\text{هـ}'(س) = \text{قا}س\text{ظا}س$.

$\text{قا}س = 0$ لا يوجد حل.

$\text{ظا}س = 0 \Leftarrow$

$س = 0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \ldots$

نرفض -2π ، 2π لأنها أطراف فترة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٦) ص = م جاك + ب جتاك

ص' = م جتاك − ب جاك

(ص')² + ص² =

(م جتاك − ب جاك)² + (م جاك + ب جتاك)² =

م² جتا²ك − ٢م ب جتاك جاك + ب² جا²ك

+ م² جا²ك + ٢م ب جاك جتاك + ب² جتا²ك =

م² (جتا²ك + جا²ك) + ب² (جا²ك + جتا²ك) =

م² × ١ + ب² × ١ = م² + ب² .

وهو المطلوب

٧) ص = قتاس .

$\frac{دص}{دس}$ = − قتاس ظتاس .

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = − قتاس × − قتاس + ظتاس × قتاس ظتاس

= قتا³س + ظتا²س قتاس .

٨) $\hat{س}$ ق(س) = { جتاس ، س ≤ ٠ ، م ك + ب ، س > ٠

ق قابل للاشتقاق عند س = ٠ ⟸

ق متصل عند س = ٠

نهـ جتاك = نهـ (م ك + ب)

ك → ٠⁺ ك → ٠⁻

ب = ١

ق(س) = { − جاك ، س ≤ ٠ ، م ، س > ٠

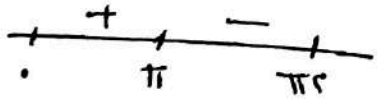
ق'(٠)⁺ = ق'(٠)⁻

− جا صفر = م

م = صفر

٩) $\hat{س}$ ق(س) = | جاس |

جاس = صفر ← س = ٠ ، π ، ٢π



ق(س) = { جاس ، ٠ ≤ س < π ، − جاس ، π ≤ س ≤ ٢π

ق(π) = ٠

نهـ ق(س) = ٠ ، نهـ ق(س) = ٠ ⟸ نهـ ق(س) = ٠

س → π⁺ ، س → π⁻ ، س → π

ق(π) = نهـ ق(س)

س → π

∴ ق متصل عند س = π

أ) ص = س جتاك − ٤ جاك

$\frac{دص}{دك}$ = س × − جاك + جتاك − ٤ جتاك

= − س جاك − ٣ جتاك

$\frac{د^٢ص}{دك^٢}$ = − س × جتاك + جاك × − ١ + ٣ جاك

= − س جتاك − جاك + ٣ جاك

= − س جتاك + ٢ جاك .

منهاجي منصة التعليم الذكي

س٩ تابع

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} \text{جتا } س \text{ ، } 0 < س < \pi \\ -\text{جتا } س \text{ ، } \pi < س < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{قا}'_+(\pi) = +1$$

$$\text{قا}'_-(\pi) = -1$$

$$\text{قا}'_+(\pi) \neq \text{قا}'_-(\pi) \quad \therefore \text{ قا}(\pi) \text{ غير موجودة}$$

س١٠ $\text{ق}(س) = \text{جا } س - \frac{1}{2} س$

$$\text{ق}'(س) = \text{جتا } س - \frac{1}{2}$$

$$\text{جتا } س - \frac{1}{2} = \text{صفر}$$

$$\text{جتا } س = \frac{1}{2}$$

$$س = \frac{\pi}{3} \text{ ، } \frac{5\pi}{3}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تمارين ومسائل

١) استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{د ص}{د س}$ في كلٍّ مما يأتي :

أ) ص = (س^{٣} − ٢س + ٤)^{٨} ب) ص = $\frac{١}{(س^{٢}+١)^{٥}}$

جـ) ص = $\frac{س^{٤}}{(١-س^{٣})^{٤}}$ د) ص = جتا(س^{٢} − س)

٢) إذا كان ق(س) = س^{٢} −٢س ، هـ (س) = س^{٣} + ١ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) (ق ○ هـ)َ (١) ب) (هـ ○ ق)َ (١)

٣) إذا كان ق، هـ اقترانين معرفين على ح وقابلين للاشتقاق على مجاليهما وكان هـ (٢) = ٣ ،

قَ (٣) = ٤ ، هـَ (٢) = −٦ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) (ق ○ هـ)َ(٢) ب) قَ(س^{٢}) عند س = $\sqrt{٣}$

٤) إذا كان هـ (س) قابلًا للاشتقاق عند س، وكان ص= جا^{ن} (هـ(س)) ، حيث ن عدد صحيح فأثبت أنَّ:

$\frac{د ص}{د س}$ = ن جا$^{ن-١}$ (هـ(س))جتا (هـ(س)) × هـَ (س)

٥) جد $\frac{د ص}{د س}$ في كلٍّ مما يأتي :

أ) ص = ظا ع ، ع = س^{٣} − س

ب) ص = ل^{٢} + ٢ل ، ل= $\sqrt{س^{٢}+١}$

٦) إذا كان ص= جتا (س+$\frac{\pi}{٢}$)، فأثبت أنَّ: ص + صً = ٠

٧) إذا كان ص= ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س ، فبرهن أنَّ : $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٤}س

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قاعدة السلسلة

٨) يقال للاقتران ق بأنَّهُ زوجيٌّ إذا كان ق (− س) = ق(س) لجميع قيم س ، وأنّه فرديٌّ إذا كان ق (− س) = − ق(س) لجميع قيم س. أثبت ما يأتي:

أ) إذا كان ق (س) اقترانًا فرديًّا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ قَ(س) اقترانٌ زوجيٌّ .

ب) إذا كان ق (س) اقترانًا زوجيًّا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ قَ(س) اقترانٌ فرديٌّ .

٩) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ص = حا^{٢} ٣س ، س = $\frac{\pi}{٩}$ ب) ص = $(س + \frac{١}{س})^{٤}$ ، س = ١

١٠) جد صَ في كلٍّ مما يأتي :

أ) ص = س ظا $(\frac{١}{س})$ ب) ص = $\frac{جتا٢س}{س}$

١١) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق وكان ق (حا٢س) = قتا (٢س) حيث س ∈ $[٠، \frac{\pi}{٣}]$ فجد قَ $(\frac{١}{٢})$.

١٢) إذا كان ص = ق(س^{٢} + ٢س) ، قَ(٣) = ٥ ، فجد $\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ١}$

١٣) إذا كان ص = $\sqrt{س^{٢} + \sqrt{٣س}}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

١٤) إذا كان ق(٤س) = $\frac{د}{د س}$ (س^{٢} +٣) ، فجد قَ (٤).

١٥) إذا كان ق(س) = س^{٣} +٢س ، هـ (س) = ٣س^{٢} ، فجد كلًّا مما يأتي :

أ) (قَ ٥ هـ)َ (١) ب) (قَ ٥ هـَ)َ (٢)

جـ) (قَ ٥ هـ)ً (−١) د) (قَ ٥ هـَ)ً (٣)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١ س

أ) ص = $(س^{٣} - ٢ك + ٤)^{٨}$

$\frac{دص}{دك} = ٨(س^{٣} - ٢ك + ٤)^{٧}(٣ك^{٢} - ٢)$

$= (٢٤ك^{٢} - ١٦)(س^{٣} - ٢ك + ٤)^{٧}$

ب) ص = $\frac{١}{(ك^{٢}+١)^{٥}} = (ك^{٢}+١)^{-٥}$

$\frac{دص}{دك} = -٥(ك^{٢}+١)^{-٦} \times ٢ك$

$= -١٠ك(ك^{٢}+١)^{-٦}$

$= \frac{-١٠ك}{(ك^{٢}+١)^{٦}}$

ج) ص = $\frac{س^{٤}}{(١-س^{٣})^{٤}} = \left(\frac{س}{١-س^{٣}}\right)^{٤}$

$\frac{دص}{دك} = ٤\left(\frac{س}{١-س^{٣}}\right)^{٣}\left(\frac{(١-س^{٣})\times ١ - (س \times -٣ك^{٢})}{(١-س^{٣})^{٢}}\right)$

$= ٤\left(\frac{س}{١-س^{٣}}\right)^{٣}\left(\frac{١-س^{٣}+٣س^{٣}}{(١-س^{٣})^{٢}}\right)$

$= ٤\frac{س^{٣}}{(١-س^{٣})^{٣}} \times \frac{(١+٢س^{٣})}{(١-س^{٣})^{٢}}$

$= \frac{٤س^{٣}+٨س^{٦}}{(١-س^{٣})^{٥}}$

د) ص = جتا $(ك^{٢} - س)$

$\frac{دص}{دك} = -$ جا $(ك^{٢} - س)$ $(٢ك - ١)$

٢ س

$ن(س) = ك^{٢} - ٢ك$ ، $هـ(س) = س^{٣} + ١$

$ن'(س) = ٢ك - ٣$ ، $هـ'(س) = ٣ك^{٢}$

أ) $(ن \circ هـ)'(١) = ن'(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$= ن'(٢) \times ٣$

$= ٢ \times ٣$

$= ٦$

ب) $(هـ \circ ن)'(١) = هـ'(ن(١)) \times ن'(١)$

$= هـ'(-١) \times$ صفر

$=$ صفر .

٣ س

أ) $(ن \circ هـ)'(٢) = ن'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$= ن'(٣) \times -٦$

$= ٤ \times -٦ = -٢٤$

ب) $ن'(س^{٤})$ عند س = ١

$ن'(٣) = ٤$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٤) $ص = جا^{ن}(هـ(س))$

نفرض $هـ(س) = ع \leftarrow \frac{دع}{دس} = هـ'(س)$

نفرض $جا ع = ل \leftarrow \frac{دل}{دع} = جتا ع$

$\Leftarrow \frac{دل}{دع} = جتا(هـ(س))$

$ص = جا^{ن} هـ(س) = جا^{ن} ع = ل^{ن}$.

$\frac{دص}{دل} = ن\, ل^{ن-١}$

$= ن\, جا^{ن-١} ع$

$= ن\, جا^{ن-١} هـ(س)$.

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= ن\, جا^{ن-١} هـ(س) \times جتا هـ(س) \times هـ'(س)$

ب) $ص = ل^{٢} + ٢ل$ ، $ل = \sqrt{س^{٢}+١}$

$\frac{دص}{دل} = ٢ل + ٢$ ، $\frac{دل}{دس} = \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دس}$.

$= (٢ل + ٢) \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}$

$= (٢\sqrt{س^{٢}+١} + ٢) \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}$.

٥) $ص = جتا(س + \frac{\pi}{٢})$

$ص' = -جا(س + \frac{\pi}{٢})$

$ص'' = -جتا(س + \frac{\pi}{٢})$

$ص + ص'' = جتا(س + \frac{\pi}{٢}) - جتا(س + \frac{\pi}{٢})$

$= صفر$ وهو المطلوب .

٦) $ص = ظاس + \frac{١}{٣} ظا^{٣}س$.

$\frac{دص}{دس} = قا^{٢}س + \frac{١}{٣} \times ٣ ظا^{٢}س\, قا^{٢}س$

$= قا^{٢}س + ظا^{٢}س\, قا^{٢}س$

$= قا^{٢}س (١ + ظا^{٢}س)$

$= قا^{٢}س \times قا^{٢}س$

$= قا^{٤}س$.

٥) $ص = ظاع$ ، $ع = س^{٣} - س$

$\frac{دص}{دع} = قا^{٢}ع$ ، $\frac{دع}{دس} = ٣س^{٢} - ١$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= قا^{٢}ع \times (٣س^{٢} - ١)$

$= قا^{٢}(س^{٣} - س)(٣س^{٢} - ١)$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٨ م) ف اقتران فردي

ف(-س) = - ف(س) نشتقه الطرفين

ف'(-س) × -١ = - ف'(س)

ف'(-س) = ف'(س)

⇐ ف'(س) اقتران زوجي.

ب) ف اقتران فرديين

ف(-س) = ف(س) نشتقه الطرفين

ف'(-س) × -١ = ف'(س)

ف'(-س) = - ف'(س)

⇐ ف'(س) اقتران فردي.

س٩ م) ص = جا٢ ٣س.

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ جا٣ك × جتا٣ك × ٣

= ٦ جا٣ك جتا٣ك

$\frac{دص}{دس}\Big|_{ك=\frac{\pi}{9}}$ = ٦ جا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٣}$

= ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$.

ب) ص = $(س + \frac{١}{س})^{٤}$

$\frac{دص}{دس}$ = ٤ $(س + \frac{١}{س})^{٣}$ $(١ - \frac{١}{س^{٢}})$

عندما س = ١

$\frac{دص}{دس}$ = ٤ (٢)^{٣} (٠) = صفر

نشتقه الطرفين م) ص = س ظا$(\frac{١}{س})$

ص' = س قا$^{٢}\frac{١}{س}$ × $(\frac{-١}{س^{٢}})$ + ظا$(\frac{١}{س})$ × ١

= $\frac{-١}{س}$ قا$^{٢}(\frac{١}{س})$ + ظا$(\frac{١}{س})$

ص'' = $\frac{-١}{س}$ × ٢ قا$(\frac{١}{س})$ قا$(\frac{١}{س})$ ظا$(\frac{١}{س})$ × $\frac{-١}{س^{٢}}$

+ قا$^{٢}(\frac{١}{س})$ × $\frac{١}{س^{٢}}$ + قا$^{٢}(\frac{١}{س})$ × $\frac{١}{س^{٢}}$

ص'' = $\frac{٢}{س^{٣}}$ قا$^{٢}(\frac{١}{س})$ ظا$(\frac{١}{س})$

ب) ص = $\frac{جتاك}{س}$

ص' = $\frac{س \times -جاك - جتاك \times ١}{س^{٢}}$

= $\frac{-س جاك - جتاك}{س^{٢}}$

= $\frac{-جاك}{س} - \frac{جتاك}{س^{٢}}$

ص'' = $\frac{س \times -جتاك + جاك \times ١}{س^{٢}}$

$- \frac{س^{٢} \times -جاك - جتاك \times ٢س}{س^{٤}}$

ص''' = $\frac{-جتاك + جاك}{س^{٢}} + \frac{ك^{٢} جاك + ٢ك جتاك}{س^{٤}}$

منهاجي متعة التعليم الهادف

س١١ $هـ(جا ك) = ظا(٢ك)$

$هـ'(جا ك) \times ٢ جتا ك = -٢ قا(ك) ظا(ك)$

$جا ك = \frac{١}{٢}$
$ك = \frac{\pi}{٦}$

$هـ'(جا \frac{\pi}{٦}) \times ٢ جتا(\frac{\pi}{٦}) = -٢ قا\frac{\pi}{٦} ظا\frac{\pi}{٦}$

$هـ'(\frac{١}{٢}) \times ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -٢ \times ٢ \times \sqrt{٣}$

$هـ'(\frac{١}{٢}) = -٤$

س١٢ $ص = هـ(س^٣ + ٢ك)$

$\frac{دص}{دك} = هـ'(س^٣ + ٢ك)(٣ك^٢ + ٢)$

$\frac{دص}{دك}|_{ك=١} = هـ'(٣)(٤)$

$= ٥ \times ٤ = ٢٠$

س١٣ $ص = \sqrt{ك^٣ + ٣ك}$

$ص' = \frac{٣ك^٢ + ٣}{٢\sqrt{ك^٣ + ٣ك}}$

س١٤ $هـ(٤ك) = \frac{دك}{ك}(س^٢ + ٣)$

$هـ(٤ك) = ٢ك$

$هـ'(٤ك) \times ٤ = ٢$

$٤ك = ٤ \Leftarrow ك = ١$

$هـ'(٤) \times ٤ = ٢ \Leftarrow هـ'(٤) = \frac{١}{٢}$

س١٥ $هـ(س) = س^٣ + ٢ك$ ، $ه(س) = ٣ك$

$هـ'(س) = ٣ك^٢ + ٢$ ، $ه'(س) = ٦س$

$هـ''(س) = ٦ك$ ، $ه''(س) = ٦$

$هـ'''(س) = ٦$ ، $ه'''(س) =$ صفر

أ) $(هـ \circ ه)'(١) = هـ'(ه(١)) \times ه'(١)$

$= هـ'(٣) \times ٦ = ١٨ \times ٦$

$= ١٠٨$

ب) $(هـ \circ ه')'(٢) = هـ''(ه'(٢)) \times ه''(٢)$

$= هـ''(١٢) \times ٦$

$= ٦ \times ٦ \times ٦ = ٢١٦$

جـ) $(هـ \circ ه')''(-١) = (هـ''(ه(-١)) \times ه'(-١))'$

$هـ'''(ه(-١)) \times ه''(-١) + ه'(-١) \times هـ''(ه(-١)) ه'(-١)$

$هـ'''(٣) \times ٦ + -٦ \times ٦ \times -٦$

$١٨ \times ٦ + ٦ \times ٦ = ١٠٨ + ٢١٦$

$= ٣٢٤$

د) $(هـ \circ ه')''(٣) = (هـ''(ه'(٣)) \times ه''(٣))'$

$هـ'''(ه'(٣)) \times ه''(٣) + ه''(٣) \times هـ''(ه'(٣)) \times ه''(٣)$

$هـ'''(١٨) \times$ صفر $+ ٦ \times هـ''(١٨) \times ٦$

$= ٦ \times ٦ \times ٦$

$= ٢١٦$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

تمارين ومسائل

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ) $س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١٦$

ب) $ص^{٢} = \sqrt{س^{٣} + ٤ س^{٢}}$

جـ) $س^{٣} + ص^{٣} = س ص$

د) جا(س ص) $= س^{٢}$

٢) جد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ) $(س ص)^{٣} = ٤ س$

ب) $٤ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ١٦$

جـ) ص $=$ س جتا ص

د) جا س $= \sqrt{ص} + ٢$

٣) جد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) $٨ س ص +$ جتا ص $= \pi^{٢}$ ، $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$

ب) $س^{٣} - ٢ س ص + ص^{٣} = ٢$ ، $(١، -١)$

جـ) $\frac{٤}{س} + \frac{٢}{ص} = ٣$ ، $(٤، ١)$

٤) إذا كان جا(س + ص) $= ص^{٢}$ جتاس، فجد صَ.

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ التي يكون عندها المماسّ أفقيًّا.

٦) إذا كان ص $= \sqrt[٣]{(٢ س + ١)^{٢}}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$.

٧) إذا كان س $=$ جاص ، فأثبت أنَّ صَ $=$ ظاص قا^{٢}ص.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الاشتقاق الضمني

٨) إذا كان ص جتا٢س = س جا ٢ص ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$.

٩) إذا كان س ص = جاس، فأثبت أنَّ: س صً + ٢صَ + س ص = ٠

١٠) إذا كان ص = ن^{٣} + ٢ن ، $\frac{د س}{د ن}$ = ٤ن ، فجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند ن = ١.

١١) إذا كان س + ص = جا ص، فأثبت أنَّ:

(صَ)^{٢} = صً (ظتا ص − قتاص)

١٢) إذا كان ص = جاس + س ص ، فأثبت أنَّ :

$$صً + ص = \frac{٢صَ}{١ - س}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أ) $س^2 + 4ص^2 = 16$

$2س + 8ص \frac{دص}{دس} = صفر$

$\frac{8ص}{8ص} \frac{دص}{دس} = \frac{-2س}{8ص}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{4ص}$

ب) $ص^2 = \sqrt{س^3 + 4س^2}$

$2ص \, ص' = \frac{3س^2 + 8س}{2\sqrt{س^3 + 4س^2}}$

$ص' = \frac{3س^2 + 8س}{4ص\sqrt{س^3 + 4س^2}}$.

ج) $س^3 + ص^3 = س ص$

$3س^2 + 3ص^2 ص' = س ص' + ص \times 1$

$3ص^2 ص' - س ص' = ص - 3س^2$

$ص' (3ص^2 - س) = ص - 3س^2$

$ص' = \frac{ص - 3س^2}{3ص^2 - س}$.

د) $جا(س ص) = س^2$

$جتا(س ص)(س ص' + ص) = 2س$

$س ص' جتا(س ص) + ص جتا(س ص) = 2س$

$س ص' جتا(س ص) = 2س - ص جتا(س ص)$

$ص' = \frac{2س - ص جتا(س ص)}{س جتا(س ص)}$.

هـ) $(س ص)^3 = 4س^2$

$س^3 ص^3 = 4س^2$

$3س^3 ص^2 ص' + ص^3 \times 3س^2 = 4$

$3س^3 ص^2 ص' = 4 - 3ص^3 س^2$

$ص' = \frac{4 - 3ص^3 س^2}{3س^3 ص^2}$

$ص' = \frac{4}{3س^3 ص^2} - \frac{3ص^3 س^2}{3س^3 ص^2}$

$ص' = \frac{4}{3س^3 ص^2} - \frac{ص}{س}$

$ص'' = \frac{-4(3س^3 \times 2ص ص')}{(3س^3 ص^2)^2} - \frac{س ص' - ص}{س^2}$

$ص'' = \frac{-24س^3 ص ص'}{9س^6 ص^4} - \frac{ص'}{س} + \frac{ص}{س^2}$

$ص'' = \frac{-24ص}{9س^3 ص^3} - \frac{ص'}{س} + \frac{ص}{س^2}$.

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س ب) $٤س^{٣} + ٣ص^{٢} = ١٦$

$٨س + ٦ص \, ص' = صفر$

$٦ص \, ص' = -٨س$

$ص' = \frac{-٨س}{٦ص}$

$ص' = \frac{-٤س}{٣ص}$

$ص'' = \frac{-٤ + ٤س \times ٣ص^{٢} \times ص'}{(٣ص)^{٢}}$

$= \frac{-١٢ص' + ١٢س \, ص'}{٩ص^{٤}}$

$= \frac{-٤س}{٣ص} \times ٢- + ١٢س \times \frac{-٤س}{٣ص}$ / $٩ص^{٤}$

$= \frac{-٨س - \frac{٤٨س}{٣ص}}{٩ص^{٤}}$

$= \frac{-٤٠س}{٣ص \times ٩ص^{٤}} = \frac{-٤٠س}{٢٧ص^{٥}}$

ج) $ص = س \, ظا ص$

$ص' = س \times -ثا^{٢}ص \, ص' + ظا ص$

$ص' = -س \, ثا^{٢}ص \, ص' + ظا ص$

$ص' + س \, ثا^{٢}ص \, ص' = ظا ص$

$ص' (١ + س \, ثا^{٢}ص) = ظا ص$

$ص' = \frac{ظا ص}{١ + س \, ثا^{٢}ص}$

$ص'' = \frac{(١ + س \, ثا^{٢}ص) \times ثا^{٢}ص \, ص' - ثا^{٢}ص \, ص' - ظا ص (س \, ظا ص \, ص' + ظا ص)}{(١ + س \, ثا^{٢}ص)^{٢}}$

$ص'' = \frac{-ثا^{٢}ص \, ص' - س \, ثا^{٢}ص \, ص' - س \, ظا^{٢}ص \, ص' - ظا ص \, ظا ص}{(١ + س \, ثا^{٢}ص)^{٢}}$

$ص'' = \frac{\frac{-ثا ص \times ظا ص}{١ + س \, ثا ص} - \frac{س \, ظا^{٢}ص \times ظا ص}{١ + س \, ثا ص} - \frac{س \, ظا^{٣}ص}{١ + س \, ثا ص} - ظا ص \, ظا ص}{(١ + س \, ثا ص)^{٢}}$

د) $جا س = ٢ص + ٢$

$ظا س = \frac{١}{ص'}$

$ص' = ٢ص \, ظا س$

$ص'' = ٢ص \times -ثا^{٢}س \times ص' + ظا س \times ٢ص'$

$= -٢ص \, ثا^{٢}س \, ص' + ٢ظا س \, ص'$

$= -٢ص \, ثا^{٢}س + ٢ظا س$

$= -٢ص (ظا^{٢}س + ١) + ٢ظا س$

$= -٢ص \, ظا^{٢}س - ٢ص + ٢ظا س$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$س^3 ص^2 + جتا ص = \pi$:

$3س^2 ص^2 + 2س^3 ص ص' - جا ص ص' = 0$

$2س^3 ص ص' - جا ص ص' = -3س^2 ص^2$

$ص'(2س^3 - جا ص) = -3س^2 ص^2$

$ص' = \frac{-3س^2 ص^2}{2س^3 - جا ص}$

عند $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

$ص' = \frac{-3 \times \frac{\pi^2}{16}}{2 \times \frac{\pi^3}{64} - جا \frac{\pi}{2}}$

$= \frac{-\frac{3\pi^2}{16}}{\frac{\pi^3}{32} - 1}$

$= \frac{-3\pi^2}{\pi^3 - 32}$

$ص' = \frac{1}{4}$

$ص' = \frac{1}{8}$.

$س^4 جا(س + ص) = ص^2 جتا س$.

$جتا(س + ص)(1 + ص') =$

$ص^2 \times -جا س + جتا س \times 2ص ص'$.

$جتا(س + ص) + جتا(س + ص) ص' =$

$-ص^2 جا س + 2ص جتا س ص'$.

$جتا(س + ص) ص' - 2ص جتا س ص' =$

$-ص^2 جا س - جتا(س + ص)$

$ص'(جتا(س + ص) - 2ص جتا س) = -ص^2 جا س - جتا(س + ص)$

$ص' = \frac{-ص^2 جا س - جتا(س + ص)}{جتا(س + ص) - 2ص جتا س}$.

ب) $س^3 - 2س ص + ص^3 = 2$ (١٩-١)

$3س^2 - (2س ص' + 2ص) + 3ص^2 ص' = 0$

$3(1)^2 - (2(1) ص' + 2(-1)) + 3(-1)^2 ص' = 0$

$3 - (2ص' - 2) + 3ص' = 0$

$3 - 2ص' + 2 + 3ص' = 0$

$5 + ص' = 0 \Leftarrow ص' = -5$

ج) $\frac{س^2}{16} + \frac{ص^2}{4} = 3$ (١٦٤)

$\frac{-4}{16} - \frac{2}{4} ص' = 0$

$\frac{-4}{1} - \frac{2}{4} ص' = 0$

$س^5 + 2ص^2 = 3$

$\frac{1}{2س^4} + \frac{1}{2ص^2} ص' = 0$

$\frac{1}{2ص^2} ص' = -\frac{1}{2س^4} \Leftarrow ص' = -\frac{2ص^2}{2س^4}$.

المماس أفقي $\Leftarrow ص' = صفر$

$-\frac{2ص^2}{2س^4} = صفر \Leftarrow 2ص^2 = صفر \Leftarrow ص = صفر$

نعوض $2س^4 + 2 \cdot 0^2 = 3 \Leftarrow 2س^4 = 3$

$\Leftarrow س = 9$ (٠٦٩)

منصة التعليم المعادة

٥) $س ص^{\frac{3}{4}} = (ك+1)^{\frac{3}{4}}$

$\frac{د ص}{د ك} = \frac{3}{4}(ك+1)^{-\frac{1}{4}} \times 2$

$= \frac{3}{2\sqrt[4]{(ك+1)^3}}$

٦) $س ص = جا س$

$س ص' + ص = جتا س$

$س ص'' + ص' + ص' = -جا س$

$س ص'' + 2ص' = -جا س$

$س ص'' + 2ص' + جا ك = 0 \quad (جا ك = ص)$

$س ص'' + 2ص' + ص = 0$ وهو المطلوب

٧) $س = جا ص$

$1 = جتا ص \times ص'$

$ص' = \frac{1}{جتا ص} = قا ص$

$ص'' = قا ص ظا ص ص'$ (نعوض قيمة ص')

$ص'' = قا ص ظا ص قا ص$

$ص'' = ظا ص قا^2 ص$. وهو المطلوب

٨) $ص جتا ك = س جا 2ص$

$ص \times -2 جا ك + جتا ك \times ص' = س \times 2 جتا 2ص \times ص' + جا 2ص$

عند $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

$\frac{\pi}{4} \times -2 جا \frac{\pi}{4} + جتا \frac{\pi}{4} \times ص' = \frac{\pi}{4} \times 2 جتا \frac{\pi}{2} \times ص' + جا \frac{\pi}{2}$

$-\pi \times 1 + 0 \times ص' = \frac{\pi}{2} \times -1 \times ص' + 0$

$-\pi = -\frac{\pi}{2} ص'$

$ص' = 2$

٩) $س ص = جا س$

$س ص' + ص = جتا س$

$س ص'' + ص' + ص' = -جا س$

$س ص'' + 2ص' = -جا س$

$س ص'' + 2ص' + جا ك = 0 \quad (جا ك = ص)$

$س ص'' + 2ص' + ص = 0$ وهو المطلوب

١٠) $ص = ن^3 + 2ن$

$\frac{د ص}{د ن} = 3ن^2 + 2$ ، $\frac{د ك}{د ن} = 4ن$

$\frac{د ص}{د ك} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د ك}$

$= (3ن^2 + 2) \times \frac{1}{4ن} = \frac{3ن^2 + 2}{4ن}$

$\frac{د^2 ص}{د ك^2} = \frac{4ن \times 6ن - (3ن^2 + 2) \times 4}{(4ن)^2} \times \frac{د ن}{د ك}$

$= \frac{24ن^2 - 12ن^2 - 8}{(4ن)^2} \times \frac{1}{4ن}$

$\frac{د^2 ص}{د ك^2} = \frac{12ن^2 - 8}{(4ن)^3}$

عند $ن = 1$

$\frac{د^2 ص}{د ك^2} = \frac{12 - 8}{4^3}$

$= \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

منهاجي متعة التعليم الهادف

١١) س + ص = جا ص

١ + ص' = جتا ص . ص' (مشتقة ثانية)

ص'' = جتا ص . ص'' + ص' × - جا ص × ص'

ص'' = جتا ص × ص'' - (ص')^٢ جا ص .

(ص')^٢ جا ص = جتا ص × ص'' - ص''

(ص')^٢ جا ص = ص''(جتا ص - ١)

(ص')^٢ = ص''(جتا ص / جا ص - ١ / جا ص)

(ص')^٢ = ص''(ظتا ص - قتا ص)

وهو المطلوب .

ص'' - س ص'' + جا ص = ٢ ص'

ص'' - س ص'' + ص - س ص = ٢ ص'

ص''(١ - س) + ص(١ - س) = ٢ ص'

(١ - س)(ص'' + ص) / (١ - س) = ٢ ص' / (١ - س)

ص'' + ص = ٢ ص' / (١ - س)

وهو المطلوب .

١٢) س ص = جا س + س ص

ص - س ص = جا س

ص' - (س × ص' + ص) = جتا س

ص' - س ص' - ص = جتا س (مشتقة)

ص'' - (س ص'' + ص') - ص' = - جا س

ص'' - س ص'' - ص' - ص' = - جا س

ص'' - س ص'' - ٢ ص' = - جا س

ص'' - س ص'' + جا س = ٢ ص'

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١) إذا كان ق(س) = ظاس وتغيرت س من س إلى س + هـ ، فأثبت أنَّ معدّل التغير للاقتران ق يساوي:

$$\frac{\text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{ظاهـ}}{\text{هـ} (١ - \text{ظاس} \times \text{ظاهـ})}$$

٢) إذا كان ق(س) = جا ٢س، فاستخدم تعريف المشتقة لإيجاد قَ($\frac{\pi}{٤}$).

٣) ليكن ق(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٢س+٢ & ، ٠ \geq س < ١ \\ [س] + ٤س & ، ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$ ، جد قَ(س).

٤) إذا كان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = −١ ، ل(−١) = ١، لَ(−١) = ٢
فجد قَ(−١) في كلٍّ مما يأتي :

أ) ق(س) = $\sqrt{س+٥}$ × ل(س)

ب) ق(س) = $\frac{(\text{ل}(س))^{٢}}{س^{٢}-س}$

جـ) ق(س) = ل (س) − $\frac{\text{ل}(س)}{س}$

د) ق(س) = ظا ($\frac{\pi}{٣}$ل(س))

٥) أ) إذا علمت أنَّ ص = س ظا س ، فأثبت أنَّ :

صً = ٢قا^{٢}س(١ + ص)

ب) إذا كان جا ص = س ، | س| < ١ ، فأثبت أنَّ :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{\sqrt{١-س^{٢}}} \text{ ، ص} \in (٠، \frac{\pi}{٢})$$

٦) إذا كان ص = ن^{٢}− ٤ن ، س = ٢ن − ٥ ، فجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند ن = ٦

٧) إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق؛ بحيث كان هـَ (س) = ق(س) ،
قَ(س) = − هـ (س) ، وكان ل(س) = (هـ (س))^{٢} + (ق (س))^{٢} ، فجد لَ(س) .

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أسئلة الوحدة

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} (س+١)^{٤} & ، س \geq ٠ \\ (س-١)^{٤} & ، س < ٠ \end{cases}$

فأجب عن كلٍّ مما يأتي :

أ) جد قَ(س) لجميع قيم س ، س ≠ ٠

ب) بيّن أنَّ ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

٩) إذا كان ص^{٣} = ق(٤س^{٢} − س) ، قَ(٥)= ٤ ، ق(٥) = −٨ ، فجد $\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س=-١}$.

١٠) إذا كان ق(س) = جاهـ(س) ، هـ (١) = $\frac{\pi}{٣}$ ، هـَ (١) = ٠ ، هـً (١) = ٤ ،
فجد قً (١) علمًا بأنَّ ق، قَ قابلان للاشتقاق.

١١) إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢س ، هـ (س) = ٣س^{٢} ، فجد كلاًّ مما يأتي:

أ) (قَ ٥ هـ)َ (٢) ب) (قَ ٥ هـ)ً (٢)

١٢) إذا كان ل(س) = ق(هـ(س))، وكان هـ (١) = ٤ ، لَ(١) = ٢ ، قَ(٤) = −٥، فجد هـَ (١)

١٣) إذا كان ص = س هـ (س) ، وكان هـ(−١) = ٦ ، هـَ(−١) = ٢، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = −١

١٤) إذا كان جا ص = ظا س ، فأثبت أنَّ : ظاهـ ص = $\frac{صً}{٢ قا^{٢}س+(صَ)^{٢}}$

١٥) إذا كان ق(٣س−١) = $\frac{١}{س^{٢}} - \frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠ . فأثبت أنَّ قَ(٥) = $\frac{١}{١٢}$

١٦) إذا كان جتا ص − س ص = ٢س ، فأثبت أنَّ:

صً (س + جا ص) + صَ(٢ + صَ جتا ص) = ٠

١٧) إذا كانت ص = أ جاس − ب جتاس ، أ ، ب ثابتان، فأثبت أنَّ :

(صَ)^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}

١٨) إذا كان ص = ق(س) ، ص^{٣} = ق(٢ س^{٢} − س) ، قَ(٦) = ٤ ، ق(٦) = − ٨ ،
فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٢ .

منهاجي
متعة التعليم الهادف

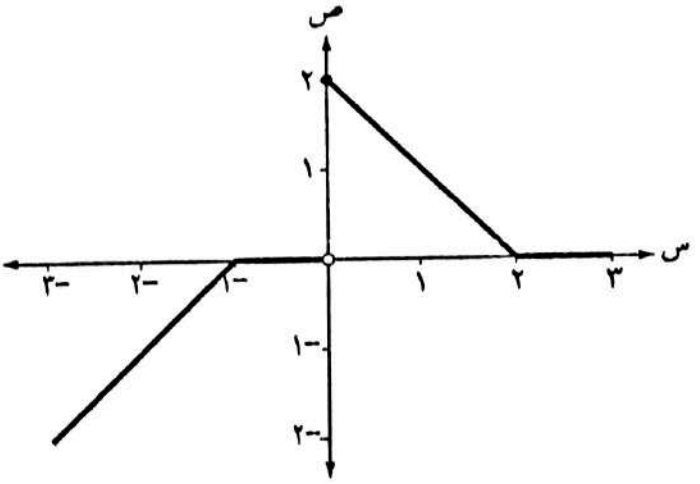
١٩) إذا كان ق(س) = س^{٣} - س^{٢} ، هـ (س) = ٣س^{٢} + س ، فجد كلاً مما يأتي:

أ) (قَ ٥ هـ)َ (١) ب) (قَ ٥ هـ)" (١)

٢٠*) اعتمادًا على الشكل (٢-٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [-٣ ،٣]، جد كلاً مما يأتي:

أ) قيم س حيث -٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل.

ب) قيم س حيث -٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير قابل للاشتقاق.



الشكل (٢-٤)

٢١) يتكون هذا السؤال من (٨) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، ويلي كل فقرة أربعة بدائل واحد فقط منها صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢، ٣)، وكان المماس المرسوم لمنحنى ق عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فإنَّ:

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ٣}{٦ - ٣س}$$ تساوي:

أ) ١ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $-\frac{١}{٣}$ د) -٣

(٢) $$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}٢س - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$$ تساوي:

أ) ١ ب) صفر جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ د) $\sqrt{٢}$

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أسئلة الوحدة

(٣) $\lim_{هـ \to 0} \frac{\frac{١}{٢} - \text{جتا}(\frac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$ تساوي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ جـ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) إذا كان قَ(٢) = ٦ ، فإنَّ $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٢+٣هـ) - ق(٢)}{-هـ}$ تساوي:

أ) -١٨ ب) ١٨ جـ) -٦ د) -٢

(٥) إذا كان معدّل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [−٢، م] يساوي $\frac{م^٢ - ٤}{م + ٢}$ فإنَّ قَ(− ٢) تساوي:

أ) ٢ ب) صفر جـ) -٤ د) ٤

(٦) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي $س^٢هـ - ٤سهـ^٢$ ، فإنَّ قَ(٣) تساوي:

أ) ٩ ب) − ٩ جـ) صفر د) − ٣

(٧) إذا كان ق(س) = | ٤ − ٢س| فإنَّ قَ(٢):

أ) ٢ ب) − ٢ جـ) صفر د) غير موجودة

(٨) إذا كان ق(٤) = ٥ ، قَ(٤) = − ١ ، قً(٤) = ٢ فإنَّ $(\frac{ق}{قَ})$َ(٤) تساوي:

أ) ١١ ب) − ٩ جـ) − ٦ د) ٦

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س١ ق(س) = ظا س

س١ = س ، س٢ = س + هـ .

معدل التغير = $\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

$= \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{س + هـ - س}$

$= \frac{ظا(س+هـ) - ظا س}{هـ}$

$= \frac{1}{هـ} \times \left(\frac{ظا س + ظا هـ}{1 - ظا س ظا هـ} - ظا س \right)$

$= \frac{ظا س + ظا هـ - ظا س + ظا^2 س ظا هـ}{(1 - ظا س ظا هـ) \times هـ}$

$= \frac{ظا هـ (1 + ظا^2 س)}{(1 - ظا س ظا هـ) \times هـ}$

$= \frac{ظا هـ \times قا^2 س}{هـ (1 - ظا س ظا هـ)}$

وهو المطلوب .

س٢ ق(س) = جا ٢س .

ق'($\frac{\pi}{3}$) = $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{ق(س) - ق(\frac{\pi}{3})}{س - \frac{\pi}{3}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{جا ٢س - جا \frac{2\pi}{3}}{س - \frac{\pi}{3}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{٢ جتا (\frac{٢س + \frac{2\pi}{3}}{2}) جا (\frac{٢س - \frac{2\pi}{3}}{2})}{س - \frac{\pi}{3}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{٢ جتا (س + \frac{\pi}{3}) جا (س - \frac{\pi}{3})}{س - \frac{\pi}{3}}$

ص = س − $\frac{\pi}{3}$ ، س → $\frac{\pi}{3}$ ، ص → ٠

$= \lim_{ص \to ٠} ٢ جتا (\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) \times \frac{جا ص}{ص}$

$= ٢ جتا \frac{2\pi}{3} \times ١$

$= ٢ \times -٠,٥ \times ١$

$= -١$

ق'($\frac{\pi}{3}$) = −١

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٣) $\lim_{س \to 3} هـ(س) = \begin{cases} س^2 + ك س + ٢ & ، ١ > س \geq ٠ \\ [س] + ٤ك & ، ٣ \geq س \geq ١ \end{cases}$

$[س] = \begin{cases} ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \\ ٣ & ، س = ٣ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} س^2 + ك س + ٢ & ، ١ > س \geq ٠ \\ ١ + ٤س & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢ + ٤ك & ، ٢ \leq س < ٣ \\ ٣ + ٤ك & ، س = ٣ \end{cases}$

هـ متصل عند س = ١ وغير متصل عند س = ٢

$هـ'(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، ٠ < س < ١ \\ ٤ & ، ١ < س < ٢ \\ ٤ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

هـ غير موجودة عند س = ٠ ، ٣

لأن ٠ ، ٣ أطراف الفترة

لأن هـ غير متصل عند س = ٢

٤) $هـ(س) = ك(س) \times \sqrt{س + ٥}$

$هـ'(س) = ك(س) \times \frac{١}{٢\sqrt{س+٥}} + ك'(س) \times \sqrt{س+٥}$

$هـ'(-١) = ك(-١) \times \frac{١}{٢\sqrt{-١+٥}} + ك'(-١) \times \sqrt{-١+٥}$

$= ١ \times \frac{١}{٢ \times ٢} + ٢ \times ٢$

$= \frac{٣}{٤} + ٤ = \frac{١٩}{٤}$.

ب) $هـ(س) = \frac{(ك(س))^2}{س^3 - س}$

$هـ'(س) = \frac{(س^3 - س) \times ٢(ك(س)) \times ك'(س) - (٣س^2 - ١)(ك(س))^2}{(س^3 - س)^2}$

$هـ'(-١) = \frac{٤ \times ٢ \times ٢ - (-٣) \times ١}{٤}$

$= \frac{٨ + ٣}{٤} = \frac{١١}{٤}$.

جـ) $هـ(س) = ك(س) - \frac{ك(س)}{س}$

$هـ'(س) = ك'(س) - \frac{س \times ك'(س) - ك(س)}{س^2}$

$هـ'(-١) = ك'(-١) - \frac{-١ \times ك'(-١) - ك(-١)}{١}$

$= ٢ + ٢ + ١$

$= ٥$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

س٤ د) $ه(س) = ظا(\frac{\pi}{٣} ل(س))$

$ه'(س) = قا^{٢}(\frac{\pi}{٣} ل(س)) \times \frac{\pi}{٣} \times ل'(س)$.

$ه'(-١) = قا^{٢}(\frac{\pi}{٣} ل(-١)) \times \frac{\pi}{٣} \times ٢$

$= قا^{٢}(\frac{\pi}{٣}) \times \frac{\pi}{٣} \times ٢$

$= ٤ \times \frac{\pi}{٣} \times ٢ = \frac{٨\pi}{٣}$.

س٥ هـ) $ص = س ظاس$.

$ص' = س قا^{٢}س + ظاس$.

$ص'' = س \times ٢ قاس \times قاس ظاس + قا^{٢}س + قا^{٢}س$

$= ٢س قا^{٢}س ظاس + ٢ قا^{٢}س$.

$= ٢ قا^{٢}س (س ظاس + ١)$

$= ٢ قا^{٢}س (ص + ١)$ وهو المطلوب

ب) $جاص = س$ ، $|س| < ١$

$جتاص \times ص' = ١$

$ص' = \frac{١}{جتاص}$

$ص' = \frac{١}{\sqrt{١ - جا^{٢}ص}}$

$ص' = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

لكن $جا^{٢}ص + جتا^{٢}ص = ١$

$جتا^{٢}ص = ١ - جا^{٢}ص$

$جتاص = \sqrt{١ - جا^{٢}ص}$

س٦ $ص = ن^{٢} - ٤ن$ ، $س = ٢ن - ٥$

$\frac{دص}{دن} = ٢ن - ٤$ ، $\frac{دس}{دن} = ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= (٢ن - ٤) \times \frac{١}{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ن - ٢$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ١ \times \frac{دن}{دس}$

$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$.

$\left|\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right|_{ن=٦} = \frac{١}{٢}$.

س٧ $ل(س) = (هـ(س))^{٢} + (ه(س))^{٢}$

$ل'(س) = ٢هـ(س) \times هـ'(س) + ٢ه(س) \times ه'(س)$

$= ٢هـ(س) \times ه'(س) + ٢ه'(س) \times ه(س)$

$ل'(س) =$ صفر

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س٨ $ه(س) = \begin{cases} (س+1)^4 & ، س \leq 0 \\ (س-1)^4 & ، س > 0 \end{cases}$

أ) $ه'(س) = \begin{cases} 4(س+1)^3 & ، س < 0 \\ 4(س-1)^3 & ، س > 0 \end{cases}$

ب) $ه(0) = 1$

$\lim_{س \to 0} ه(س) = 1$

∴ $ه$ متصل عند $س = 0$

$ه'(0)^+ = -4$

$ه'(0)^- = 4$

$ه'(0)^+ \neq ه'(0)^-$

∴ $ه$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 0$

س٩ $ص^3 = ه(4س^2 - س)$

$3ص^2 \frac{دص}{دس} = ه'(4س^2 - س) \times (8س - 1)$

عندما $س = -1 \leftarrow ص^3 = ه(5)$

$ص^2 = -8 \leftarrow ص = -2$

$3(-2)^2 \frac{دص}{دس} = ه'(5) \times (8 \times -1 - 1)$

$12 \frac{دص}{دس} = ه'(5) \times -9$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-9 \times 4}{12}$

$= -3$

س١٠ $ه(س) = جا ه(س)$

$ه'(س) = جتا ه(س) \times ه'(س)$

$ه''(س) = جتا ه(س) \times ه''(س) + ه'(س) \times -جا ه(س) \times ه'(س)$

$= ه''(س) جتا ه(س) + (ه'(س))^2 \times -جا ه(س)$

$ه''(1) = ه''(1) جتا ه(1) + (ه'(1))^2 \times -جا ه(1)$

$= 4 \times جتا \frac{\pi}{3} + صفر \times -جا \frac{\pi}{3}$

$= 4 \times \frac{1}{2} + صفر = 2$

س١١ $ه(س) = س^3 + 2ك$ ، $ه(1) = 2ك$

$ه'(س) = 3س^2 + 2$ ، $ه'(1) = 6ك$

$ه''(س) = 6ك$ ، $ه''(1) = 6$

$ه'''(س) = 6$ ، $ه'''(1) = صفر$

أ) $(ه \circ ه)'(2) = ه''(ه(2)) \times ه'(2)$

$= ه''(12) \times 12$

$= 6 \times 12 \times 12 = 864$

ب) $(ه \circ ه)''(2) = ه'''(ه(2)) \times ه'(2) +$

$ه'(2) \times ه''(ه(2)) \times ه'(2)$

$= ه'''(12) \times 6 + 12 \times ه''(12) \times 12$

$= 72 \times 6 + 144 \times 6$

$= 432 + 864$

$= 1296$.

منهاجي
منصة التعليم الهادف

س١٢ ل(س) = هـ(هـ(س))

ل'(س) = هـ'(هـ(س)) × هـ'(س)

ل'(١) = هـ'(هـ(١)) × هـ'(١)

٣ = هـ'(٤) × هـ'(١)

٦ = −٥ × هـ'(١)

هـ'(١) = $-\frac{٦}{٥}$.

س١٣ ص = س هـ(س)

$\frac{دص}{دس}$ = س هـ'(س) + هـ(س) × ١

عندما س = −١

$\frac{دص}{دس}$ = −١ × هـ'(−١) + هـ(−١)

= −١ × ٢ + ٦ = ٤

س١٤ جاص = ظاس .

جتاص ص' = قاس .

−جاص × ص' × ص' + جتاص × ص'' =

٢قاس × قاس ظاس .

جتاص × ص'' = ٢قاس ظاس + جاص × (ص')٢

ظاس = $\frac{جاص}{جتاص}$

جتاص × ص'' = ٢قا٢جاص + جاص × (ص')٢

جتاص × ص'' = $\frac{جاص(٢قاس + (ص')٢)}{جتاص}$

ص'' = $\frac{ظاص(٢قاس + (ص')٢)}{٢قاس + (ص')٢}$

ظاص = $\frac{ص''}{٢قاس + (ص')٢}$ وهو المطلوب.

س١٥ هـ(٣ك − ١) = $\frac{١}{س٤} - \frac{ك}{س}$.

هـ'(٣ك − ١) × ٣ = $\frac{-٣ك}{س٤} + \frac{٢}{س٣}$

هـ'(٣ك − ١) × ٣ = $\frac{-٢}{س٣} + \frac{ك}{س٢}$.

٣ك − ١ = ٥ ⇐ ٣ك = ٦ ⇐ ك = ٢

هـ'(٥) × ٣ = $\frac{-٢}{ج٣} + \frac{ك}{ج٢}$

هـ'(٥) × ٣ = $\frac{-١}{ج٤} + \frac{ك}{ج٣}$

هـ'(٥) × ٣ = $\frac{-١}{٤} + \frac{ك}{ج٤}$

هـ'(٥) × ٣ = $\frac{١}{٤}$.

هـ'(٥) = $\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٣}$

هـ'(٥) = $\frac{١}{١٢}$. وهو المطلوب.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

١٦) جتا ص − س ص = ٢ك .

(−جا ص × ص′ − (س ص′ + ص) = ٢) × −١

جا ص ص′ + س ص′ + ص = −٢

جا ص × ص″ + ص′ × جتا ص × ص′ +

س × ص″ + ص′ + ص′ = صفر .

جا ص × ص″ + جتا ص × (ص′)² + س ص″ + ٢ ص′ = ٠

جا ص × ص″ + س ص″ + جتا ص × (ص′)² + ٢ ص′ = ٠

ص″ (جا ص + س) + ص′ (ص جتا ص + ٢) = ٠

وهو المطلوب

١٧) ص = م جا س − ب جتا س .

ص′ = م جتا س + ب جا س .

(ص′)² = (م جتا س + ب جا س)² =

م² جتا² س + ٢ م ب جتا س جا س + ب² جا² س .

(ص)² = (م جا س − ب جتا س)²

م² جا² س − ٢ م ب جا س جتا س + ب² جتا² س .

(ص)² + ص² =

م² جتا² س + م² جا² س + ب² جا² س + ب² جتا² س

(ص′)² + ص² =

م² (جتا² س + جا² س) + ب² (جا² س + جتا² س)

م² × ١ + ب² × ١ = م² + ب²

وهو المطلوب.

١٨) نجد ص عند س = ٢

ص³ = هـ (٢ك − س)

ص³ = هـ (٨ − ٢) = هـ (٦) = −٨

ص³ = −٨ ⟸ ص = −٢

ص³ = هـ (٢ك − س)

٣ ص² ص′ = هـ′ (٢ك − س) × (٤ك − ١)

نضع س = ٢ ، ص = −٢

٣ (−٢)² ص′ = هـ′ (٦) × ٧

١٢ ص′ = ٤ × ٧ ⟸ ص′ = ٧/٣

١٩) هـ (س) = س³ − س ، و (س) = ٣ك² + ك

هـ′ (س) = ٣ك² − ك — و′ (س) = ٦ك + ١

هـ″ (س) = ٦ك − ٢ — و″ (س) = ٦

هـ‴ (س) = ٦ — و‴ (س) = صفر .

م) (هـ ٥ و)′ (١) =

هـ′ (و (١)) × و′ (١) =

هـ′ (٤) × ٧ =

٢٢ × ٧ = ١٥٤

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تابع س١٩ فرع ب)

ب) $(قـ \circ هـ)''(١) =$

$(قـ \circ هـ)'(١) = قـ'(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$(قـ \circ هـ)''(١) = (قـ'(هـ(١)) \times هـ'(١))' =$

$قـ''(هـ(١)) \times هـ'(١) + هـ'(١) \times قـ''(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$قـ'(٤) \times ٦ + ٨ \times قـ''(٤) \times ٨$

$٢٢ \times ٦ + ٨ \times ٦ \times ٨$

$١٣٢ + ٤٩٢ = ٦٢٤$

س٢٠ ٤) $قـ$ غير متصل عند $س = صفر$

ب) $قـ$ غير موجودة عند $س = ٠، ١-٢$

عند $س = ٠$ لأن $قـ$ غير متصل

عند $س = -١، ٢$ روس دببة حيث

$قـ^+ \neq قـ^-$

س٢١ (أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{قـ(س) - ٣}{س^٢ - ٣(س - ٢)} = -\frac{١}{٣} \times قـ'(٢)$

$= -\frac{١}{٣} \times ظا٤٥°$

$= -\frac{١}{٣} \times ١$

$= -\frac{١}{٣}$ (د)

---

(٣) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا^٢(\frac{\pi}{٣} + هـ) - \frac{١}{٢}}{هـ} =$

$-$ مشتقة $جتا^٢ س$ عند $س = \frac{\pi}{٣}$

$= ٢ جتا س$ (-جا س)

$= -٢ جتا س جا س$

عند $س = \frac{\pi}{٣} \leftarrow -٢ جتا \times جا \times \frac{\pi}{٣} =$

$-٢ \times جتا^٢ \frac{\pi}{٣}$ = صفر (ب)

---

(٤) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{قـ(٢ + ٣هـ) - قـ(٢)}{-هـ} =$

$\lim_{م \to ٠} \frac{قـ(٢ + م) - قـ(٢)}{-\frac{م}{٣}} =$

$-٣ \times قـ'(٢) = -٣ \times ٦$

$= -١٨$ (ب)

$م = ٣هـ$

$هـ = \frac{م}{٣}$

---

(٥)

$\lim_{س \to -٢} \frac{قـ(س) + ٤}{س^٢ + ٣س + ٢} = \lim_{م \to ٠} \frac{م^٢ - ٤}{(س+٢)^٢ + ٣(س+٢) + ٢}$

$= \lim_{م \to ٠} \frac{(م-٢)(م+٢)}{م^٢ + ٣م + ٢}$

$= -٤$ (د)

منهاجي
منصة التعليم الهادف

السؤال (٦)

$ق(س)$ = نهـا معدل التغير عندما $هـ \to 0$

معدل التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta ك} = \frac{س^٣ هـ + ٤ س هـ^٢}{ك + هـ - ك}$

$= \frac{س^٣ هـ - ٤ ك هـ^٢}{هـ}$

$= \frac{هـ(س^٣ - ٤ ك هـ)}{هـ}$

$= س^٣ - ٤ س هـ$

$ق(س)$ = نهـا عندما $هـ \to 0$ $(س^٣ - ٤ ك هـ)$

$= س^٣$

$ق(٣) = ٣^٣ = ٩$ (أ)

(٧) $٤ - ك = ٠ \leftarrow س = ٢$

$ق(س) = \begin{cases} ك - ٤ & ، س \leq ٢ \\ ٤ - ك & ، س > ٢ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢ & ، س < ٢ \\ -١ & ، س > ٢ \end{cases}$

$ق'(٢^+) \neq ق'(٢^-)$

$\Rightarrow ق'(٢)$ غير موجودة

(د)

(٨) $\left(\frac{ص}{ق}\right)'(٤) =$

$= \frac{ق(٤) \times ق'(٤) - ص(٤) \times ق''(٤)}{(ق(٤))^٢}$

$= \frac{٢ \times ٥ - (-١) \times -١٨}{(-١)^٢}$

$= \frac{١٠ - ١}{١} = -٩$

(ب)

منهاجي
منصة التعليم الهادف