المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثامن - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

8

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي
إبراهيم أحمد عمايرة
د. عيسى عبدالوهاب الطراونة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237
06-5376266
P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor
feedback@nccd.gov.jo
www.nccd.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2021/3)، تاريخ 2021/6/10 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2021/107) تاريخ 2021/6/30 م بدءًا من العام الدراسي 2021 / 2022 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 358 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2049)

375.001
الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
الرياضيات الصف الثامن: كتاب الطالب (الفصل الدراسي الأول)/ المركز الوطني لتطوير المناهج. -ط2؛ مزيدة ومنقحة.- عمان: المركز، 2022
(171) ص.
ر.إ.: 2022/4/2049
الواصفات: / الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الاعدادي/
يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الطبعة الأولى (التجريبية) 1442 هـ / 2021 م
أعيدت طباعته 2022 م – 2024 م

المقدّمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلُّم، ووُظِّفت فيها التكنولوجيا لتُسهِمَ في جعل الطلبة أكثر تفاعلًا مع المفاهيم المُقدمة لهم. كما عُنِي بإبرازِ خطة حَلِّ المسألة، فأفردَ لها دروسًا مستقلة تتيح للطلبة التدرُّب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مسائل متنوعة. لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدرُّب المكثَّف على حَلِّ المسائل يُعَدُّ إحدى أهم طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدِّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحَلُّ بوصفها واجبًا منزليًّا، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيدًا حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً تُوفِّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُستخدَم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية ، ولا سيَّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهِمَّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقدِّم محتوًى تعليميًّا تفاعليًّا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفوت طلبتنا أيُّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَسر الهُوَّة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالَم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب أبنائنا الطلبة والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 1

الأعدادُ الحقيقيّةُ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

للأعدادِ الحقيقيّةِ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ، منها قياسُ الأطوالِ ونِسَبِ التغيرِ في الكمّياتِ بدقةٍ. ويمكنُ أيضًا استعمالُ الأعدادِ الحقيقيّةِ للتعبيرِ عَنِ الكمّياتِ الكبيرةِ جدًّا أَوِ الصغيرةِ جدًّا، مثلِ قُطرِ الحِمضِ النوويِّ بالصيغةِ العِلميةِ.

تعلّمتُ سابِقًا:

- ✓ تبسيطَ مقاديرَ عدديةٍ تتضمنُ أُسُسًا صحيحةً بتطبيقِ أولوياتِ العملياتِ الحسابيةِ.
- ✓ حلَّ مسائلَ حياتيةٍ باستعمالِ التناسبِ والتقسيمِ التناسبيِّ.
- ✓ حلَّ مسائلَ على النسبةِ المئويةِ تتضمنُ الخصمَ أَوِ الضريبةَ.

سأتعلّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- التمييزَ بَيْنَ الأعدادِ النسبيةِ وغيرِ النسبيةِ.
- توظيفَ نظريةِ فيثاغورس وعكسَها في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.
- تطبيقَ قوانينِ الأُسُسِ النسبيةِ في تبسيطِ مقاديرَ أُسّيةٍ.
- حلَّ مسائلَ حياتيةٍ على النسبةِ المئويةِ.

مشروعُ الوحدةِ: الأعدادُ الحقيقيةُ في الفنِّ

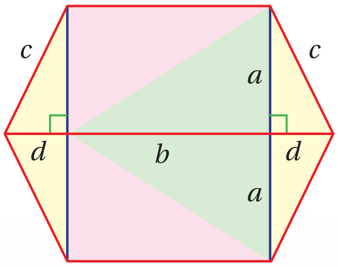
أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ الّذي نوظّفُ فيهِ ما نتعلّمُهُ في هذِهِ الوحدةِ حولَ الأعدادِ الحقيقيةِ ونظريةِ فيثاغورس في رسمِ زخرفةٍ هندسيةٍ على الزجاجِ.

الأدواتُ اللازمةُ:

أنبوبُ تحديدٍ على الزجاجِ، فُرَشٌ للتلوينِ، ألوانُ زجاجٍ، لوحٌ زجاجيٌّ

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

أختارُ قياساتٍ مناسبةً للشكلِ أدناهُ، ثُمَّ أرسمُهُ على الزّجاجِ باتّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:



1. أختارُ مربعَينِ كاملَينِ يشكّلُ جذراهُما بُعدَيِ المستطيلِ a وَ b، ثُمَّ أرسمُ المستطيلَينِ في الأعلى والأسفلِ على ورقةٍ.

2. أختارُ جذرًا أصمَّ ليشكّلَ المسافةَ d، وأستخدمُ خطَّ الأعدادِ لتحديدِهِ بدقةٍ. أرسمُ الضلعَينِ اللّذَينِ طولُ كلٍّ منهُما d.

3. أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لتحديدِ طولِ الوترِ c. أستعملُ خطَّ الأعدادِ لتحديدِ c -إذا لزمَ الأمرُ- ثُمَّ أرسمُ الوترَ، وأكملُ باقيَ الشكلِ.

4. أكملُ الجدولَ الآتيَ بوضعِ إشارةِ (✓) أَوْ (✗) في الخانةِ المناسبةِ:

العددُ	نسبيٌّ	غيرُ نسبيٍّ	جذرٌ أصمٌّ	جذرٌ غيرُ أصمّ
a				
b				
d				
c				

5. ألوّنُ الشكلَ على الورقةِ؛ تمهيدًا لمحاكاتِهِ على الزجاجِ.

6. أرسمُ الشكلَ على الزجاجِ محافظًا على القياساتِ الّتي اخترْتُها، وألوّنُهُ.

عرضُ النتائجِ:

تعرضُ المجموعاتُ زخارفَها على الزجاجِ وجداولَها، وتناقشُ كيفيةَ اختيارِ الأطوالِ.

الدرسُ 1 الجذورُ التربيعيةُ

فكرةُ الدرسِ

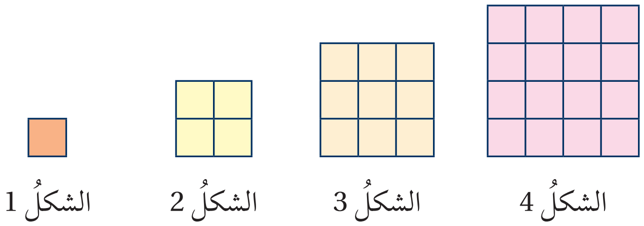
أجدُ قيمةَ الجذرِ التربيعيِّ لعددٍ، وأستخدمُهُ في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

المصطلحاتُ

الجذرُ التربيعيُّ، الجذرُ التربيعيُّ الرئيسُ، المجذورُ

أستكشفُ

إذا استمرَّ النمطُ في الشكلِ الآتي، فما رقمُ أولِ شكلٍ يحتوي أكثرَ مِنْ 180 وَحدةً مربعةً؟



الجذرُ التربيعيُّ (square root) لعددٍ ما هُوَ أحدُ عامِلَيهِ المتساويَينِ. ولأيِّ عددٍ موجبٍ جذرانِ تربيعيانِ، أحدُهُما موجبٌ والآخرُ سالبٌ، ويُسمّى الموجبُ منهُما **الجذرَ التربيعيَّ الرئيسَ** (principal square root). ويستعملُ رمزُ الجذرِ التربيعيِّ $\sqrt{}$ للدلالةِ على الجذرِ التربيعيِّ الرئيسُ، ويُسمّى العددُ أسفلَ الجذرِ **المجذورَ** (radicand).

رمزُ الجذرِ

$$\sqrt{a} \longleftarrow \text{المجذورُ}$$

الجذرُ التربيعيُّ الرئيسُ للعددِ 64 ←	$\sqrt{64}$
معكوسُ الجذرُ التربيعيُّ الرئيسُ للعددِ 64 ←	$-\sqrt{64}$
الجذرانُ التربيعيّانُ للعددِ 64 ←	$\pm\sqrt{64}$

لغةُ الرياضياتِ

يُقرأُ الرمزُ ± موجبًا أَوْ سالبًا، ويدلُّ على كِلا الجذرَينِ التربيعيَّينِ للعددِ الموجبِ.

مثال 1

أجدُ كلًّا ممّا يأتي:

① $\sqrt{36}$

أجدُ الجذرَ التربيعيَّ الموجبَ للعددِ 36	$\sqrt{36} = 6$

② $\pm\sqrt{1.69}$

أجدُ الجذرَينِ التربيعيَّينِ للعددِ 1.69	$\pm\sqrt{1.69} = \pm 1.3$

③ $-\sqrt{\frac{25}{64}}$

أجدُ الجذرَ التربيعيَّ السالبَ للعددِ $\frac{25}{64}$

$$-\sqrt{\frac{25}{64}} = -\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = -\frac{5}{8}$$

أتحققُ من فهمي:

④ $\sqrt{81}$

⑤ $-\sqrt{1.96}$

⑥ $\pm\sqrt{\frac{4}{121}}$

يمكنُني استعمالُ تعريفِ الجذرِ التربيعيِّ لعددٍ موجبٍ في حلِّ معادلاتٍ تتضمنُ متغيراتٍ مربعةً، فإذا كانَ $n^2 = c$ فإنَّ $n = \pm\sqrt{c}$

مثال 2

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الآتيةِ، وأتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

① $x^2 = 144$

المعادلةُ الأصليةُ $x^2 = 144$

تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ $x = \pm\sqrt{144}$

أجدُ قيمةَ الجذرِ $= \pm 12$

أتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

عندما $x = 12$

$(12)^2 \overset{?}{=} 144$

$144 = 144$ ✓

عندما $x = -12$

$(-12)^2 \overset{?}{=} 144$

$144 = 144$ ✓

② $t^2 = \frac{1}{36}$

المعادلةُ الأصليةُ $t^2 = \frac{1}{36}$

تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ $t = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$

أجدُ قيمةَ الجذرِ $= \pm\frac{1}{6}$

أتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

عندما $x = \frac{1}{6}$

$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \overset{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓

عندما $x = -\frac{1}{6}$

$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \overset{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓

أتحققُ من فهمي:

③ $y^2 = 2.25$

④ $x^2 = \frac{16}{169}$

يُستعمَلُ الجذرُ التربيعيُّ الموجبُ عادةً في المواقفِ الحياتيةِ والعمليةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

أهرامٌ: هرمُ الشمسِ في المكسيكِ ثالثُ أكبرِ هرمٍ في العالمِ، قاعدتُهُ مربعةُ الشكلِ مساحتُها $50625\ m^2$، أجدُ طولَ ضلعِ قاعدتِهِ.

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ المسألةَ على صورةِ معادلةٍ.

أفرضُ أنَّ x طولُ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ، وبما أنَّ القاعدةَ مربعةُ الشكلِ، فإنَّ مساحتَها تساوي مربعَ طولِ الضلعِ.

مساحةُ المربعِ	$A = x^2$
أعوضُ لأكوّنَ معادلةً	$x^2 = 50625$

الْخُطْوَةُ 2 أبحثُ عَنْ عاملَينِ متساويَينِ.

لحلِّ المعادلةِ، أبحثُ عَنْ عاملَينِ متساويَينِ للعددِ 50625، وذلكَ بتحليلِهِ إلى عواملِهِ الأوليةِ:

أحللُ العددَ إلى عواملِهِ الأوليةِ	$50625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
الخاصيةُ التجميعيةُ	$= (5 \times 5 \times 3 \times 3)\ (5 \times 5 \times 3 \times 3)$
أضربُ	$= 225 \times 225$

الْخُطْوَةُ 3 أجدُ طولَ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ.

لإيجادِ طولِ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ أحلُّ المعادلةَ $x^2 = 50625$

أكتبُ المعادلةَ	$x^2 = 50625$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$x = \pm\sqrt{50625}$
أجدُ قيمةَ الجذرِ	$x = \pm\ 225$

وبما أنَّ الطولَ لا يمكنُ أنْ يكونَ سالبًا، إذنْ، طولُ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ هُوَ $\sqrt{50625}$ ويساوي $225\ m$

أتحققُ من فهمي:

صورةٌ مربعةُ الشكلِ مساحتُها $3136\ cm^2$، أرادَتْ ريما وضعَها في بروازٍ مربعِ الشكلِ طولُ ضلعِهِ الداخليِّ 58 cm، هَلْ يمكنُها ذلكَ؟ أبرّرُ إجابتي.

أتدرب وأحل المسائل

أجدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $\sqrt{\frac{49}{169}}$

2) $-\sqrt{2.56}$

3) $\pm\sqrt{576}$

4) $\sqrt{0.0001}$

إرشاد
أستعملُ الحقيقةَ
$576 = 4 \times 9 \times 16$
لحلِّ المسألةِ 3

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، مبرّرًا إجابتي:

5) $(\sqrt{81})^2$

6) $(-\sqrt{0.01})^2$

7) $\frac{\sqrt{100-36}}{\sqrt{16}}$

8) $\sqrt{0.25+1.44}$

9) $\sqrt{2.61-0.36}$

10) $0.4^2+\sqrt{1.96}$

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الآتيةِ، وأتحققُ مِنْ صحةِ الحلِّ:

11) $t^2=\frac{64}{100}$

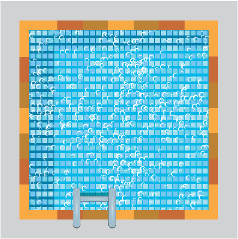
12) $y^2=0.0144$

13) $\sqrt{y}=\frac{3}{5}$

إرشاد
لحلِّ المعادلةِ في المسألةِ 13، أجدُ مربعَ طرفَيِ المعادلةِ.

14) **بناءٌ:** بلّطَ بنّاءٌ أرضيةَ غرفةٍ مربعةِ الشكلِ بـ 75 بلاطةً بيضاءَ وَ75 بلاطةً صفراءَ وَ75 بلاطةً بُنّيّةً. ما عددُ البلاطاتِ الّتي تشكّلُ طولَ ضلعِ قاعدةِ الغرفةِ؟

15 **مسابحُ**: مسبحٌ مربعُ الشكلِ، مساحتُهُ $169\ m^2$، يحيطُ بِهِ ممرٌّ عرضُهُ $1\ m$. أجدُ محيطَ الممرِّ.



أضعُ إشارةَ > أَوْ < أَوْ = في ☐ لأكوّنَ عبارةً صحيحةً في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $\sqrt{2.61-0.65}$ ☐ 1.6

17 1.3^2 ☐ $\sqrt{1.27+1.29}$

18 $\sqrt{0.81}$ ☐ 0.9^2

19 $\sqrt{1.24+0.2}$ ☐ 1.2

20 **أنماطٌ**: أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

21 **تبرير**: في حفلِ تخريجٍ للطلبةِ في إحدى الجامعاتِ، وُزّعَتِ المقاعدُ على 4 أقسامٍ كلٌّ مِنْها على شكلِ مربعٍ فيهِ العددُ نفسُهُ مِنَ المقاعدِ، لتشكّلَ الأقسامُ الأربعةُ معًا مربعًا كبيرًا. إذا كانَ في أحدِ الأقسامِ 625 مقعدًا، فما عددُ المقاعدِ الموضوعةِ على ضلعِ المربعِ الكبيرِ؟ أبرّرُ إجابتي.

أفكّرُ

ما العلاقةُ بَيْنَ عددِ المقاعدِ على طولِ ضلعِ المربعِ الكبيرِ وعددِ المقاعدِ على طولِ ضلعِ المربعِ الصغيرِ؟

22 **تبرير**: هَلْ يمكنُ إيجادُ $\sqrt{-100}$؟ أبرّرُ إجابتي.

23 **تحدٍّ**: قرّرتْ مصمّمةٌ تغطيةَ أرضيةِ مسرحٍ مربعةِ الشكلِ بنوعٍ خاصٍّ مِنَ الخشبِ سعرُ المترِ المربعِ الواحدِ مِنْهُ 4 JD، فبلغَتِ التكلفةُ 1024 JD. أجدُ طولَ المسرحِ.

أفكّرُ

ما العلاقةُ بَيْنَ مساحةِ أرضيةِ المسرحِ والتكلفةِ؟

24 **أكتشفُ الخطأَ**: يقولُ مالكٌ: إنَّ $\sqrt{64} = \pm 8$؛ لأنَّ $(\pm 8)^2 = 64$. هَلْ ما يقولُهُ مالكٌ صحيحٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

25 **أكتبُ** كيفَ أجدُ الجذرَ التربيعيَّ لعددٍ ما؟

الدرسُ 2 الجذورُ الصّمّاءُ

فكرةُ الدرسِ

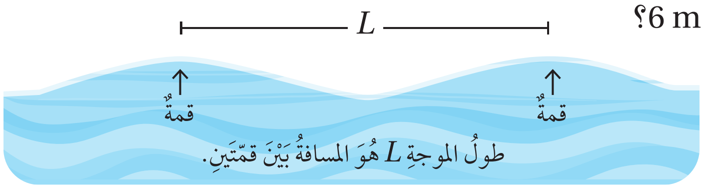
أقدّرُ قيمةَ الجذرِ التربيعيِّ.

المصطلحاتُ

الجذورُ الصّمّاءُ، إنطاقُ المقامِ.

أستكشفُ

تمثلُ المعادلةُ $2\pi s^2 = 9.8\ L$ العلاقةَ بَيْنَ سرعةِ سلسلةٍ مِنَ المَوجاتِ s بالمترِ لكلِّ ثانيةٍ في المياهِ العميقةِ، وطولِ المَوجةِ L بالأمتارِ. أجدُ سرعةَ سلسلةٍ مِنَ المَوجاتِ طولُها الموجيُّ 6 m؟



الجذورُ الصّمّاءُ (surds) هِيَ جذورٌ لا يمكنُ إيجادُ قيمةٍ دقيقةٍ لَها، فمثلًا $\sqrt{3}$ جذرٌ أصمُّ لعدمِ وجودِ إجابةٍ دقيقةٍ لَهُ؛ لأنَّ 3 ليسَ مربعًا كاملًا، أمّا $\sqrt{4}$ فيمكنُ إيجادُ قيمةٍ دقيقةٍ لَهُ وَهِيَ 2؛ لأنَّهُ مربعٌ كاملٌ، إذنْ فَهُوَ ليسَ جذرًا أصمَّ. ولكنْ يمكنُ تقديرُ قيمةِ الجذورِ الصّمّاءِ باستعمالِ طرائقَ عدّةٍ مِنْها: خطُّ الأعدادِ، والآلةُ الحاسبةُ.

مثال 1

أقدّرُ قيمةَ $\sqrt{55}$ لأقربِ عددٍ صحيحٍ.

الطريقةُ 1: خطُّ الأعدادِ

الخُطْوَةُ 1 أحددُ مربعَينِ كاملَينِ يقعُ بينَهُما العددُ 55 ويكونانِ أقربَ ما يمكنُ إليهِ.

- أكبرُ مربعٍ كاملٍ **أقلَّ مِنْ** 55 هُوَ 49
- أصغرُ مربعٍ كاملٍ **أكبرَ مِنْ** 55 هُوَ 64

إذنْ، العددُ 55 يقعُ بَيْنَ المربعَينِ الكاملَينِ 49 وَ 64، ويمكنُ التعبيرُ عَنْ هذهِ الجملةِ على النحوِ الآتي:

$$49 < 55 < 64$$

الخُطْوَةُ 2 أجدُ الجذرَ التربيعيَّ لكلِّ عددٍ.

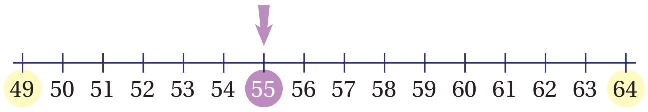
أكتبُ المتباينةَ $\quad 49 < 55 < 64$

أجدُ الجذرَ التربيعيَّ لكلِّ عددٍ $\quad \sqrt{49} < \sqrt{55} < \sqrt{64}$

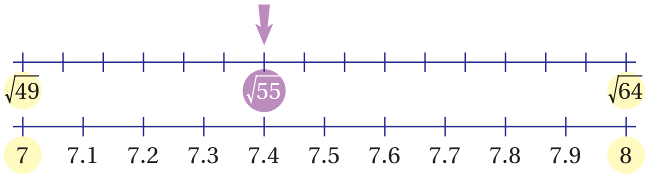
أبسطُ $\quad 7 < \sqrt{55} < 8$

الْخُطْوَةُ 3 أستعملُ خطَّ الأعدادِ لتحديدِ أفضلِ تقديرٍ.

- أعيّنُ الجذرَينِ على خطِّ الأعدادِ.
- ألاحظُ أنَّ 55 أقربُ إلى 49 مِنْهُ إلى 64



إذنْ، $\sqrt{55}$ أقربُ إلى 7 مِنْهُ إلى 8



لذا فإنَّ أفضلَ تقديرٍ لـ $\sqrt{55}$ لأقربِ عددٍ صحيحٍ هُوَ 7

الطريقةُ 2: الآلةُ الحاسبةُ

يمكنُ استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ لتقديرِ $\sqrt{55}$ بالضغطِ على الأزرارِ الآتيةِ:

√ 55 s ⇔ d 7.416198487

إذنْ، أفضلُ تقديرٍ لـ $\sqrt{55}$ لأقربِ عددٍ صحيحٍ هُوَ 7

أتحققُ من فهمي:

أقدّرُ قيمةَ كلِّ جذرٍ تربيعيٍّ ممّا يأتي لأقربِ عددٍ صحيحٍ باستعمالِ خطِّ الأعدادِ والآلةِ الحاسبةِ:

① $\sqrt{83}$

② $\sqrt{125}$

③ $\sqrt{160}$

يكونُ المقدارُ الجذريُّ في أبسطِ صورةٍ حينَ لا يحتوي:

- جذرًا في المقامِ.
- مجذورًا أحدُ عواملِهِ مربعٌ كاملٌ باستثناءِ العددِ 1
- مجذورًا على صورةِ كسرٍ.

ويمكنُ تبسيطُ الجذورِ التربيعيةِ الصّمّاءِ باستعمالِ خواصِّ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ وقسمتِها.

مفهومٌ أساسيٌّ
خواصُّ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ وقسمتُها

• مثال:	• بالرموزِ:
$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$	$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a\,,\,a\geq 0$
$\sqrt{9\times 7}=\sqrt{9}\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$	$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\ ,\,a\geq 0,\,b\geq 0$
$\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,,\,a\geq 0,\,b>0$

وللحصولِ على مقدارٍ جذريٍّ لا يحتوي مقامُهُ جذرًا أصمَّ، نضربُ البسطَ والمقامَ في هذا الجذرِ الأصمِّ، وتُسمّى هذهِ العمليةُ **إنطاقَ المقامِ** (rationalizing the denominator).

أتعلمُ

لتبسيطِ جذرٍ أصمَّ على الصورةِ $\sqrt{a}\,,\,a\geq 0$ أحللُ العددَ الواقعَ تحتَ رمزِ الجذرِ، على أنْ يكونَ أحدُهُما أكبرَ مربعٍ كاملٍ ممكنًا، ثُمَّ أطبقُ خاصيةَ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ.

مثال 2

أُبسّطُ كلًّا ممّا يأتي:

① $\sqrt{675}$

أحللُ العددَ 675 إلى عاملَينِ أحدُهُما مربعٌ كاملٌ	$\sqrt{675}=\sqrt{225\times 3}$
خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ	$=\sqrt{225}\times\sqrt{3}$
أبسطُ	$=15\sqrt{3}$

② $\sqrt{\frac{48}{81}}$

خاصيةُ قسمةِ الجذورِ التربيعيةِ	$\sqrt{\frac{48}{81}}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{81}}$
أحللُ العددَ 48 إلى عاملَينِ أحدُهُما مربعٌ كاملٌ	$=\frac{\sqrt{16\times 3}}{\sqrt{81}}$
خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ	$=\frac{\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{\sqrt{81}}$
أبسطُ	$=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

③ $\frac{14}{\sqrt{7}}$

أُنطقُ المقامَ $$\frac{14}{\sqrt{7}} = \frac{14}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

خاصيةُ ضربِ الجذرِ في نفسِهِ $$= \frac{14\sqrt{7}}{7}$$

أبسطُ $$= 2\sqrt{7}$$

أتحققُ من فهمي:

④ $\sqrt{192}$

⑤ $\sqrt{\frac{180}{25}}$

⑥ $\frac{30}{\sqrt{6}}$

يُستعملُ تبسيطُ الجذورِ الصّمّاءِ وتقديرُها في كثيرٍ مِنَ المواقفِ الحياتيةِ الّتي لا يمكنُ إيجادُ إجابةٍ دقيقةٍ لَها.

مثال 3: منَ الحياةِ

زراعةٌ: اشــترى ســميرٌ 6 أكياسٍ مِنَ السّــمادِ الطبيعيِّ يكفي الواحدُ مِنْها لتغطيةِ مساحةٍ مقدارُها $156\ m^2$. أقدّرُ طولَ ضلعِ أكبرِ مربعٍ مِنَ الأرضِ يمكنُ أَنْ تغطّيَهُ هذهِ الكمّيةُ مِنَ السّمادِ.

لتقديرِ طولِ ضلعِ أكبرِ مربعٍ مِنَ الأرضِ يمكنُ أَنْ تغطّيَهُ كمّيةُ السّــمادِ الّتي اشــتراها ســميرٌ، أجدُ المساحةَ المربعةَ الّتي تغطّيها كمّيةُ السّمادِ الكلّيةُ، وذلكَ بضربِ عددِ الأكياسِ في مساحةِ ما يغطّيهِ الكيسُ الواحدُ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ المساحةَ المربعةَ الّتي تغطّيها كمّيةُ السّمادِ الكلّيةُ.

عددُ الأكياسِ × مساحةِ ما يغطّيهِ الكيسُ الواحدُ $$6 \times 156 = 936$$

إذنْ، تغطي كمّيةُ السّمادِ كلُّها مساحةً مقدارُها $936\ m^2$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ طولَ ضلعِ مربعِ الأرضِ الّذي تغطّيهِ كمّيةُ السّمادِ كلُّها.

أفرضُ أَنَّ s طولُ ضلعِ مربعِ الأرضِ الّذي مساحتُهُ $936\ m^2$

مساحةُ المربعِ $$A = s^2$$

طولُ الضلعِ يساوي الجذرَ التربيعيَّ للمساحةِ $$s = \sqrt{A}$$

أعوضُ $A = 936$ $= \sqrt{936}$

أحلِلُ العددَ 936 إلى عاملَينِ أحدُهُما مربعٌ كاملٌ $= \sqrt{36 \times 26}$

خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ $= \sqrt{36} \times \sqrt{26}$

أبسطُ $= 6\sqrt{26}$

أتذكّرُ

إيجادُ مربعِ العددِ والجذرِ التربيعيِّ لَـهُ عمليتـانِ عكسيتانِ.

الْخُطْوَةُ 3 أقدّرُ طولَ ضلعِ المربعِ.

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لتقديرِ طولِ ضلعِ المربعِ:

6 √ 26 s⇔d 30.59411708

إذنْ، طولُ ضلعِ مربعِ الأرضِ الّذي تكفي لتغطيتِهِ كمّيّةُ السّمادِ الّتي اشتراها سميرٌ 30 m تقريبًا.

أتحققُ من فهمي:

جُســورٌ: تمثلُ المعادلةُ $t = \sqrt{\frac{2d}{9.8}}$ العلاقةَ بَيْنَ الزمنِ t بالثّواني والارتفاعِ بالأمتارِ d الّذي سقطَ مِنْهُ جسمٌ سُقوطًا حُرًّا. أجدُ الزمنَ اللازمَ ليصلَ جسمٌ إلى سطحِ الأرضِ سقطَ مِنْ جسرِ وادي الغَفَرِ في محافظةِ إربدَ البالغِ ارتفاعُهُ عَنْ سطحِ الأرضِ 72 m

يمكنُ جمعُ الجذورِ التربيعيةِ الصّمّاءِ وطرحُها بطريقةٍ مشابهةٍ لجمعِ الحدودِ الجبريةِ وطرحِها، بشرطِ أَنْ يتساوى المجذورُ في كلٍّ منها.

$3\sqrt{5},\ 7\sqrt{5}$ جذرانِ متشابهانِ

$3\sqrt{5},\ 5\sqrt{3}$ جذرانِ غيرُ متشابهَينِ

مثال 4

أبسطُ كلًّا ممّا يأتي:

① $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

أحلِلُ $\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5}$

خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ $= \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{4} = 2 , \sqrt{9} = 3$ $= 2 \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{5}$

أجمعُ $= 5\sqrt{5}$

② $\sqrt{12}-6\sqrt{3}$

أحللُ	$\sqrt{12}-6\sqrt{3}=\sqrt{4\times 3}-6\sqrt{3}$
خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ	$=\sqrt{4}\times\sqrt{3}-6\sqrt{3}$
$\sqrt{4}=2$	$=2\sqrt{3}-6\sqrt{3}$
أطرحُ	$=-4\sqrt{3}$

③ $5\sqrt{7}+2\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

أجمعُ المعاملاتِ وأطرحُها	$5\sqrt{7}+2\sqrt{7}-3\sqrt{7}=(5+2-3)\sqrt{7}$
أبسطُ	$=4\sqrt{7}$

أتحققُ من فهمي:

④ $\sqrt{243}+\sqrt{48}$

⑤ $2\sqrt{3}-7\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

⑥ $4\sqrt{98}+5\sqrt{2}$

يمكنُ تبسيطُ بعضِ المقاديرِ العدديةِ الّتي تحوي جذورًا صمّاءَ وعملياتٍ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ وخواصِّ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ وقسمتِها.

مثال 5

أُبسطُ كلًّا ممّا يأتي:

① $\sqrt{3}(2-\sqrt{7})$

خاصيةُ التوزيعِ	$\sqrt{3}(2-\sqrt{7})=2\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{7}$
خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ	$=2\sqrt{3}-\sqrt{21}$

② $(5+\sqrt{6})^2$

تعريفُ المربعِ الكاملِ	$(5+\sqrt{6})^2=(5+\sqrt{6})(5+\sqrt{6})$
خاصيةُ التوزيعِ	$=25+5\sqrt{6}+5\sqrt{6}+\sqrt{6}\sqrt{6}$
خاصيةُ ضربِ الجذرِ في نفسِهِ	$=25+5\sqrt{6}+5\sqrt{6}+6$
أجمعُ	$=31+10\sqrt{6}$

أتحققُ من فهمي:

3 $\sqrt{2}(\sqrt{8}-1)$

4 $(\sqrt{7}-3)^2$

أتدرب وأحل المسائل

أقـدّرُ قيمـةَ كلِّ جـذرٍ ممّـا يأتـي لأقـربِ عـددٍ صحيـحٍ باسـتعمالِ خـطِّ الأعـدادِ والآلـةِ الحاسـبةِ:

1 $\sqrt{17}$

2 $\sqrt{44}$

3 $\sqrt{70}$

4 $\sqrt{93}$

أكتبُ كلًّا مِنَ المقاديرِ العدديةِ الآتيةِ بأبسطِ صورةٍ:

5 $\sqrt{405}$

6 $\sqrt{\frac{132}{99}}$

7 $\frac{6}{\sqrt{18}}$

8 $(4+\sqrt{3})(5-\sqrt{27})$

9 $4\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}$

10 $\frac{1}{\sqrt{20}}+\sqrt{81}$

11 $(6+\sqrt{3})^2$

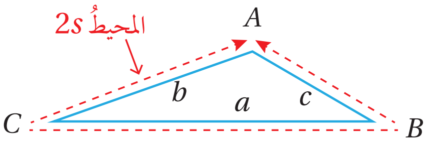
12 $\sqrt{12}-43+2\sqrt{9}$

معلومةٌ

يُعـدُّ بَنْـدولُ السـاعةِ أحدَ الاختراعـاتِ الإسـلاميةِ الكبـرى الّتي غيّرَتْ مسـارَ الحضارةِ الإنسـانيةِ. ومنذُ عُرِفَ البَنْدولُ تطورَتْ آلاتُ حسابِ الوقتِ بسرعةٍ.

13 **فيزياءُ:** تمثلُ الصيغةُ $\frac{375}{\sqrt{c}}$ عددَ التذبذباتِ الناتجةِ عَنْ حركةِ بَنْدولِ ساعةٍ طولُهُ $\sqrt{c}$ in في الدقيقةِ، أقدّرُ عددَ تذبذباتِ بَنْدولٍ إذا كانَتْ $c = 45$ in

مساحةٌ: يمكنُ حسابُ مساحةِ مثلثٍ باستعمالِ الصيغةِ $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيثُ a وَ b وَ c أطوالُ أضلاعِ المثلثِ وَ s نصفُ المحيطِ.



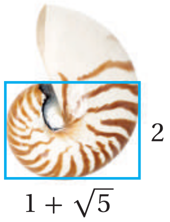
14 أجدُ مساحةَ مثلثٍ أطوالُ أضلاعِهِ 6 وَ 8 وَ 10

15 هَلْ مِساحةُ المثلثِ الناتجةُ عَنِ الفرعِ السابقِ تمثلُ جذرًا أصمَّ أمْ لا؟ أبرّرُ إجابتي.

معلومةٌ

النسبةُ الذهبيةُ هِيَ نسبةٌ ثابتةٌ بَيْنَ كمّيتَينِ، وتظهرُ في الطبيعةِ كثيرًا. ويُسمّى المستطيلُ الّذي تحققُ نسبةُ طولِهِ إلى عرضِهِ هذهِ النسبةَ مستطيلًا ذهبيًّا.

16 **قوقعةٌ:** يتكرّرُ وجودُ المستطيلِ الذهبيِّ في قوقعةِ نوتيلوسِ البحريِّ، إذا علمْتُ أنَّ نسبةَ طولِ المستطيلِ الذهبيِّ إلى عرضِهِ تساوي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$، فأقدّرُ قيمةَ هذهِ النسبةِ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

17 **تبريرٌ:** أجدُ قيمةَ $\square$ في $(2.8 < \sqrt{\square} < 4)$، إذا علمْتُ أنَّ $\square$ عددٌ صحيحٌ موجبٌ أقلُّ مِنْ 10، وأبرّرُ إجابتي.

18 **تحدٍّ:** أجدُ الحدَّينِ: الأولَ، والثانيَ مِنَ المتتاليةِ الآتيةِ:

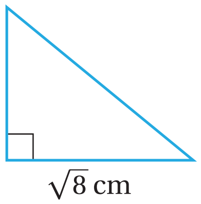
$$\_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \sqrt{5} - 2\sqrt{3} , 3\sqrt{5} - 5\sqrt{3} , 5\sqrt{5} - 8\sqrt{3}$$

أتذكّرُ

مساحةُ المثلثِ =

$\frac{1}{2}$ × القاعدةِ × الارتفاعِ

19 **تبريرٌ:** أجدُ ارتفاعَ المثلثِ المجاورِ الّذي مساحتُهُ $4 + \sqrt{2}\ \text{cm}^2$ بأبسطِ صورةٍ، وأبرّرُ إجابتي.



20 **أكتبُ** كيفَ أقدّرُ قيمةَ الجذرِ التربيعيِّ لعددٍ؟

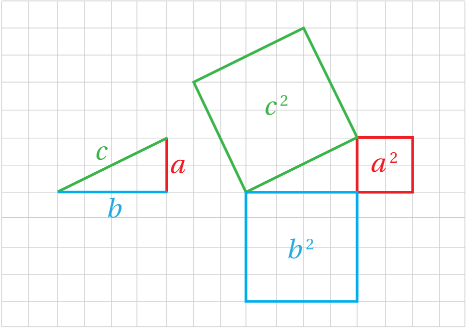
نشاطٌ مفاهيميٌّ نظريةُ فيثاغورس

الهدفُ: أستكشفُ العلاقةَ بَيْنَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ القائمِ الزاويةِ.

نشاطٌ

الْخُطْوَةُ 1 أرسمُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ.

- أرسمُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ على ورقةِ مربعاتٍ، وأسمّي أقصرَ ضلعَيْنِ **a** وَ **b** والضلعَ الأطولَ **c**، كما في الشكلِ المجاورِ.

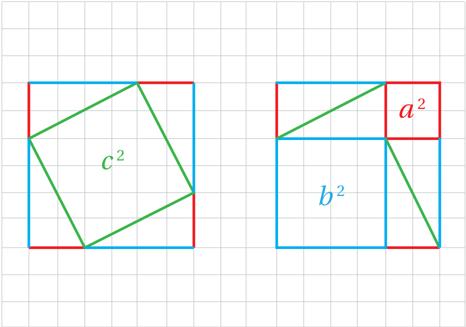


الْخُطْوَةُ 2 أرسمُ مربعًا على كلِّ ضلعٍ.

- أرسمُ مربعًا على كلِّ ضلعٍ مِنْ أضلاعِ المثلثِ، وأسمّي مساحاتِ المربعاتِ الثلاثةِ: a^2 , b^2 , c^2، كما في الشكلِ المجاورِ.

الْخُطْوَةُ 3 أقصُّ وأعيدُ الترتيبَ.

- أقصُّ المربعاتِ الثلاثةَ.
- أنسخُ مِنَ المثلثِ القائمِ الزاويةِ ثمانيَ نسخٍ، ثُمَّ أقصُّها.
- أعيدُ ترتيبَ الأشكالِ لتكوينِ مربعَيْنِ متطابقَيْنِ كبيرَيْنِ كما في الشكلِ المجاورِ.



أحللُ النتائجَ:

- معتمدًا المربعَيْنِ الكبيرَيْنِ المتطابقَيْنِ الناتجَيْنِ مِنَ النشاطِ؛ أصفُ العلاقةَ بَيْنَ a^2 وَ b^2 وَ c^2
- أستعملُ النتيجةَ الّتي توصلْتُ إِلَيْها في الفرعِ السابقِ لكتابةِ معادلةٍ تصفُ العلاقةَ بَيْنَ a^2 وَ b^2 وَ c^2

أفكِّرُ: **كيفَ يمكنُ استعمالُ المعادلةِ الّتي توصلْتُ إِلَيْها في إيجادِ طولِ الضلعِ الأطولِ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ، إذا كانَ طولا ضلعَيْهِ الآخَرَيْنِ 6 cm, 8 cm؟**

الدرسُ 3 نظريةُ فيثاغورس

فكرةُ الدرسِ

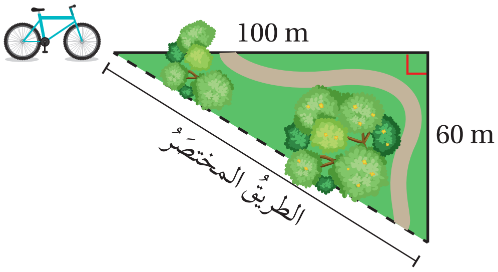
أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ طولِ ضلعٍ مجهولٍ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.

المصطلحاتُ

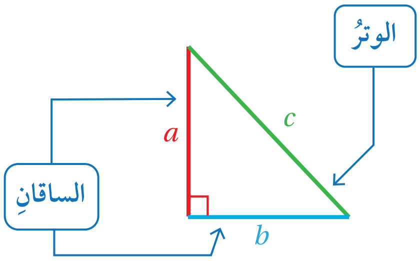
نظريةُ فيثاغورس، الوَترُ، الساقانِ، عكسُ نظريةِ فيثاغورس

أستكشفُ

أرادَ خالــدٌ الخـــروجَ مِــنَ الحديقةِ راكبًا دراجتَهُ الهوائيةَ مــارًّا بالطريقِ المختصَرِ كما يظهرُ في الشــكلِ المجاورِ. ما طولُ الطريقِ المختصَرِ؟



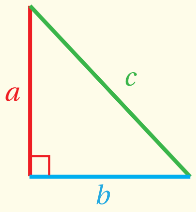
المثلثُ القائمُ الزاويــةِ هُوَ مثلثٌ إحدى زواياهُ قائمةٌ. ويُســمّى الضلعُ المقابــلُ للزاويةِ القائمةِ **الوَتــرَ** (hypotenuse)، وَهُوَ الضلعُ الأطولُ في المثلثِ. ويُسمّى الضلعانِ الآخرانِ **الساقَينِ** (legs)، وَهُما الضلعانِ اللّذانِ يشكّلانِ القائمةَ.



تصــفُ **نظريــةُ فيثاغــورس** (pythagorean theorem) العلاقــةَ بَيْــنَ طولَــيْ الســاقينِ وطــولِ الوتــرِ فــي المثلــثِ القائــمِ الزاويةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — نظريةُ فيثاغورس

- **بالكلماتِ:** في المثلثِ القائمِ الزاويةِ مربعُ طولِ الوترِ يساوي مجموعَ مربعَيْ طولَيْ ساقَيْهِ.
- **بالرموزِ:** $c^2 = a^2 + b^2$

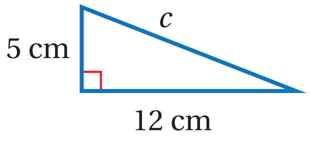


يمكـنُ اسـتعمالُ حـلِّ المعـادلاتِ ونظريةِ فيثاغـورس في إيجادِ طـولِ ضلعٍ مجهولٍ فـي مثلثٍ قائمِ الزاويـةِ إذا عُلِمَ طولا ضلعَيـهِ الآخَرَينِ.

مثال 1

أجدُ طولَ الضلعِ المجهولَ في كلِّ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ ممّا يأتي (أقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ إذا لزمَ الأمرُ):

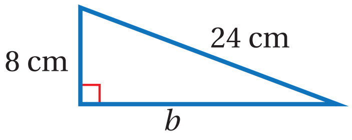
①



نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
أعوضُ $a = 5, b = 12$	$5^2 + 12^2 = c^2$
أجدُ القوى	$25 + 144 = c^2$
أجمعُ	$169 = c^2$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$c = \pm\sqrt{169}$
أبسطُ	$= \pm 13$

للمعادلةِ حلّانِ: 13 وَ 13−، وبما أنَّ الطولَ يجبُ أَنْ يكونَ عددًا موجبًا، إذنْ طولُ الوترِ 13 cm

②

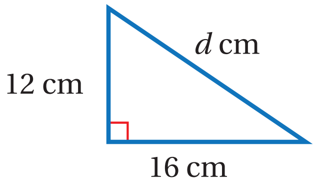


نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
أعوضُ $a = 8, c = 24$	$8^2 + b^2 = 24^2$
أجدُ القوى	$64 + b^2 = 576$
أطرحُ 64 مِنْ كِلا الطرفَيْنِ	$64 - 64 + b^2 = 576 - 64$
أبسطُ	$b^2 = 512$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$b = \pm\sqrt{512}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$b \approx \pm 22.6$

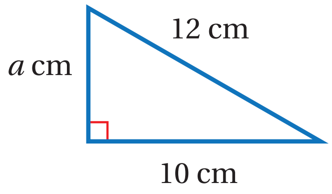
إذنْ، طولُ الضلعِ المجهولُ b يساوي 22.6 cm

أتحققُ من فهمي:

③



④



إنَّ عكـسَ نظريةِ فيثاغـورس (converse of pythagorean theorem) صحيحٌ أيضًا، ويُستعملُ لتحديدِ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثةِ قائمَ الزاويةِ أَمْ لا.

نظريةُ فيثاغورس: إذا كانَ المثلثُ قائمَ الزاويةِ، فإنَّ $c^2 = a^2 + b^2$

عكسُ نظريةِ فيثاغورس: إذا كانَ $c^2 = a^2 + b^2$، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — عكسُ نظريةِ فيثاغورس

- **بالكلماتِ:** إذا كانَ مربعُ طولِ الضلعِ الأطولِ في مثلثٍ يساوي مجموعَ مربعَيْ طولَيِ الضلعَينِ الآخَرَينِ، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ.

مثال 2

أحددُ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالُ أضلاعِهِ في كلٍّ ممّا يأتي قائمَ الزاويةِ أَمْ لا:

① **12, 9, 15**

بما أنَّ أطولَ ضلعٍ طولُهُ 15، فأفرضُ أنَّ $c = 15$، وَ $a = 9$، وَ $b = 12$، ثُمَّ أحددُ أنَّ هذهِ الأطوالَ تحققُ المعادلةَ $c^2 = a^2 + b^2$ أَمْ لا.

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $a = 9, b = 12, c = 15$	$15^2 \overset{?}{=} 9^2 + 12^2$
أجدُ القوى	$225 \overset{?}{=} 81+144$
أجمعُ	$225 = 225$ ✓

بما أنَّ $c^2 = a^2 + b^2$، إذنْ، المثلثُ قائمُ الزاويةِ.

② 3, 5, 6

بمـــا أنَّ أطولَ ضلعٍ طولُهُ 6، فأفرضُ أنَّ $c = 6$، وَ $a = 5$، وَ $b = 3$، ثُمَّ أحددُ أنَّ هذهِ الأطوالَ تحققُ المعادلةَ $c^2 = a^2 + b^2$ أَمْ لا.

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $a = 5, b = 3, c = 6$	$6^2 \overset{?}{=} 5^2 + 3^2$
أجدُ القوى	$36 \overset{?}{=} 25 + 9$
أبسطُ	$36 \neq 34$

بما أنَّ $c^2 \neq a^2 + b^2$، إذنْ، المثلثُ ليسَ قائمَ الزاويةِ.

أتحققُ من فهمي:

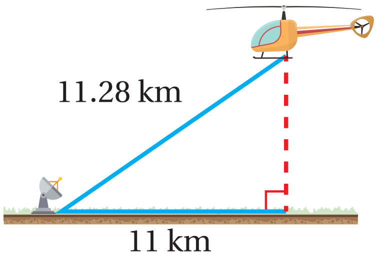
③ 12, 5, 13

④ 24, 18, 25

يمكنُ استعمالُ نظريةِ فيثاغورس في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

رادارٌ: رصدَ رادارٌ طائرةً مروحيةً على بُعدِ **11.28 km** مِنْهُ، كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ. أجدُ ارتفاعَ الطائرةِ عَنْ سطحِ الأرضِ لأقربِ جزءٍ مِنَ العشرةِ مِنَ الكيلومترِ.



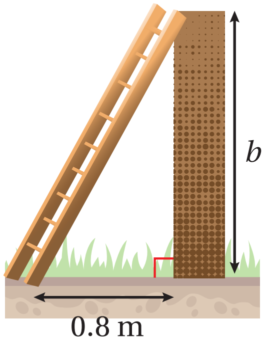
أفرضُ أنَّ a هِيَ ارتفاعُ الطائرةِ عَنْ سطحِ الأرضِ، ولإيجادِ قيمةِ a أستعملُ نظريةَ فيثاغورس:

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $c = 11.28, b = 11$	$11.28^2 = a^2 + 11^2$
أجدُ القوى	$127.2384 = a^2 + 121$
أطرحُ 121 مِنْ كِلا الطرفَيْنِ	$a^2 = 6.2384$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$a = \pm\sqrt{6.2384}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$a \approx \pm 2.5$

إذنْ، ارتفاعُ الطائرةِ عَنْ سطحِ الأرضِ 2.5 km تقريبًا.

أتحققُ من فهمي:

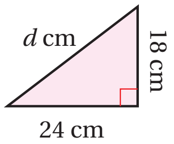
يستندُ سلّمٌ طولُهُ 2 m إلى حائطٍ عموديٍّ، وتبعدُ قاعدتُهُ 0.8 m عَنِ الحائطِ. أجدُ ارتفاعَ أعلى السلّمِ عَنِ الأرضِ (b).



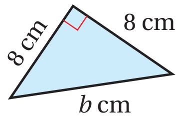
أتدرب وأحل المسائل

أجدُ طولَ الضلعِ المجهولَ في كلِّ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ ممّا يأتي (أقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ إذا لزمَ الأمرُ):

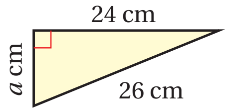
1



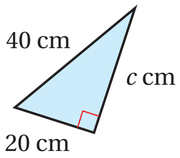
2



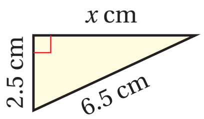
3



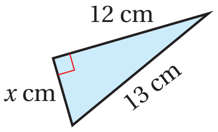
4



5



6



أحددُ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالُ أضلاعِهِ في كلِّ ممّا يأتي قائمَ الزاويةِ أَمْ لا:

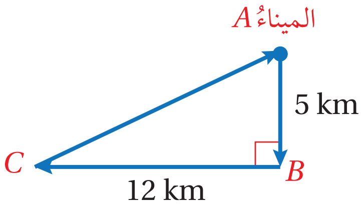
7 3, 4, 6

8 12, 35, 37

9 4, 8, 9

10 11, 60, 61

سُفُنٌ: أبحرَتْ سفينةٌ 5 km مِنَ الميناءِ A باتجاهِ الجنوبِ، ثُمَّ 12 km باتجاهِ الغربِ، ثُمَّ عادَتْ مباشرةً إلى الميناءِ كما في الشكلِ المجاورِ:



11 أجدُ المسافةَ الّتي قطعَتْها السفينةُ.

12 أجدُ المسافةَ الّتي تختصرُها السفينةُ لَوْ أبحرَتْ مباشرةً مِنَ النقطةِ A إلى النقطةِ C ذهابًا وإيابًا.

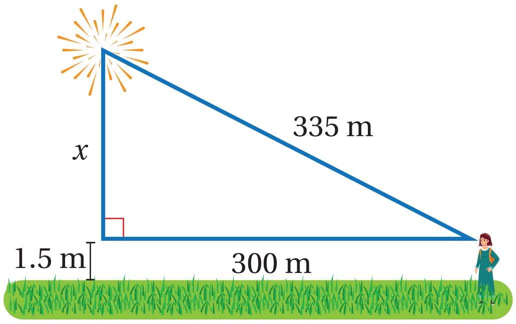
أتذكّر

أفرضُ أنَّ الضلعَ الأطولَ هُوَ c عندَ التعويضِ في القاعدةِ $c^2 = a^2 + b^2$

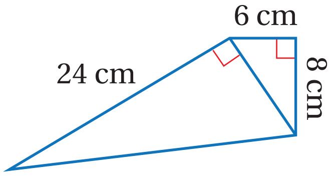
13 **ألعابٌ ناريّةٌ:** رصدَتْ بثينةُ عرضًا للألعابِ الناريةِ على بُعدِ 335 m مثلَما يظهرُ في الشكلِ الآتي. أجدُ ارتفاعَ الألعابِ الناريةِ عَنْ سطحِ الأرضِ.

إرشادٌ

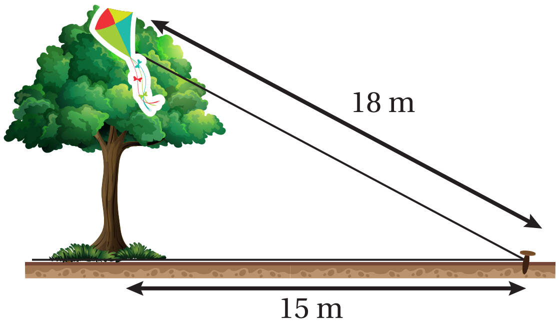
عندَ إيجادِ ارتفاعِ الألعابِ الناريةِ عَنْ سطحِ الأرضِ آخذُ في الحسبانِ طولَ المُشاهِدِ للألعابِ الناريةِ.



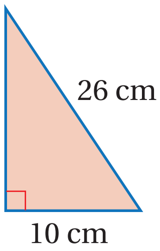
14 أجدُ محيطَ الشكلِ المجاورِ.



15 علقَتْ طائرةُ عبدِ اللهِ الورقيةُ أعلى شجرةٍ، فربطَ الخيطَ في وتدٍ على الأرضِ يبعدُ 15 m عَنْ قاعدةِ الشجرةِ مثلَما يظهرُ في الشكلِ الآتي. إذا كانَ طولُ خيطِ الطائرةِ 18 m فأجدُ ارتفاعَ الشجرةِ.



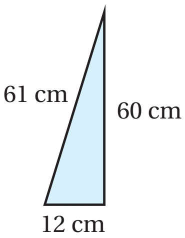
16 أجدُ مساحةَ المثلثِ المجاورِ.

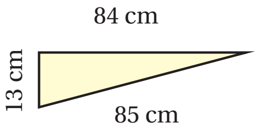


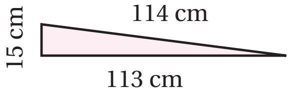
17 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

18 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المثلثاتِ الآتيةِ مختلفٌ؟ أبرّرُ إجابتي:





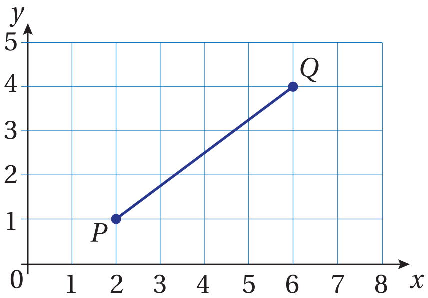


19 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** ثلاثيّاتُ فيثاغورس هِيَ مجموعاتٌ مِنْ ثلاثةِ أعدادٍ موجبةٍ a وَ b وَ c تحققُ نظريةَ فيثاغورس؛ أيْ تشكّلُ أطوالًا لمثلثٍ قائمِ الزاويةِ. مثلًا: 3 وَ 4 وَ 5 . أجدُ مجموعتَينِ مِنْ ثلاثياتِ فيثاغورس.

أفكّرُ

هَلْ يمكنُ استعمالُ التشابهِ فـي إيجـادِ مجموعـاتٍ أُخـرى مِـنْ ثلاثيـاتِ فيثاغورس؟

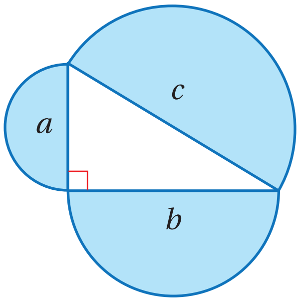
20 **تحدٍّ:** في الشكلِ الآتي، أجدُ طولَ $\overline{PQ}$ مِنْ دونِ استعمالِ المسطرةِ.



21 **تبريرٌ:** أقارنُ بَيْنَ مساحةِ نصفِ الدائرةِ الكبيرةِ ومساحةِ نصفَي الدائرتَينِ الصغيرتَينِ، مبررًا إجابتي.

أتذكّرُ

مساحةُ الدائرةِ $A = \pi r^2$



22 **أكتبُ** كيفَ أجدُ طولَ ضلعٍ مجهولًا في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ باستخدامِ نظريةِ فيثاغورس؟

الدرسُ 4 الأعدادُ الحقيقيةُ

فكرةُ الدرسِ

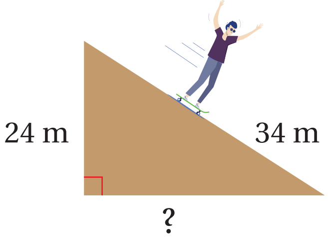
أميّزُ الأعدادَ النسبيةَ والأعدادَ غيرَ النسبيةِ.

المصطلحاتُ

العددُ غيرُ النسبيِّ، العددُ الحقيقيُّ

أستكشفُ

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ منظرًا جانبيًّا لمنحدَرِ تزحلقٍ في مدينةٍ للألعابِ:



① أجدُ طولَ قاعدةِ المنحدَرِ.

② هَلِ العددُ الّذي يمثّلُ طولَ قاعدةِ المنحدَرِ عددٌ نسبيٌّ؟ أبرّرُ إجابتي.

تعلمْتُ سابقًا أَنَّ العددَ النسبيَّ عددٌ يمكنُ كتابتُهُ على صورةِ $\frac{a}{b}$ حيثُ a وَ b عددانِ صحيحانِ، $b \neq 0$، وأنَّ الأعدادَ النسبيةَ جميعَها عندَ كتابتِها بالصورةِ العشريةِ تكونُ إمّا منتهيةً أَوْ دوريةً، وَمِنْ أمثلتِها الجذورُ التربيعيةُ للمربعاتِ الكاملةِ.

ولكنَّ الجذورَ الصّمّاءَ مثلَ $\sqrt{3}$ لا يمكنُ تصنيفُها أعدادًا نسبيةً؛ لأنّهُ لا يمكنُ كتابتُها على صورةِ كسرٍ عشريٍّ مُنْتَهٍ أَوْ دوريٍّ.

وعندَ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ قيمةِ $\sqrt{3}$ تعطي الآلةُ الحاسبةُ القيمةَ الآتيةَ:

$$\sqrt{3} = 1.73205080 \ldots \ldots$$

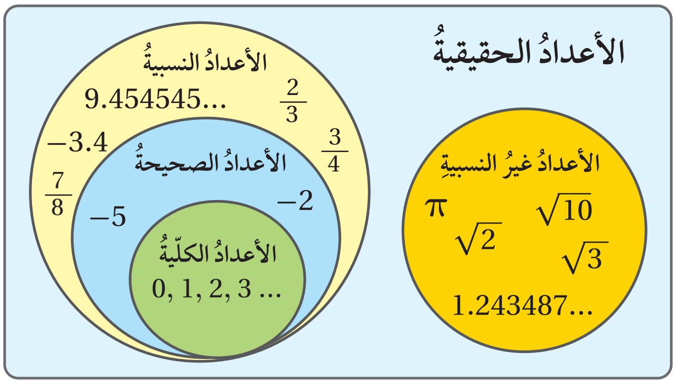
وهذا يعني أَنَّهُ غيرُ مُنْتَهٍ وغيرُ دوريٍّ، ويُسمّى هذا النوعُ مِنَ الأعدادِ **الأعدادَ غيرَ النسبيةِ** (irrational numbers).

مفهومٌ أساسيٌّ — الأعدادُ غيرُ النسبيةِ

- **بالكلماتِ:** العددُ غيرُ النسبيِّ عددٌ لا يمكنُ كتابتُهُ على صورةِ $\frac{a}{b}$ حيثُ a وَ b عددانِ صحيحانِ، $b \neq 0$
- **أمثلةٌ:** $\sqrt{5} = 2.236067978 \ldots \ldots$

$$\pi = 3.141592654 \ldots \ldots$$

تُشكّلُ الأعدادُ النسبيةُ والأعدادُ غيرُ النسبيةِ معًا **الأعدادَ الحقيقيةَ** (real numbers)، ويوضحُ شكلُ (فن) المجاورُ العلاقةَ بَيْنَها.



مثال 1 أصنّفُ الأعدادَ الحقيقيةَ الآتيةَ أعدادًا نسبيةً أَوْ أعدادًا غيرَ نسبيةٍ:

① $\frac{7}{21}$

بما أنَّ 7 وَ 21 عددانِ صحيحانِ، إذنْ $\frac{7}{21}$ عددٌ نسبيٌّ.

② $\sqrt{81}$

بما أنَّ $\sqrt{81} = 9$، و9 عددٌ كلّيٌّ، إذنْ $\sqrt{81}$ عددٌ نسبيٌّ.

③ $-\frac{27}{9}$

بما أنَّ $-\frac{27}{9} = -3$، وَ -3 عددٌ صحيحٌ، إذنْ $-\frac{27}{9}$ عددٌ نسبيٌّ.

④ **0.55555… …**

بما أنَّ … … 0.55555 كسرٌ عشريٌّ دوريٌّ وغيرُ مُنْتَهٍ، إذنْ هُوَ عددٌ نسبيٌّ.

⑤ $\sqrt{19}$

بما أنَّ $\sqrt{19} = 4.35889894\ldots$، وَهُوَ كسرٌ عشريٌّ غيرُ دوريٍّ وغيرُ منتهٍ، إذنْ هُوَ عددٌ غيرُ نسبيٍّ.

أتحقّقُ من فهمي:

⑥ $\sqrt{12}$

⑦ $-\sqrt{64}$

⑧ **0.181818 ...**

⑨ $-3\frac{2}{5}$

تعلمْتُ سابقًا تمثيلَ الأعدادِ النسبيةِ على خطِّ الأعدادِ، ويمكنُني أيضًا تمثيلُ بعضِ الأعدادِ غيرِ النسبيةِ على خطِّ الأعدادِ باستعمالِ المثلثِ القائمِ الزاويةِ.

مثال 2 أمثّلُ $\sqrt{53}$ على خطِّ الأعدادِ.

الْخُطْوَةُ 1 أبحثُ عَنْ عددَيْنِ مجموعُ مربعَيهِما 53

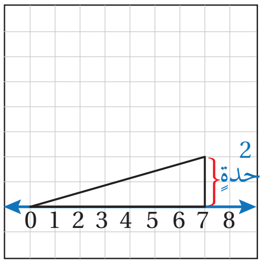
$$53 = 49 + 4$$

$$53 = 7^2 + 2^2$$

إذنْ، طولُ أحدِ ساقَيِ المثلثِ 7 وَحداتٍ وطولُ الآخَرِ 2 وَحدةٍ.

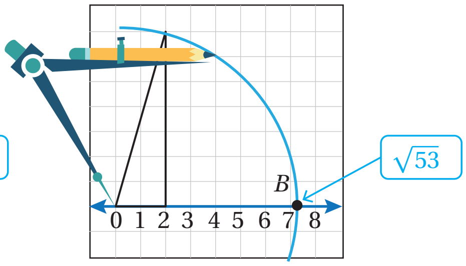
الْخُطْوَةُ 2 أرسمُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ.

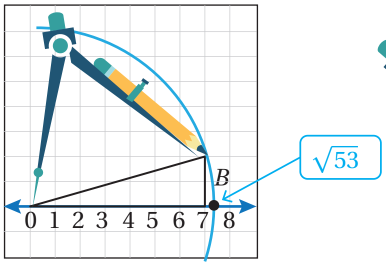
- أرسمُ خطَّ أعدادٍ على ورقةِ مربعاتٍ.
- أرسمُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ طولا ضلعَي القائمةِ فيهِ 7 وَحداتٍ وَ 2 وَحدةٍ. يمكنُ رسمُ المثلثِ بطريقتَينِ مثلَما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.



الْخُطْوَةُ 3 أعيّنُ $\sqrt{53}$ على خطِّ الأعدادِ.

- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مقدارُها طولُ وَترِ المثلثِ.
- أضعُ رأسَ الفرجارِ على 0، وأرسمُ قوسًا يقطعُ خطَّ الأعدادِ في النقطةِ B.





أتحققُ مِنْ صحةِ التمثيلِ:

ألاحظُ مِنَ التمثيلِ أنَّ $\sqrt{53} \approx 7.3$، وَهُوَ يتوافقُ مَعَ قيمةِ $\sqrt{53}$ عَلى الآلةِ الحاسبةِ وَهِيَ:

$$\sqrt{53} \approx 7.280109889$$

أتحققُ من فهمي:

أمثّلُ كلَّ عددٍ غيرِ نسبيٍّ ممّا يأتي على خطِّ الأعدادِ:

① $\sqrt{45}$

② $\sqrt{20}$

③ $\sqrt{5}$

يمكنُني المقارنةُ بَيْنَ عددَينِ حقيقيَّينِ بتحويلِهما إلى الصورة العشريةِ أولًا؛ لتسهيلِ المقارنةِ بينَهما. ويمكنُني استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ في ذلكَ.

مثال 3

أضعُ إشارةَ > أوْ < أوْ = في ☐ لأكوّنَ عبارةً صحيحةً في كلٍّ ممّا يأتي:

① $4\sqrt{3}$ ☐ $\frac{13}{2}$

الْخُطْوَةُ 1 أحوّلُ العددَينِ إلى الصورة العشرية.

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ

$4\sqrt{3} \approx 6.928203\ldots\ \ldots$

$\frac{13}{2} = 6.5$

الْخُطْوَةُ 2 أقارنُ بَيْنَ العددَينِ.

بما أنَّ $6.928203\ldots\ \ldots > 6.5$

إذنْ $4\sqrt{3} > \frac{13}{2}$

② $-\frac{1}{2}$ ☐ $-\sqrt{2}$

الْخُطْوَةُ 1 أحوّلُ العددَينِ إلى الصورة العشرية.

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ

$-\frac{1}{2} = -0.5$

$-\sqrt{2} \approx -1.4142\ldots$

الْخُطْوَةُ 2 أقارنُ بَيْنَ العددَينِ.

بما أنَّ $-0.5 > -1.4142\ldots$

إذنْ $-\frac{1}{2} > -\sqrt{2}$

③ $\frac{5}{2}$ ☐ $\sqrt{6.25}$

الْخُطْوَةُ 1 أحوّلُ العددَينِ إلى الصيغةِ العشريةِ.

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ

$\frac{5}{2} = 2.5$

$\sqrt{6.25} = 2.5$

الْخُطْوَةُ 2 أقارنُ بَيْنَ العددَينِ.

بما أنَّ $2.5 = 2.5$

إذنْ $\frac{5}{2} = \sqrt{6.25}$

✓ أتحققُ من فهمي:

④ $\sqrt{0.5}$ ☐ 0.9

⑤ $-\sqrt{16}$ ☐ $-\sqrt{18}$

⑥ 4.5 ☐ $\sqrt{20.25}$

يمكنُ ترتيبُ مجموعةٍ مِنَ الأعدادِ الحقيقيةِ تصاعديًا (مِنَ الأصغرِ إلى الأكبرِ) أوْ تنازليًّا (مِنَ الأكبرِ إلى الأصغرِ)، وذلك بتحويلِ كلٍّ مِنْها إلى الصورة العشريةِ أولًا؛ لتسهيلِ المقارنةِ بينَها وترتيبِها.

مثال 4

أرتّبُ الأعدادَ في كلٍّ ممّا يأتي تصاعديًّا:

① $\frac{11}{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{10}, -1.\overline{7}$

الْخُطْوَةُ 1 أحوّلُ الأعدادَ إلى الصورة العشريةِ.

أحوّلُ الأعدادَ إلى الصيغةِ العشريةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

$$\frac{11}{3} = 3.6666666\ldots\ \ldots$$
$$-\sqrt{3} = -\ 1.73205\ldots\ \ldots$$
$$\sqrt{10} = 3.1622\ldots.$$
$$-1.\overline{7} = -1.77777\ldots\ \ldots.$$

أتعلمُ

يســهّلُ تحويلُ الأعدادِ إلى الصيغةِ العشريةِ المقارنةَ بَيْنَ الأعدادِ القريبةِ مِنْ بعضِها، مثلِ $-\sqrt{3}$ و $-1.\overline{7}$

الْخُطْوَةُ 2 أقارنُ بَيْنَ الأعدادِ، ثُمَّ أرتّبُها تصاعديًّا.

الترتيبُ التصاعديُّ للأعدادِ هُوَ:

$$-1.\overline{7}\quad , \quad -\sqrt{3}\quad , \quad \sqrt{10}\quad , \quad \frac{11}{3}$$

أتحققُ من فهمي:

② $\frac{5}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6}, -1.4$

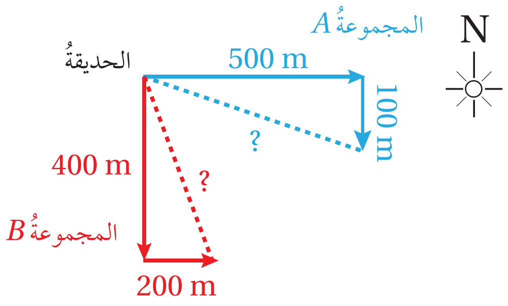
③ $-\sqrt{5}, \frac{9}{5}, -2, \sqrt{3}$

يوجدُ كثيرٌ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ للأعدادِ الحقيقيةِ.

مثال 5: مِنَ الحياةِ

كشــافةٌ: وقفَــتِ المجموعتــانِ A وَ B مِــنْ طلبــةِ الكشــافةِ فــي حديقــةِ الشــاطئِ الجنوبــيِّ فــي العقبــةِ، ثُــمَّ بــدأَتِ المجموعتــانِ الســيرَ فــي اللحظــةِ نفسِــها، فســارَتِ المجموعــةُ A باتجــاهِ الشــرقِ 500 m ثُــمَّ 100 m باتجــاهِ الجنــوبِ. وســارَتِ المجموعــةُ B مســافةَ 400 m باتجــاهِ الجنــوبِ ثُــمَّ 200 m باتجــاهِ الشــرقِ. أيُّ المجموعتَيــنِ هِــيَ الأقــربُ إلــى حديقــةِ الشــاطئِ الجنوبــيِّ؟

الْخُطْوَةُ 1 أرسمُ شكلًا تقريبيًّا يمثلُ المسألةَ، وأحددُ المطلوبَ.



- أعتمدُ الاتجاهاتِ والمسافاتِ الموجودةَ في المسألةِ لرسمِ شكلٍ تقريبيٍّ يمثلُ المعطَياتِ.
- ألاحظُ أنَّ مسارَيِ المجموعتَينِ يصنعانِ مثلثَينِ قائمَيِ الزاويةِ.
- لإيجادِ أيِّ المجموعتَينِ هِيَ الأقربُ إلى حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ، أجدُ طولَ وترِ كلِّ مثلثٍ، ثُمَّ أقارنُ بَيْنَ الطولَينِ.

الْخُطْوَةُ 2 أستعملُ نظريةَ فيثاغورس.

- أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لأجدَ بُعدَ المجموعةِ A عَنْ حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ:

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $a = 500, b = 100$	$c^2 = 500^2 + 100^2$
أجدُ القوى	$c^2 = 250000 + 10000$
أجمعُ	$c^2 = 260000$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$c = \pm\sqrt{260000}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$\approx \pm 509.9$

إذنْ، بُعدُ المجموعةِ A عَنْ حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ 509.9 m تقريبًا.

- أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لأجدَ بُعدَ المجموعةِ B عَنْ حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ:

نظريةُ فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
أعوضُ $a = 400, b = 200$	$c^2 = 400^2 + 200^2$
أجدُ القوى	$c^2 = 160000 + 40000$
أجمعُ	$c^2 = 200000$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$c = \pm\sqrt{200000}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$\approx \pm 447.2$

إذنْ، بُعدُ المجموعةِ B عَنْ حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ 447.2 m تقريبًا.

الْخُطْوَةُ 3 أقارنُ بَيْنَ المسافتَينِ.

ألاحظُ أنَّ المجموعةَ B أقربُ إلى حديقةِ الشاطئِ الجنوبيِّ مِنَ المجموعةِ A.

أتحققُ من فهمي:

جسمُ الإنسانِ: تمثّلُ المعادلةُ $S=\sqrt{\frac{h\times m}{3600}}$ مساحةَ سطحِ جسمِ الإنسانِ S بالأمتارِ المربعةِ حيثُ h الطولُ بالسنتيمتراتِ وَ m الكتلةُ بالكيلوغراماتِ. أجدُ مساحةَ سطحِ جسمِ شابٍّ طولُهُ 180 cm وكتلتُهُ 75 kg. أقرّبُ الإجابةَ لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

أتدرب وأحل المسائل

أميزُ العددَ النسبيَّ مِنْ غيرِ النسبيِّ في ما يأتي:

1 $-\frac{2}{3}$

2 $\sqrt{20}$

3 $5.\overline{2}$

4 $\frac{18}{6}$

أمثّلُ كلَّ عددٍ غيرِ نسبيٍّ ممّا يأتي على خطِّ الأعدادِ:

5 $\sqrt{10}$

6 $\sqrt{97}$

7 $\sqrt{104}$

أضعُ إشارةَ $>$ أَوْ $<$ أَوْ $=$ في ☐ لأكوّنَ عبارةً صحيحةً في كلٍّ ممّا يأتي:

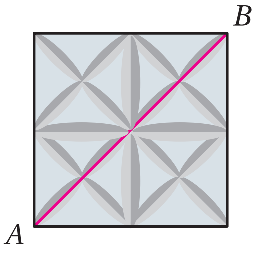
8 $\sqrt{15}$ ☐ 3.9

9 -3.1 ☐ $-\sqrt{9.61}$

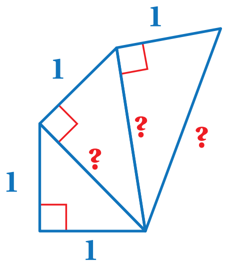
10 $\sqrt{36}$ ☐ $\frac{20}{3}$

11 أرتبُ مجموعةَ الأعدادِ $5.\overline{6}$, $\frac{21}{4}$, 4 , $\sqrt{30}$ تنازليًّا.

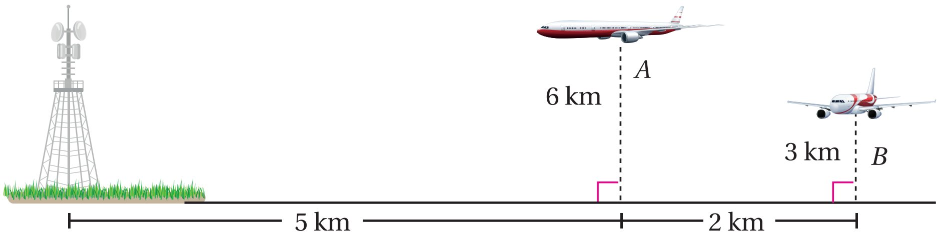
12 **بلاطٌ:** يبيّنُ الشكلُ المجاورُ بلاطةً مِنَ السيراميكِ مربعةَ الشكلِ طولُ ضلعِها 15 cm، أجدُ طولَ قُطرِ البلاطةِ، ثُمَّ أحددُ ما إذا كانَ العددُ نسبيًّا أَمْ غيرَ نسبيٍّ.



13 أجدُ أطوالَ الأضلاعِ المجهولةَ في الشكلِ المجاورِ.



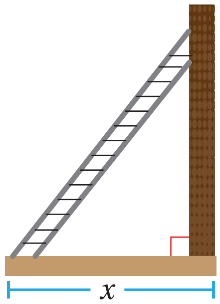
14 أيُّ الطائرتَينِ في الشكلِ الآتي أقربُ إلى قاعدةِ البرجِ؟



إرشاد

أستعملُ نظريةَ فيثاغورس في الحلِّ.

15 **إجراءاتُ السلامةِ:** لأضعَ السّلّمَ المستندَ إلى حائطٍ في وضعٍ آمنٍ، يجبُ أنْ يكونَ طولُهُ $0.3\sqrt{17x^2}$ حيثُ x بُعدُ قاعدةِ السّلّمِ عَنِ الحائطِ بالمترِ. إذا كانَتْ قاعدةُ السّلمِ تبعدُ عَنِ الحائطِ 1.5 m، فَهَلْ طولُ السّلّمِ عددٌ نسبيٌّ أَمْ غيرُ نسبيٍّ؟



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

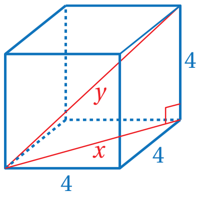
تبريرٌ: أبيّنُ ما إذا كانَتْ كلُّ عبارةٍ ممّا يأتي صحيحةً أَمْ غيرَ صحيحةٍ، مدعّمًا إجابتي بأمثلةٍ مناسبةٍ:

16 الجذورُ التربيعيةُ للأعدادِ الموجبةِ أعدادٌ غيرُ نسبيةٍ.

17 العددُ الحقيقيُّ عددٌ نسبيٌّ.

18 الأعدادُ العشريةُ المنتهيةُ أعدادٌ نسبيةٌ.

19 **تحدٍّ:** أجدُ طولَي الضلعَينِ المجهولَينِ في الشكلِ المجاورِ بأبسطِ صورةٍ.



إرشادٌ

أستعملُ الحقيقةَ (تلتقي أحرفُ المكعبِ في زوايا قائمةٍ).

20 **أكتشفُ الخطأَ:** تقولُ سماحُ: إنَّ $\sqrt{5}$ عددٌ نسبيٌّ؛ لأنّهُ يمكنُ كتابتُهُ على الصورةِ $\frac{\sqrt{5}}{1}$. هل ما تقولُهُ سماحُ صحيحٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أعطي مثالًا على عددَينِ نسبيَّينِ يقعُ بينَهُما عددانِ غيرُ نسبيَّينِ.

22 **أكتبُ** كيفَ أميّزُ الأعدادَ النسبيةَ مِنْ غيرِ النسبيةِ؟

الدرسُ 5 الأُسُسُ النسبيةُ والجذورُ

فكرةُ الدرسِ

أربطُ بَيْنَ الأسسِ النسبيةِ والجذورِ، وأحوّلُ بينَهُما.

المصطلحاتُ

الأُسُّ النسبيُّ، الجذرُ النونيُّ، دليلُ الجذرِ.

أستكشفُ

تمثلُ المعادلةُ $h = 0.4x^{\frac{1}{3}}$ العلاقةَ بَيْنَ ارتفاعِ الزرافةِ (h) بالأمتارِ وكتلتِها x بالكيلوغراماتِ. أجدُ ارتفاعَ زرافةٍ كتلتُها 343 kg

تعلمْتُ سابقًا الأُسُسَ الصحيحةَ وقوانينَها، وسأتعلمُ في هذا الدرسِ نوعًا آخرَ مِنَ الأُسُسِ تُكتبُ على صورةِ كسورٍ تُسمّى **الأُسُسَ النسبيةَ** (rational exponent).

معلومٌ أنَّ تربيعَ عددٍ موجبٍ وإيجادَ الجذرِ التربيعيِّ لمربعِهِ عمليتانِ عكسيتانِ، فمثلًا:

$$\sqrt{9} = 3 \longleftrightarrow 3^2 = 9$$

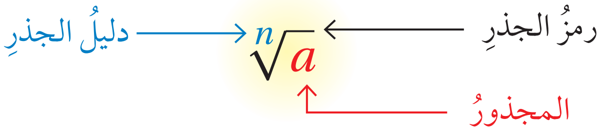
ومنهُ، فإنَّ العمليةَ العكسيةَ لرفعِ عددٍ للأُسِّ n هِيَ إيجادُ **جذرِهِ النونيِّ** (nth root)، ويمكنُ التعبيرُ عَنْ أَيِّ جذرٍ نونيٍّ باستعمالِ الأُسُسِ النسبيةِ، فمثلًا يمكنُنا كتابةُ $\sqrt{9}$ بطريقةٍ أُخرى باستعمالِ الأُسُسِ النسبيةِ هِيَ: $9^{\frac{1}{2}}$ حيثُ:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

وبشكلٍ عامٍّ، فإنَّ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ لأيِّ عددٍ صحيحٍ n أكبرُ مِنْ 1، حيثُ يُسمّى العددُ n الموجودُ على انحناءِ الجذرِ **دليلَ الجذرِ** (index) وَهُوَ يدلُّ على درجةِ الجذرِ.

أتعلمُ

إذا لَمْ يكنْ هنـاكَ دليلٌ للجذرِ فهـذا يعني أنَّ دليـلَ الجذرِ 2، وَهُوَ يدلُّ على الجذرِ التربيعيِّ.



مفهومٌ أساسيٌّ

الأُسُسُ النسبيةُ: $a^{\frac{1}{n}}$

- **بالكلماتِ:** لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، وأيِّ عددٍ صحيحٍ n $(n>1)$، فإنَّ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$، إلّا إذا كانَ $a<0$ وَ n عددًا زوجيًّا فإنَّ الجذرَ النونيَّ غيرُ معرَّفٍ.
- **أمثلةٌ:** $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ ، $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$

مثال 1

أكتبُ الصورةَ الأُسّيةَ في صورةٍ جذريةٍ والصورةَ الجذريةَ في صورةٍ أُسّيةٍ في كلٍّ ممّا يأتي:

① $y^{\frac{1}{4}}$

$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$ تعريفُ $a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[6]{w}$

$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$ تعريفُ $a^{\frac{1}{n}}$

③ $8^{\frac{1}{5}}$

$8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$ تعريفُ $a^{\frac{1}{n}}$

④ $\sqrt[7]{-20}$

$\sqrt[7]{-20} = (-20)^{\frac{1}{7}}$ تعريفُ $a^{\frac{1}{n}}$

أتحقّقُ من فهمي:

⑤ $c^{\frac{1}{8}}$

⑥ $\sqrt[9]{x}$

⑦ $25^{\frac{1}{10}}$

⑧ $\sqrt[3]{-12}$

بشكلٍ عامٍّ، إذا كانَ $a^{\frac{1}{n}} = b$، فإنَّ ذلكَ يعني أنَّ العاملَ b ضُرِبَ في نفسِهِ n مِنَ المراتِ فكانَ الناتجُ a، ويمكنُ استعمالُ هذا المفهومِ لإيجادِ قِيَمِ عباراتٍ عدديةٍ أُسّيةٍ مِنْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثال 2

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي مِنْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

① $196^{\frac{1}{2}}$

$196^{\frac{1}{2}} = \sqrt{196}$ تعريفُ $a^{\frac{1}{n}}$

$= \sqrt{14 \times 14}$ أعيدُ كتابةَ 196 كحاصلِ ضربِ عاملٍ في نفسِهِ

$= 14$ أجدُ الجذرَ التربيعيَّ للعددِ

② $(-64)^{\frac{1}{3}}$

$(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64}$ تعريفُ $a^{\frac{1}{n}}$

$= \sqrt[3]{-4 \times -4 \times -4}$ أعيدُ كتابةَ 64− كحاصلِ ضربِ عاملٍ في نفسِهِ 3 مراتٍ

$= -4$ أجدُ الجذرَ الثالثَ للعددِ

③ $729^{\frac{1}{6}}$

$729^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{729}$ تعريفُ $a^{\frac{1}{n}}$

$= \sqrt[6]{3\times3\times3\times3\times3\times3}$ أعيدُ كتابةَ 729 كحاصلِ ضربِ عاملٍ في نفسِهِ 6 مراتٍ

$= 3$ أجدُ الجذرَ السادسَ للعددِ

أتحقّقُ من فهمي:

④ $225^{\frac{1}{2}}$

⑤ $(-243)^{\frac{1}{5}}$

⑥ $128^{\frac{1}{7}}$

يمكنُ تعميمُ العلاقةِ بَيْنَ الأُسُسِ النسبيةِ والجذورِ كما يأتي:

مفهومٌ أساسيٌّ

الأسسُ النسبيةُ: $a^{\frac{m}{n}}$

- **بالكلماتِ:** لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a لا يساوي صفرًا، وأيِّ عددَيْنِ صحيحَيْنِ n, m وَ$(n>1)$ فإنَّ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$. إلّا إذا كانَ $a < 0$ وَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ الجذرَ النونيَّ يكونُ قيمةً غيرَ معرّفةٍ.
- **مثالٌ:** $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$

مثالُ 3

أكتبُ الصورةَ الأُسّيةَ في صورةٍ جذريةٍ والصورةَ الجذريةَ في صورةٍ أُسّيةٍ في كلٍّ ممّا يأتي:

① $x^{\frac{3}{4}}$

$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ تعريفُ $a^{\frac{m}{n}}$

② $\sqrt[5]{b^2}$

$\sqrt[5]{b^2} = b^{\frac{2}{5}}$ تعريفُ $a^{\frac{m}{n}}$

③ $30^{\frac{5}{6}}$

$30^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{30^5}$ تعريفُ $a^{\frac{m}{n}}$

④ $\sqrt[7]{(-50)^2}$

$\sqrt[7]{(-50)^2} = (-50)^{\frac{2}{7}}$ تعريفُ $a^{\frac{m}{n}}$

أتحقّقُ من فهمي:

⑤ $d^{\frac{5}{2}}$

⑥ $\sqrt[4]{b^7}$

⑦ $18^{\frac{9}{5}}$

⑧ $\sqrt[3]{(-16)^8}$

يمكنُ استعمالُ تعريفِ الأُسُسِ النسبيةِ في إيجادِ قِيَمِ عباراتٍ عدديةٍ أُسّيةٍ مِنْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثال 4

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي مِنْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

① $(-8)^{\frac{4}{3}}$

$(-8)^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^4$ تعريفُ $a^{\frac{m}{n}}$

$= (-2)^4$ $\sqrt[3]{(-8)} = \sqrt[3]{(-2\times-2\times-2)} = -2$

$= 16$ أبسطُ

② $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{5}{2}}$

$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^5$ تعريفُ $a^{\frac{m}{n}}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^5$ $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2\times2}{3\times3}} = \frac{2}{3}$

$= \frac{32}{243}$ أبسطُ

أتحققُ من فهمي:

③ $(32)^{\frac{3}{5}}$

④ $\left(-\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$

للأُسُسِ النسبيةِ تطبيقاتٌ كثيرةٌ في الحياةِ العمليةِ.

مثال 5: منَ الحياةِ

أحياءٌ: تمثلُ العلاقةُ $h = 62.5\sqrt[3]{t} + 75.8$ ارتفاعَ كَتفِ ذكرِ الفيلِ الآسيويِّ h بالسنتيمتراتِ، حيثُ t عُمُرُ الفيلِ بالسنواتِ. أجدُ ارتفاعَ كتفِ فيلٍ عُمُرُهُ 27 سنةً بالأمتارِ.

بما أنَّ العلاقةَ تعطي ارتفاعَ كَتفِ الفيلِ بالسنتيمتراتِ، إذنْ، أجدُ أولًا ارتفاعَ الكَتفِ بالسنتيمتراتِ، ثُمَّ أحولُهُ إلى الأمتارِ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ ارتفاعَ كَتفِ الفيلِ بالسنتيمتراتِ.

العلاقةُ الأصليةُ $h = 62.5\sqrt[3]{t} + 75.8$

أعوضُ $t = 27$ $= 62.5\sqrt[3]{27} + 75.8$

$\sqrt[3]{27} = 3$ $= 62.5(3) + 75.8$

أبسطُ $= 263.3$

إذنْ، ارتفاعُ كَتفِ الفيلِ 263.3 cm

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ ارتفاعَ كَتفِ الفيلِ بالأمتارِ.

بما أنَّ كلَّ 1 m يساوي 100 cm، إذنْ، ارتفاعُ كَتفِ الفيلِ بالأمتارِ 2.633 m

أتحققُ من فهمي:

تكنولوجيا: **تصنّعُ شركةٌ شرائحَ ذاكرةٍ صغيرةً لوَحداتِ تخزينِ البياناتِ المتنقلةِ (USB)، إذا استُعملَتِ الصيغةُ $c = 84(n)^{\frac{2}{3}} + 910$ لحسابِ التكلفةِ c بالدينارِ لإنتاجِ n شريحةً، فأجدُ تكلفةَ إنتاجِ 125 شريحةَ ذاكرةٍ.**

أتدرب وأحل المسائل

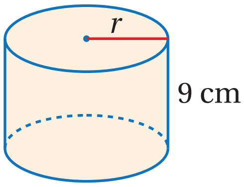
أكتبُ الصورةَ الأُسّيةَ في صورةٍ جذريةٍ والصورةَ الجذريةَ في صورةٍ أُسّيةٍ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $p^{\frac{1}{6}}$
2) $\sqrt[8]{u}$
3) $9^{\frac{1}{4}}$
4) $\sqrt[5]{-8}$
5) $w^{\frac{8}{3}}$
6) $\sqrt[6]{v^5}$
7) $16^{\frac{3}{4}}$
8) $\sqrt[5]{(-35)^9}$

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي مِنْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

9) $32^{\frac{1}{5}}$
10) $256^{\frac{1}{4}}$
11) $(-125)^{\frac{1}{3}}$
12) $4096^{\frac{1}{6}}$
13) $(16)^{\frac{3}{4}}$
14) $\left(-\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}$
15) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{5}{2}}$
16) $\left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{5}{3}}$

17 **هندسةٌ:** أجدُ طولَ نصفِ قطرِ قاعدةِ الأسطوانةِ المجاورةِ إذا كانَ حجمُها يساوي $1332\pi\ cm^3$



أتذكّرُ

يُستعمَلُ القانونُ $V = \pi r^2 h$ لحسابِ حجمِ الأسطوانةِ، حيثُ h ارتفاعُ الأسطوانةِ، وَ r طولُ نصفِ قطرِها.

18 يمكنُ تقديرُ معدّلِ الطاقةِ الّتي تستهلكُها المخلوقاتُ الحيةُ اعتمادًا على كتلةِ الجسمِ باستعمالِ المعادلةِ $R = 73.3\sqrt[4]{M^3}$ الّتي تمثلُ العلاقةَ بَيْنَ معدّلِ الطاقةِ المستهلكةِ يوميًّا R بوَحدةِ السعراتِ الحراريةِ وكتلةِ الجسمِ M بالكيلوغراماتِ. أجدُ معدّلَ الطاقةِ الّتي يستهلكُها يوميًّا خروفٌ كتلتُهُ 16 kg

19 تُصنَّعُ المساميرُ القياسيةُ الّتي يتوافقُ طولُها مَعَ طولِ نصفِ قطرِها لتتحملَ الطَّرْقَ وفقَ المعادلةِ $l = 54d^{\frac{3}{2}}$ الّتي تربطُ بَيْنَ طولِ مسمارٍ قياسيٍّ l بالإنشاتِ وطولِ نصفِ قطرِهِ d بالإنشاتِ أيضًا. أجدُ طولَ مسمارٍ قياسيٍّ طولُ نصفِ قطرِهِ 0.09 in

20 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

21 **أكتشفُ الخطأَ:** أبيّنُ الخطأَ في الحلِّ الآتي، وأصحّحُهُ.

✗

$$\begin{aligned} 27^{\frac{2}{3}} &= \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 \\ &= 9^2 \\ &= 81 \end{aligned}$$

22 **تبريرٌ:** أجدُ قيمةَ $\sqrt{4} - \sqrt{4^3}$ بأبسطِ صورةٍ، مبررًا إجابتي.

23 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجدُ عبارتَينِ مختلفتَينِ على صورةِ $x^{\frac{1}{n}}$ بحيثُ تكونُ أبسطُ صورةٍ لَهُما $2x^3$

24 **أكتبُ** كيفَ أحوّلُ بَيْنَ الأُسُسِ النسبيةِ والجذورِ؟

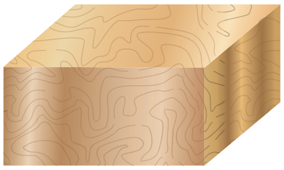
الدرسُ 6 ضربُ الأُسُسِ النسبيةِ وقسمتُها

فكرةُ الدرسِ

استعمالُ ضربِ الأُسُسِ النسبيةِ وقسمتِها في إيجادِ قِيَمِ مقاديرَ تحتوي أُسسًا نسبيةً وتبسيطِها.

أستكشفُ

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ صُندوقًا خشبيًّا مصمتًا على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ طولُهُ $x^{\frac{1}{2}}$ وحدةٍ، وعرضُهُ $x^{\frac{1}{3}}$ وحدةٍ، وارتفاعُهُ $x^{\frac{1}{4}}$ وحدةٍ، كيفَ أجدُ حجمَ الصُّندوقِ بدلالةِ المتغيرِ x؟



تعلمْتُ سابقًا مجموعةً مِنْ قوانينِ الأُسُسِ الصحيحةِ:

مراجعةُ المفهومِ **قوانينُ الأُسسِ الصحيحةِ**

إذا كانَ a وَ b عددَينِ حقيقيَّينِ وَ n وَ m عددَينِ صحيحَينِ، فإنَّ:

ضربُ القوى	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
قسمةُ القوى	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ ,\ a \neq 0$
قوّةُ القوّةِ	$(a^m)^n = a^{m \times n}$
قوةُ ناتجِ الضربِ	$(ab)^n = a^n b^n$
قوةُ ناتجِ القسمةِ	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ ,\ b \neq 0$
الأُسُّ الصفريُّ	$a^0 = 1\ ,\ a \neq 0$
الأُسُسُ السالبةُ	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ ,\ a \neq 0$

يظهرُ في بعضِ الأحيانِ قانونُ قوةِ ناتجِ القسمةِ على الصورةِ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ الّذي يمكنُ كتابتُهُ باستعمالِ قوةٍ موجبةٍ على الصورةِ $\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

وبصورةٍ عامةٍ، لأيِّ عددَينِ a وَ b حيثُ $a, b \neq 0$ وَ n عددٌ صحيحٌ فإنَّ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

تنطبقُ جميعُ قوانينِ الأسسِ أعلاهُ على الأُسسِ النسبيةِ، ويمكنُ استعمالُها لإيجادِ قيمةِ مقدارٍ عدديٍّ يحوي أُسسًا نسبيةً.

مثال 1

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

① $64^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}}$

$64 = 2^6$	$64^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} = (2^6)^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}}$
قاعدةُ قوةِ القوةِ	$= 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}}$
قاعدةُ ضربِ القوى	$= 2^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}$
أجمعُ	$= 2^{\frac{10}{5}}$
أبسطُ	$= 2^{2} = 4$

② $\sqrt[3]{125 \times 5^6}$

تعريفُ الأسسِ النسبيةِ	$\sqrt[3]{125 \times 5^6} = (125 \times 5^6)^{\frac{1}{3}}$
$125 = 5^3$	$= (5^3 \times 5^6)^{\frac{1}{3}}$
قاعدةُ ضربِ القوى	$= (5^9)^{\frac{1}{3}}$
قاعدةُ قوةِ القوةِ	$= 5^3$
أبسطُ	$= 125$

أفكرُ

هَلْ يمكنُ حلُّ الفرعِ 2 مِنَ المثالِ بطريقةٍ أُخرى؟

③ $\dfrac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[4]{3}}$

تعريفُ الأسسِ النسبيةِ	$\dfrac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[4]{3}} = \dfrac{81^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}}$
$81 = 3^4$	$= \dfrac{(3^4)^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}}$
قاعدةُ قوةِ القوةِ	$= \dfrac{3^{\frac{4}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}}$
قاعدةُ قسمةِ القوى	$= \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} = (3)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$
أبسطُ	$= 3^{\frac{1}{4}}$
الصورةُ الجذريةُ	$= \sqrt[4]{3}$

أتذكرُ

يلزمُ توحيدُ المقاماتِ قبلَ طرحِ الأُسسِ النسبيةِ.

أتذكرُ

يمكنُ استعمالُ تعريفِ الأسسِ النسبيةِ لحلِّ المسألةِ 4 حيثُ:

$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

④ $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ قاعدةُ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

$= \frac{27^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{2}{3}}}$ قاعدةُ قوةِ ناتجِ القسمةِ

$= \frac{((3)^3)^{\frac{2}{3}}}{((2)^3)^{\frac{2}{3}}}$ $27 = 3^3 \ , 8 = 2^3$

$= \frac{3^2}{2^2}$ قاعدةُ قوةِ القوةِ

$= \frac{9}{4}$ أبسطُ

أتحققُ من فهمي:

⑤ $32^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}$

⑥ $\sqrt[4]{81 \times 2^4}$

⑦ $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{9}}$

⑧ $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}}$

تكونُ العبارةُ الأُسّيةُ في أبسطِ صورةٍ إذا كانَتِ **الأُسسُ النسبيةُ موجبةً وبأبسطِ صورةٍ في كلٍّ مِنَ البسطِ والمقامِ**، ولا يظهرُ الأساسُ الواحدُ أكثرَ مِنْ مرّةٍ، وللحصولِ على ذلكِ أستعملُ قوانينَ الأُسسِ عندَ تبسيطِ العباراتِ الأُسّيةِ النسبيةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ **العباراتُ الأسّيةُ في أبسطِ صورةٍ**

تكونُ العبارةُ الأُسّيةُ في أبسطِ صورةٍ إذا:

- ظهرَ كلُّ أساسٍ مرةً واحدةً وكانَتِ الأُسسُ جميعُها موجبةً.
- لَمْ تتضمنِ العبارةُ قوةَ القوى.
- كانَتِ الكسورُ والجذورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.
- كانَتِ الأسسُ في المقامِ صحيحةً موجبةً.

مثال 2

أبسطُ كلًّا مِنَ العباراتِ الأُسّيةِ الآتيةِ مفترضًا أنَّ أيًّا مِنَ المتغيراتِ لا يساوي صفرًا:

① $y^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}$

قاعدةُ ضربِ القوى	$y^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{5}{3}} = y^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}$
أجمعُ الأسسَ	$= y^{\frac{3}{3}}$
أبسطُ	$= y$

② $\dfrac{w^{\frac{7}{2}}}{w^{3}}$

قاعدةُ الأسسِ السالبةِ	$\dfrac{w^{\frac{7}{2}}}{w^{3}} = (w)^{\frac{7}{2}} \times w^{-3}$
قاعدةُ ضربِ القوى	$= (w)^{\frac{7}{2}-3}$
أبسطُ	$= w^{\frac{1}{2}}$

③ $(b^{\frac{3}{7}})^{7}$

قاعدةُ قوةِ القوةِ	$(b^{\frac{3}{7}})^{7} = b^{\frac{3}{7}\times 7}$
أبسطُ	$= b^{3}$

أتحقق من فهمي:

④ $y^{\frac{4}{5}} \times y^{-\frac{9}{5}}$

⑤ $\dfrac{u^{-\frac{7}{2}}}{u^{-4}}$

⑥ $(d^{-\frac{2}{3}})^{6}$

يمكنُ توظيفُ قوانينِ ضربِ الأُسسِ النسبيةِ وقسمتِها في مواقفَ حياتيةٍ متنوعةٍ.

مثال 3: منَ الحياةِ

يمكنُ حسابُ مساحةِ سطحِ جسمِ الحيواناتِ الثدييةِ بالصيغةِ $S = 9.75\, m^{\frac{2}{3}}$ حيثُ S مساحةُ السطحِ بالسنتيمترِ المربعِ، وَ m كتلةُ الحيوانِ بالغرامِ. أجدُ مساحةَ سطحِ جسمِ أرنبٍ كتلتُهُ 3.4×10^3 غرامًا، وأقرّبُ الإجابةَ لأقربِ عددٍ صحيحٍ.

لإيجادِ مساحةِ سطحِ جسمِ الأرنبِ أعوضُ كتلتَهُ في الصيغةِ:

الصيغةُ الأصليةُ	$S = 9.75\ \mathrm{m}^{\frac{2}{3}}$
أعوضُ $m = 3.4 \times 10^3$	$S = 9.75 \times (3.4 \times 10^3)^{\frac{2}{3}}$
قاعدةُ ضربِ القوى	$= 9.75 \times 3.4^{\frac{2}{3}} \times (10^3)^{\frac{2}{3}}$
قاعدةُ قوةِ القوةِ	$= 9.75 \times 3.4^{\frac{2}{3}} \times 10^2$

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ:

9.75×3.4 $\boxed{x^{\blacksquare}}$ $(2 \div 3) \times 10$ $\boxed{x^2}$ $= 2204.570003$

إذنْ، مساحةُ سطحِ جسمِ الأرنبِ $2205\ \mathrm{cm}^2$ تقريبًا.

أتحققُ من فهمي:

تمثلُ المعادلةُ $A = (4\pi)^{\frac{1}{3}} (3V)^{\frac{2}{3}}$ مساحةَ سطحِ كرةٍ بالوحداتِ المربعةِ تَمَّ تشكيلُها باستعمالِ مجموعةٍ مِنْ كراتٍ صغيرةٍ حجمُ الواحدةِ مِنْها V وحدةً مكعبةً. أجدُ مساحةَ السطحِ الخارجيِّ للكرةِ الكبيرةِ إذا كانَ حجمُ الكرةِ الصغيرةِ 9 وحداتٍ مكعبةٍ.

أتدرب وأحل المسائل

أتذكر

يمكنُ حلُّ المسائلِ مِنْ 1 إلى 6 بأكثرَ مِنْ طريقةٍ.

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $25^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$

2 $\sqrt[6]{64 \times 3^{12}}$

3 $\frac{9^{\frac{5}{2}}}{27^{\frac{2}{3}}}$

4 $\frac{\sqrt[3]{216}}{36^{-\frac{3}{2}}}$

5 $\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{3}{2}}$

6 $\left(\frac{2187}{128}\right)^{-\frac{5}{7}}$

أبسطُ كلًّا مِنَ العباراتِ الأُسّيةِ الآتيةِ مفترضًا أنَّ أيًّا مِنَ المتغيراتِ لا يساوي صفرًا:

7 $p^{-\frac{3}{4}} \times p^{\frac{11}{4}}$

8 $\frac{u^{-\frac{8}{3}}}{u^{-3}}$

9 $y^6(y^{\frac{3}{2}})^{-2}$

10 $\frac{1}{n^2} y^{-2} (n^{\frac{5}{3}})^6$

11 $\frac{w^2 \times w^{-\frac{9}{2}}}{w^{-3}}$

12 $d^{-\frac{1}{2}} \times d^{-\frac{3}{2}}$

13 **أعاصير:** يستعملُ العلماءُ المعادلةَ $s = \sqrt{9.8d}$ لتقديرِ سرعةِ موجِ البحرِ s بالمترِ لكلِّ ثانيةٍ في أثناءِ إعصارِ تسونامي، حيثُ d عمقُ الماءِ بالأمتارِ. أقدّرُ سرعةَ الموجةِ حينَ يكونُ عمقُ الماءِ 4000 m

معلومة

تسونامي هُوَ مجموعةٌ مِنَ الأمواجِ الكبيرةِ جدًّا تنتجُ مِنْ تحرُّكِ كمّيةٍ هائلةٍ مِنْ مياهِ المحيطاتِ بفعلِ الظواهرِ المفاجئةِ، مثلِ الزلازلِ.

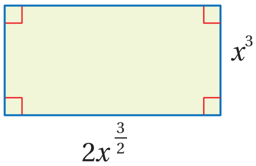
أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأجدُ:

14 حجمَ الصُّندوقِ بدلالةِ x.

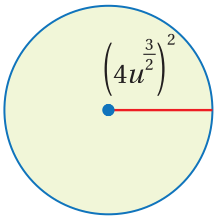
15 مساحةَ المساحةَ الكلّيّةَ لِسطحِ الصُّندوقِ إذا كانَتْ $x = 4096$

هندسةٌ: أجدُ مساحةَ كلِّ شكلٍ ممّا يأتي:

17



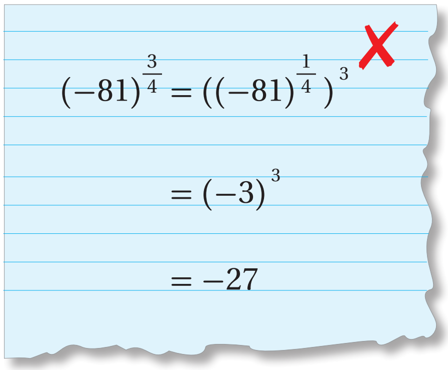
16



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

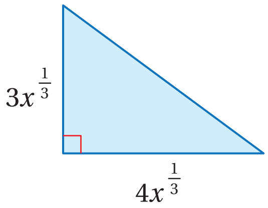
18 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ 4 مقاديرَ مكافئةٍ للمقدارِ $(x^{\frac{2}{3}})^3$

19 **أكتشفُ الخطأَ:** أبيّنُ الخطأَ في الحلِّ الآتي، وأصحّحُهُ:



$$(-81)^{\frac{3}{4}} = ((-81)^{\frac{1}{4}})^3$$
$$= (-3)^3$$
$$= -27$$

20 **تحدٍّ:** أجدُ محيطَ المثلثِ في الشكلِ الآتي.



أفكرُ

كيفَ أجدُ طولَ الضلعِ الثالثِ في المثلثِ لأجدَ المحيطَ؟

21 **أكتبُ** كيفَ أستعملُ قوانينَ الأُسسِ النسبيةِ في إيجادِ قِيَمِ مقاديرَ تحتوي أُسُسًا نسبيةً وتبسيطِها؟

الدرسُ 7 الصيغةُ العلميةُ

فكرةُ الدرسِ

أكتبُ الأعدادَ الكلّيّةَ والعشريةَ بالصيغةِ العلميةِ، وأُجري عمليتَي الضربِ والقسمةِ عَلَيْها.

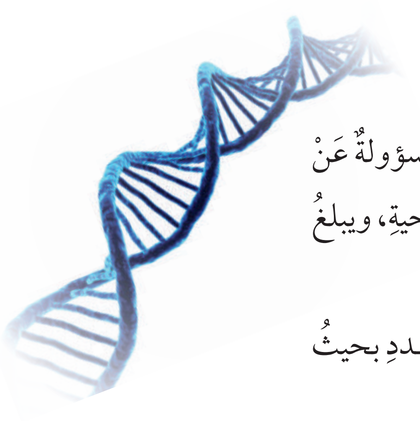
المصطلحاتُ

الصيغةُ العلميةُ

أستكشفُ

الأحماضُ النوويةُ (DNA) هِيَ جُزيئاتٌ مسؤولةٌ عَنْ تخزينِ المعلوماتِ الوراثيةِ في الكائناتِ الحيةِ، ويبلغُ قطرُها 0.000000002 m تقريبًا.

هَلْ توجدُ طريقةٌ أُخرى لكتابةِ هذا العددِ بحيثُ تصبحُ قراءتُهُ أسهلَ؟



الصيغةُ العلميةُ (scientific notation) هِيَ طريقةٌ لكتابةِ الأعدادِ الكبيرةِ جدًّا أوِ الصغيرةِ جدًّا على صورةِ حاصلِ ضربِ عددَينِ أحدُهُما أكبرُ مِنْ أَوْ يساوي 1 وأقلُّ مِنْ 10، والآخَرُ أحدُ قوى العددِ 10

أتذكّرُ

تُسمّى الصيغةُ الّتي تُكتبُ بها الأعدادُ مِنْ دونِ استعمالِ الأُسسِ الصيغةَ القياسيةَ.

مفهومٌ أساسيٌّ **الصيغةُ العلميةُ**

- **بالكلماتِ:** يُكتبُ العددُ بالصيغةِ العلميةِ على الصورةِ $a\times10^n$، حيثُ $1\leq a<10$، n عددٌ صحيحٌ.
- **أمثلةٌ:** 6.35×10^4 , 1.9×10^{-3} , 2×10^8

مثال 1 أكتبُ كلَّ عددٍ في ما يأتي بالصيغةِ العلميةِ:

① 12300000

الخُطْوَةُ 1 أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ.

أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ إلى اليسارِ حتّى ينتجَ عددٌ أكبرُ مِنْ أَوْ يساوي 1 وأقلُّ مِنْ 10:

أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ 7 منازلَ إلى اليسارِ $\quad$ 12300000.

أحذفُ الأصفارَ الإضافيةَ $\quad$ 1.23

إذنْ، العددُ بعدَ تحريكِ الفاصلةِ **1.23**

الْخُطْوَةُ 2 أحددُ قوةَ العددِ 10

بما أنَّ الفاصلةَ العشريةَ تحركَتْ 7 منازلَ إلى اليسارِ؛ فإنَّ $n = 7$

إذنْ، قوةُ العددِ 10 هِيَ 10^7

الْخُطْوَةُ 3 أضربُ العددَينِ الناتجَينِ مِنَ الخطوتَينِ 1 وَ 2

$$12300000 = 1.23 \times 10^7$$

② **0.000729**

الْخُطْوَةُ 1 أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ.

أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ إلى اليمينِ حتّى ينتجَ عددٌ أكبرُ مِنْ أَوْ يساوي 1 وأقلُّ مِنْ 10:

أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ 4 منازلَ إلى اليمينِ 0.0 0 0 0 7 2 9

أحذفُ الأصفارَ الإضافيةَ 7.29

أتذكر

يُسمّى عددُ مرّاتِ تكرارِ الضّربِ الأُسَّ، وَيُسمّى كُلٌّ مِنَ الأساسِ والأُسِّ مَعًا قوةً.

إذنْ، العددُ بعدَ تحريكِ الفاصلةِ **7.29**

الْخُطْوَةُ 2 أحددُ قوةَ العددِ 10

بما أنَّ الفاصلةَ العشريةَ تحرّكَتْ 4 منازلَ لليمينِ؛ فإنَّ $n = -4$

إذنْ، قوةُ العددِ 10 هِيَ 10^{-4}

الْخُطْوَةُ 3 أضربُ العددَينِ الناتجَينِ مِنَ الخطوتَينِ 1 وَ 2

$$0.000729 = 7.29 \times 10^{-4}$$

أتحققُ من فهمي:

③ **7864**

④ **4277.38**

⑤ **0.00000874**

⑥ **0.002**

ويمكنُنا أيضًا تحويلُ الأعدادِ مِنَ الصيغةِ العلميةِ إلى الصيغةِ القياسيةِ.

مثال 2

أكتبُ كلَّ عددٍ ممّا يأتي بالصيغةِ القياسيةِ:

① 7.51×10^5

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ أُسَّ العددِ 10 وإشارتَهُ لتحديدِ عددِ المنازلِ العشريةِ الّتي أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ بعدَها واتجاهِ الحركةِ.

أُسُّ العددِ 10 هُوَ 5، إذنْ $n = 5$، وبما أنَّ $n > 0$، إذنْ أحرّكُ الفاصلةَ العشرية 5 منازلَ لليمينِ.

الْخُطْوَةُ 2 أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ.

$$7.51 \times 10^5 \longrightarrow 7.51000$$

إذنُ، العددُ 7.51×10^5 بالصيغةِ القياسيةِ هُوَ 751000

أتعلّمُ

أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ إلى اليمينِ عددًا مِنَ المنازلِ يساوي قيمةَ n، أمّا إذا انتهَتِ المنازلُ العشريةُ في العددِ العشريِّ، فأضعُ صفرًا أَوْ أكثرَ يمينَ آخِرِ رقم حتّى يكتملَ العددُ المطلوبُ مِنَ المنازلِ.

② 6.8×10^{-8}

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ أُسَّ العددِ 10 وإشارتَهُ لتحديدِ عددِ المنازلِ العشريةِ الّتي أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ بعدَها واتجاهِ الحركةِ.

أُسُّ العددِ 10 هُوَ 8-، إذنْ $n = -8$، وبما أنَّ $n < 0$، إذنْ أحرّكُ الفاصلةَ العشرية 8 منازلَ لليسارِ.

الْخُطْوَةُ 2 أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ.

$$6.8 \times 10^{-8} \longrightarrow 00000006.8$$

إذنُ، العددُ 6.8×10^{-8} بالصيغةِ القياسيةِ هُوَ 0.000000068

أتعلّمُ

أحرّكُ الفاصلةَ العشريةَ إلى اليسارِ عددًا مِنَ المنازلِ يساوي قيمةَ n، أمّا إذا انتهَتِ المنازلُ العشريةُ في العددِ العشريِّ، فأضعُ صفرًا أَوْ أكثرَ يسارَ آخِرِ رقم حتّى يكتملَ العددُ المطلوبُ مِنَ المنازلِ.

أتحقّقُ من فهمي:

③ 6.432×10^6

④ 3.45×10^{-2}

⑤ 7×10^{-4}

⑥ 8×10^3

يمكنُ مقارنةُ الأعدادِ المكتوبةِ بالصيغةِ العلميةِ وترتيبُها، وذلكَ بمقارنةِ أُسسِ العددِ 10 أولًا، ثُمَّ مقارنةِ الجزءِ العشريِّ.

مثال 3

أرتبُ الأعدادَ في كلٍّ ممّا يأتي تصاعديًّا:

① 3.9×10^6 , 4.2×10^5 , 3.8×10^6

الخُطْوَةُ 1 أقارنُ بَيْنَ أُسسِ العددِ 10

3.9×10^6

4.2×10^5 ← الأصغرُ

3.8×10^6

بما أنَّ $10^5 < 10^6$

إذنْ 4.2×10^5 هُوَ الأصغرُ.

الخُطْوَةُ 2 أقارنُ الجزءَ العشريَّ.

3.9×10^6 ← الأكبرُ

3.8×10^6

بما أنَّ $3.9 > 3.8$

إذنْ، 3.9×10^6 هُوَ الأكبرُ.

إذنْ، الترتيبُ التصاعديُّ للأعدادِ الثلاثةِ هُوَ:

4.2×10^5 , 3.8×10^6 , 3.9×10^6

أتحققُ من فهمي:

② 7.8×10^{-3} , 7.9×10^{-3} , 5.6×10^{-4}

يمكنُ استعمالُ الصيغةِ العلميةِ لتسهيلِ عمليةِ ضربِ الأعدادِ الكبيرةِ جدًّا أَوِ الصغيرةِ جدًّا وقسمتِها.

مثال 4

أجدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

① $(3.4 \times 10^{-4})(6 \times 10^7)$

$(3.4 \times 10^{-4})(6 \times 10^7) = (3.4 \times 6)(10^{-4} \times 10^7)$ الخاصيتانِ: التجميعيةُ، والتبديليةُ

$= 20.4 \times 10^3$ قاعدةُ ضربِ القوى

$= (2.04 \times 10^1) \times 10^3$ $20.4 = 2.04 \times 10^1$

$= 2.04 \times 10^4$ قاعدةُ ضربِ القوى

② $(6.561 \times 10^{-4}) \div (7.29 \times 10^{7})$

$$(6.561 \times 10^{-4}) \div (7.29 \times 10^{7}) = \frac{(6.561 \times 10^{-4})}{(7.29 \times 10^{7})}$$

$$= \left(\frac{6.561}{7.29}\right)\left(\frac{10^{-4}}{10^{7}}\right)$$ الخاصيتانِ: التجميعيةُ، والتبديليةُ

$$= 0.9 \times 10^{-11}$$ قاعدةُ قسمةِ القوى

$$= (9 \times 10^{-1}) \times 10^{-11}$$ $0.9 = 9 \times 10^{-1}$

$$= 9 \times 10^{-12}$$ قاعدةُ ضربِ القوى

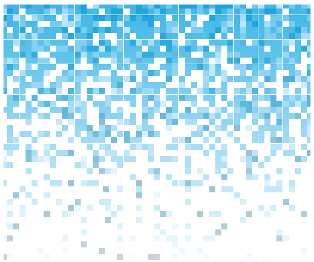
أتحققُ من فهمي:

③ $(5.6 \times 10^{11})(2.8 \times 10^{-14})$

④ $(1.305 \times 10^{5}) \div (1.45 \times 10^{8})$

تُستعملُ الصيغةُ العلميةُ في كثيرٍ مِنَ المواقفِ الحياتيةِ.

مثال 5: منَ الحياةِ



البِكسلُ: البكسلُ هُوَ أصغرُ عنصرٍ يمكنُ رؤيتُهُ في الصورةِ الرقْميةِ على الشاشاتِ، وَهُوَ على شكلِ مستطيلٍ طولُهُ 2×10^{-2} cm وعرضُهُ 7×10^{-3} cm أجدُ مساحةَ البِكسلِ بالصيغتَينِ: القياسيةِ، والعلميةِ.

$$A = l \times w$$ قانونُ مساحةِ المستطيلِ الّذي طولُهُ l وعرضُهُ w

$$A = (2 \times 10^{-2})(7 \times 10^{-3})$$ أعوضُ $l = 2\times10^{-2}$ وَ $w = 7\times10^{-3}$

$$= (2 \times 7)(10^{-2} \times 10^{-3})$$ الخاصيتانِ: التبديليةُ، والتجميعيةُ

$$= 14 \times 10^{-5}$$ قاعدةُ ضربِ القوى

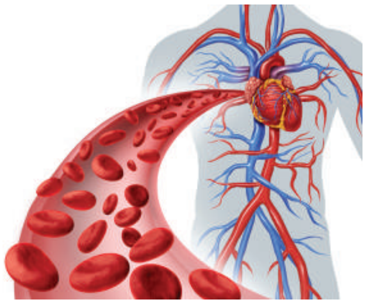
$$= (1.4 \times 10^{1}) \times 10^{-5}$$ $14 = 1.4 \times 10^{1}$

$$= 1.4 \times 10^{-4}$$ قاعدةُ ضربِ القوى

$$= 0.00014$$ الصيغةُ القياسيةُ

إذنْ، مساحةُ البِكسلِ بالصيغةِ القياسيةِ 0.00014، وبالصيغةِ العلميةِ 1.4×10^{-4}

أتحققُ من فهمي:



يحتوي جسمُ الإنسانِ البالغِ 20 000 000 000 000 خليةَ دمٍ حمراءَ تقريبًا وكتلةُ الخليةِ الواحدةِ 0.000 000 000 1 g

أكتبُ كلًّا مِنْ هذَينِ العددَينِ بالصيغةِ العلميةِ، ثُمَّ أجدُ كتلةَ خلايا الدّمِ الحمراءِ جميعِها لدى الإنسانِ البالغِ.

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ كلَّ عددٍ ممّا يأتي بالصيغةِ العلميةِ:

1. 250
2. 20 780 000 000
3. 56.0045
4. 0.00076

أكتبُ كلَّ عددٍ ممّا يأتي بالصيغةِ القياسيةِ:

5. 2.46×10^{2}
6. 8.97×10^{5}
7. 5.67×10^{-4}
8. 2.0789×10^{-2}

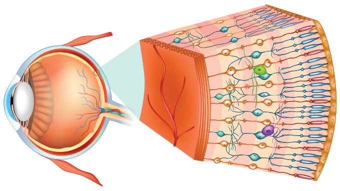
9. أرتبُ الأعدادَ الآتيةَ تصاعديًّا:

6.25×10^{-1} , 2.8×10^{5} , 4.5×10^{5} , 2.07×10^{-2} , 6.3×10^{-1}

أجدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

10. $(7.3 \times 10^{-3})(4 \times 10^{2})$
11. $(2 \times 10^{-2})^{3}$
12. $(4.8 \times 10^{4}) \div (3 \times 10^{4})$
13. $\sqrt{(36 \times 10^{-4})}$

14. **تشريحٌ:** تحتوي شبكيّةُ العينِ خلايا مستقبلةً للضوءِ وحساسةً لَهُ تُسمّى عِصِيًّا ومخاريطَ، إذْ يبلغُ عددُ العصيِّ في الشبكيةِ 120000000، وعددُ المخاريطِ 6000000، أكتبُ كلًّا مِنْ هذَينِ العددَينِ بالصيغةِ العلميةِ.



معلومةٌ

تعملُ شبكيّةُ العينِ على تحويلِ الأشعةِ الضوئيةِ إلى نَبَضاتٍ عصبيةٍ (كهروكيميائيةٍ) تُنقَلُ عبرَ العصبِ البصريِّ إلى مراكزِ الدماغِ العليا لتحويلِها إلى صورٍ للأشياءِ المرئيةِ.

15 يُبيّنُ الجدولُ الآتي أبعادَ بعضِ الكواكبِ عَنِ الشمسِ، أرتّبُ هذهِ الأبعادَ تنازليًّا.

بُعدُ الكوكبِ عَنِ الشمسِ

الكوكبُ	الأرضُ	المرّيخُ	نبتونُ	عطاردُ	الزُّهرة	المشتري
البعدُ بالأميالِ	9.3×10^7	1.42×10^8	2.8×10^9	3.6×10^7	6.7×10^7	4.84×10^8

16 **كثافةٌ سكانيةٌ:** تُحسَبُ الكثافةُ السكانيةُ لمنطقةٍ ما بقسمةِ عددِ السكانِ على مساحةِ هذهِ المنطقةِ. في شهرِ آبَ مِنْ عامِ 2020 كانَ عددُ سكانِ الأرضِ 7.8×10^9 نسمةً. إذا كانَتْ مساحةُ سطحِ اليابسةِ على الأرضِ $1.438\times10^9\ \text{km}^2$ ، فأجدُ الكثافةَ السكانيةَ لسكانِ الأرضِ على اليابسةِ.

17 **نباتاتٌ:** تبلغُ كتلةُ الولفيةِ (Wolffian globose) 1.5×10^{-4} g إذا احتوَتْ ملعقةٌ صغيرةٌ 5×10^3 نبتاتٍ ولفيةٍ تقريبًا، فأجدُ كتلةَ هذهِ الكميةِ.

معلومةٌ

الولفيةُ نوعٌ مِنْ عدسياتِ الماءِ، وتُعَدُّ أصغرَ النباتاتِ المُزهرةِ، وتتكاثرُ بسرعةٍ كبيرةٍ لتحوّلَ سطحَ الماءِ إلى ما يشبهُ المرجَ الأخضرَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

18 **تبريرٌ:** أيُّهما أكبرُ: 1000^{10} أمْ 10^{1000}؟ أبرّرُ إجابتي.

19 **أكتشفُ الخطأَ:** حلَّ كلٌّ مِنْ سعدٍ وهدى مسألةَ قسمةٍ مكتوبةً بالصيغةِ العلميةِ على النحوِ الآتي، مَنْ مِنْهُما حلُّهُ صحيحٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

سعدٌ

$$\frac{3.12\times10^{-4}}{6\times10^{8}} = 0.52\times10^{-12}$$

$$= 5.2\times10^{-13}$$

هدى

$$\frac{3.12\times10^{-4}}{6\times10^{8}} = 0.52\times10^{-12}$$

$$= 5.2\times10^{-11}$$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ عددَينِ بالصيغةِ العلميةِ ناتجُ ضربِهِما 7.2×10^5، ثُمَّ عددَينِ بالصيغةِ العلميةِ ناتجُ قسمتِهِما 7.2×10^5

21 **أكتبُ** كيفَ أكتبُ الأعدادَ الكلّيةَ والعشريةَ بالصيغةِ العلميةِ؟

الدرسُ 8 النسبةُ المئويةُ

فكرةُ الدرسِ

أحلُّ مسائلَ على النسبةِ المئويةِ.

المصطلحاتُ

النسبةُ المئويةُ للتغيرِ، نسبةُ الزيادةِ المئويةُ، نسبةُ النقصانِ المئويةُ، النسبةُ المئويةُ العكسيةُ

أستكشفُ

في عــامِ 2018 أنتجَ الأردنُّ 21 ألفَ طنٍّ مِنْ زيتِ الزيتونِ، وفي عــامِ 2019 أنتجَ 119% ممّا أنتجَهُ عامَ 2018. ما معنى النسبةِ 119%؟ وَكَمْ أنتجَ الأردنُّ مِنَ الزيتِ عامَ 2019؟

أتذكرُ

لإيجادِ النسبةِ المئويةِ مِنْ كمّيةٍ، أحوّلُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ أَوْ كسرٍ عشريٍّ، ثُمَّ أضربُ الكسرَ الناتجَ في الكمّيةِ.

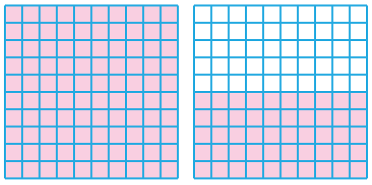
النسبةُ المئويةُ هِيَ نسبةٌ تقارنُ عددًا بالعددِ 100، فإذا كانَ العددُ أكبرَ مِنْ 100، فإنَّ النســبةَ المئويةَ تكونُ أكبرَ مِنْ 100%، أمّا إذا كانَ العددُ الّذي أقارنُ بِهِ أقلَّ مِنْ 1، فإنَّ النسبةَ المئويةَ تكونُ أقلَّ مِنْ 1%

مثال 1

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

① **150% مِنْ 5**

أضربُ النسبةَ المئويةَ في العددِ	$150\% \times 5$
أحوّلُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ	$= 1.5 \times 5$
أضربُ	$= 7.5$



150%

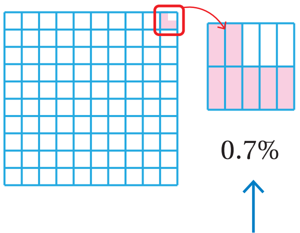
أتعلمُ

150% تعني 50% + 100%

إذنْ 150% مِنْ 5 تساوي 7.5

② **0.7% مِنْ 2000**

أضربُ النسبةَ المئويةَ في العددِ	$0.7\% \times 2000$
أحوّلُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ	$= 0.007 \times 2000$
أضربُ	$= 14$



0.7%

0.7% هِيَ نسبةٌ كسريةٌ بَيْنَ 0% وَ 1%

إذنْ 0.7% مِنْ 2000 تساوي 14

أتحققُ من فهمي:

3) 350% مِنْ 10

4) 0.1% مِنْ 5000

يوجدُ الكثيرُ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ المهمةِ على النسبةِ المئويةِ.

مثال 2: منَ الحياةِ

1) **راتبٌ: تتقاضى فاطمةُ راتبًا شهريًّا قدرُهُ JD 750، كَمْ يصبحُ هذا الراتبُ إذا زادَ بنسبةِ 12%؟**

إنَّ زيادةَ الراتبِ بنسبةِ 12% تكافئُ نسبةَ 100% الأصليةَ مضافًا إِلَيْها 12%، وهذا يعني أنَّ المجموعَ الكلّيَّ للنسبِ 112%، وَمِنْ ثَمَّ، فإنّهُ يمكنُ إيجادُ راتبِ فاطمةَ بعدَ الزيادةِ بضربِ الراتبِ القديمِ في 112%

أضربُ النسبةَ المئويةَ في الكمّيّةِ الأصليةِ	$112\% \times 750$
أحولُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ	$= 1.12 \times 750$
أضربُ	$= 840$

إذنْ، راتبُ فاطمةَ بعدَ الزيادةِ JD 840

أفكّرُ

هَلْ يمكنُ إيجادُ راتبِ فاطمةَ بعدَ الزيادةِ بطريقةٍ أُخرى؟

2) **سيارةٌ: اشترى كريمٌ سيارةً بمبلغِ JD 6500 العامَ الماضيَ، كَمْ يصبحُ السعرُ إذا انخفضَ سعرُ السيارةِ هذا العامَ بنسبةِ 15%؟**

إنَّ انخفاضَ سعرِ السيارةِ بنسبةِ 15% يكافئُ نسبةَ 100% الأصليةَ مطروحًا مِنْها 15%، وهذا يمثلُ 85% مِنَ السعرِ الأصليِّ؛ لذا يمكنُ إيجادُ سعرِ السيارةِ بعدَ الانخفاضِ بضربِ سعرِها القديمِ في 85%

أضربُ النسبةَ المئويةَ في الكمّيّةِ الأصليةِ	$85\% \times 6500$
أحولُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ	$= 0.85 \times 6500$
أضربُ	$= 5525$

إذنْ، سعرُ السيارةِ هذا العامَ JD 5525

أفكّرُ

هَلْ يمكنُ إيجادُ سعرِ السيارةِ بعدَ النقصانِ بطريقةٍ أُخرى؟

أتحققُ من فهمي:

3 ازدادَ طولُ نبتةٍ بنسبةِ 25% ممّا كانَ عليهِ طولُها قبلَ أسبوعٍ. أجدُ طولَ النبتةِ الآنَ إذا كانَ طولُها في الأسبوعِ السابقِ 40 cm

4 قرّرَتْ إدارةُ أحدِ المصانعِ تخفيضَ عددِ عمّالِها بتسريحِ 30% مِنْهُمْ. إذا كانَ عددُ العمالِ في المصنعِ 416 عاملًا، فَكَمْ عاملًا سيبقى في المصنعِ؟

النسبةُ المئويةُ للتغيرِ (percentage change)(pc) هِيَ النسبةُ المئويةُ لمقدارِ التغيرِ مِنَ الكمّيةِ الأصليةِ، ويمكنُ أَنْ تكونَ النسبةُ المئويةُ للتغيرِ **نسبةَ زيادةٍ مئويةً** (percentage increase) أَوْ **نسبةَ نقصانٍ مئويةً** (percentage decrease)

مفهومٌ أساسيٌّ — النسبةُ المئويةُ للتغيرِ

- **بالكلماتِ:** النسبةُ المئويةُ للتغيرِ هِيَ النسبةُ المئويةُ بَيْنَ التغيرِ في كمّيةٍ ما والكمّيةِ الأصليةِ.

$$\text{(النسبةُ المئويةُ للتغيرِ)} = \frac{\text{(مقدارَ التغيرِ)}}{\text{(الكمّيةِ الأصليةِ)}} \times 100\%$$

مثال 3: منَ الحياةِ

1 **آلةٌ حاسبةٌ:** باعَ محلٌّ للإلكترونياتِ 80 آلةً حاسبةً في شهرِ أيلولَ، و104 آلاتٍ حاسبةٍ في شهرِ تشرينِ الأولِ. أجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ في عددِ الآلاتِ الحاسبةِ المَبيعةِ مِنْ شهرِ أيلولَ إلى شهرِ تشرينِ الأولِ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ مقدارَ التغيرِ.

لأجدَ مقدارَ التغيرِ، أطرحُ الكمّيةَ الأصليةَ مِنَ الكمّيةِ الجديدةِ.

الكميةُ الجديدةُ – الكميةُ الأصليةُ $104 - 80 = 24$

إذنْ، مقدارُ التغيرِ يساوي 24

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ.

صيغةُ النسبةِ المئويةِ للتغيرِ
$$\text{(النسبةُ المئويةُ للتغيرِ)} = \frac{\text{(مقدارَ التغيرِ)}}{\text{(الكميّةِ الأصليةِ)}} \times 100\%$$

أعوضُ
$$= \frac{24}{80} \times 100\%$$

أبسطُ
$$= \frac{3}{10} \times 100\%$$

أضربُ
$$= 30\%$$

إذنْ، زادَتِ المبيعاتُ مِنْ شهرِ أيلولَ إلى شهرِ تشرينِ الأولِ بنسبةِ 30%

2 **إذا كانَتْ كتلةُ عمرَ 95 kg قبلَ اتّباعِهِ نظامًا غذائيًّا متوازنًا، وأصبحَتْ كتلتُهُ الآنَ 78 kg، فأجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ في كتلةِ عمرَ. أقرّبُ إجابتي لأقربِ عددٍ صحيحٍ.**

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ مقدارَ التغيرِ.

لأجدَ مقدارَ التغيرِ، أطرحُ الكميّةَ الأصليةَ مِنَ الكميّةِ الجديدةِ.

الكميةُ الجديدةُ − الكميةُ الأصليةُ
$$78 - 95 = -17$$

إذنْ، مقدارُ التغيرِ يساوي −17

أتعلّمُ

بما أنَّ كتلةَ عُمَرَ الجديدةَ أقلُّ من كتلتِهِ الأصليةِ؛ فإنَّ مقدارَ تغيرِ كتلتِهِ يكونُ سالبًا.

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ.

صيغةُ النسبةِ المئويةِ للتغيرِ
$$\text{(النسبةُ المئويةُ للتغيرِ)} = \frac{\text{(مقدارَ التغيرِ)}}{\text{(الكميّةِ الأصليةِ)}} \times 100\%$$

أعوضُ
$$= \frac{-17}{95} \times 100\%$$

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ
$$\approx -18\%$$

إذنْ، خسرَ عمرُ 18% مِنْ كتلتِهِ الأصليةِ.

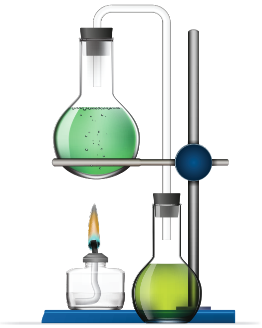
أتحققُ من فهمي:

3 اشترى معاذٌ زهورًا بقيمةِ JD 240 وباعَها بسعرِ JD 300. أجدُ النسبةَ المئويةَ لربحِ معاذٍ.

4 اشترَتْ فرحُ كاميرا بقيمةِ JD 119 بعدَ التخفيضِ، إذا كانَ سعرُ الكاميرا قبلَ التخفيضِ JD 140، فأجدُ النسبةَ المئويةَ للخصمِ الّذي حصلَتْ عليه فرحُ.

مِنَ التطبيقاتِ المهمةِ على النسبةِ المئويةِ أسئلةُ **النسبةِ المئويةِ العكسيةِ** (reverse percentage)، الّتي تتطلبُ الحلَّ بشكلٍ عكسيٍّ بدءًا مِنَ الكمّيةِ النهائيةِ للحصولِ على الكمّيةِ الأصليةِ.

مثال 4: منَ الحياةِ



أفكّرُ

لِمَ نقسمُ على نسبةِ التغيرِ المئويةِ عندَ إيجادِ الكمّيةِ الأصليةِ؟

1 **كيمياءُ:** **في إحدى التجاربِ الكيميائيةِ سُخِّنَ سائلٌ لرفعِ درجةِ حرارتِهِ بنسبةِ 16% لتصبحَ 80°C، أجدُ درجةَ حرارةِ السائلِ T قبلَ الزيادةِ.**

بما أنَّ درجةَ الحرارةِ T زادَتْ بنسبةِ 16%، إذنْ، النسبةُ المئويةُ بعدَ الزيادةِ تساوي 116%

$$T = \frac{80}{116\%}$$ أقسمُ الكميةَ بعدَ التغيرِ على النسبةِ المئويةِ بعدَ الزيادةِ

$$= \frac{80}{1.16}$$ أحولُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ

$$\approx 69$$ أقسمُ

إذنْ، درجةُ حرارةِ السائلِ قبلَ الزيادةِ 69°C تقريبًا.

2 **ثلاجاتٌ:** **أعلنَ متجرٌ للثلّاجاتِ عَنْ خصمٍ نسبتُهُ 20%. إذا كانَ سعرُ ثلاجةٍ بعدَ الخصمِ JD 600، فأجدُ سعرَها P قبلَ الخصمِ.**

بما أنَّ سعرَ الثلاجةِ نقصَ بنسبةِ 20%، إذنْ، النسبةُ المئويةُ بعدَ النقصانِ تساوي 80%

$$P = \frac{600}{80\%}$$ أقسمُ الكميةَ بعدَ التغيرِ على النسبةِ المئويةِ بعدَ النقصانِ

$$= \frac{600}{0.80}$$ أحولُ النسبةَ المئويةَ إلى كسرٍ عشريٍّ

$$= 750$$ أقسمُ

إذنْ، سعرُ الثلاجةَ قبلَ الخصمِ JD 750

أتحقّقُ من فهمي:

3 **زادَ سعرُ سيارةٍ بنسبةِ 6% ليصبحَ JD 9116. أجدُ سعرَها P قبلَ الزيادةِ.**

4 **في موسمِ التنزيلاتِ، بلغَ سعرُ شاشةِ تلفازٍ JD 500. إذا كانَتْ نسبةُ الخصمِ 7%، فأجدُ ثمنَ الشاشةِ P قبلَ الخصمِ.**

أتدرب وأحل المسائل

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 300% من 2000 2 0.14% من 40 3 250% من 400

4 **ماءٌ:** يزيدُ حجمُ الماءِ عندَ تجمّدِهِ بنسبةِ 10%. أجدُ حجمَ 750 mL مِنَ الماءِ بعدَ التجمّدِ.

5 **سياراتٌ:** زادَتْ شركةٌ للسياراتِ سعرَ سيارةٍ رياضيةٍ مِنْ JD 23000 إلى JD 25000. أجدُ النسبةَ المئويةَ للزيادةِ في سعرِ السيارةِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

6 **بطاريةٌ:** تفقدُ بطاريةُ هاتفٍ شحنَها الكاملَ بعدَ 20 ساعةً. إذا كانَتِ النسخةُ المطوّرةُ مِنَ البطاريةِ تستمرُّ 30 دقيقةً إضافيةً، فأجدُ النسبةَ المئويةَ للزيادةِ في زمنِ عملِ البطاريةِ.

7 **اختباراتٌ:** خضعَ عمرانُ ونادية لاختبارَينِ لَهُما النهايةُ العُظمى نفسُها، وكانَتْ نتائجُهُما مثلما يظهرُ في الجدولِ. مَنْ مِنْهُما كانَتِ النسبةُ المئويةُ للزيادةِ في علاماتِهِ أكبرَ مِنَ الاختبارِ A إلى الاختبارِ B؟ أبيّنُ خطواتِ الحلِّ.

	الاختبار B	الاختبار A
عمرانُ	17	12
ناديةُ	20	14

8 خفّضَتْ شركةٌ عددَ عمّالِها بنسبةِ 5% فأصبحَ 228 عاملًا. أجدُ عددَ عمالِ الشركةِ الأصليَّ.

9 **راتبٌ:** يتقاضى طبّاخٌ JD 1431 شهريًّا بعدَ زيادةٍ على راتبِهِ بنسبةِ 8% . أجدُ راتبَ الطبّاخِ قبلَ الزيادةِ.

10 اشترى أحمدُ كرسيًّا دوّارًا وباعَهُ بمبلغِ JD 63. إذا كانَتْ نسبةُ خسارتِهِ فيهِ 55%، فما الثمنُ الأصليُّ للكرسيِّ؟

معدّل التنفّسِ: إذا كانَ معدّلُ تنفّسِ لؤيٍّ 20 مرةً في الدقيقةِ، فأجيبُ عمّا يأتي:

11 أجِدُ عددَ مراتِ تنفّسِ لؤيٍّ إذا أصبحَتْ 180% ممّا كانَتْ عليهِ؛ نتيجةَ ممارستِهِ إحدى الرياضاتِ.

12 نتيجةَ لممارسةِ لؤيٍّ رياضةً أشدَّ أصبحَ معدّلُ تنفّسِهِ 120% مِنْ عددِ مراتِ الرياضةِ الأولِ، أجدُ عددَ مراتِ تنفّسِهِ الجديدَ.

13 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

معلومةٌ

يُقاسُ معدّلُ التنفسِ عندَ الإنسانِ بعددِ الأنفاسِ الّتي يأخذُها في الدقيقةِ الواحدةِ، ويعتمدُ ذلكَ على عدةِ عواملَ، منها: عمرُ الشخصِ، وحالتُهُ الصحيةُ، والجهدُ الّذي يبذلُهُ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

14 **تحدٍّ:** إذا كانَتْ 38% مِنَ القواريرِ البلاستيكيةِ الّتي يُنتجُها مصنعٌ زرقاءَ اللونِ، والقواريرُ المتبقيةُ وعددُها 7750 قارورةً لونُها بنّيٌّ؛ فأجدُ عددَ القواريرِ الزرقاءِ الّتي يُنتجُها المصنعُ.

15 **تبريرٌ:** صمّمَتْ جمانةُ مزهريتَينِ فخاريتَينِ وباعَتْهُما بالسعرِ الموضّحِ في الشكلِ الآتي. تقولُ جمانةُ إنَّ نسبةَ ربحِها في المزهريةِ الأولى أكبرُ مِنْ نسبةِ ربحِها في المزهريةِ الثانيةِ. هَلْ ما تقولُهُ جمانةُ صحيحٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

المزهريةُ الثانيةُ

سعرُ التكلفةِ JD 18

سعرُ البيعِ JD 22.5

المزهريةُ الأولى

سعرُ التكلفةِ JD 13

سعرُ البيعِ JD 16.7

16 **أكتبُ** كيفَ أجدُ النسبةَ المئويةَ للتغيرِ؟ وبِمَ أفسّرُ معنى النسبةِ الّتي تزيدُ على 100%؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمةُ $\sqrt{2500}$ تساوي:

a) 25 **b)** -50

c) 50 **d)** ± 50

2 قيمةُ $(\sqrt{1.44} - 4.2)$ تساوي:

a) 3 **b)** -3

c) 7.8 **d)** -5.4

3 أفضلُ تقديرٍ للعددِ $(8 - \sqrt{40})$ هُوَ:

a) 4 **b)** -16 **c)** 1 **d)** 2

4 قيمةُ $(\sqrt{2} \times \sqrt{32})$ تساوي:

a) 6 **b)** 8 **c)** 64 **d)** 16

5 مثلثٌ قائمُ الزاويةِ متطابقُ الضلعَينِ طولُ وترِهِ $\sqrt{72}$ cm . فإن طولَ كلٍّ مِنْ ضلعَي القائمةِ يساوي:

a) 36 cm **b)** $3\sqrt{2}$ cm

c) 6 cm **d)** 18 cm

6 أيُّ مجموعاتِ الأطوالِ الآتيةِ تمثلُ أطوالَ أضلاعِ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ؟

a) $6 , 8 , 11$ **b)** $\sqrt{10} , 4 , 5$

c) $6, 2\sqrt{3} , 4\sqrt{3}$ **d)** $5 , 12 , 14$

7 أحدُ الأعدادِ الآتيةِ عددٌ غيرُ نسبيٍّ:

a) $\sqrt{12}$ **b)** $\sqrt{6.25}$

c) $3\frac{1}{5}$ **d)** -2

8 قيمةُ $\sqrt[10]{64 \times 2^4}$ تساوي:

a) 8 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6

9 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\dfrac{u^{\frac{7}{4}} \times u^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{2}}}$ هِيَ:

a) u^2 **b)** u^3 **c)** $u^{\frac{1}{2}}$ **d)** u

10 تبلغُ سرعةُ الصوتِ 1236 km/h، وتُكتَبُ بالصيغةِ العلميةِ:

a) 1.236×10^4 **b)** 1.236×10^{-3}

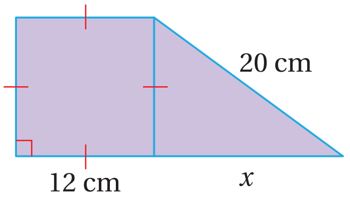
c) 1.236×10^3 **d)** 12.36×10^2

11 ناتجُ القسمةِ $((3\times10^{-2})\div(5\times10^{-6}))$ هُوَ:

a) 0.6×10^3 **b)** 6×10^4

c) 6×10^{-3} **d)** 6×10^3

12 أجدُ طولَ الضلعِ المجهولَ في الشكلِ الآتي:

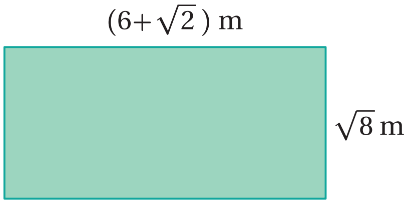


أميزُ العددَ النسبيَّ مِنْ غيرِ النسبيِّ في ما يأتي:

13 $-\sqrt{36}$

14 $\sqrt{50}$

15 أجدُ مساحةَ المستطيلِ الآتي بأبسطِ صورةٍ:



16 أرتبُ مجموعةَ الأعدادِ الآتيةِ تصاعديًّا:

$$\sqrt{24}\ ,\ 5\frac{1}{4}\ ,\ 4.\overline{6}\ ,\ 5\ ,\ \pi$$

17 أبسطُ المقدارَ $\dfrac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt{28}}$

18 أكتبُ المقدارَ $\dfrac{p^{\frac{2}{3}}}{p^{-\frac{4}{3}}}$ بأبسطِ صورةٍ.

19 يبلغُ طولُ حشرةِ الماءِ 0.01981 cm، وطولُ حشرةِ السّوسِ 0.09652 cm. أكتبُ العددَينِ بالصيغةِ العلميةِ، ثُمَّ أحددُ أيُّ الحشرتَينِ أطولُ.

20 باعَ متجرٌ بذلةً رجاليةً بمبلغ JD 150، وبربحٍ مقدارُهُ 30 % أجدُ سعرَ التكلفةِ. أقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

21 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ هِيَ:

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{12}}{2}$

c) $2\sqrt{3}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

22 ناتجُ $(3.4\times10^{7})(5.2\times10^{6})$ بالصيغةِ العلميةِ هُوَ:

a) 1.768×10^{14} **b)** 17.68×10^{13}

c) 8.6×10^{13} **d)** 1.768×10^{42}

23 أيُّ المقاديرِ الآتيةِ يكافئُ المقدارَ $(8y)^{\frac{4}{3}}$؟

a) $\sqrt[4]{16y^{3}}$ **b)** $\sqrt[3]{8y^{4}}$

c) $16\sqrt[3]{y^{4}}$ **d)** $8\sqrt[4]{y^{3}}$

24 تُشيرُ سجلّاتُ قسمِ الولادةِ في أحدِ المستشفياتِ إلى وجودِ 50 مولودًا 56% مِنْهُمْ إناثٌ. إذا زادَ عددُ المواليدِ الإناثِ 7، فأجدُ النسبةَ المئويةَ لهذهِ الزيادةِ.

الوحدةُ 2

تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعملُ تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ، فمثلًا يكتبُ المهندسونَ المعماريّونَ النسبةَ بَيْنَ مساحةِ جدرانِ الغرفةِ وحجمِها على صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ، ثُمَّ يستعملونَ التحليلَ؛ لتبسيطِهِ وإيجادِ أقلِّ قيمةٍ لَهُ؛ بهدفِ تقليلِ تكلفةِ تدفئةِ الغرفةِ في فصلِ الشتاءِ.

تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ إجراءَ العملياتِ الحسابيةِ على الحدودِ والمقاديرِ الجبريةِ، وكتابتَها بأبسطِ صورةٍ.
- ✓ تبسيطَ مقاديرَ عدديةٍ تتضمنُ أُسُسًا باستخدامِ أولوياتِ العملياتِ الحسابيةِ.
- ✓ توظيفَ الأسسِ والمقاديرِ الجبريةِ في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

سأتعلّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- حالاتٍ خاصةً لضربِ المقاديرِ الجبريةِ.
- تحليلَ مقاديرَ جبريةٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ وتجميعِ الحدودِ.
- تحليلَ الفرقِ بَيْنَ مربّعَيْ حدَّينِ، وتحليلَ ثلاثيِّ حدودٍ على صورةِ $x^2 + bx + c$
- كتابةَ مقاديرَ جبريةٍ نسبيةٍ بأبسطِ صورةٍ.

مشروعُ الوحدةِ: القطعُ الجبريةُ

أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِيَ الخاصِّ الّذي سأصنعُ فيهِ قطعًا جبريةً، وأستعملُها في تحليلِ المقاديرِ الجبريّةِ.

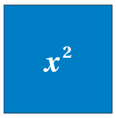
الأدواتُ اللازمةُ:

أوراقٌ مقوّاةٌ متعددةُ الألوانِ (أزرقُ، وأخضرُ، وأحمرُ، وأصفرُ).

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

أصنعُ القطعَ الجبريةَ

1. أقصُّ 5 مربعاتٍ مِنَ الورقةِ الزرقاءِ بمقاسِ (10 cm × 10 cm)، وأكتبُ x^2 على كلٍّ مِنْها.



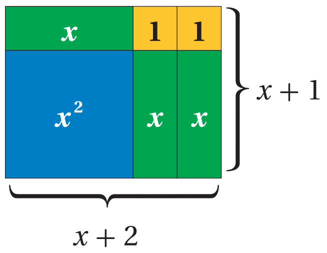
2. أقصُّ 10 مستطيلاتٍ مِنَ الورقةِ الخضراءِ بمقاسِ (3 cm×10 cm)، وأكتبُ (x) على كلٍّ مِنْها، وأقصُّ 10 مستطيلاتٍ بالمقاسِ نفسِهِ مِنَ الورقةِ الحمراءِ، وأكتبُ ($-x$) على كلٍّ مِنْها.

3. أقصُّ 15 مربعًا مِنَ الورقةِ الصفراءِ بمقاسِ 3 cm × 3 cm، وأكتبُ (1) على كلٍّ مِنْها، وأقصُّ 15 مربعًا بالمقاسِ نفسِهِ مِنَ الورقةِ الحمراءِ، وأكتبُ (−1) على كلٍّ مِنْها.

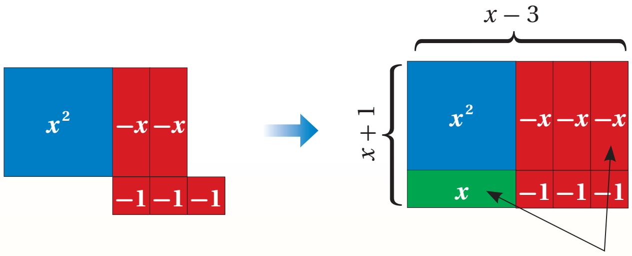
أستعملُ القطعَ الجبريةَ لتمثيلِ مقاديرَ جبريةٍ وتحليلِها:

يستعملُ كلُّ عضوٍ في المجموعةِ القطعَ الجبريةَ لتمثيلِ مقدارٍ جبريٍّ، ثُمَّ ينظمُ القطعَ الجبريةَ على شكلِ مستطيلٍ، وعندئذٍ يكونُ طولُ المستطيلِ وعرضُهُ عامِلَي المقدارِ الجبريِّ كما في الشكلِ الآتي:

$$(x^2+3x+2)$$



يحتاجُ تمثيلُ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ إلى إضافةِ أزواجٍ صفريةٍ مثلِ ($\boxed{1} + \boxed{-1} = 0$) لإكمالِ تشكيلِ المستطيلِ:



زوجٌ صفريٌّ، لأنَّ: $x + (-x) = 0$

عرضُ النتائجِ:

- يعرضُ كلُّ فردٍ في المجموعةِ أمامَ زملائِهِ في الصفِّ كيفيةَ تحليلِ مقدارٍ جبريٍّ يختارُهُ باستعمالِ القطعِ الجبريةِ.

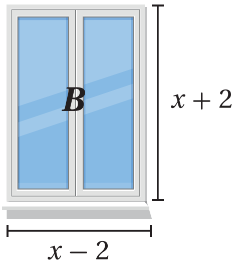
الدرسُ 1 حالاتٌ خاصةٌ مِنْ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ

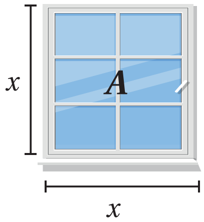
فكرةُ الدرسِ

أتعرفُ قواعدَ إيجادِ مربعِ مجموعِ حدَّينِ ومجموعِ حدّينِ في الفرقِ بينَهُما.

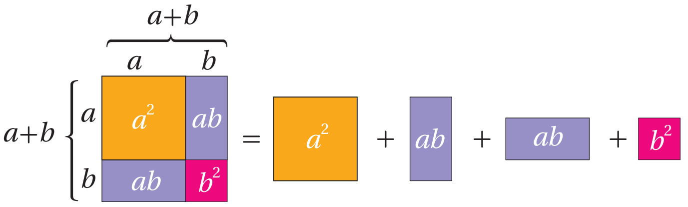
أستكشفُ

أيُّ النافذتَينِ مساحتُها أكبرُ؟





تعلمْتُ سابقًا إيجادَ مربعِ مجموعِ حدَّينِ على الصورةِ $(a+b)^2$ عَنْ طريقِ إيجادِ حاصلِ الضربِ $(a+b)(a+b)$، ويمكنُ أيضًا استعمالُ القطعِ الجبريةِ لتمثيلِ $(a+b)^2$ لأيِّ قيمتَينِ a وَ b كما يأتي:



$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

إذنْ، ضربُ مجموعِ حدَّينِ في نفسِهِ (مربعُ مجموعِ حدَّينِ) يتبعُ قاعدةً ثابتةً يمكنُ استعمالُها لتسهيلِ عمليةِ الضربِ.

مفهومٌ أساسيٌّ **مربعُ مجموعِ حدَّينِ**

- **بالكلماتِ:** مربعُ $(a+b)$ يساوي مربعَ a مضافًا إليهِ مِثْلا حاصِلِ ضربِ a في b مضافًا إليهِ مربعُ b.
- **بالرموزِ:** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

مثال 1 أجدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

① $(3k+5)^2$

مربعِ مجموعِ حدَّينِ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a = 3k, b = 5$ $\quad (3k+5)^2 = (3k)^2 + (2 \times 3k \times 5) + (5)^2$

أبسطُ $\quad = 9k^2 + 30k + 25$

② $(y^2+3)^2$

مربع مجموعِ حدَّينِ	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$a = y^2,\ b = 3$	$(y^2+3)^2 = (y^2)^2 + (2 \times y^2 \times 3) + 3^2$
أبسطُ	$= y^4 + 6y^2 + 9$

أتحققُ من فهمي:

④ $(d^2+4)^2$

③ $(2c+10)^2$

توجدُ أيضًا قاعدةٌ لإيجادِ $(a-b)^2$، ويمكنُ إيجادُها بكتابةِ $(a-b)$ على صورةِ $a + (-b)$ ثُمَّ استعمالِ قاعدةِ $(a+b)^2$:

مربعُ مجموعِ حدَّينِ	$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = (a)^2 + 2(a)(-b) + (b)^2$
أبسطُ	$= a^2 - 2ab + b^2$

مفهومٌ أساسيٌّ

مربعُ الفرقِ بَيْنَ حدَّينِ

- **بالكلمات:** مربعُ $(a-b)$ يساوي مربعَ a مطروحًا منهُ مِثْلا حاصلِ ضربِ a في b مضافًا إليهِ مربعُ b.
- **بالرموز:** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال 2

أجدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

① $(2h-z)^2$

مربعِ الفرقِ بَيْنَ حدَّينِ	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a = 2h,\ b = z$	$(2h-z)^2 = (2h)^2 - (2 \times 2h \times z) + (z)^2$
أبسطُ	$= 4h^2 - 4hz + z^2$

② $(6-5y^3)^2$

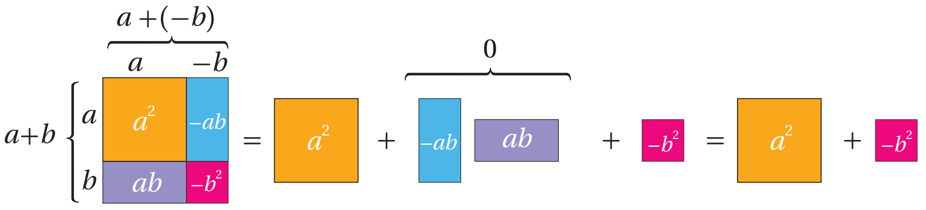
مربعِ الفرقِ بَيْنَ حدَّينِ	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a = 6,\ b = 5y^3$	$(6-5y^3)^2 = (6)^2 - (2 \times 6 \times 5y^3) + (5y^3)^2$
أبسطُ	$= 36 - 60y^3 + 25y^6$

أتحققُ من فهمي:

③ $(7t^2-1)^2$

④ $(x^3-4y^2)^2$

يتبعُ ناتجُ ضربِ مجموعِ حدَّينِ في الفرقِ بينَهُما $(a-b)(a+b)$ قاعدةً ثابتةً يمكنُ اكتشافُها واستعمالُها في إيجادِ ناتجِ الضربِ بسهولةٍ:



$$(a+b)(a-b) = a^2 + (-ab) + ab + (-b^2) = a^2 + (-b^2)$$

مفهومٌ أساسيٌّ

ضربُ مجموعِ حدَّينِ في الفرقِ بينَهُما

- **بالكلماتِ:** ناتجُ ضربِ $(a-b)(a+b)$ يساوي مربعَ a مطروحًا مِنْهُ مربعُ b.
- **بالرموزِ:** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

مثال 3

أجدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

① $(c+3)(c-3)$

ضربِ مجموعِ حدَّينِ في الفرقِ بينَهُما	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
أعوضُ $a = c, b = 3$	$(c+3)(c-3) = (c)^2 - 3^2$
أبسطُ	$= c^2 - 9$

② $(4x^2+d^5)(4x^2-d^5)$

مربعِ مجموعِ حدَّينِ	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$a = 4x^2, b = d^5$	$(4x^2+d^5)(4x^2-d^5) = (4x^2)^2 - (d^5)^2$
أبسطُ	$= 16x^4 - d^{10}$

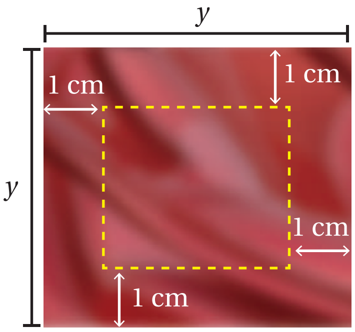
أتحققُ من فهمي:

③ $(6w + d^4)(6w - d^4)$

④ $(x^3 + 3h^7)(x^3 - 3h^7)$

تُستعملُ قوانينُ (مربعِ مجموعِ حدَّينِ) وَ(مربعِ الفرقِ بَيْنَ حدَّينِ) وَ(مجموعِ حدَّينِ في الفرقِ بينَهُما) في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ.

مثال 4: منَ الحياةِ



خياطةٌ: قطعةُ قُماشٍ مربعةُ الشكلِ طولُ ضلعِها y سنتيمترًا، إذا قُصَّ شريطٌ عرضُهُ 1 cm بمحاذاةِ حوافِها الأربعِ، فأجدُ المساحةَ المتبقيةَ وسطَ قطعةِ القُماشِ بدلالةِ y .

الْخُطْوَةُ 1 أحددُ طولَ ضلعِ قطعةِ القماشِ المتبقيةِ في الوسطِ بعدَ القصِّ.

طولُ قطعةِ القماشِ الأصليةِ y سنتيمترًا قُصَّ منها 1 cm بمحاذاةِ حوافِها الأربعِ.

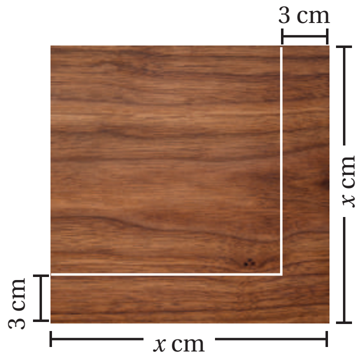
إذنْ، أصبحَ طولُ الضلعِ $(y-2)$ سنتيمترًا.

الْخُطْوَةُ 2 أحسبُ المساحةَ.

مساحةِ المربعِ	$A = s^2$
أعوضُ $s = y - 2$	$= (y-2)^2$
قانونُ مربعِ الفرقِ بَيْنَ حدَّينِ	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
أعوضُ $a = y, b = 2$	$(y-2)^2 = y^2 - (2 \times y \times 2) + 2^2$
أبسطُ	$= y^2 - 4y + 4$

إذنْ، المساحةُ المتبقيةُ في الوسطِ مِنَ القماشِ بدلالةِ y هِيَ $(y^2 - 4y + 4)\ \text{cm}^2$

أتحققُ من فهمي:



نجارةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ أبعادَ لوحٍ خشبيٍّ مربعِ الشكلِ طولُ ضلعِهِ x سنتيمترًا. إذا قُصَّ شريطٌ عرضُهُ 3 cm من حافتَي اللوحِ مثلَما يظهرُ في الشكلِ، فأحسبُ مساحةَ المربعِ المتبقي مِنَ اللوحِ بدلالةِ x.

يمكنُ استعمالُ قواعدِ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ لإجراءِ بعضِ الحساباتِ الذهنيةِ بسهولةٍ.

مثال 5

أستعملُ الحسابَ الذهنيَّ لأجدَ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

① 71^2

أكتبُ 71^2 على صورةِ مربعِ مجموعِ حدَّين	$71^2 = (70+1)^2$
مربعِ مجموعِ حدَّين	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
أعوّضُ $a = 70, b = 1$	$(70+1)^2 = 70^2 + (2\times70\times1) + 1^2$
أضربُ	$= 4900 + 140 + 1$
أجمعُ	$= 5041$

إذنْ، $71^2 = 5041$

أتحققُ من فهمي:

② 52^2

③ 49^2

أتدرب وأحل المسائل

أجدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

① $(w+2)^2$

② $(x-11)^2$

③ $(4m^3 - 5y)^2$

④ $(w^2 - 7)(w^2 - 7)$

⑤ $(5a+4)(5a-4)$

⑥ $(x^2 + 7y^4)(x^2 - 7y^4)$

⑦ **هندسةٌ:** بركةُ سباحةٍ مستطيلةُ الشكلِ، طولُها بالمترِ $(3x+6)$ وعرضُها بالمترِ $(3x-6)$، أجدُ مساحتَها بدلالةِ x وبأبسطِ صورةٍ.

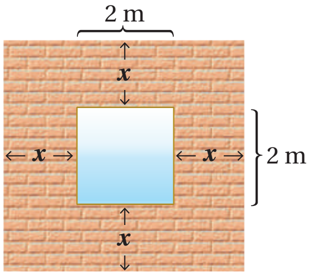
حسابٌ ذهنيٌّ: أستعملُ الحسابَ الذهنيَّ لأجدَ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

10 37^2

9 403^2

8 88^2

11 يبيّنُ الشكلُ المجاورُ جدارًا مربعَ الشكلِ تتوسطُهُ نافذةٌ. أعبّرُ عَنْ مساحةِ الجدارِ بدلالةِ x بطريقتَينِ مختلفتَينِ.

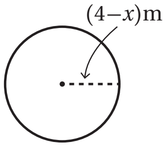


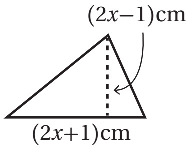
12 **علومٌ:** لوحةٌ معدنيةٌ مربعةُ الشكلِ، طولُ ضلعِها بالسنتيمترِ (w)، إذا تعرضَتْ للحرارةِ فتمدّدَتْ مُحافِظَةً على شكلِها وازدادَ طولُ ضلعِها بمقدارِ 0.02 cm، فأجدُ مساحةَ اللوحةِ بعدَ التمدّدِ بدلالةِ w.

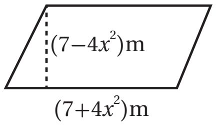
معلومةٌ

تتمدّدُ معظمُ الموادِ بالحرارةِ وتتقلّصُ بالبرودةِ، إلّا أنَّ الماءَ يخالفُ هذهِ القاعدةَ، إذْ إنَّهُ يتمدّدُ بالبرودةِ ويتقلّصُ بالحرارةِ.

قياسٌ: أجدُ مساحةَ كلِّ شكلٍ ممّا يأتي بدلالةِ x:

15


14


13


مهاراتُ التفكيرِ العُليا

16 **أكتشفُ المختلفَ:** أحددُ العبارةَ المختلفةَ عَنْ بقيةِ العباراتِ:

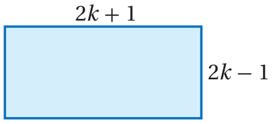
x^2+2x+1	$x^2+8x+16$	$x^2+6x+18$	$x^2-10x+25$

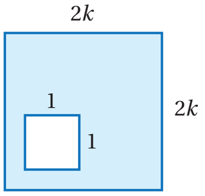
17 **تحدٍّ:** هَلْ توجدُ قاعدةٌ لحسابِ $(x-y)^3$؟

إرشادٌ

لحلِّ هذا السؤالِ، أكتبُ المقدارَ بصورةِ ضربٍ مكرّرٍ.

18 **تبريرٌ:** أبيّنُ أنَّ مساحتَي الجزأينِ المظلّلينِ في الشكلَينِ المجاورَينِ متساويتانِ أَمْ لا. أبرّرُ إجابتي.





19 **أكتبُ** أكتبُ فقرةً أبيّنُ فيها كيفَ أجدُ مربعَ مجموعِ حدَّينِ.

نشاطٌ مفاهيميٌّ تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

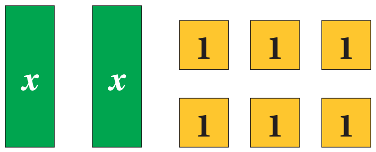
الهدفُ: أحللُ مقدارًا جبريًّا معطًى على صورةِ $ax + b$ أوِ الصورةِ $x^2 + bx$ باستعمالِ القطعِ الجبريةِ.

عندَ ضربِ عددَينِ أوْ أكثرَ فإنَّ كلًّا مِنْهُما يُسمّى عاملًا لناتجِ الضربِ.

في بعضِ الأحيانِ، يكونُ ناتجُ الضربِ معلومًا والمطلوبُ إيجادَ العواملِ، وتُسمَى هذهِ العمليةُ **التحليلَ**. يمكنُ استعمالُ القطعِ الجبريةِ لتحليلِ المقاديرِ الجبريةِ.

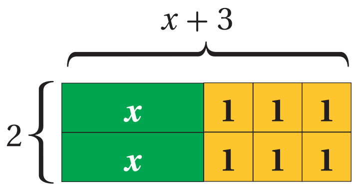
نشاطٌ 1 أستعملُ القطعَ الجبريةَ لتحليلِ المقدارِ $2x + 6$

الْخُطْوَةُ 1 أمثلُ المقدارَ $2x + 6$ باستعمالِ قطعٍ جبريةٍ:



الْخُطْوَةُ 2 أرتبُ القطعَ الجبريةَ على هيئةِ مستطيلٍ.

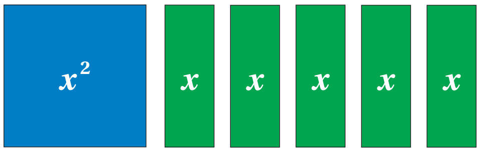
ألاحظُ أنَّ طولَ المستطيلِ $(x+3)$ وعرضَهُ (2) ومساحتَهُ $(2x+6)$.



إذنْ، $2x + 6 = (2)(x + 3)$

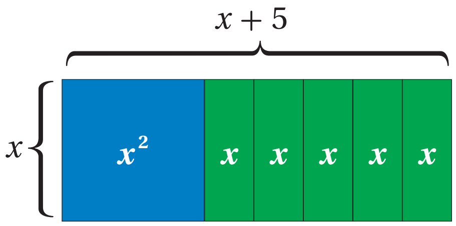
نشاطٌ 2 أستعملُ القطعَ الجبريةَ لتحليلِ المقدارِ $x^2 + 5x$

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ القطعَ الجبريةَ لتمثيلِ المقدارِ $x^2 + 5x$



الْخُطْوَةُ 2 أرتبُ القطعَ الجبريةَ على هيئةِ مستطيلٍ.

ألاحظُ أنَّ طولَ المستطيلِ $(x + 5)$ وعرضَهُ (x) ومساحتَهُ $(x^2 + 5x)$



إذنْ، $x^2 + 5x = x\,(x + 5)$

أتدربُ:

أستخدمُ القطعَ الجبريةَ لتحليلِ كلِّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي:

① $5x + 5$ ② $2x + 8$ ③ $x^2 + 7x$ ④ $x^2 + 4x$

الدرسُ 2 التحليلُ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

فكرةُ الدرسِ

أحلِّلُ مقاديرَ جبريةً بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ.

المصطلحاتُ

الصورةُ التحليليةُ، التحليلُ، التجميعُ.

أستكشفُ

شاشةُ تلفازٍ مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $2x^2 + 60x$ سنتيمترًا مربعًا، وعرضُها $2x$ سنتيمترًا، ما طولُها بدلالةِ x؟

كتابةُ الحدِّ الجبريِّ **بالصورةِ التحليليةِ** (factored form) تعني كتابتَهُ على صورةِ حاصلِ ضربِ أعدادٍ أوليةٍ ومتغيراتٍ كلٌّ مِنْها مرفوعٌ للأُسِّ 1 ، وعندَ كتابةِ الحدِّ الجبريِّ بالصورةِ التحليليةِ فإنَّنا نقولُ إنَّهُ حُلِّلَ **تحليلًا كاملًا**.

$$18x^3 = 6 \times 3 \times x \times x^2$$

ليسَ مكتوبًا بالصورةِ التحليليةِ
(ليسَ تحليلًا كاملًا)

$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$

مكتوبٌ بالصورةِ التحليليةِ
(تحليلٌ كاملٌ)

تعلمْتُ سابقًا أنَّ العاملَ المشتركَ الأكبرَ (ع. م. أ) لعددَينِ أوْ أكثرَ يساوي ناتجَ ضربِ العواملِ الأوليةِ المشتركةِ بينَها، ويمكنُ أيضًا إيجادُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ لحدَّينِ جبريَّينِ أوْ أكثرَ بطريقةٍ مشابهةٍ.

مثال 1

أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدَّينِ الجبريَّينِ في كلٍّ ممّا يأتي:

① $12y^2, 18y$

أكتبُ كلَّ حدٍّ بالصورةِ التحليليةِ

$$12y^2 = \textcircled{3} \times 2 \times \textcircled{2} \times \textcircled{y} \times y$$

ثُمَّ أحددُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ

$$18y = \textcircled{3} \times 3 \times \textcircled{2} \times \textcircled{y}$$

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ للحدَّينِ الجبريَّينِ $2y^2$ وَ $18y$ هُوَ: $3 \times 2 \times y = 6y$

2 $20z^2 d, 10z^5 dc$

أكتبُ كلَّ حدٍّ بالصورةِ التحليليةِ

ثُمَّ أحددُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ

$$20z^2 d = 5 \times 2 \times 2 \times z \times z \times d$$

$$10z^5 dc = 5 \times 2 \times z \times z \times z \times z \times z \times d \times c$$

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ للحدَّينِ الجبريّينِ $20z^2 d$ وَ $10z^5 dc$ هُوَ $5 \times 2 \times z \times z \times d = 10z^2$ d

أتحققُ من فهمي:

3 $14b^2c, 21c^3$

4 $2y^3x^5, 3y^5x^3$

أتذكرُ

يحتوي المقـــدارُ الجبريُّ حدًّا جبريًّا أوْ أكثرَ.

تعلمْتُ سابقًا استعمالَ خاصيةِ التوزيعِ لضربِ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ:

$$3x(x+8) = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x^2 + 24x$$

يمكنُ عكسُ خطواتِ هذهِ العمليةِ لإعادةِ كتابةِ مقاديرَ جبريةٍ على صورةِ حاصلِ ضربِ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ:

$$3x^2 + 24x = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x(x+8)$$

تحليلُ (factoring) المقدارِ الجبريِّ بإخراجِ العاملِ المشـــتركِ الأكبرِ لحدودِهِ يعني تحليلَه تحليلًا كاملًا باستعمالِ عمليةٍ عكسيةٍ لعمليةِ التوزيعِ (خاصيةُ التوزيعِ).

$2y(6y+8)$

ليسَ تحليلًا كامـــلًا؛ لأنَّ $(6y+8)$ يمكنُ تحليلُها على صورةِ $2(3y+4)$

$4y(3y+4)$

تحليلٌ كاملٌ

مثال 2 أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

① $6x + 18$

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدَّينِ $6x$ وَ 18

أحللُ كلَّ حدٍّ إلى عواملِهِ الأوليةِ
وأحددُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ

$$6x = \textcircled{2} \times \textcircled{3} \times x$$

$$18 = \textcircled{2} \times \textcircled{3} \times 3$$

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ هُوَ: $2 \times 3 = 6$

الْخُطْوَةُ 2 أكتــبُ كلَّ حدٍّ على صورةِ ناتجِ ضربِ العاملِ المشــتركِ الأكبرِ في بقيةِ العوامــلِ، ثُمَّ أُخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ.

$$6x + 18 = 6(x) + 6(3)$$ أعيدُ كتابةَ كلِّ حدٍّ باستعمالِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$$= 6(x + 3)$$ أُخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ

إذنْ، $6x + 18 = 6(x + 3)$

② $6b^2 k + 8k^3 b^5 + 12k^2$

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدودِ الّتي يتكوّنُ مِنْها المقدارُ الجبريُّ.

أحللُ كلَّ حدٍّ إلى
عواملِهِ الأوليةِ

$$6b^2 k = \textcircled{2} \times 3 \times b \times b \times \textcircled{k}$$

$$8k^3 b^5 = \textcircled{2} \times 2 \times 2 \times \textcircled{k} \times k \times k \times b \times b \times b \times b \times b$$

$$12k^2 = \textcircled{2} \times 2 \times 3 \times \textcircled{k} \times k$$

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ هُوَ: $2 \times k = 2k$

الْخُطْوَةُ 2 أكتــبُ كلَّ حدٍّ على صورةِ ناتجِ ضربِ العاملِ المشــتركِ الأكبرِ في بقيةِ العوامــلِ، ثُمَّ أُخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ.

$$6b^2k+8\,k^3b^5+12k^2 = 2k(3b^2)+2k(4k^2b^5)+2k(6k)$$ أعيدُ كتابةَ كلِّ حدٍّ باستعمالِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$$= 2k(3b^2 + 4\,k^2b^5 + 6k)$$ أُخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ

إذنْ، $6b^2 k + 8\,k^3 b^5 + 12k^2 = 2k(3b^2 + 4\,k^2 b^5 + 6k)$

أتحققُ من فهمي:

③ $20y + 12$

④ $7d^2 - 5d$

⑤ $3r^2c^3 + 6r^5 + 21r^7$

⑥ $2 - 16x + 8y$

يمكنُ أيضًا تحليلُ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ الّتي تحتوي أربعةَ حدودٍ جبريةٍ أَوْ أكثرَ باستعمالِ طريقةِ **التجميع** (grouping)، وذلكَ بتجميعِ الحدودِ الّتي توجدُ عواملُ مشتركةٌ بينَها، ويمكنُ أَنْ تكونَ هذهِ العواملُ المشتركةُ مقاديرَ جبريةً (ليسَتْ حدودًا فحسبُ).

مفهومٌ أساسيٌّ — التحليلُ بتجميعِ الحدودِ

- **بالكلماتِ:** يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ بالتجميعِ إذا تحققَتْ فيهِ الشروطُ الآتيةُ جميعُها:
  - إذا احتوى أربعةَ حدودٍ أَوْ أكثرَ.
  - إذا احتوى عواملَ مشتركةً بَيْنَ الحدودِ يمكنُ تجميعُها معًا.
  - إذا احتوى عاملَينِ مشتركَينِ متساويَينِ كانَ أحدَهُما نظيرًا جمعيًّا (معكوسًا) للآخَرِ.
- **بالرموزِ:**

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

مثال 3

أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

① $5ab + 10a + 7b + 14$

$5ab + 10a + 7b + 14 = (5ab + 10a) + (7b + 14)$ أُجمِّعُ الحدودَ ذاتَ العواملِ المشتركةِ

$= 5a(b + 2) + 7(b + 2)$ أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= (b + 2)(5a + 7)$ أخرجُ $(b + 2)$ عاملًا مشتركًا

② $6m^3 - 12mn + m^2 n - 2n^2$

أُجمِّعُ الحدودَ ذاتَ العواملِ المشتركةِ	$6m^3-12mn+m^2 n-2n^2 = (6m^3-12mn)+(m^2 n-2n^2)$
أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ	$= 6m(m^2-2n) + n(m^2-2n)$
أخرجُ (m^2-2n) عاملًا مشتركًا	$= (m^2-2n)(6m+n)$

أتحققُ من فهمي:

③ $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

④ $4s^2 - s + 12st - 3t$

عندَ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ، ألاحظُ أحيانًا وجودَ معكوسِ بعضِ العواملِ، فمثلًا $(3-x)$ هُوَ معكوسُ $(x-3)$ لأنَّ $(3-x) = -1(x-3)$

مثال 4

أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

① $2m(7m-3) + 4(3-7m)$

أكتبُ $(3-7m)$ بصورةِ $-1(7m-3)$	$2m(7m-3)+4(3-7m) = 2m(7m-3) + 4(-1)(7m-3)$
أضربُ: $4(-1) = -4$	$= 2m(7m-3)-4(7m-3)$
أخرجُ $7m-3$ عاملًا مشتركًا	$= (7m-3)(2m-4)$
أخرجُ 2 عاملًا مشتركًا	$= 2(7m-3)(m-2)$

② $15x - 5xy + 6y^2 - 18y$

أُجمِّعُ الحدودَ ذاتَ العواملِ المشتركةِ	$15x - 5xy + 6y^2-18y = (15x-5xy)+(6y^2-18y)$
احللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ	$= 5x(3-y) + 6y(y-3)$
أكتبُ $(y-3)$ بصورةِ $-1(3-y)$	$= 5x(3-y) + 6y(-1)(3-y)$
أخرجُ $3-y$	$= (3-y)(5x-6y)$

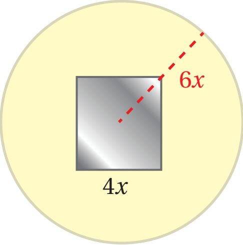
أتحقق من فهمي:

③ $a(r-t)+m(t-r)$

④ $2t-14st+7st^2-t^2$

يُستعملُ تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ.

مثال 5: منَ الحياةِ



نجارةٌ: **يبيّنُ الشكلُ المجاورُ لوحًا خشبيًّا دائريَّ الشكلِ طولُ نصفِ قطرِهِ $6x$ سنتيمترًا، تتوسطُهُ مرآةٌ مربعةٌ طولُ ضلعِها $4x$ سنتيمترًا. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ المنطقةِ الّتي لا تغطّيها المرآةُ مِنَ اللوحِ الخشبيِّ بدلالةِ x، وأحللُ المقدارَ تحليلًا كاملًا.**

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ مساحةَ المنطقةِ الّتي لا تغطّيها المرآةُ مِنَ اللوحِ الخشبيِّ بدلالةِ x:

قانونُ مساحةِ الدائرةِ	$A_1 = r^2\pi$
بتعويضِ $r = 6x$	$= (6x)^2\,\pi = 36\pi x^2$
قانونُ مساحةِ المربعِ	$A_2 = s^2$
بتعويضِ $s = 4x$	$= (4x)^2 = 16x^2$
مساحةُ المنطقةِ الظاهرةِ مِنَ اللوحِ الخشبيِّ	$A = A_1 - A_2$
بالتعويضِ	$= 36\pi x^2 - 16x^2$

إذنْ، مساحةُ المنطقةِ الّتي لا تغطّيها المرآةُ مِنَ اللوحِ الخشبيِّ تساوي $36\pi x^2 - 16x^2$ سنتيمترًا مربعًا.

الْخُطْوَةُ 2 أحللُ المقدارَ $36\ \pi x^2 - 16x^2$ تحليلًا كاملًا:

أحللُ كلَّ حدٍّ إلى عواملِهِ الأوليةِ وأحددُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ

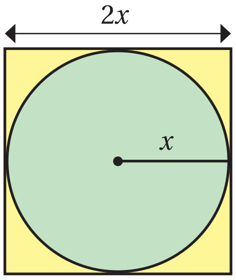
$$36\pi x^2 = \enclose{circle}{2} \times 3 \times \enclose{circle}{2} \times 3 \times \pi \times \enclose{circle}{x} \times \enclose{circle}{x}$$
$$16x^2 = \enclose{circle}{2} \times 2 \times \enclose{circle}{2} \times 2 \times \enclose{circle}{x} \times \enclose{circle}{x}$$

إذنْ، العاملُ المشتركُ الأكبرُ هُوَ: $2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$

أعيدُ كتابةَ كلِّ حدٍّ باستعمالِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ	$36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2\,(9\pi) - 4x^2\,(4)$
أخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ خارجَ القوسِ	$= 4x^2\,(9\pi - 4)$

إذنْ، $36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2\,(9\pi - 4)$

أتحققُ من فهمي:



يبيّنُ الشكلُ المجاورُ قطعةَ أرضٍ مربعةَ الشكلِ، يتوسطُها حوضُ قمحٍ دائريُّ الشكلِ يُروى بمرشٍّ دوّارٍ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ المنطقةِ غيرِ المزروعةِ بالقمحِ بدلالةِ x، وأحلّلُ المقدارَ تحليلًا كاملًا.

أتدرب وأحل المسائل

أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدَّينِ الجبريَّينِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $12a, 16ab$

2 $8a, 12b$

3 $10x^6y^3, 45xy^7$

4 $12d^2w^2r^5, 4w^3d^{10}$

5 $n^3s^5r^5, 6ns^3r^7$

6 $5k^8w^3h^2, 11k^2h^4$

أحلّلُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

7 $6r^2-10r$

8 ab^2-2ab

9 $12n^2m-8nm^3$

10 $15wx-10wy^2$

11 $4t^2+2t-12tu$

12 $12p+24q-6$

أحلّلُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

13 $y-2y^2-18y+9$

14 $48ab-90a+32b-60$

15 **طاقةٌ بديلةٌ:** ركّبَ أحمدُ خلايا شمسيةً على سطحِ منزلِهِ، فإذا علمْتُ أنَّ مساحةَ اللوحِ الشمسيِّ $6y(y-4)+10(4-y)$ وحدةً مربعةً، وطولَهُ $(4-y)$، فأجدُ عرضَهُ بدلالةِ y.

أكملُ التحليلَ في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $12y-32=\ldots\ldots(3y-8)$

17 $18c-6=\ldots\ldots(\ldots\ldots-1)$

18 $t^2+t=\ldots\ldots(\ldots\ldots+1)$

19 $2a^2+ab=\ldots\ldots(2a+\ldots\ldots)$

معلومةٌ

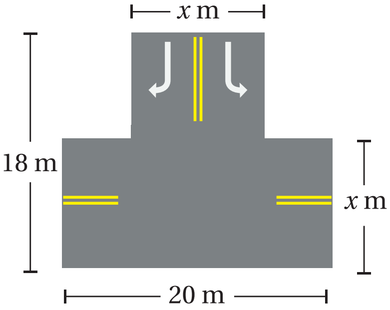
تُطلى واجهةُ القرصِ المدمجِ الّتي تخزنُ البياناتِ بطبقةٍ رقيقةٍ مِنَ الألمنيومِ النقيِّ، وتُستعملُ أشعةُ الليزرِ في تسجيلِ البياناتِ عليها.

20 **حواسيبُ:** حافظةُ أقراصٍ مدمجةٍ مربعةُ الشكلِ، طولُ ضلعِها $4x$، فإذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ القرصِ المدمجِ $2x$، فأكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ المساحةَ السوداءَ المحيطةَ بالقرصِ في الشكلِ المجاورِ، وأحلِّلُهُ تحليلًا كاملًا.

21 **هندسةٌ:** يمثلُ المقدارُ الجبريُّ $2\pi r^2 + 2\pi rh$ المساحةَ الكليةَ لسطحِ أسطوانةٍ حيثُ r طولُ نصفِ قطرِ القاعدةِ وَ h الارتفاعُ. أحللُ هذا المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملًا.

22 **أجهزةٌ:** أعودُ إلى فقرةِ (أستكشف)، وأحلُّ المسألةَ.

23 **مرورٌ:** يظهرُ في الشكلِ المجاورِ تقاطعٌ مروريٌّ أُعيدَ تعبيدُهُ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ المنطقةِ الّتي أُعيدَ تعبيدُها، وأحلّلُه تحليلًا كاملًا.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** يقولُ كلٌّ مِنْ خالدٍ وسلمانَ ومثنّى إنَّهُ حللَ المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملًا على النحوِ الآتي، أكتشفُ الخطأَ في حلِّ كلٍّ منهُمْ، وأصحّحُهُ.

خالدٌ	سلمانُ	مثنّى
$4g + 6 = 4(g+2)$	$2a^2 - 3a = a(2^2 - 3)$	$18h^2 + 45h = 3h(6h + 15)$

مسألةٌ مفتوحةٌ: أملأُ الفراغاتِ في كلٍّ ممّا يأتي بحدودٍ جبريةٍ لأحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ:

25 ..... + ... = ... (..... + ...)

26 ..... − ..... = ... (..... − .....)

27 **أكتبُ** أكتبُ فقرةً أبيّنُ فيها كيفيةَ تحليلِ مقدارٍ جبريٍّ بطريقةِ التجميعِ.

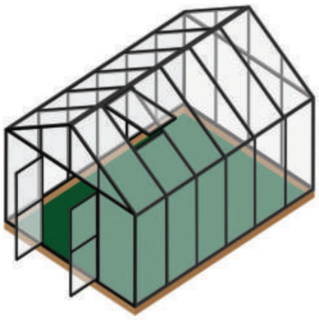
الدرسُ 3 تحليلُ ثلاثياتِ الحدودِ $x^2 + bx + c$

فكرةُ الدرسِ

أحلِّلُ ثلاثياتِ حدودٍ على صورةِ $x^2 + bx + c$

أستكشفُ

لدى عمرانَ بيتٌ زجاجيٌّ للزراعةِ يغطي منطقةً مستطيلةَ الشكلِ، مساحتُها $x^2 + 5x + 6$ مترًا مربعًا وعرضُها $(x + 2)$ مترًا. ما طولُ المنطقةِ الّتي يغطّيها البيتُ الزجاجيُّ؟



عندَ ضربِ مقدارَينِ جبريَّينِ، فإنَّ كلًّا منهُما يكونُ عاملًا لناتجِ الضربِ.

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 2 \times 3$$ خاصيةُ التوزيعِ

$$= x^2 + (3 + 2)x + 2 \times 3$$ بتجميعِ الحدَّينِ المتشابهَينِ

$$= x^2 + (5)x + 6$$ بالتبسيطِ

ألاحظُ النمطَ الآتيَ في عمليةِ الضربِ السابقةِ:

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + (3 + 2)x + (2 \times 3)$$

$$(x + m)(x + n) = x^2 + (n + m)x + mn$$

$$= x^2 + \underbrace{(m + n)x}_{bx} + \underbrace{mn}_{c}$$

$$= x^2 + \quad bx \quad + \quad c$$

$b = m + n$ and $c = mn$

إذنْ، معاملُ الحدِّ الأوسطِ يساوي مجموعَ m وَ n، وَالحدُّ الأخيرُ يساوي ناتجَ ضربِ m وَ n .

ويمكنُ استعمالُ هذا النمطِ لتحليلِ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ التي على صورةِ $x^2 + bx + c$

مفهومٌ أساسيٌّ **تحليلُ ثلاثيةِ الحدودِ $x^2 + bx + c$**

- **بالكلماتِ:** لتحليلِ ثلاثيةِ حدودٍ على صورةِ $x^2 + bx + c$ أجدُ عددَينِ صحيحَينِ m وَ n مجموعُهُما يساوي (b)، وحاصلُ ضربِهما يساوي (c)، ثُمَّ أكتبُ $x^2 + bx + c$ على صورةِ $(x+m)\ (x + n)$.
- **بالرموزِ:** $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ حيثُ $m \times n = c$ ، $m + n = b$

إذا كانَتْ إشارةُ c موجبةً في ثلاثيِّ الحدودِ $x^2 + bx + c$، فيكونُ لِـ m وَ n الإشارةُ نفسُها. ويعتمد تحديدُ إشارةِ كلٍّ مِنْ m وَ n (موجبةً أَوْ سالبةً) على إشارةِ b، فإذا كانَتْ إشارةُ b موجبةً فإنَّ إشارتَهُما موجبةٌ، وإذا كانَتْ إشارةُ b سالبةً، فإنَّ إشارتَهُما سالبةٌ.

مثال 1

أحلِّلُ $x^2 + 7x + 12$

بما أنَّ $b = 7, c = 12$ فيجبُ إيجادُ عددَينِ موجبَينِ مجموعُهُما 7 وحاصلُ ضربِهِما 12

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 12 الموجبةِ، وأحددُ العاملَينِ اللّذَينِ مجموعُهُما 7

أزواجُ عواملِ العددِ 12 الموجبةُ	1 , 12	2 , 6	3 , 4
مجموعُ العاملَينِ	13	8	7

العاملانِ الصحيحانِ

أكتبُ القاعدةَ $$x^2 + 7x + 12 = (x + m)(x + n)$$

أعوضُ $m = 3, n = 4$ $$= (x + 3)(x + 4)$$

أتحققُ: أتحققُ مِنْ صحةِ التحليلِ بضربِ العاملَينِ:

خاصيةُ التوزيعِ $$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 4x + 3x + 12$$

بالتبسيطِ $$= x^2 + 7x + 12 \quad ✓$$

أتحققُ من فهمي:

① $x^2 + 11x + 10$

② $x^2 + 9x + 14$

إذا كانَتْ c موجبةً، وَ b سالبةً في ثلاثيِّ الحدودِ $x^2 + bx + c$، فانَّ لكلٍّ مِنْ m وَ n إشارةً سالبةً.

مثال 2 أحلّلُ $x^2-10x+16$

في ثلاثيِّ الحدودِ المُعطى $b=-10, c=16$، وهذا يعني أنَّ $m+n$ سالبةٌ وَ nm موجبةٌ. إذنْ، يجبُ أنْ تكونَ إشارةُ كلٍّ مِنْ n وَ m سالبةً. أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 16 السالبةَ، وأحددُ زوجَ العواملِ الّذي مجموعُهُ -10

العاملانِ الصحيحانِ

$-4\,,\ -4$	$\boxed{-2\,,\ -8}$	$-1\,,\ -16$	أزواجُ عواملِ العددِ 16 السالبةُ
-8	-10	-17	مجموعُ العاملَينِ

أكتبُ القاعدةَ $\quad x^2-10x+16=(x+m)(x+n)$

أعوضُ $m=-2, n=-8$ $\quad =(x-2)(x-8)$

أتحققُ: أتحققُ مِنْ صحةِ التحليلِ بضربِ العاملَينِ:

خاصيةُ التوزيعِ $\quad (x-2)(x-8)=x^2-2x-8x+16$

بالتبسيطِ $\quad =x^2-10x+16$ ✓

أتحققُ من فهمي:

① y^2-5y+6

② $x^2-11x+30$

إذا كانَتْ إشارةُ c سالبةً في ثلاثيِّ الحدودِ x^2+bx+c، فإنَّ لِكلٍّ مِنْ m وَ n إشارتَينِ مختلفتَينِ.

مثال 3 أحلّلُ x^2+x-20

في ثلاثيِّ الحدودَ المُعطى $b=1, c=-20$، وهذا يعني أنَّ إشارةَ $m+n$ موجبةٌ وَإشارةَ nm سالبةٌ. إذنْ، يجبُ أنْ تكونَ إشارةُ n أوْ m سالبةً، وليسَ كلتاهُما. أنشئُ قائمةً منظمةً مِنْ أزواجِ عواملِ العددِ (-20) مختلفةَ الإشارةِ، وأحددُ زوجَ العواملِ الّذي مجموعُهُ 1

العاملانِ الصحيحانِ

$\boxed{-4\,,\ 5}$	$4, -5$	$-2, 10$	$2, -10$	$-1, 20$	$1, -20$	أزواجُ عواملِ العددِ (-20) مختلفةُ الإشارةِ
1	-1	8	-8	19	-19	مجموعُ العاملَينِ

أكتبُ القاعدةَ $x^2 + x - 20 = (x + m)(x + n)$

أعوضُ $m = -4, n = 5$ $= (x - 4)(x + 5)$

أتحققُ: أتحققُ مِنْ صحةِ التحليلِ بضربِ العاملَيْنِ:

خاصيةُ التوزيعِ $(x - 4)(x + 5) = x^2 + 5x - 4x - 20$

بالتبسيطِ $= x^2 + x - 20$ ✓

أتحققُ من فهمي:

① $x^2 + 2x - 8$

② $x^2 - x - 42$

يُستعملُ التحليلُ لإيجادِ مقدارٍ جبريٍّ يمثلُ طولَ أَوْ عرضَ مستطيلٍ مساحتُهُ معطاةٌ على صورةِ ثلاثيِّ حدودٍ $x^2 + bx + c$، حيثُ يمثلُ الطولُ والعرضُ عاملَيْ ثلاثيِّ الحدودِ.

مثال 4: منَ الحياةِ

يمثلُ ثلاثيُّ الحدودِ $x^2 + 9x + 18$ مساحةَ مرآةٍ مستطيلةِ الشكلِ بالمترِ المربعِ. إذا كانَ عرضُ المرآةِ $(x + 3)$ مترًا، فأجدُ كلًّا مِنْ طولِها ومحيطِها بدلالةِ x.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ طولَ المرآةِ بدلالةِ x .

يمثلُ عرضُ المرآةِ $(x + 3)$ أحدَ عاملَيْ $x^2 + 9x + 18$ إذنْ $m = 3$

أبحثُ عَنْ قيمةِ n الّتي ناتجُ ضربِها في 3 يساوي 18 وناتجُ جمعِها إلى العددِ 3 يساوي 9

إذنْ، $n = 6$، والمقدارُ الجبريُّ الّذي يمثلُ طولَ المرآةِ هُوَ $(x + 6)$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ محيطَ المرآةِ بدلالةِ x .

قانونُ محيطِ المستطيلِ $P = 2l + 2w$

أعوضُ: $l = (x + 6), w = (x + 3)$ $= 2(x + 6) + 2(x + 3)$

خاصيةُ التوزيعِ $= 2x + 12 + 2x + 6$

أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ $= 4x + 18$

إذنْ، محيطُ المرآةِ يساوي $(4x + 18)$ مترًا.

أتحققُ من فهمي:

يمثلُ ثلاثيُّ الحدودِ $x^2 - 25x + 100$ مساحةَ بابٍ مستطيلِ الشكلِ بالمترِ المربعِ.

إذا كانَ طولُ البابِ $(x - 5)$ مترًا، فأجدُ كلًّا مِنْ عرضِهِ ومحيطِهِ بدلالةِ x

أتدرب وأحل المسائل

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

1 $x^2 + 2x - 24$

2 $y^2 + 3y - 10$

3 $x^2 + 29x + 100$

4 $w^2 - 6w + 8$

5 $-10q + q^2 + 21$

6 $y^2 + 20y + 100$

7 $a^2 + 5a + 6$

8 $w^2 - 9w - 10$

9 $x^2 + x - 30$

10 $13y + 30 + y^2$

11 $w^2 + 11w + 18$

12 $t^2 - t - 90$

13 $f^2 + 22f + 21$

14 $h^2 - h - 72$

15 $m^2 - 18m + 81$

يمثلُ كلُّ ثلاثيِّ حدودٍ ممّا يأتي مساحةَ مستطيلٍ بالمترِ المربعِ. أجدُ مقدارَينِ جبريَّينِ يمثلانِ طولًا وعرضًا ممكنَينِ لكلِّ مستطيلٍ.

16 $x^2 + x - 72$

17 $x^2 - 8x - 9$

18 $x^2 + 2x - 48$

إرشادٌ

أولًا: أخرجُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدودِ الثلاثةِ، ثُمَّ أحللُ.

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

19 $3x^3y + 18x^2y - 21xy$

20 $2x^3 - 2x^2 - 4x$

21 $2x^3 - 4x^2 - 6x$

22 $5x^3y - 35x^2y + 50xy$

23 $3x^3 + 12x^2 + 9x$

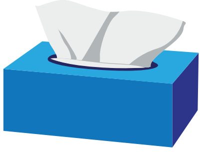
24 $4x^3 - 8x^2 - 12x$

25 **صحةٌ:** تقومُ مؤسسةُ الحسينِ للسرطانِ بحملةِ توعيةٍ بأهميةِ الفحصِ المبكرِ للسرطانِ، عَنْ طريقِ لوحاتٍ إعلانيةٍ مستطيلةِ الشكلِ على الطّرقاتِ. إذا كانَتْ مساحةُ إحدى هذهِ اللوحاتِ $(x^2 +14x +48)$ مترًا مربعًا وعرضُها $(x + 6)$ مترًا، فأجدُ طولَ اللوحةِ ومحيطَها بدلالةِ (x).

إرشادٌ

مؤسسةُ الحسينِ للسرطانِ مكرّسةٌ لمكافحةِ مرضِ السرطانِ، وتتضمنُ مهامُّها: جمعَ التبرعاتِ، وحشدَ الجهودِ لمكافحةِ السرطانِ، وتنفيذَ برامجِ الوقايةِ مِنْهُ، والكشفَ المبكرَ عَنْهُ.

26 **ورقٌ صحيٌّ:** علبةُ ورقٍ صحيٍّ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُهُ $x^3 + 5x^2 +4x$ سنتيمترًا مكعبًا. أجدُ قياسًا ممكنًا لكلٍّ مِنْ طولِ العلبةِ وعرضِها وارتفاعِها بدلالةِ x.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: أجدُ 3 قيمٍ ممكنةٍ للعددِ الصحيحِ m في كلٍّ ممّا يأتي، بحيثُ يكونُ ثلاثيُّ الحدودِ قابلًا للتحليلِ، ثُمَّ أحللُهُ:

27 $x^2 + mx -15$

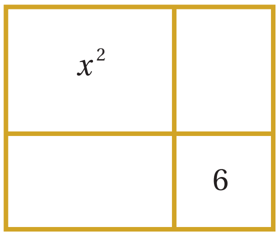
28 $x^2 -7x + m$

29 **تحدٍّ:** أحللُ المقدارَ $(x -3)^2 - 2(x -3) - 8$

إرشادٌ

يمكنُني فكُّ الأقواسِ ثُمَّ التحليلُ، ويمكنُني أيضًا فرضُ أنَّ $y = x - 3$ وإتمامُ الحلِّ.

30 **تحدٍّ:** في الشكلِ المجاورِ مستطيلٌ بُعداهُ $x+a, x+b$، قُسِّمَ إلى أربعةِ أجزاءٍ مساحةُ اثنَينِ منها x^2 و6 وحداتٍ مربعةٍ، أبيّنُ أنّهُ توجدُ قيمتانِ ممكنتانِ لكلٍّ مِنْ a و b.



31 **أكتشفُ الخطأَ:** حللَ كلٌّ مِنْ آدمَ وماريا العبارةَ $y^2+6y-16$ على النحوِ الآتي:

آدم	ماريا
$y^2 +6y-16 = (y - 2)(y + 8)$	$y^2 +6y-16 = (y + 2)(y - 8)$

مَنْ منهُما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

32 **أكتبُ** كيفَ أحددُ قيمةَ كلٍّ مِنْ m و n عندَ تحليلِ y^2-3y-4 على صورةِ $(y + m)(y + n)$؟

الدرسُ 4 حالاتٌ خاصةٌ مِنَ التحليلِ

فكرةُ الدرسِ

- أحللُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ فرقًا بَيْنَ مربعَين.
- أحللُ مربعًا كاملًا ثلاثيَّ الحدودِ.

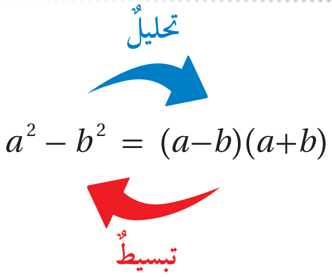
المصطلحاتُ

مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ.

أستكشفُ

يُستعملُ المقدارُ الجبريُّ $\frac{1}{2}dv^2-\frac{1}{2}du^2$ لحسابِ الفرقِ بَيْنَ قيمتَي الضغطِ الجويِّ فوقَ جناحِ الطائرةِ وأسفلَهُ، حيثُ d هِيَ كثافةُ الهواءِ وَ v سرعةُ الهواءِ فوقَ الجناحِ وَ u سرعةُ الهواءِ أسفلَهُ. كيفَ أحللُ هذا المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملًا؟

تعلمْتُ سابقًا كيفيةَ ضربِ مقدارَينِ جبريَّينِ على صورةِ $(a-b)(a+b)$، حيثُ يكونُ الناتجُ دائمًا فرقًا بينَ مربعَينِ على صورةِ a^2-b^2 . ولتحليلِ الفرقِ بَيْنَ مربعَينِ يمكنُ اتباعُ خطواتٍ عكسيةٍ لعمليةِ ضربِ مجموعِ حدَّينِ في الفرقِ بينَهُما.



مفهومٌ أساسيٌّ تحليلُ الفرقِ بَيْنَ مربعَينِ

- **بالكلماتِ:** الفرقُ بَيْنَ مربعَيْ حدَّينِ يساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحدَّينِ في الفرقِ بينَهُما.
- **بالرموزِ:** $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

مثال 1

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

① x^2-25

أكتبُ المقدارَ على صورةِ a^2-b^2

$$x^2-25=x^2-5^2$$

أحللُ الفرقَ بَيْنَ مربعَينِ

$$=(x-5)(x+5)$$

② $4y^2-9z^2$

أكتبُ المقدارَ على صورةِ a^2-b^2

$$4y^2-9z^2=(2y)^2-(3z)^2$$

أحللُ الفرقَ بَيْنَ مربعَينِ

$$=(2y-3z)(2y+3z)$$

أتحققُ من فهمي:

③ $x^2 - 100$

④ $100y^2 - 36$

⑤ $81d^2 - 49r^2$

⑥ $64c^2 - 1$

يحتاجُ تحليلُ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ إلى إجراءِ خطوتَينِ، مثلِ إخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ للحدودِ جميعِها، ثُمَّ تحليلِ ما تبقّى مِنَ المقدارِ باستعمالِ قاعدةِ تحليلِ الفرقِ بَيْنَ مربعَينِ.

مثال 2

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

① $27xy^3 - 3xy$

$27xy^3 - 3xy = 3xy\,(9y^2 - 1)$ أحللُ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= 3xy\,(3y - 1)(3y + 1)$ أحللُ المقدارَ $9y^2 - 1$ كفرقٍ بَيْنَ مربعَينِ

② $y^4 - 1$

$y^4 - 1 = (y^2)^2 - (1)^2$ أكتبُ المقدارَ على صورةِ $a^2 - b^2$

$= (y^2 - 1)(y^2 + 1)$ أحللُ الفرقَ بَيْنَ مربعَينِ

$= (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1)$ أحللُ المقدارَ $y^2 - 1$ كفرقٍ بَيْنَ مربعَينِ

③ $2b^2 - 18 + ab^2 - 9a$

$2b^2 - 18 + ab^2 - 9a = (2b^2 - 18) + (ab^2 - 9a)$ أجمعُ الحدودَ ذاتَ العاملِ المشتركِ

$= 2(b^2 - 9) + a(b^2 - 9)$ أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ

$= (b^2 - 9)(2 + a)$ أخرجُ المقدارَ $(b^2 - 9)$ عاملًا مشتركًا

$= (b - 3)(b + 3)(2 + a)$ أحللُ المقدارَ $(b^2 - 9)$ كفرقٍ بَيْنَ مربعَينِ

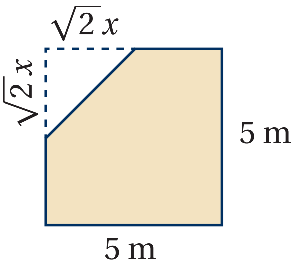
أتحققُ من فهمي:

④ $b^4 - c^4$

⑤ $6w^3 - 24w$

⑥ $4m^4 - 9m^2 + 8m^2k - 18k$

مثال 3: منَ الحياةِ



هندسةٌ معماريةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مخططَ غرفةِ جلوسٍ في منزلِ رغدَ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ الغرفةِ، ثُمَّ أحللُهُ.

مساحةُ الغرفةِ تساوي ناتجَ طرحِ مساحةِ المثلثِ مِنْ مساحةِ المربعِ.

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ الغرفةِ:

مساحةِ المربعِ $A_1 = s^2$

بتعويضِ $s = 5$ $= (5)^2 = 25$

مساحةِ المثلثِ $A_2 = \frac{1}{2} bh$

بتعويضِ $b = x, h = x$ $= \frac{1}{2} (\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) = x^2$

مساحةُ الغرفةِ $A = A_1 - A_2$

بالتعويضِ $= 25 - x^2$

أتذكرُ

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a, a \geq 0$

إذنْ، مساحةُ الغرفةِ تساوي $25 - x^2$ مترًا مربعًا.

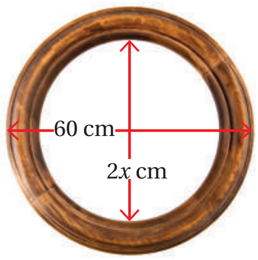
الْخُطْوَةُ 2 أحللُ المقدارَ $25 - x^2$

أكتبُ المقدارَ على صورةِ $a^2 - b^2$ $25 - x^2 = 5^2 - x^2$

أحللُ الفرقَ بَيْنَ مربعَيْنِ $= (5 - x)(5 + x)$

إذنْ، $25 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$

أتحققُ من فهمي:



أعمالٌ فنيةٌ: صنعَ مرادُ إطارَ صورةٍ خشبيًّا دائريًّا كما في الشكلِ المجاورِ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ الإطارِ الخشبيِّ، ثُمَّ أحللُهُ.

تعلمْتُ سابقًا أنَّ أعدادًا مثلَ 64 ,49 ,25 تسمّى مربعاتٍ كاملةً؛ لأنَّ كلًّا مِنْها يساوي ناتجَ ضربِ عددٍ في نفسِهِ:

$$25 = 5 \times 5 = 5^2 \qquad 49 = 7 \times 7 = 7^2 \qquad 64 = 8 \times 8 = 8^2$$

ويعدُّ المقدارُ الجبريُّ الّذي على صورةِ $(a + b)^2$ مربعًا كاملًا أيضًا؛ لأنَّهُ يســـاوي ناتجَ ضربِ $(a + b)$ في نفسِهِ. وتعلمْتُ في الدرسِ الأولِ مِنْ هذهِ الوحدةِ أنَّ تبســـيطَ $(a + b)^2$ وَ $(a - b)^2$ يتبعُ قاعدةً ثابتةً، وأنَّ النتيجةَ تكونُ دائمًا مقدارًا جبريًّا يحتوي ثلاثةَ حدودٍ كما يأتي:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

يسمّى ناتجُ الضربِ في كلٍّ مِنَ الحالتَينِ أعلاهُ **مربعًا كاملًا ثلاثيَّ الحدودِ** (perfect–square trinomial)؛ لأنَّهُ ينتجُ مِنْ ضربِ مقدارٍ جبريٍّ في نفسِـــهِ، ويمكنُ بطريقةٍ عكســـيةٍ تحليلُ أيِّ ثلاثيِّ حدودٍ على صورةِ $a^2 + 2ab + b^2$ إنْ كانَ يمثلُ مربعًا كاملًا إذا حققَ الشروطَ الثلاثةَ الآتيةَ:

$$9x^2 \quad + \quad 24x \quad + \quad 16$$

① الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ.
$9x^2 = (3x)^2$

② الحدُّ الأوسطُ يساوي ضعفَ ناتجِ ضربِ الجذرِ التربيعيِّ لكلٍّ مِنَ الحدّينِ: الأولِ، والأخيرِ.
$24x = 2(3x)(4)$

③ الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ.
$16 = 4^2$

مفهومٌ أساسيٌّ

تحليلُ المربعِ الكاملِ الثلاثيِّ الحدودِ

- **بالرموز:**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

- **مثال:**

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$$

$$25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2 = (5x - 3)(5x - 3)$$

مثال 4

أحددُ ما إذا كانَتْ كلُّ ثلاثيّةِ حدودٍ ممّا يأتي تمثلُ مربعًا كاملًا أَمْ لا، وإذا كانَتْ تمثلُهُ فأحللُها:

① $x^2 + 6x + 9$

- هلِ الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم
- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $2 \times x \times 3$؟ نعم؛ لأنَّ $6x = 2(x)(3)$
- هلِ الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $9 = 3^2$

بما أنّ الشروطَ جميعَها متحققةٌ، فإنَّ $x^2 + 6x + 9$ تشكلُ مربعًا كاملًا.

$$x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$ أكتبُ بصورةِ $a^2 + 2ab + b^2$

$$= (x+3)^2 = (x+3)(x+3)$$ أحللُ

② $x^2 + 2x + 16$

- هلِ الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم
- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $2 \times x \times 4$؟ لا؛ لأنَّ $2x \neq 2(x)(4)$
- هلِ الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $16 = 4^2$

بما أنَّ الشرطَ الثاني غيرُ متحققٍ، فإنَّ $x^2 + 2x + 16$ ليسَتْ مربعًا كاملًا، ولا يمكنُ تحليلُهُ.

أتحققُ من فهمي:

⑤ $x^2 + 10x + \frac{1}{25}$

④ $4x^2 - 12x + 9$

③ $x^2 - 24x + 144$

حينَ لا تُساوي قيمةُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ 1، فإنَّ مِنَ الأسهلِ البدءَ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، ثُمَّ اختيارَ طريقةِ التحليلِ المناسبةِ بحسبِ الترتيبِ المبيّنِ في الجدولِ الآتي:

ملخصُ المفهومِ

تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

عددُ الحدودِ الجبرية	طريقةُ التحليلِ	
2 أَوْ أكثرُ	إخراجُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ	
2	الفرقُ بَيْنَ مربعَين	$a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$
3	مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
	$x^2 + bx + c$	$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ $m + n = b$ and $mn = c$
4 أَوْ أكثرُ	التحليلُ بتجميعِ الحدودِ	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

أتدرب وأحل المسائل

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

① $u^2 - 64$

② $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{25}$

③ $36y^2 - 1$

④ $v^4 - 625r^2$

⑤ $a^2 - w^2z^2$

⑥ $-16y^2 + 49$

أتذكرُ

أتذكرُ أنَّ:

$a^2 - b^2 = -b^2 + a^2$

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

⑦ $ab^2 - 100a$

⑧ $x - x^3$

⑨ $12b^3 + 2b^2 - 192b - 32$

⑩ $d^3 - 5d^2 - 100d + 500$

أحددُ أنَّ كلَّ ثلاثيةِ حدودٍ ممّا يأتي تمثلُ مربعًا كاملًا أَمْ لا، وإذا كانَتْ تمثلُهُ فأحللُها:

⑪ $w^2 - 18w + 81$

⑫ $x^2 + 2x - 1$

⑬ $y^2 + 8y + 16$

⑭ $9x^2 - 30x + 10$

أحللُ كلًّا ممّا يأتي:

15 $3t^3+24t^2+48t$

16 $50g^2+40g+8$

17 $27g^2-90g+75$

18 $18y^2-48y+32$

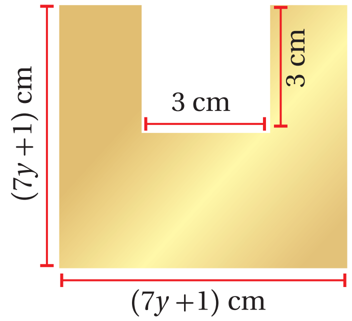
19 $5x^2-60x+180$

20 $16r^3-48r^2+36r$

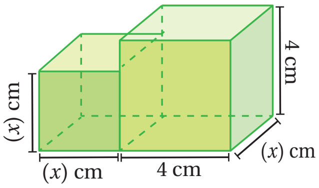
21 $12x^2-84x+147$

22 $4x^2-80x+400$

23 **نحاسٌ:** يبيّنُ الشكلُ المجاورُ صفيحةً مِنَ النحاسِ قبلَ صهرِها وتحويلِها إلى مستطيلٍ لَهُ المساحةُ نفسُها، أجدُ قياسَينِ ممكنَينِ لطولِ المستطيلِ وعرضِهِ بدلالةِ y .



24 يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مخططًا لمستودعَيْ تخزينٍ متجاورَينِ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ الفرقَ بَيْنَ حجمَيِ المستودعَينِ، ثُمَّ أحللُهُ.



معلومةٌ

درجةُ الانصهارِ هِيَ درجةُ الحرارةِ الّتي تتحوّلُ عندَها المادّةُ مِنَ الحالةِ الصلبةِ إلى الحالةِ السائلةِ، ودرجةُ انصهارِ النحاسِ 1085°C

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

25 **تحدٍّ:** مثلثٌ قائمُ الزاويةِ مساحتُهُ $9y^2-16$ وحدةً مربعةً. أجدُ قياسَينِ ممكنَينِ لطولِ قاعدتِهِ وارتفاعِهِ بدلالةِ y.

26 **أكتشفُ الخطأَ:** حللَ إبراهيمُ المقدارَ n^2-64 تحليلًا كاملًا على النحوِ الآتي:

$$\begin{aligned} n^2-64 &= n^2-8^2 \\ &= (n-8)^2 \end{aligned}$$ ✗

هَلْ إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

27 **تبريرٌ:** أصفُ طريقتَينِ لتبسيطِ $(2x-5)^2-(x-4)^2$، وأبيّنُ أيُّ الطريقتَينِ أسهلُ، مبررًا إجابتي.

28 **أكتبُ** أكتبُ طريقةَ تحليلِ فرقٍ بَيْنَ مربعَينِ.

الدرسُ 5 تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

فكرةُ الدرسِ

أكتبُ مقاديرَ جبريةً نسبيةً في أبسطِ صورةٍ.

المصطلحاتُ

المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ.

أستكشفُ

يمثلُ المقـــدارُ الجبريُّ $x^3 + 5x^2 + 4x$ حجمَ حجرِ بناءٍ عازلٍ للحرارةِ بالسنتيمترِ المكعبِ. إذا كانَتْ مساحةُ قاعدةِ الحجرِ $(x^2 + x)$ سنتيمترًا مربعًا، فأجدُ ارتفاعَهُ بدلالةِ x.

المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ (rational algebraic expression) هُوَ كسرٌ بسطُهُ ومقامُهُ مقدارانِ جبريّانِ.

$$\frac{3a-2}{a^2+6a+8} \qquad \frac{6xy^4}{5y} \qquad \frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

مقاديرُ جبريةٌ نسبيةٌ

يكونُ المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا كانَ العاملُ المشتركُ الأكبرُ لكلٍّ مِنْ بسطِهِ ومقامِهِ يساوي 1

مثال 1

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

① $\frac{-5x^2y^3}{20x^4y}$

العاملُ المشتركُ الأكبرُ للبسطِ والمقامِ يساوي $(5x^2y)$

$$\frac{-5x^2y^3}{20x^4y} = \frac{(5x^2y)(-y^2)}{(5x^2y)(4x^2)}$$

أقسمُ كلًّا مِنَ البسطِ والمقامِ على $(5x^2y)$

$$= \frac{\cancel{(5x^2y)}(-y^2)}{\cancel{(5x^2y)}(4x^2)}$$

أبسطُ

$$= \frac{-y^2}{4x^2}$$

أتحققُ من فهمي:

③ $\frac{14a^3b^2}{42ab^3}$

② $\frac{35yz^2}{14y^2z}$

يمكنُني اســتعمالُ طرائقِ التحليلِ الّتي تعلمتُها في الدروسِ الســابقةِ لاختصارِ أيِّ عواملَ مشــتركةٍ لكلٍّ مِنَ بسطِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ ومقامِهِ.

مثال 2

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

① $\frac{6x+12}{6}$

أخرجُ العددَ (6) عاملًا مشتركًا لحدودِ البسطِ

$$\frac{6x+12}{6} = \frac{6(x+2)}{6}$$

أقسمُ كلًّا مِنَ البسطِ والمقامِ على (6)

$$= (x+2)$$

② $\frac{2x^2+2x}{2x}$

أخرجُ $(2x)$ عاملًا مشتركًا لحدودِ البسطِ

$$\frac{2x^2+2x}{2x} = \frac{2x\,(x+1)}{2x}$$

أقسمُ البسطَ والمقامَ على $(2x)$

$$= \frac{\cancel{2x}\,(x+1)}{\cancel{2x}} = x+1$$

③ $\frac{x-1}{x^3-x^2}$

أحللُ المقامَ

$$\frac{x-1}{x^3-x^2} = \frac{x-1}{x^2(x-1)}$$

أقسمُ كلًّا مِنَ البسطِ والمقامِ على $(x-1)$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}}{x^2\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x^2}$$

أتحققُ من فهمي:

④ $\frac{2x+2}{2}$

⑤ $\frac{16x^2+8x}{2x+1}$

⑥ $\frac{x-2x^2}{8-16x}$

يمكنُ اســتعمالُ طريقةِ التجميعِ – التي تعلمتُها ســابقًا– في هذهِ الوحدةِ لتحليلِ بســطِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ أَوْ مقامِهِ أَوْ كليهِما واختصارِ أيِّ عواملَ مشــتركةٍ لَهُما. وعندَ تحليلِ بسطِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ ومقامِهِ ألاحظُ أحيانًا وجودَ معكوسِ بعضِ العواملِ، فمثلًا $(6-x)-$ هُوَ معكوسُ $(6-x)$؛ لأنَّ $(6-x) = -1(x-6)$؛ لذا أكتبُ $\frac{(6-x)}{(x-6)}$ على صورةِ $\frac{-1(x-6)}{(x-6)}$

مثال 3

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

① $\dfrac{5xy - 10x + 2y - 4}{2 - y}$

أُجمِّعُ الحدودَ ذاتَ العاملِ المشتركِ

$$\frac{5xy - 10x + 2y - 4}{2 - y} = \frac{(5xy - 10x) + (2y - 4)}{2 - y}$$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$$= \frac{5x(y-2) + 2(y-2)}{2 - y}$$

أخرجُ $y - 2$ عاملًا مشتركًا لحدودِ البسطِ

$$= \frac{(y-2)(5x+2)}{(2-y)}$$

أكتبُ $(2-y)$ على صورةِ $-(y-2)$

$$= \frac{(y-2)(5x+2)}{-(y-2)}$$

أقسمُ كلًّا مِنَ البسطِ والمقامِ على $(y-2)$

$$= \frac{\cancel{(y-2)}(5x+2)}{-\cancel{(y-2)}} = -(5x+2)$$

أتحقق من فهمي:

② $\dfrac{2ab - 6b + 6 - 2a}{a - 3}$

③ $\dfrac{5h - 3g}{3g^2 - 5gh + 3g - 5h}$

تحتوي بعضُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ ثلاثياتِ حدودٍ على الصورةِ $x^2 - bx + c$ أوْ مقاديرَ جبريةً على صورةِ فرقٍ بَيْنَ مربعَين، ويمكنُني استعمالُ طرائقِ التحليلِ الّتي تعلمْتُها في الدروسِ السابقةِ لتحليلِ هذهِ المقاديرِ الجبريةِ، واختصارِ أيِّ عواملَ مشتركةٍ لكلٍّ مِنْ بسطِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ ومقامِهِ.

مثال 4

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

① $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

أحللُ ثلاثيةَ الحدودِ

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x - 2}$$

أقسمُ كلًّا مِنَ البسطِ والمقامِ على $(x-2)$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}} = x - 1$$

2 $\frac{x^2+6x+8}{x^2-16}$

أحللُ ثلاثيةَ الحدودِ في البسطِ والفرقَ بَيْنَ المربعَينِ في المقامِ

$$\frac{x^2+6x+8}{x^2-16}=\frac{(x+2)(x+4)}{(x-4)\ (x+4)}$$

أقسمُ كلًّا مِنَ البسطِ والمقامِ على $(x + 4)$

$$=\frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{(x-4)\ \cancel{(x+4)}}=\frac{x+2}{x-4}$$

3 $\frac{x^2+10x+25}{x^2+5x}$

أحللُ ثلاثيةَ الحدودِ في البسطِ

$$\frac{x^2+10x+25}{x^2+5x}=\frac{(x+5)^2}{x^2+5x}$$

أخرجُ x عاملًا مشتركًا لحدودِ المقامِ

$$=\frac{(x+5)\ (x+5)}{x(x+5)}$$

أقسمُ كلًّا مِنَ البسطِ والمقامِ على $(x + 5)$

$$=\frac{(x+5)\ \cancel{(x+5)}}{x\cancel{(x+5)}}=\frac{x+5}{x}$$

أتحققُ من فهمي:

4 $\frac{x^2-12x+36}{x-6}$

5 $\frac{x^2+9x+8}{x^2-64}$

6 $\frac{x^2+8x+16}{2x+8}$

يُستعملُ تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ العلميةِ والهندسيةِ.

مثال 5: مِنَ الحياةِ

تحفظُ عائشةُ ألعابَها في صندوقٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ حجمُهُ $x^3 + 11x^2 + 10x$ سنتيمترًا مكعبًا وارتفاعُهُ $(x + 1)$ سنتيمترًا. أجدُ مساحةَ قاعدةِ الصندوقِ بدلالةِ x

حجمُ الصندوقِ V يساوي مساحةَ القاعدةِ B مضروبًا في الارتفاعِ h. إذنْ، مساحةُ القاعدةِ تساوي ناتجَ قسمةِ الحجمِ على الارتفاعِ.

قانونُ مساحةِ القاعدةِ $B = \frac{V}{h}$

أعوضُ $= \frac{x^3 + 11x^2 + 10x}{(x+1)}$

أخرجُ (x) عاملًا مشتركًا لحدودِ البسطِ $= \frac{x(x^2 + 11x + 10)}{(x+1)}$

أحللُ ثلاثيةَ الحدودِ الّتي داخلَ القوسِ $= \frac{x(x+10)\,(x+1)}{(x+1)}$

أبسطُ $= x(x+10)$

إذنْ، مساحةُ قاعدةِ الصندوقِ $x(x + 10)$ cm

أتحققُ من فهمي:

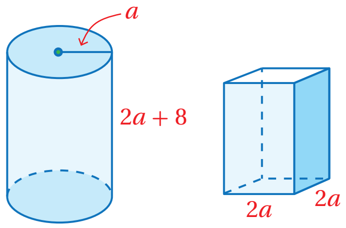
مخروطُ مثلجاتٍ حجمُهُ $w^3 - 49w$ سنتيمترًا مكعبًا، ومساحةُ قاعدتِهِ $w^2 + 7w$ سنتيمترًا مربعًا، أجدُ ارتفاعَهُ بدلالةِ w.

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $\frac{64qr^2s}{16q^2rs}$
2. $\frac{24a^3b^4c^7}{6a^6c^2}$
3. $\frac{y^2+yz-y-z}{y+z}$
4. $\frac{n^2-9}{n^2-5n+6}$
5. $\frac{x^2-x-30}{x^2-36}$
6. $\frac{w^4-1}{1-w^2}$
7. $\frac{4x^3-12x^2+8x}{6x^3+6x^2-36x}$
8. $\frac{x^2-81}{2x-18}$
9. $\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+15}$

10. **قياسٌ:** يظهرُ في الشكلِ المجاورِ عُبوَّتا معلباتٍ غذائيةٍ لَهُما الحجمُ نفسُهُ. أجدُ ارتفاعَ العبوّةِ الّتي على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ بدلالةِ a .



11 **انتخابــاتٌ:** صندوقُ اقتراعٍ على هيئةِ متوازي مســـتطيلاتٍ، حجمُـهُ $(x^3 - 8x^2 + 15x)$ ســـنتيمترًا مكعبًا، ومســـاحةُ قاعدتِهِ $(x^2 - 3x)$ سنتيمترًا مربعًا، أجدُ ارتفاعَ الصندوقِ.

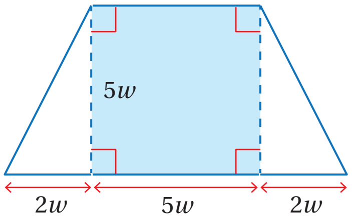
معلومةٌ

تأسسَـــتِ الهيئةُ المستقلةُ للانتخابـــاتِ عـــامَ 2012 بوصفِها جهةً مستقلةً تُعنى بـــإدارةِ الانتخابـــاتِ فـــي المملكةِ الأردنيةِ الهاشميةِ والإشرافِ عَلَيْها.

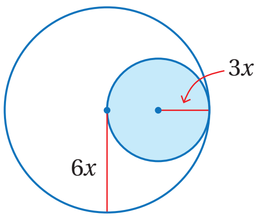
12 **هندســةٌ:** المســـتطيلُ A طولُهُ $(2x + 6)$ وحدةٍ وعرضُهُ $(3x)$ وحدةٍ، والمستطيلُ B طولُهُ $(x + 2)$ وحدةٍ ومســـاحتُهُ تزيدُ بمقدارِ 12 وحدةً مربعةً على مساحةِ المستطيلِ A. أكتبُ مقدارًا جبريًّا في أبسطِ صورةٍ يمثلُ عرضَ المستطيلِ B.

هندسةٌ: أكتبُ في أبسطِ صورةٍ النسبةَ المئويّةَ لمساحةِ المنطقةِ المظلّلةِ منَ الشكلِ في كلٍّ ممّا يأتي:

14



13



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

15 **تحدٍّ:** كتبَتْ سوســـنُ مقدارًا جبريًّا نسبيًّا بأبسطِ صورةٍ، ثُمَّ انسكبَ بعضُ القهوةِ على أجزاءٍ مِنَ الحلِّ، هَلْ يمكنُ تحديدُ المقدارِ الجبريِّ الأصليِّ؟

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{4x\,[illegible]}{2(x+3)} = 2x$$

16 **تحدٍّ:** مقدارٌ جبريٌّ نســبيٌّ على صورةِ $\frac{x^2 + bx - c}{x^2 + d}$، وعندَ كتابتِهِ في أبســطِ صورةٍ يصبحُ $\frac{x - 7}{(x + 2)}$، هَلْ يمكنُ تحديدُ قيمةِ كلٍّ مِنْ b, c, d؟

17 **تحدٍّ:** أكتبُ المقدارَ الجبريَّ الآتيَ في أبسطِ صورةٍ:

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2 + 11mn + 10n^2}$$

18 **أكتبُ** أكتبُ فقرةً أبيّنُ فيها كيفيةَ تبسيطِ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 ناتجُ ضربِ المقدارِ $(2x-4)(2x+4)$ يساوي:

a) $2x^2-16$ **b)** $4x^2-16$

c) $4x^2+16$ **d)** $4x-16$

2 مربعٌ طولُ ضلعِهِ $(x-6)$ وحدةً، فتكونُ مساحتُهُ:

a) $x^2+12x-36$ **b)** x^2-36

c) $x^2-12x+36$ **d)** x^2+36

3 المقدارُ الجبريُّ الّذي يمثلُ مربعًا كاملًا هُوَ:

a) $y^2+26y+25$ **b)** $y^2-8y-16$

c) $y^2-8y+16$ **d)** y^2-25

4 قيمةُ b الّتي تجعلُ المقدارَ $(x^2+bx+144)$ مربعًا كاملًا هِيَ:

a) 16 **b)** −12

c) 12 **d)** −24

5 تحليلُ المقـدارِ $(4x^2y-4y)$ إلى عواملِـهِ الأوليةِ تحليلًا كاملًا:

a) $4y(x-1)(x+1)$ **b)** $4y(x^2-1)$

c) $(2x-2)(2x+2)$ **d)** $(x-1)(x+1)$

6 قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $(x^2+3x-10)$ وحدةً مربعةً، إذا كانَ أحـدُ أبعادِها $(x+5)$ وحدةٍ، فإنَّ بُعدَها الآخرَ هُوَ:

a) $x-2$ **b)** $x+2$

c) $x-5$ **d)** $x+10$

7 $\frac{x^2-36}{6-x}$

a) $-x-6$ **b)** $x-6$

c) $x+6$ **d)** $6-x$

8 تحليلُ المقدارِ w^4-1 إلـى عواملِهِ الأوليةِ تحليلًا كاملًا:

a) $(w-1)(w+1)$ **b)** $(w-1)(w+1)(w^2+1)$

c) $(w-1)(w^3+1)$ **d)** $(w-1)(w^2+2w+1)$

9 يقبلُ المقدارُ الجبريُّ x^2-100 القسمةَ مِنْ دونِ باقٍ على:

a) $x+100$ **b)** $x-5$

c) $x-100$ **d)** $x-10$

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي بأبسطِ صورةٍ:

10 $(2x-7)(2x+7)$

11 $(6y-3x)(6y-3x)$

12 $(x-4)^2$

13 $(3d+6)^2$

أحللُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

14 $3yw^2 - 12y + 2w^2 - 8$

15 $x^2 - 10x + 25$

16 $9y^2 - 4$

17 يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مهبطًا للطائراتِ العموديةِ في إحدى المستشفياتِ، فإذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ الصغرى يقلُّ 8 أمتارٍ عَنْ طولِ نصفِ قطرِ الدائرةِ الكبرى، فأكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ الفرقَ بَيْنَ مساحتَي الدائرتَينِ، ثُمَّ أحللُهُ تحليلًا كاملًا.

18 كرةُ قدمٍ: ملعبُ كرةِ قدمٍ مساحتُهُ $(x^2-28x-29)$ مترًا مربعًا، وطولُهُ $(x+1)$ مترًا، أجدُ محيطَهُ بدلالةِ x.

أحللُ كلًّا مِنَ المقاديرِ الجبريةِ الآتيةِ تحليلًا كاملًا:

19 $4s^2 - s + 12st - 3t$

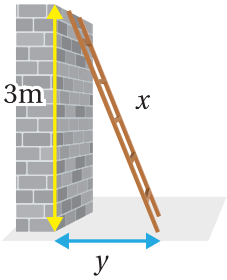
20 $6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2$

21 $x^2 - 18x + 72$

22 $3x^2 - 48$

23 $100 - (x + 9y)^2$

24 $3x^2 - 15x + 18$



25 يستندُ سلّمٌ إلى حائطٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ طولُ السلّمِ x وارتفاعُ الحائطِ 3m، فأجدُ المقدارَ الجبريَّ الذي يمثّلُ مربعَ المسافةِ الأفقيةِ بَيْنَ الحائطِ والسلّمِ، ثُمَّ أحللُهُ.

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

26 $\dfrac{5x + 15}{x^2 + 10x + 21}$

27 $\dfrac{2x^2 + 6x + 4}{3x^2 + 9x + 6}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

28 أيُّ الآتيةِ عاملانِ لثلاثيِّ الحدودِ $x^2 + x - 42$؟

a) $(x - 7)(x - 6)$ **b)** $(x + 7)(x - 6)$

c) $(x - 7)(x + 6)$ **d)** $(x + 7)(x + 6)$

29 عندَ كتابةِ المقدارِ الجبريِّ $(2x + 5)(2x - 5)$ في أبسطِ صورةٍ ينتجُ:

a) $4x^2 - 20x - 25$ **b)** $4x^2 + 20x + 25$

c) $4x^2 - 25$ **d)** $2x^2 - 5$

30 إذا كانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ حاصلَ ضربِ عددٍ سابقٍ في عددٍ لاحقٍ لَهُ يُعطى بالعلاقةِ:

a) $n^2 - 1$ **b)** $n^2 + 1$

c) $n^2 - 2$ **d)** $(n + 1)^2$

31 إذا كانَ $a - b = 3,\ a^2 - b^2 = 33$، فأجدُ قيمةَ $a + b$:

a) 14 **b)** 30 **c)** 36 **d)** 11

الوحدةُ 3

المعادلاتُ الخطّيةُ بمتغيّرينِ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعملُ المعادلاتُ الخطيّةُ في نمذجةِ المواقفِ العلميّةِ والحياتيّةِ، ويقدّمُ لنا مفهومُ مَيلِ مُنْحنى المعادلةِ الخطيّةِ تفسيرًا لكيفيّةِ تَغيُّرِ كميّةٍ بالنسبةِ إلى كميّةٍ أخرى، مثلَ تحديدِ شدّةِ انحدارِ الطرقِ بإيجادِ نسبةِ تغيُّرِ الارتفاعِ إلى المسافةِ الأفقيّةِ المقطوعةِ؛ وذلكَ لتنبيهِ السائقينَ على الحذرِ عندَ القيادةِ في الطرقِ الشديدةِ الانحدارِ، مثلَ طريقِ وادي الموجبِ جنوبِ الأردنِّ.

تعلّمتُ سابِقًا:

- ✓ التعبيرَ عنِ الاقترانِ الخطّيِّ بطرائقَ متعددةٍ.
- ✓ تمثيلَ الاقترانِ الخطّيِّ بيانيًّا.
- ✓ تمثيلَ التناسُبِ الطرديِّ بيانيًّا أو في جدولٍ.

سأتعلّمُ في هذهِ الوحدةِ:

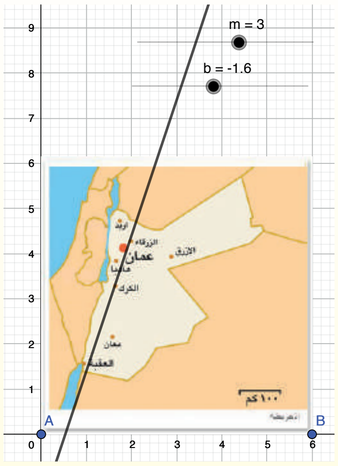
- ● إيجادَ ميلِ الخطِّ المستقيم.
- ● إيجادَ معادلةِ الخطِّ المستقيمِ بطرائقَ متعددةٍ.
- ● العلاقةَ بينَ مَيلَي مستقيمَينِ متوازيَينِ ومتعامِدَينِ.

مشروعُ الوحدةِ: المعادلاتُ الخطيّةُ والخريطةُ

أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ الذي سنوظِّفُ فيهِ ما نتعلَّمُه في هذهِ الوحدةِ عنْ تمثيلِ المعادلةِ الخطّيّةِ بمتغيّرينِ.

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنت عنْ خريطةِ المملكةِ الأردنيّةِ الهاشميّةِ، ثمَّ أحفظُها على جهازِ الحاسوبِ.
2. أستعملُ برمجيّةَ جيوجيبرا لتمثيلِ معادلاتٍ خطّيّةٍ تربطُ بعضَ المحافظاتِ الأردنيةِ إحداها بالأُخرى منْ خلالِ الخُطواتِ الآتيةِ:
   - أنقُرُ على أيقونةِ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ صورةَ خريطةِ الأردنِّ.
   - أُعدِّلُ موقعَ صورةِ الخريطةِ، وأختارُ مقاسًا مناسبًا لها بتحريكِ النقطتينِ A و B اللتينِ تَظهرانِ عليها.
3. لإدراجِ مؤشرٍ للتحكُّمِ في قيمةِ المَيلِ أتّبعُ الإجراءاتِ الآتيةِ:



   - أنقُرُ على أيقونةِ a=2 Slider منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على الموقعِ الذي أُريدُه في الشّاشةِ ليظهرَ مربعُ حوارٍ.
   - أستعملُ الرمزَ m بدلاً مِنَ الرمزِ a في مربّعِ الحوارِ ليدلَّ على المَيلِ، ثمَّ أُحدّدُ أقلَّ قيمةٍ وأعلى قيمةٍ للمَيلِ (مثلًا أقلُّ قيمةٍ 20− وأعلى قيمةٍ 20).
4. أكرّرُ الخطوةَ السابقةَ لإدراجِ مؤشرٍ للتحكُّمِ في قيمةِ المقطعِ y، وأستعملُ الرمزَ b بدلاً مِنَ الرمزِ a.
5. أكتبُ في شريطِ الإدخالِ معادلةَ المستقيمِ بصورةِ المَيلِ والمقطعِ ($y = \mathrm{m}x + \mathrm{b}$)؛ ليَظهرَ تمثيلٌ بيانيٌّ لمستقيمٍ.
6. أُحرّكُ مؤشّرَ الميلِ ومؤشّرَ المقطعِ y لتغيُّرِ موقعِ الخطِّ؛ ليمرَّ بمحافظتينِ أختارُهما (مثلًا: الزرقاءُ والكركُ)، ثُمَّ أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالمحافظتينِ والمقطعَ y لهُ منْ خلالِ المعادلةِ في شريطِ الإدخالِ.
7. لتغييرِ صورةِ المعادلةِ إلى الصورةِ القياسيةِ؛ أنقُرُ بزرِّ الفأرةِ الأيمنِ على صيغةِ المعادلةِ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ القياسيةَ للمعادلةِ مِنَ القائمةِ المنسدلةِ.
8. أرسمُ مستقيمًا آخرَ في المستوى موازيًا للمستقيمِ السابقِ معَ الانتباهِ إلى اختيارِ رمزينِ آخرينِ للدلالةِ على المَيلِ والمقطعِ y، ثمَّ أُحرّكُهُ حتى يمُرَّ في إحدى المحافظاتِ على الخريطةِ، وأُحدّدُ معادلتَهُ وميلَهُ والمقطعَ y لهُ.
9. أُكرّرُ الخُطواتِ السابقةَ معَ محافظاتٍ أُخرى.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيّنُ فيهِ خُطواتِ العملِ في المشروعِ، والنتائجَ التي توصّلْنا إليها موضَّحةً بالصورِ، ثمَّ نعرضُه على الزملاءِ / الزميلاتِ في مختبرِ الحاسوبِ.

الدرسُ 1 المعادلةُ الخطيّةُ بالصورةِ القياسيّةِ

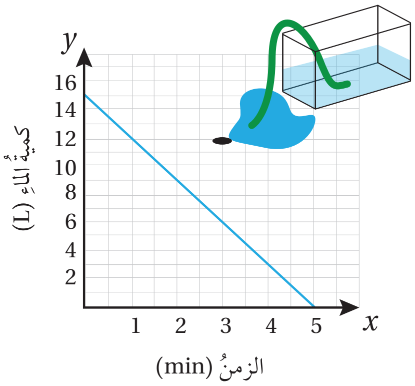
فكرةُ الدرسِ

- أتعرّفُ الصيغةَ القياسيّةَ للمعادلةِ الخطيّةِ.
- أُمثّلُ المعادلةَ الخطيّةَ بيانيًّا.

المصطلحاتُ

الصورةُ القياسيّةُ، الحدُّ الثابتُ، المقطعُ x ، المقطعُ y

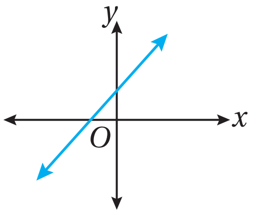
أستكشفُ



يُبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العلاقةَ بينَ كميّةِ الماءِ المتبقيّةِ في حوضٍ باللتراتِ والزمنِ المنقضي بالدقائقِ منذُ بَدْءِ تصريفِ الماءِ منَ الحوضِ.

① ما كميّةُ الماءِ التي كانتْ في الحوضِ عندَ بدْءِ التصريفِ؟

② كمْ دقيقةً يحتاجُ إليها تصريفُ الحوضِ من الماءِ تصريفًا كاملاً؟



تعلّمْتُ سابقًا أنَّ المعادلةَ الخطّيّةَ هيَ المعادلةُ التي تُمثَّلُ بيانيًّا بخطٍّ مستقيمٍ كما في الشكلِ المجاورِ. وتُكتَبُ المعادلةُ الخطّيّةُ عادةً على الصورةِ $Ax + By = C$، والتي تُسمّى **الصورةَ القياسيّةَ** (standard form) للمعادلةِ الخطّيّةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ **الصورةُ القياسيّةُ للمعادلةِ الخطّيّةِ**

- **بالكلماتِ** الصورةُ القياسيّةُ للمعادلةِ الخطّيّةِ هي:

$$Ax + By = C$$

حيثُ A, B, C أعدادٌ حقيقيّةٌ، ولا تكونُ قيمتا A و B معًا صفرًا.

يمكنُ استعمالُ الصورةِ القياسيةِ لتحديدِ ما إذا كانَتِ المعادلةُ خطّيّةً أمْ لا.

مثال 1

أُحدّدُ ما إذا كانتْ كلُّ معادلةٍ ممّا يأتي خطّيّةً أمْ لا:

① $\boldsymbol{y = 6 - 5x}$

أعيدُ كتابةَ المعادلةِ بحيثُ يكونُ كِلا المتغيرينِ في الطَّرفِ نفسِه منَ المعادلةِ.

المعادلةُ الأصليةُ $y = 6 - 5x$

أُضيفُ $5x$ إلى طرفَيِ المعادلةِ $y + 5x = 6 - 5x + 5x$

أُبسّطُ $5x + y = 6$

المعادلةُ $5x + y = 6$ مكتوبةٌ على الصورةِ $Ax + By = C$، حيثُ $A = 5, B = 1, C = 6$، إذنْ فهيَ معادلةٌ خطّيّةٌ.

② $3xy - 4x = 7$

بما أنَّ الحدَّ $3xy$ فيهِ متغيرانِ، فإنَّه لا يمكنُ كتابةُ المعادلةِ على الصورةِ $Ax + By = C$، إذنْ فهيَ ليستْ خطّيّةً.

③ $4x^2 - 8y = 12$

بما أنَّ المتغيرَ x مرفوعٌ للأُسِّ 2، فإنَّهُ لا يمكنُ كتابةُ المعادلةِ على الصورةِ $Ax + By = C$، إذنْ فهيَ ليسَتْ خطّيّةً.

④ $\frac{7}{5}x = -4$

يمكنُ كتابةُ المعادلةِ $\frac{7}{5}x = -4$ على الصورةِ $Ax + By = C$ كما يلي: $\frac{7}{5}x + 0y = -4$،

حيثُ $A = \frac{7}{5}, B = 0, C = -4$، إذنْ فهيَ معادلةٌ خطّيّةٌ.

أتحققُ من فهمي:

⑤ $2x = 1 - 3y$

⑥ $x^2 - 8y = 3$

⑦ $\frac{1}{5}y = 2$

التمثيلُ البيانيُّ للمعادلةِ الخطيّةِ هو مستقيمٌ يمرُّ في النقاطِ جميعِها التي تمثّلُ حلولاً للمعادلةِ، وأيُّ نقطةٍ تقعُ على هذا المستقيمِ تمثّلُ حلًّا للمعادلةِ.

يمكنُ تمثيلُ المعادلةِ بإنشاءِ جدولِ قيمٍ، وذلكَ باختيارِ قيمٍ للمتغيرِ x وتعويضِها في المعادلةِ لإيجادِ قيمِ y المقابلةِ لها، ثمَّ تمثيلِ الأزواجِ المرتَّبةِ الناتجةِ في المستوى الإحداثيِّ.

أتذكّرُ

حلُّ المعادلةِ الخطّيّةِ هو الزوجُ المرتَّبُ الذي ينتجُ عن تعويضِهِ في المعادلةِ عبارةٌ صحيحةٌ.

مثال 2

1 أمثِّلُ المعادلةَ **$2x - y = 1$** بيانيًّا.

الْخُطْوَةُ 1 أحلُّ المعادلةَ بالنسبةِ إلى y؛ لتسهيلِ عمليةِ إيجادِ قيمِ y المقابلةِ لقيمِ x.

المعادلةُ الأصليةُ $2x - y = 1$

أطرحُ $2x$ من كِلا الطرفينِ $2x - y - 2x = 1 - 2x$

أقسمُ طرَفَي المعادلةِ على -1 $\frac{-y}{-1} = \frac{1-2x}{-1}$

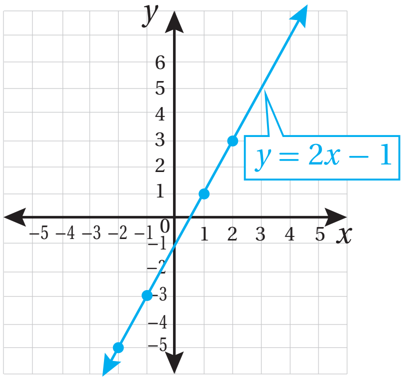
أُبسّطُ $y = 2x - 1$

الْخُطْوَةُ 2 أُنشئُ جدولَ قيمٍ.

أختارُ قيمًا للمتغيرِ x، ثمَّ أعوِّضُها في المعادلةِ لأجدَ قيمَ y المقابلةَ لها.

(x, y)	y	$2x - 1$	x
$(-2, -5)$	-5	$2(-2) - 1$	-2
$(-1, -3)$	-3	$2(-1) - 1$	-1
$(0, -1)$	-1	$2(0) - 1$	0
$(1, 1)$	1	$2(1) - 1$	1
$(2, 3)$	3	$2(2) - 1$	2

الْخُطْوَةُ 3 أمثّلُ الأزواجَ المُرتَّبَةَ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بها جميعًا.



أتعلّمُ

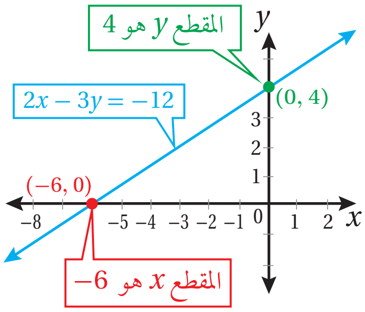
عندَ تمثيلِ المعادلةِ بيانيًّا، أستعملُ الأسهمَ لتوضيحِ أنَّ المستقيمَ غيرُ مُنتهٍ.

أتحققُ من فهمي:

2 أمثِّلُ المعادلةَ **$y = 3x$** بيانيًّا.

3 أمثِّلُ المعادلةَ **$2y - 4x = 6$** بيانيًّا.

بما أنَّهُ يمكنُ تمثيلُ المستقيمِ بنقطتينِ، فإنَّ أسهلَ طريقةٍ لتمثيلِ المعادلةِ الخطيّةِ هي إيجادُ نقطتَيْ تقاطعِ المستقيمِ معَ المحورينِ الإحداثيّينِ (إنْ أمكنَ).



يُسمّى الإحداثيُّ x للنقطةِ التي يقطعُ عندَها المستقيمُ المحورَ x **المقطعَ x** (x–intercept)، ويُسمّى الإحداثيُّ y للنقطةِ التي يقطعُ عندَها المستقيمُ المحورَ y **المقطعَ y** (y–intercept).

عندما تكونُ المعادلةُ الخطّيّةُ مكتوبةً بالصورةِ القياسيةِ، فإنَّهُ يسهلُ تحديدُ المقطعَينِ الإحداثيَّينِ وتمثيلُ المعادلةِ بيانيًّا.

مثال 3

أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ المقطعِ x والمقطعِ y:

① **$3x-2y=6$**

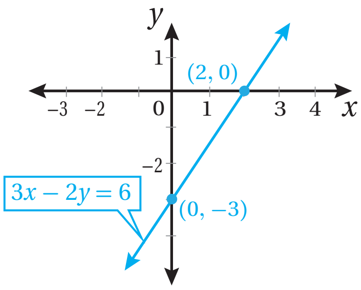
الْخُطْوَةُ 1 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y.

المعادلةُ الأصليةُ	$3x-2y=6$
أُعوّضُ $y=0$	$3x-2(0)=6$
أقسمُ كِلا الطرفينِ على 3	$\frac{3x}{3}=\frac{6}{3}$
أُبسّطُ	$x=2$

المعادلةُ الأصليةُ	$3x-2y=6$
أُعوّضُ $x=0$	$3(0)-2y=6$
أقسمُ كِلا الطرفينِ على -2	$\frac{-2y}{-2}=\frac{6}{-2}$
أُبسّطُ	$y=-3$

إذنْ، فالمقطعُ x هو 2، والمقطعُ y هو -3

الْخُطْوَةُ 2 أُمثّلُ نقطتَيْ تقاطعِ المستقيمِ معَ المحورينِ الإحداثيّينِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يصلُ بينَ النقطتينِ.



بما أنَّ المقطعَ x هُوَ 2، فإنَّ المستقيمَ يقطعُ المحورَ x في النقطةِ $(2, 0)$، وبما أنَّ المقطعَ y هو -3، فإنَّ المستقيمَ يقطعُ المحورَ y في النقطةِ $(0, -3)$، أُمثّلُ النقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يصلُ بينَهُما.

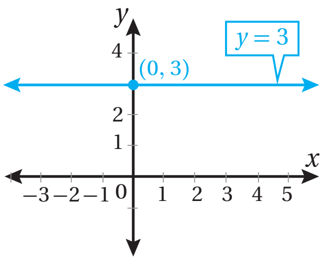
2 $y = 3$

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ المعادلةَ بالصورةِ القياسيةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$y = 3$
الصورةُ القياسيةُ للمعادلةِ	$0x + 1y = 3$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y.

ألاحظُ أنَّ المقطعَ y هو 3، ولا يوجدُ مقطعُ x، وألاحظُ أيضًا أنَّ قيمة $y = 3$ لأيِّ قيمةِ x؛ لذا فإنَّ التمثيلَ البيانيَّ للمعادلةِ $y = 3$ هو مستقيمٌ أفقيٌّ يقطعُ المحورَ y في النقطةِ $(0, 3)$.



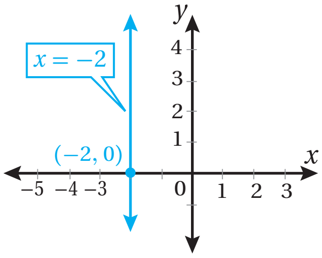
3 $x = -2$

الْخُطْوَةُ 1 أكتبُ المعادلةَ بالصورةِ القياسيةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$x = -2$
الصورةُ القياسيةُ للمعادلةِ	$1x + 0y = -2$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y.

ألاحظُ أنَّ المقطعَ x هو -2، ولا يوجدُ مقطعُ y، وألاحظُ أيضًا أنَّ قيمة $x = -2$ لأيِّ قيمةِ y؛ لذا فإنَّ التمثيلَ البيانيَّ للمعادلةِ $x = -2$ هو مستقيمٌ رأسيٌّ يقطعُ المحورَ x في النقطةِ $(-2, 0)$.



أتحققُ من فهمي:

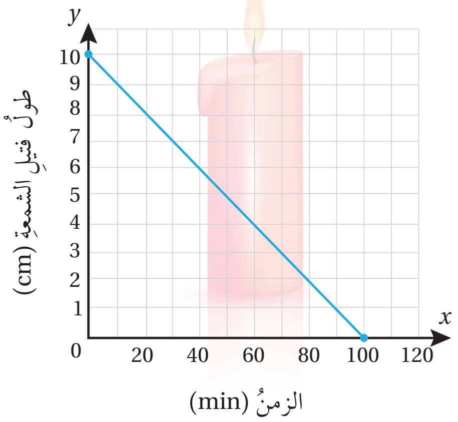
4 $4x - y = 1$

5 $y = -7$

6 $x = 5$

مثال 4: منَ الحياةِ

شـــمعةٌ: يبيّنُ التمثيـــلُ البيانيُّ المجـــاورُ العلاقةَ بينَ طولِ فتيلِ شـــمعةٍ بالسنتيمتراتِ و الزمنِ بالدقائقِ منذُ بدءِ إشعالِه.



1 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y للعلاقةِ.

المقطعُ x هو 100	قيمةُ $x = 100$ عندَما قيمةُ $y = 0$
المقطعُ y هو 10	قيمةُ $y = 10$ عندَما قيمةُ $x = 0$

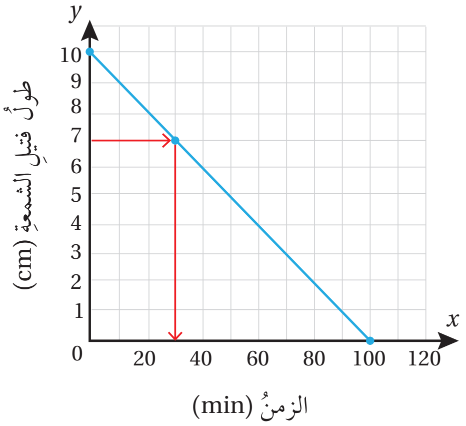
2 أصفُ مدلولَ كلٍّ منَ المقطعينِ في هذهِ الحالةِ.

المقطعُ y يســـاوي 10 ويعني أنَّ طولَ فتيلِ الشـــمعةِ 10 cm عندَ إشعالِه، المقطعُ x يســـاوي 100 ، وهذا يعني أنَّ فتيلَ الشمعةِ احترقَ احتراقًا كاملاً بعدَ 100 دقيقةٍ، ولم يبقَ منهُ شيءٌ.

3 بعدَ كمْ دقيقةٍ يكونُ طولُ فتيلِ الشمعةِ 7 cm؟

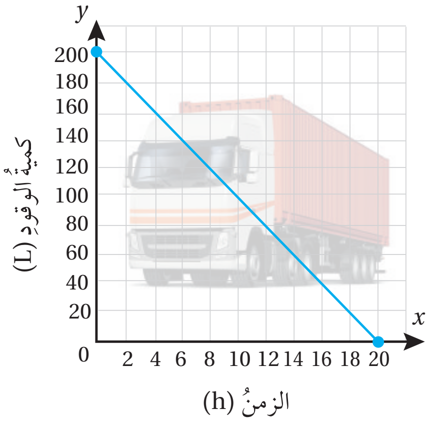
أُحدّدُ 7 cm على المحورِ y، ثمَّ أُحدّدُ النقطةَ التي تقابلُها على المستقيمِ، وأحدّدُ الإحداثيَّ x للنقطةِ وهو 30.

إذنْ، يكونُ طولُ فتيلِ الشمعةِ 7 cm بعدَ 30 دقيقةً منْ إشعالِه.



أتحقَّقُ من فهمي:

وقودٌ: يبيـــنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العلاقةَ بينَ عددِ لتراتِ الوقودِ المتبقيةِ في خزانِ شاحنةٍ وعددِ ساعاتِ قيادتِها.



4 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y للعَلاقةِ.

5 أصفُ مدلولَ كلٍّ منَ المقطعينِ في هذهِ الحالةِ.

6 بعدَ كمْ ساعةِ قيادةٍ يبقى في خزانِ الشاحنةِ 100 L منَ الوقودِ؟

أتدرب وأحل المسائل

أحدّدُ ما إذا كانتْ كلُّ معادلةٍ ممّا يأتي خطيّةً أم لا:

1 $2x = 7y$

2 $y = 1-x^2$

3 $9xy + 11x = 6$

أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا بإنشاءِ جدولِ قيمٍ:

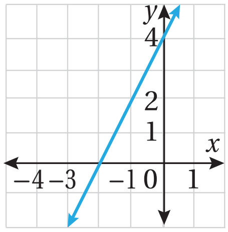
4 $y = -1$

5 $y - x = 8$

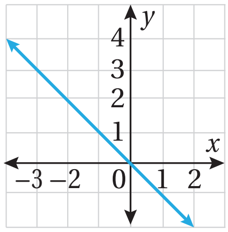
6 $3x + 2y = 15$

أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y لكلِّ معادلةٍ ممّا يأتي:

7



8



أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ المقطعِ x والمقطعِ y:

9 $x = 4y-6$

10 $x + 6 = 0$

11 $\frac{4x}{3} = \frac{3y}{4} + 1$

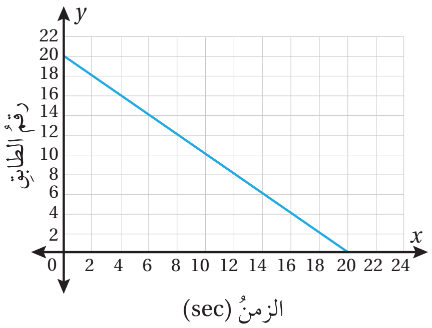
رحلةٌ: ملأَ رامي خزانَ سيارتِه بالوقودِ استعدادًا لرحلةٍ إلى مدينةِ العقبةِ. والمعادلةُ $y = 18 - 2x$ تعطي كميّةَ الوقودِ باللتراتِ المتبقيةِ في خزانِ السيارةِ بعدَ قيادتِها x ساعةً.

12 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y للمعادلةِ المُعطاةِ، ثمَّ أستعملُ المقطعينِ لتمثيلِ المعادلةِ بيانيًّا.

13 أصفُ مدلولَ كلٍّ منَ المقطعينِ في هذهِ الحالةِ.

14 بعدَ كمْ ساعةٍ منْ قيادةِ السيارةِ يتبقى $\frac{1}{4}$ الوقودِ في الخزانِ؟

بنايــةٌ: يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العلاقةَ بينَ رقــمِ الطابَقِ في أحدِ الأبراجِ التجاريةِ والزمــنِ الذي يقضيهِ الراكــبُ بالثواني في المِصْعدِ حتى يصلَ إلــى هذا الطابقِ. فإذا علمتُ أنَّ رقمَ الطابقِ الأرضيِّ 0، فأجيبُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي:



15 منْ أيِّ طابقٍ صعِدَ الراكبُ إلى المِصْعدِ؟

16 بعــدَ كمْ ثانيةٍ وصلَ الراكــبُ إلى الطابَقِ الأرضيِّ؟

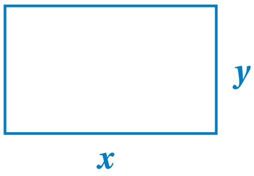
17 بعــدَ كمْ ثانيةٍ وصلَ الراكــبُ إلى الطابقِ الثامنِ؟

أتذكّرُ

الأعدادُ الكلّيّةُ:

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

هندسةٌ: محيطُ المستطيلِ في الشكلِ المجاورِ 12 cm



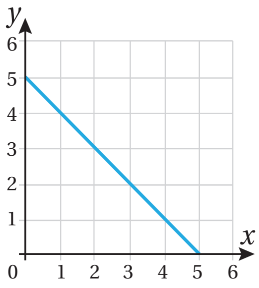
18 أكتبُ معادلةً بالصورةِ القياسيةِ تمثّلُ محيطَ المستطيلِ.

19 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y للتمثيلِ البيانيِّ لمعادلةِ محيطِ المستطيلِ.

20 أمثّلُ المعادلةَ بيانيًّا.

21 أجدُ ثلاثةَ أزواجٍ مرتبةٍ تمثّلُ أبعادَ المستطيلِ، على أنْ تكونَ قيمُ x و y أعدادًا كليّةً.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا



22 **تحدٍّ:** يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ المستقيمَ $x + y = 5$.

أرســمُ مســتقيمًا على الصــورةِ $x = a$، ومســتقيمًا علــى الصورةِ $y = b$، علــى أنْ تكونَ المِســاحةُ بينَ المستقيماتِ الثلاثةِ 4.5 وحداتٍ مربعةٍ.

23 **تبريرٌ:** أمثّلُ المعادلاتِ $x = 5, x = 2, y = -2, y = 1$ في المســتوى الإحداثيِّ نفسِه، ثمَّ أحدّدُ الشكلَ الهندسيَّ المغلقَ الناتجَ عنِ المستقيماتِ. أُبرّرُ إجابتِي.

24 **أكتبُ** كيفَ أكتبُ معادلةً خطيّةً بالصورةِ القياسيةِ؟

الدرسُ 2 ميلُ المستقيمِ

فكرةُ الدرسِ

أجدُ مَيلَ المستقيمِ.

المصطلحاتُ

مَيلُ المستقيمِ، التغيُّرُ الرأسيُّ، التغيّرُ الأفقيُّ، معدلُ التغيُّرِ.

أستكشفُ

تُستعملُ إشارتا المرورِ المجاورتانِ لتنبيهِ السائقينَ على مقدارِ انحدارِ الطريقِ، وذلكَ بإيجادِ نسبةِ الارتفاعِ أو الهبوطِ إلى كلِّ 100 m أفقيًّا. فما الفرقُ بينَ الإشارتينِ؟

ميلُ المستقيمِ (slope of a line) هو مصطلحٌ يُستعملُ لوصفِ مقدارِ انحدارِ المستقيمِ. فالمَيلُ هو نسبةُ **التغيّرِ الرأسيِّ** (rise) إلى **التغيّرِ الأفقيِّ** (run).

$$\text{المَيلُ} = \frac{\text{التغيّرُ الرأسيُّ}}{\text{التغيّرِ الأفقيِّ}}$$

ولإيجادِ ميلِ المستقيمِ غيرِ الرأسيِّ في المستوى الإحداثيِّ يُمكِننا إيجادُ نسبةِ التغَيُّرِ في الإحداثيِّ y (التغَيُّرِ الرأسيِّ) إلى التغَيُّرِ في الإحداثيِّ x (التغَيُّرِ الأفقيِّ) بينَ أيِّ نقطتينِ على المستقيمِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — مَيلُ المستقيمِ

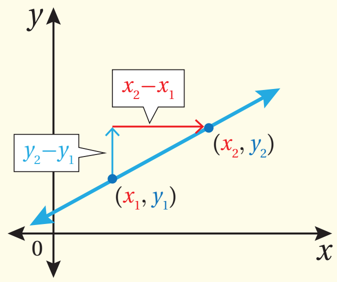
- **بالكلماتِ:** ميلُ المستقيمِ غيرِ الرأسيِّ هو نسبةُ التغيّرِ الرأسيِّ إلى التغيّرِ الأفقيِّ.
- **بالرموزِ:** يمكنُ إيجادُ الميلِ (m) للمستقيمِ غيرِ الرأسيِّ المارِّ بالنقطتينِ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على النحوِ الآتي:

$$m = \frac{\text{التغيّرُ الرأسيُّ}}{\text{التغيّرِ الأفقيِّ}}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

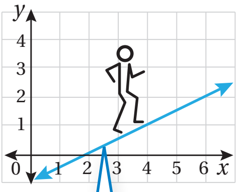
التغيرُ في y

التغيرُ في x



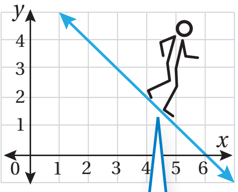
يمكنُ أن يكونَ ميلُ المستقيمِ سالبًا أو موجبًا أو صفرًا أو غيرَ مُعرَّفٍ كما يظهرُ في التمثيلاتِ البيانيةِ أدناهُ. للمقارنةِ بينَ مَيلِ المستقيماتِ المختلفةِ أتخيَّلُ نفسي أسيرُ على كلِّ منحنًى منَ اليسارِ إلى اليمينِ:

المَيلُ موجبٌ



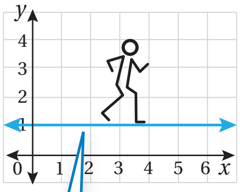
يرتفعُ المستقيمُ إلى الأعلى عندَ التحرُّكِ منَ اليسارِ إلى اليمينِ

الميلُ سالبٌ



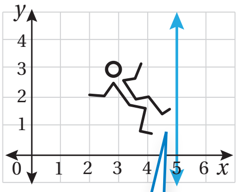
ينحدرُ المستقيمُ إلى الأسفلِ عندَ التحرُّكِ منَ اليسارِ إلى اليمينِ

الميلُ صفرٌ



مستقيمٌ أفقيٌّ

المَيلُ غيرُ مُعرَّفٍ

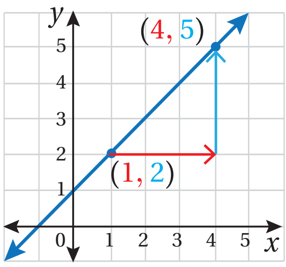


مستقيمٌ عموديٌّ

مثال 1

أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي:

① **(1, 2), (4, 5)**



صيغةُ الميلِ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 2)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(4, 5)$

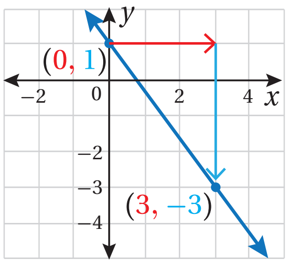
$$= \frac{5 - 2}{4 - 1}$$

أُبسِّطُ

$$= \frac{3}{3} = 1$$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو 1

② **(0, 1), (3, −3)**



صيغةُ الميلِ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(0, 1)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(3, -3)$

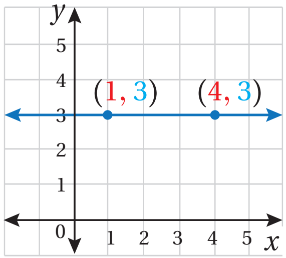
$$= \frac{-3 - 1}{3 - 0}$$

أُبسِّطُ

$$= -\frac{4}{3}$$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو $-\frac{4}{3}$

③ $(1, 3), (4, 3)$



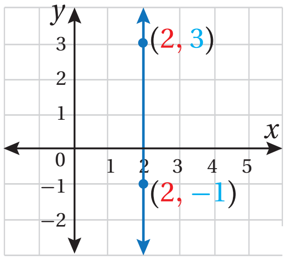
صيغةُ الميلِ $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(1, 3)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(4, 3)$ $$= \frac{3-3}{4-1}$$

أُبسِّطُ $$= \frac{0}{3} = 0$$

إذنْ، مَيلُ المستقيمِ هو 0

④ $(2, 3), (2, -1)$



صيغةُ الميلِ $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عنْ (x_1, y_1) بِـ $(2, 3)$ وعنْ (x_2, y_2) بِـ $(2, -1)$ $$= \frac{-1-3}{2-2}$$

أُبسِّطُ $$= \frac{-4}{0}$$

إذنْ، ميلُ هذا المستقيمِ غيرُ مُعرَّفٍ.

أتحققُ من فهمي:

⑤ $(-1, 2), (3, 5)$

⑥ $(-1, -2), (-4, 1)$

⑦ $(1, 2), (-3, 2)$

⑧ $(1, 5), (1, -4)$

إذا عُلِمَ ميلُ المستقيمِ وإحداثيّا نقطةٍ عليهِ، فيمكنُ إيجادُ الإحداثيِّ المجهولِ لأيِّ نقطةٍ أخرى على المستقيمِ.

مثال 2

① أجدُ قيمةَ s التي تجعلُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(-2, 1)$ و $(3, s)$ يساوي $\frac{3}{5}$

أفترضُ أنَّ النقطةَ $(-2, 1)$ هيَ (x_1, y_1)، والنقطةَ $(3, s)$ هيَ (x_2, y_2)

صيغةُ الميلِ $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أُعوِّضُ $x_1 = -2, x_2 = 3, y_1 = 1, y_2 = s$ $$\frac{3}{5} = \frac{s-1}{3-(-2)}$$

أُبسِّطُ $$\frac{3}{5} = \frac{s-1}{5}$$

خاصيّةُ الضربِ التبادليِّ $$5(s-1) = 3 \times 5$$

خاصيّةُ التوزيعِ $$5s - 5 = 15$$

أجمعُ 5 لِكلا الطرفينِ $$5s = 20$$

أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 5 $$s = 4$$

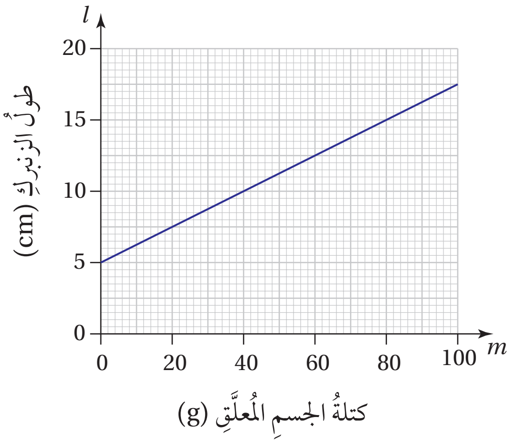
أتحققُ من فهمي:

② أجدُ قيمةَ k التي تجعلُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(3, 1)$ و $(k, 2)$ يساوي $-\frac{1}{6}$

معدّلُ التغيُّرِ (rate of change) هو نســبةٌ تصفُ مقدارَ تغيّرِ كميةٍ بالنســبةِ إلى تغيرِ كميةٍ أخرى، ويمكنُنا اســتعمالُ ميلِ المستقيمِ الذي يمثلُ العلاقةَ بينَ هاتينِ الكميتينِ لتفسيرِ معنى معدلِ التغيُّرِ في المسائلِ الحياتيةِ.

مثال 3: منَ الحياة

يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ طولَ زنبركٍ l بالســنتيمتراتِ، عندَ تعليقِ جسمٍ كتلتُهُ m غرام بهِ.

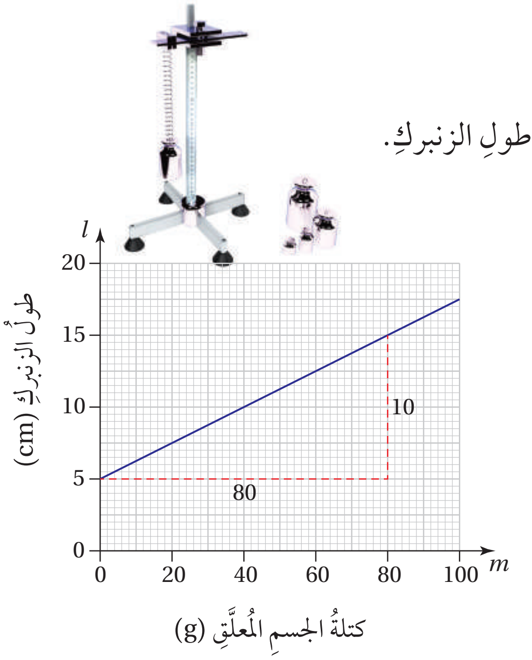


① أجدُ طولَ الزنبركِ قبلَ تعليقِ أيِّ كتلةٍ بهِ.

طولُ الزنبركِ قبــلَ تعليقِ أيِّ كتلةٍ بــهِ 5 cm، وهي القيمةُ التي تقابلُ الكتلةَ 0 g في التمثيلِ.

2 **أجدُ معدّلَ تغيرِ طولِ الزنبركِ بالنسبةِ إلى كتلتِه، ثمَّ أبيّنُ ماذا يمثّلُ.**

لإيجادِ معدلِ التغيّرِ أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثّلُ العَلاقةَ بينَ الكتلةِ وطولِ الزنبركِ.



أستعملُ النقطتينِ (0, 5) و (80, 15) لإيجادِ مَيلِ المستقيمِ.

صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

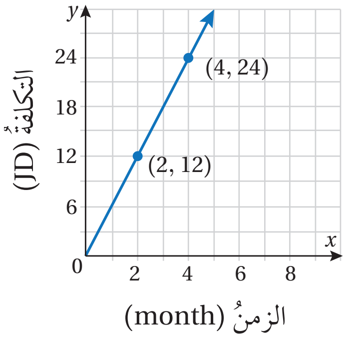
أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـِ $(0, 5)$ وعن (x_2, y_2) بـِ $(80, 15)$ $= \dfrac{15 - 5}{80 - 0}$

أُبسِّطُ $= \dfrac{10}{80} = \dfrac{1}{8}$

إذنْ، ميلُ المستقيمِ هو $\frac{1}{8}$، وهو يمثلُ معدّلَ التغيُّرِ في طولِ الزنبركِ لكلِّ غرامٍ منَ الكتلةِ، حيثُ إنَّ طولَ الزنبركِ يزدادُ بمقدارِ $\frac{1}{8}$ cm لكلِّ غرامٍ يُضافُ إليهِ.

أتحقّقُ من فهمي:

يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ متوسطَ تكلفةِ تشغيلِ ثلاجةٍ (بالدينارِ) أشهرًا عدةً.



3 أجدُ تكلفةَ تشغيلِ الثلاجةِ مدةَ 3 أشهرٍ.

4 أجدُ معدّلَ تغيرِ تكلفةِ تشغيلِ الثلاجةِ بالنسبةِ إلى الزمنِ، ثمَّ أوضحُ ماذا يمثّلُ.

أتدرب وأحل المسائل

أتذكّرُ

أُراعي الترتيبَ عندَ تعويضِ إحداثياتِ الزوجينِ المُرتّبينِ في صيغةِ المَيلِ $m = \dfrac{\boxed{y_2} - \boxed{y_1}}{\boxed{x_2} - \boxed{x_1}}$

أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي:

1 (3, 3), (5, 7)

2 (6,1), (4,3)

3 (−2, −6), (−2, 6)

4 (5, −7), (0, −7)

5 (−1, 0), (0, −5)

6 (4, 1), (12, 8)

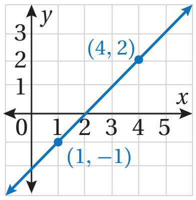
أجدُ قيمةَ s التي تجعلُ مَيلَ المستقيمِ (m) المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي على نحوِ ما هو مُعْطًى:

7 $(6, -2), (s, -6)\ , m = 4$

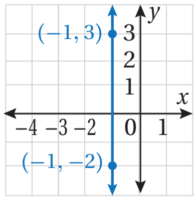
8 $(9, s), (6, 3), m = -\frac{1}{3}$

أحدّدُ ما إذا كانَ ميلُ كلِّ مستقيمٍ ممّا يأتي سالبًا أم موجبًا أم صفرًا أم غيرَ معرَّفٍ، ثمَّ أجدُه:

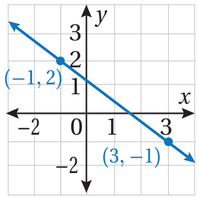
9



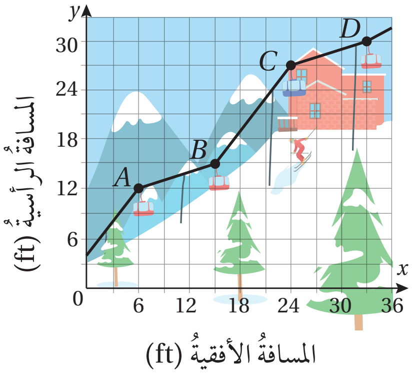
10



11



تزلُّجٌ: يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ المنظرَ الجانبيَّ لِمِصْعدِ تزلُّجٍ.



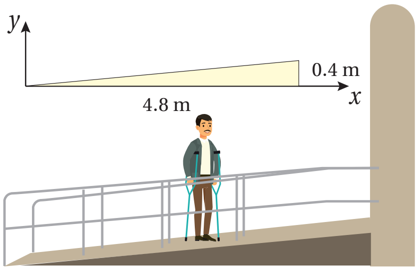
12 أجدُ مَيلَ كلٍّ من: $\overline{AB}\ , \overline{BC}\ , \overline{CD}$

13 أيُّ جزءٍ من مِصْعدِ التزلُّجِ يُعدُّ الأشدَّ انحدارًا؟ أبرّرُ إجابتي.

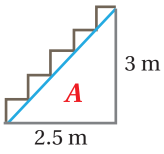
أتعلّمُ

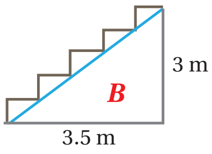
كلّما زادتِ القيمةُ المطلقةُ للمَيلِ، كانَ المستقيمُ أشدَّ انحدارًا.

14 **منحَدَراتٌ:** تنصُّ قوانينُ البناءِ المتعلِّقةُ بمنحَدراتِ وصولِ الأشخاصِ ذوي الإعاقةِ الحركيّةِ إلى الأبنيةِ على أنَّ كلَّ ارتفاعٍ رأسيٍّ بمقدارِ 0.4 m يتطلّبُ مسارًا أفقيًّا طولُه 4.8 m. أجدُ مَيلَ هذا المُنحَدَرِ.

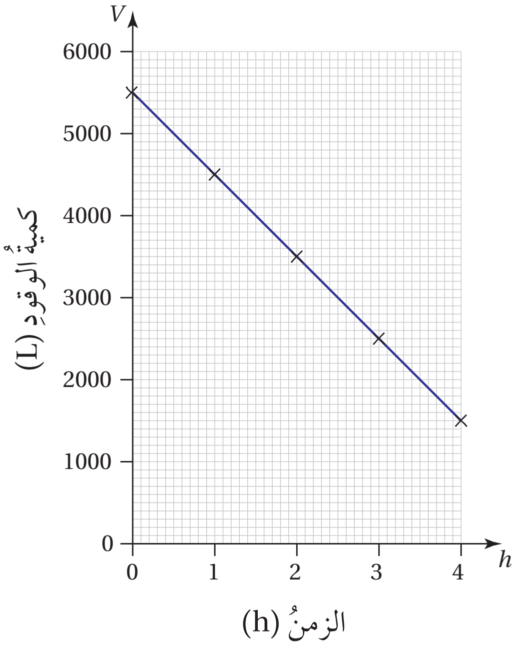


15 **درجٌ:** يبيّنُ الشكلُ المجاورُ درجَينِ مُصَمَّمينِ للدخولِ إلى أحدِ المباني. فأيُّ الدرجينِ أختارُ صعودَهُ للدخولِ إلى المبنى؟ أبرّرُ إجابتي.





طائـرةٌ: يبيّــنُ التمثيــلُ البيانيُّ المجاورُ كميّةَ الوقودِ V باللتراتِ في خزّانِ طائرةٍ بعدَ h ساعة.



16 ما كميّةُ الوقودِ في خزانِ الطائرةِ عندَ انطلاقِها؟

17 ما كميّةُ الوقودِ فــي الخزانِ بعدَ مرورِ 3.5 h؟

18 أجدُ معدّلَ تغيّرِ كميّةِ الوقودِ في الخزانِ بالنســبةِ إلى الزمنِ، ثمَّ أُبيّنُ ماذا يمثّلُ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

19 **أكتشفُ الخطأَ:** أوجدَ مهندٌ مَيلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(0, 2)$, $(5, 4)$، وكانَ حَلُّه على النحوِ الآتي:

$$m=\frac{2-4}{5-0}=-\frac{2}{5}$$ ✗

أُبيّنُ الخطأَ الذي وقعَ فيهِ مهندٌ وأُصحِّحُه.

إرشاد

أوظِّــفُ المَيلَ فــي تبريرِ إجابتي.

20 **تبريرٌ:** هل تقعُ النقاطُ $A(1, 3), B(4, 2), C(-2, 4)$ على المســتقيمِ نفسِــه؟ أبرّرُ إجابتي.

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجدُ نقطتينِ تقعانِ على مستقيمٍ ميلُه -9

22 **أكتبُ** كيفَ أجدُ مَيلَ مستقيمٍ مارٍّ بنقطتينِ؟

الدرسُ 3 معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ

فكرةُ الدرسِ

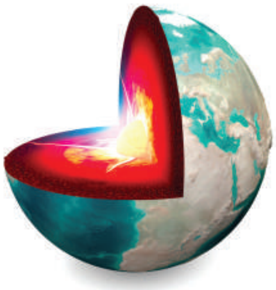
أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ، وأمثّلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ

أستكشفُ

يبلغُ متوسطُ درجةِ الحرارةِ على سطحِ الأرضِ 20°C تقريبًا. وترتفعُ درجةُ الحرارةِ تحتَ سطحِ القشرةِ الأرضيةِ بمعدلِ 25°C لكلِّ كيلومترٍ منَ العمقِ. أكتبُ معادلةً بمتغيرينِ تمثّلُ درجةَ الحرارةِ لكلِّ كيلومترٍ تحتَ سطحِ الأرضِ.

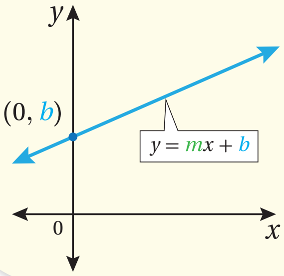


تعلّمْتُ سابقًا كيفيّةَ إيجادِ الميلِ والمقطعينِ الإحداثيّينِ للمستقيمِ. ويمكِنُني استعمالُ المَيلِ والمقطعِ y لكتابةِ معادلةِ أيِّ مستقيمٍ **بصيغةِ الميلِ والمقطعِ** (slop–intercept form).

مفهومٌ أساسيٌّ — صيغةُ المَيلِ والمقطعِ

- **بالكلماتِ:** صيغةُ الميلِ والمقطعِ للمعادلةِ الخطّيّةِ هيَ: $y = mx + b$، حيثُ m مَيلُ المستقيمِ، وb المقطعُ y لهُ.
- **بالرموزِ:**

$$y = \underbrace{m}_{\text{الميلُ}}x + \underbrace{b}_{\text{المقطعُ } y}$$



مثال 1

① أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الذي ميلُه $\frac{4}{5}$ والمقطعُ y لهُ -7 بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

أعوّضُ المَيلَ والمقطعَ y في صيغةِ المَيلِ والمقطعِ

$y = mx + b$ صيغةُ المَيلِ والمقطعِ

$y = \frac{4}{5}x + (-7)$ أُعوّضُ $m = \frac{4}{5}\,, b = -7$

$y = \frac{4}{5}x - 7$ أُبسّطُ

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = \frac{4}{5}x - 7$

2 **أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(1, 5)$ وميلُه 2 بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.**

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ الميلَ وإحداثيَّي النقطةِ لإيجادِ قيمةِ b .

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ	$y = mx + b$
أعوّضُ $m = 2, y = 5, x = 1$	$5 = 2(1) + b$
أُبسّطُ	$5 = 2 + b$
أطرحُ 2 منْ كلا الطرفينِ	$5 - 2 = 2 + b - 2$
أُبسّطُ	$3 = b$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ الميلَ والمقطعَ y في صيغةِ الميلِ والمقطعِ.

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ	$y = mx + b$
أعوّضُ $m = 2 \ , b = 3$	$y = 2x + 3$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = 2x + 3$

3 **أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(2, 1)$ و $(5, -8)$ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.**

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ النقطتينِ في إيجادِ المَيلِ.

صيغةُ المَيلِ	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـ $(2, 1)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(5, -8)$	$= \frac{-8 - 1}{5 - 2}$
أُبسّطُ	$= \frac{-9}{3} = -3$

إذنْ، الميلُ -3

الْخُطْوَةُ 2 أستعملُ الميلَ وإحداثيَّي إحدى النقطتينِ لإيجادِ قيمةِ b

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ	$y = mx + b$
أعوّضُ $m = -3, y = 1, x = 2$	$1 = -3(2) + b$
أُبسّطُ	$1 = -6 + b$
أجمعُ 6 إلى الطرفينِ	$1 + 6 = -6 + b + 6$
أُبسّطُ	$7 = b$

إذنْ، فالمقطعُ y هو 7

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ المَيلَ والمقطعَ y في صيغةِ المَيلِ والمقطعِ.

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ $y = mx + b$

أعوّضُ $m = -3, b = 7$ $y = -3x + 7$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = -3x + 7$

أتحقق من فهمي:

4 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الذي ميلُه 5 والمقطعُ y لهُ -2 بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ.

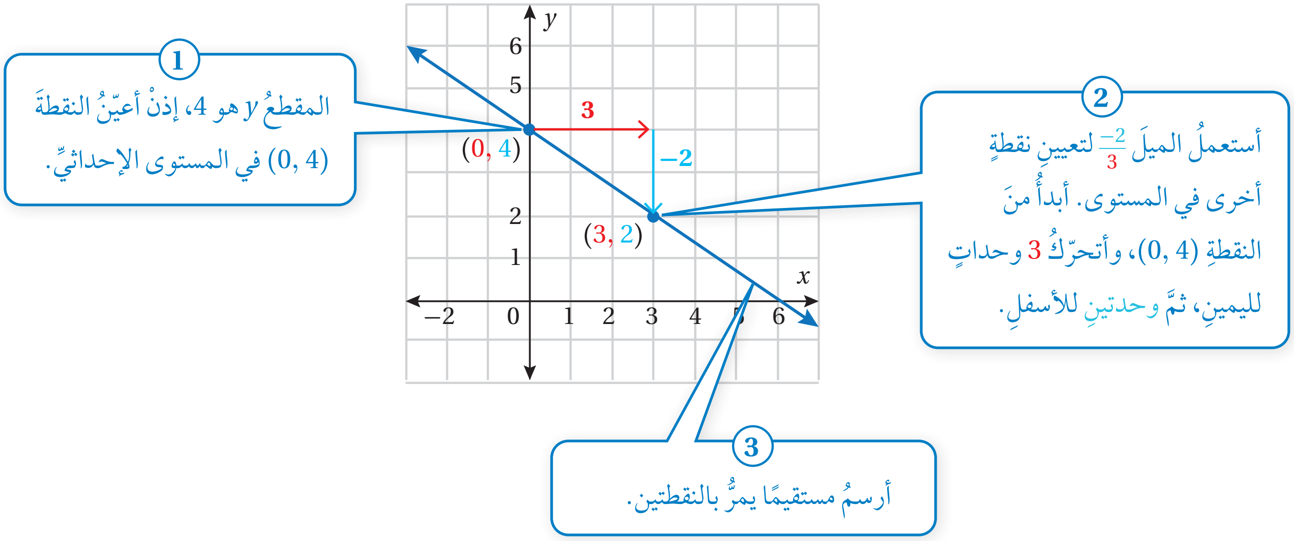
5 أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(-1, 0)$ وميلُه $\frac{1}{3}$ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ.

6 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(0, -4)$ و $(-2, 6)$ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ.

يمكنُ استعمالُ الميلِ والمقطعِ y منَ المعادلةِ الخطّيةِ المكتوبةِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ لتمثيلِ المستقيمِ.

مثال 2

1 أمثّلُ المعادلةَ $y = -\frac{2}{3}x + 4$ بيانيًّا باستعمالِ الميلِ والمقطعِ y.



① المقطعُ y هو 4، إذنْ أعيّنُ النقطةَ $(0, 4)$ في المستوى الإحداثيِّ.

② أستعملُ الميلَ $\frac{-2}{3}$ لتعيينِ نقطةٍ أخرى في المستوى. أبدأُ منَ النقطةِ $(0, 4)$، وأتحرّكُ 3 وحداتٍ لليمينِ، ثمَّ وحدتينِ للأسفلِ.

③ أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بالنقطتينِ.

أتحققُ من فهمي:

② $y = 2x + 1$

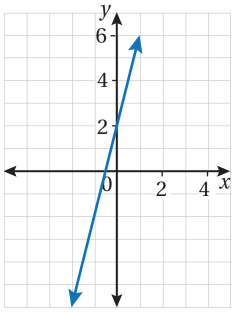
③ $y = x - 4$

④ $y = 3 - x$

تعلّمْتُ سابقًا كيفيةَ تمثيلِ معادلةٍ خطّيّةٍ مكتوبةٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ، وبالعكس يُمكِنُني كتابةُ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ عُرِفَ تمثيلُها البيانيُّ.

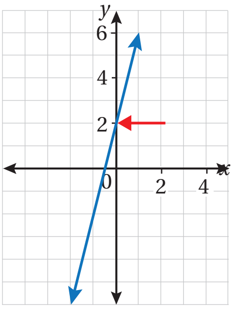
مثال 3

① أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المُمَثَّلةِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ:



الْخُطْوَةُ 1 أجدُ المقطعَ y.

أُلاحظُ أنَّ المستقيمَ قطعَ المحورَ y عندَ 2، إذنْ، فالمقطعُ y هو 2



الْخُطْوَةُ 2 أجدُ الميلَ.

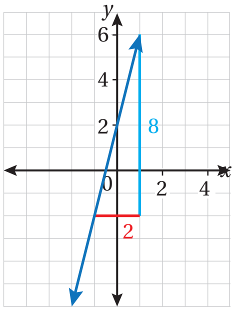
أختارُ نقطتينِ على المستقيمِ ولْتكونا النقطتَينِ $(1, 6), (-1, -2)$، وأجدُ مقدارَ التغيُّرِ الرأسيِّ والتغيُّرِ الأفقيِّ بينَهُما.

عددُ الخطواتِ الأفقيةِ: 2

عددُ الخطواتِ الرأسيةِ: 8

$$\text{المَيلُ} = \frac{\text{التغيّرُ الرأسيُّ}}{\text{التغيّرِ الأفقيِّ}}$$

$$m = \frac{8}{2} = 4$$



الْخُطْوَةُ 3 أكتبُ معادلةً

أعوّضُ الميلَ والمقطعَ y في صيغةِ الميلِ والمقطعِ.

صيغةُ المَيلِ والمقطعِ $y = mx + b$

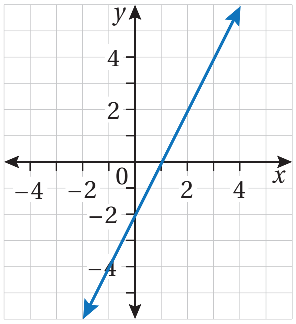
أعوّضُ $m = 4, b = 2$ $y = 4x + 2$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = 4x + 2$

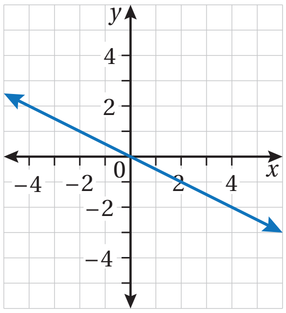
أتحقّقُ من فهمي:

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًّا في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ والمقطعِ:

2



3



غالبًا ما يمثلُ المقطعُ y القيمةَ الابتدائيةَ في المسائلِ الحياتيةِ التي يتمُّ نمذجتُها بمعادلةٍ خطّيةٍ، ويمثلُ المَيلُ معدّلَ التغيُّرِ الثابتِ.

مثال 4: منَ الحياةِ

بطاريةٌ: إذا كانتِ النسبةُ المئويةُ لطاقةِ بطاريةِ جهازِ حاسوبٍ محمولٍ مشحونةٍ شحنًا تامًّا (بالصيغةِ العشريةِ) 1.00 ، وبعدَ تشغيلِ الجهازِ تبدأُ طاقةُ البطاريةِ بالتناقُصِ بنسبةِ 0.2 كلَّ ساعةٍ.

أفكّرُ

لماذا عُبِّرَ عنْ نسبةِ التناقُصِ في طاقةِ البطاريةِ بـ −0.2 في المعادلةِ؟

1 **أكتبُ معادلةً خطّيةً بمتغيرينِ لإيجادِ نسبةِ الطاقةِ المتبقيّةِ في البطاريةِ بعدَ مرورِ ساعاتٍ عدّةٍ على تشغيلِ جهازِ الحاسوبِ.**

أفرضُ أنَّ x هيَ عددُ ساعاتِ تشغيلِ الحاسوبِ، و y هيَ نسبةُ الطاقةِ المتبقيةِ في البطاريةِ.

نسبةُ الطاقةِ عندَ بدايةِ التشغيلِ

عددُ ساعاتِ التشغيلِ

نسبةُ التناقصِ في الطاقةِ

نسبةُ الطاقةِ المتبقيّةِ

$$y = -0.2 \times x + 1$$

② أصفُ ما يمثلُّه المقطعُ y والمَيلُ في المسـألةِ.

المقطعُ y يساوي 1، وهو يمثلُ نسبةَ الطاقةِ بدايةَ التشغيلِ بالصيغةِ العشريةِ، وتعني أنَّ البطاريةَ مشحونةٌ بنسبةِ 100%، أمّا المَيلُ فيمثلُ نسبةَ التناقُصِ في طاقةِ البطاريةِ كلَّ ساعةٍ (وهي نسبةٌ ثابتةٌ).

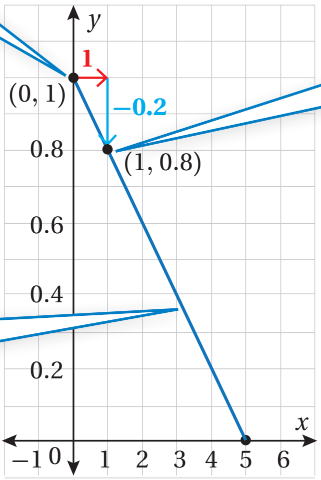
③ أجدُ المقطعَ x للمعادلةِ، ثمَّ أصفُ ما يمثلُه في المسألةِ.

لإيجادِ المقطعِ x، أعوّضُ $y = 0$، ثمَّ أحلُّ المعادلةَ لأجدَ قيمةَ x.

المعادلةُ الأصليةُ	$y = -0.2x + 1$
أعوّضُ $y = 0$	$0 = -0.2x + 1$
أطرحُ 1 منْ كلا الطرفينِ	$0 - 1 = -0.2x + 1 - 1$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على -0.2	$\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-1}{-0.2}$
أبسّطُ	$x = 5$

إذنْ، فالمقطعُ x هو 5، وهو يدلُّ على أنَّ البطاريةَ ستفقدُ شحنَها كليًّا بعدَ 5 ساعاتٍ منْ تشغيلِ جهازِ الحاسوبِ.

④ أمثّلُ المعادلةَ بيانيًّا باستعمالِ المَيلِ والمقطعِ y .



① المقطعُ y هو 1. أُعيِّنُ النقطةَ $(0, 1)$ في المستوى الإحداثي.

② أستعملُ الميلَ لتعيينِ نقطةٍ أخرى على المستقيمِ في المستوى الإحداثيِّ.

③ أرسمُ خطًّا يمرُّ بالنقطتَينِ.

أفكّرُ

لماذا مُثِّلتِ المعادلةُ في الربـعِ الأولِ فقــطْ منَ المستوى الإحداثيِّ؟

5 **بعدَ كمْ ساعةٍ تكونُ نسبةُ الطاقةِ في البطاريةِ 0.75؟**

المعادلةُ الأصليةُ $y = -0.2x + 1$

أعوّضُ $y = 0.75$ $0.75 = -0.2x + 1$

أطرحُ 1 منْ كلا الطرفينِ $0.75 - 1 = -0.2x + 1 - 1$

أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على -0.2 $\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-0.25}{-0.2}$

أبسّطُ $x = 1.25$

إذنْ، ستكونُ نسبةُ الطاقةِ في البطاريةِ 0.75 بعدَ ساعةٍ وربعٍ.

أتحققُ من فهمي:

اشتراكُ هاتفٍ: تدفعُ فرحُ اشتراكًا شهريًّا لهاتفِها قيمتُه 5 دنانيرَ، وتدفعُ قرشينِ عنْ كلِّ دقيقةٍ تتحدثُ فيها بالهاتفِ.

1 أكتبُ معادلةً خطيّةً بمتغيرينِ لإيجادِ تكلفةِ ما تدفعُه فرحُ عندَ تحدُّثِها عددًا منَ الدقائقِ خلالَ الشهرِ.

2 أصفُ ما يمثّلُه المقطعُ y والميلُ في المسألةِ.

3 أجدُ المقطعَ x للمعادلةِ، ثمَّ أصفُ ما يمثّلُه في المسألةِ.

4 أمثّلُ المعادلةَ بيانيًّا باستعمالِ الميلِ والمقطعِ y.

أتدرب وأحل المسائل

1 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الذي ميلُه 1 والمقطعُ y لهُ -1 بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

2 أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بنقطةِ الأصلِ وميلُه 4 بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

3 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(-2, 4)$ و $(3, -1)$ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

4 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الأفقيِّ الذي يقطعُ المحورَ y في النقطةِ $(0, -5)$ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

أفكّرُ

هلْ يُمكنُ كتابةُ معادلةِ المستقيمِ الرأسيِّ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ؟

أمثلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ الميلِ والمقطعِ y:

5 $y = 3x + 4$

6 $y = 2x - 5$

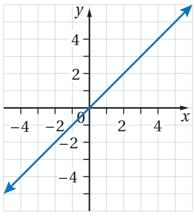
7 $y = \frac{x}{2} - 3$

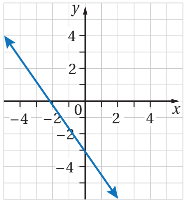
8 $y = 3x + 5$

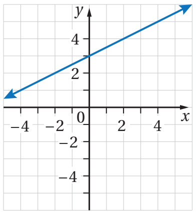
9 $y = \frac{x}{3} + 4$

10 $y = 4 - x$

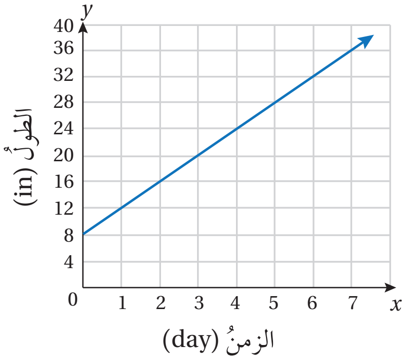
أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المُمثَّلِ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ والمقطعِ:

11


12


13


أشــجارٌ: يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ أدناه العلاقةَ بينَ طولِ نبتةِ موزٍ بالإنشِ والزمنِ بالأيامِ منذُ زراعتِها.



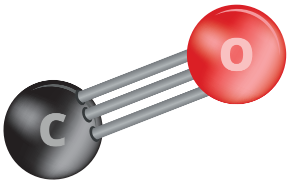
14 كمْ كانَ طولُ الشجرةِ عندَ زراعتِها؟

15 أكتبُ معادلةً خطيةً بمتغيرَينِ تمثلُ مقدارَ نموِّ شجرةِ الموزِ بعدَ مرورِ أيامٍ عدّةٍ.

معلومةٌ

شــجرةُ المــوزِ هــيَ في الحقيقةِ ليستْ شجرةً، بلْ هيَ عشبةٌ عملاقةٌ تقفُ مثلَ الأشجارِ وتُشــابهُ النخيلَ الاســتوائيَّ، وتُعَــدُّ أطولَ عشبةٍ على وجهِ الأرضِ.

16 **بيئةٌ:** تتناقصُ انبعاثاتُ أولِ أكسيدِ الكربونِ في جميعِ أنحاءِ العالمِ بنحوِ 2.6 مليون طنٍّ متريٍّ كلَّ عامٍ. ففي عامِ 1991 بلغتِ انبعاثاتُ أولِ أكسيدِ الكربونِ 79 مليونَ طنٍّ متريٍّ. أكتبُ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ تمثّلُ العلاقةَ بينَ انبعاثاتِ أولِ أكسيدِ الكربونِ والزمنِ. (إرشادٌ: أفترضُ أنَّ $x = 91$ تدلُّ على العامِ 1991).



معلومةٌ

أحدُ مصادرِ الحرارةِ الجوفيةِ للكرةِ الأرضيّةِ هو تقلّصُ الكرةِ الأرضيةِ تحتَ فِعْلِ الجاذبيّةِ عندَ نشأتِها منَ الغبارِ الكونيِّ.

17 **علومُ الأرضِ:** أعودُ إلى فِقْرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

18 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ مختلفةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

$6y = -4x + 24$

$y = 4 - \frac{2}{3}x$

$2x + 3y = 12$

$x = 6 - 1.5y$

$3x - 2y = 12$

19 **تحدٍّ:** أجدُ قيمةَ a في المعادلةِ $2y + ax = -5$ ، علمًا أنَّ ميلَ المعادلةِ $\frac{5}{2}$

20 **أكتبُ** كيفَ أكتبُ معادلةَ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ عُلم ميلُه والمقطعُ y لهُ.

الدرسُ 4 معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ

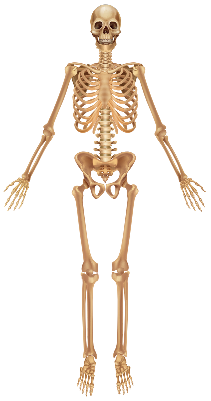
فكرةُ الدرسِ

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ وأمثّلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ.

أستكشفُ



تمثّلُ المعادلةُ $y - 60.81 = 5.74(x-5)$، العَلاقةَ بينَ طولِ الأنثى y سنتيمتر، وطولِ ساعدِها x سنتيمتر.

① أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثّلُ المعادلةَ.

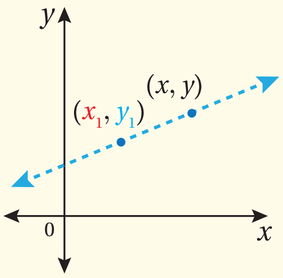
② اكتشفَ علماءُ الآثارِ هيكلًا عظميًّا غيرَ كاملٍ لأنثى بساعدٍ طولُه 23 cm. أجدُ طولَ الهيكلِ العظميِّ.

تعلَّمْتُ في الدرسِ السابقِ كتابةَ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ y، وسأتعلّمُ في هذا الدرسِ كتابةَ معادلةِ مستقيمٍ **بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ** (point – slope form) إذا علمْتُ ميلَ المستقيمِ وإحداثيّاتِ نقطةٍ يمرُّ بها.

مفهومٌ أساسيٌّ صيغةُ المَيلِ ونقطةٍ

- **بالكلماتِ:** صيغةُ الميلِ ونقطةٍ للمعادلةِ الخطّيّةِ هيَ: $y-y_1= m(x-x_1)$، حيثُ m ميلُ المستقيمِ، و(x_1, y_1) نقطةٌ مُعطاةٌ.
- **بالرموزِ:**

$$y-\underbrace{y_1}_{\text{نقطةٌ مُعطاةٌ}}=\overset{\text{المَيلُ}}{m}(x-\underbrace{x_1}_{\text{نقطةٌ مُعطاةٌ}})$$



مثال 1

① **أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ (3, 6–) وميلُه 5– بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.**

أعوّضُ الميلَ والنقطةَ المُعْطاةَ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ	$y - y_1 = m(x-x_1)$
أعوّضُ $m = -5, (x_1, y_1) = (-3, 6)$	$y - 6 = -5(x-(-3))$
أبسّطُ	$y - 6 = -5(x + 3)$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y - 6 = -5(x + 3)$

2 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(-3, 5)$ و $(9, 21)$ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ النقطتينِ في إيجادِ الميلِ.

صيغةُ الميلِ $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـ $(-3, 5)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(9, 21)$ $$= \frac{21 - 5}{9 - (-3)}$$

أُبسّطُ $$= \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

إذنْ، الميلُ $\frac{4}{3}$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ الميلَ وإحداثياتِ إحدى النقطتينِ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $$y - y_1 = m(x - x_1)$$

أعوّضُ $m = \frac{4}{3}, (x_1, y_1) = (9, 21)$ $$y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$

أتحققُ من فهمي:

3 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(8, -4)$ و ميلُه $\frac{2}{3}$ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

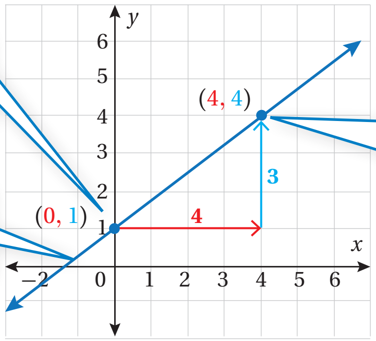
4 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(7, 2)$ و $(1, -8)$ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

يمكنُ استعمالُ الميلِ والنقطةِ المُعْطاةِ منَ المعادلةِ الخطّيّةِ المكتوبةِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ لتمثيلِ المستقيمِ.

مثال 2

1 أمثّلُ المعادلةَ $y - 1 = \frac{3}{4}x$ بيانيًّا باستعمالِ الميلِ ونقطةٍ.

يمكنُ إعادةُ كتابةِ المعادلةِ على الصورةِ: $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 0)$ ، وعليهِ فإنَّ الميلَ $\frac{3}{4}$ والنقطةَ $(0, 1)$.



① أعيّنُ النقطةَ $(0, 1)$ في المستوى الإحداثيِّ.

② أستعملُ الميلَ $\frac{3}{4}$ لتعيينِ نقطةٍ أخرى على المستقيمِ في المستوى الإحداثيِّ. أبدأُ منَ النقطةِ $(0, 1)$، وأتحرّكُ 4 وَحَداتٍ نحْوَ اليمينِ ثمَّ 3 وَحَداتٍ إلى الأعلى.

③ أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بالنقطتينِ.

أتحققُ من فهمي:

أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ الميلِ ونقطةٍ:

② $y - 4 = 2\,(x-3)$

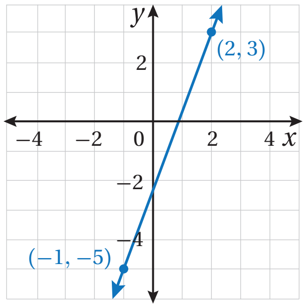
③ $y - 5 = -3(x + 1)$

④ $y + 7 = -\frac{4}{5}\,(x-4)$

تعلّمتُ في المثالِ الســـابقِ كيفيـــةَ التمثيلِ البيانيِّ لمعادلةٍ خطّيّةٍ مكتوبةٍ بصورةِ الميلِ ونقطـــةٍ، وبالعكسِ يمكنُ كتابةُ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ إذا عُرِفَ تمثيلُها البيانيُّ.

مثال 3

① أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:



الْخُطْوَةُ 1 أجدُ الميلَ.

أختارُ نقطتينِ على المستقيمِ وأجدُ الميلَ.

صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـِ $(-1, -5)$ وعن (x_2, y_2) بـِ $(2, 3)$ $= \frac{3 - (-5)}{2 - (-1)}$

أُبسّطُ $= \frac{8}{3}$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

أعوّضُ الميلَ وإحداثياتِ إحدى النقطتينِ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m(x-x_1)$

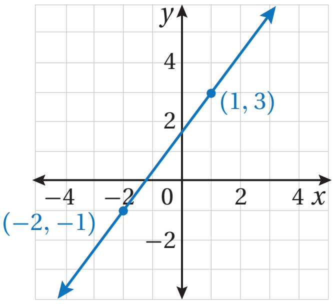
أعوّضُ $m = \frac{8}{3}, (x_1, y_1) = (2, 3)$ $y - 3 = \frac{8}{3}\,(x-2)$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y - 3 = \frac{8}{3}\,(x - 2)$

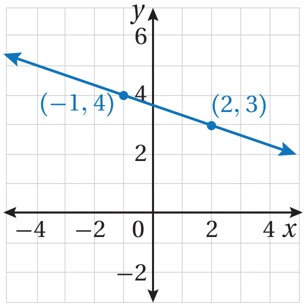
أتحققُ من فهمي:

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:

3



2



يمكنُ كتابةُ معادلةٍ خطيّةٍ لنمذجةِ بياناتٍ مُمثَّلةٍ في جدولٍ، إذا كانَ معدّلُ التغيُّرِ نفسُه بينَ الأزواجِ المرتَّبةِ المتتاليةِ فيهِ، ويكونُ معدّلُ التغيّرِ في هذهِ الحالةِ هو الميلَ.

مثال 4: منَ الحياةِ

ضغطُ الماءِ: يبيّنُ الجدولُ المجاورُ العلاقةَ بينَ ضغطِ الماءِ والعمقِ.

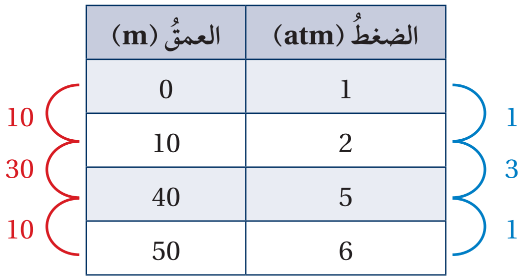
الضغطُ (atm)	العمقُ (m)
1	0
2	10
5	40
6	50

أتعلّمُ

يُقاسُ ضغطُ الماءِ بوَحدةِ الأتموسفير (atm)

1 أبيّنُ أنَّ العَلاقةَ بين ضغطِ الماءِ والعمقِ خطيّةٌ.

أجدُ معدلَ التغيُّرِ بينَ الأزواجِ المرتَّبةِ المتتاليةِ في الجدولِ.



الضغطُ (atm)	العمقُ (m)
1	0
2	10
5	40
6	50

$\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{3}{30} = 0.1$, $\frac{1}{10} = 0.1$

إذنْ، العلاقةُ بينَ ضغطِ الماءِ والعمقِ خطيّةٌ، ومعدّلُ التغيُّرِ هو 0.1 atm لكلِّ مترٍ.

② أكتبُ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ يمكنُ استعمالُها لإيجادِ ضغطِ الماءِ عندَ أيِّ عمقٍ.

بما أَنَّ معدّلَ التغيّرِ يمثّلُ الميلَ، إذَنْ أعوّضُ الميلَ وإحداثياتِ أيِّ نقطةٍ في الجدولِ في صيغةِ الميلِ والنقطةِ.

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m(x - x_1)$

أعوّضُ $m = 0.1, (x_1, y_1) = (40, 5)$ $y - 5 = 0.1\,(x - 40)$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y - 5 = 0.1(x - 40)$

أتحققُ من فهمي:

منطادٌ: يبيّنُ الجدولُ المجاورُ العلاقةَ بينَ ارتفاعِ منطادِ هواءٍ ساخنٍ والزمنِ.

الارتفاعُ (m)	الزمنُ (s)
640	10
590	30
490	70
440	90

③ أُبيّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ ارتفاعِ المنطادِ والزمنِ خطيّةٌ.

④ أكتبُ معادلةً خطيّةً بمتغيرينِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ يمكنُ استعمالُها لإيجادِ ارتفاعِ المنطادِ عندَ أيِّ لحظةٍ.

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ المُعْطاةِ والمعلومِ ميلُه ***m*** في كلٍّ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:

① $(4, -3), m = \frac{3}{4}$

② $(-2, -7), m = -5$

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:

③ $(3, 7), (-3, 5)$

④ $(-1, 8), (9, -6)$

⑤ $(-1, 6), (-3, 10)$

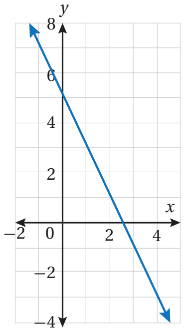
أمثّلُ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ الميلِ ونقطةٍ:

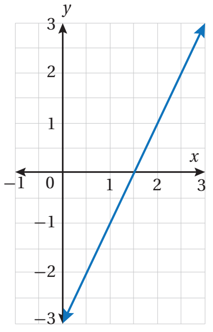
⑥ $y + 3 = 2(x - 1)$

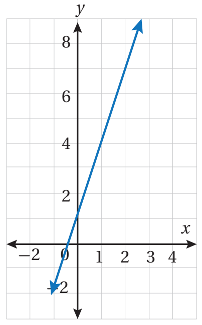
⑦ $y - 1 = -3(x + 2)$

⑧ $y - 2 = \frac{4}{9}(x - 3)$

أكتبُ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ معادلةَ المستقيمِ الممثَّلِ بيانيًا في كلٍّ ممّا يأتي:

11


10


9


12 **جَبْــرٌ:** إذا كانَ ميلُ المســتقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(3p, -5)$، $(-1, p)$ يساوي $-\frac{4}{5}$، فأجدُ قيمةَ الثابتِ p.

بَعوضٌ: تمثّلُ المعادلةُ $N-50 = 2(t-10)$ عددَ البعوضِ N (بالآلافِ) في مستنقعٍ صغيرٍ بعدَ t يومًا من بدايةِ شهرِ حزيرانَ.

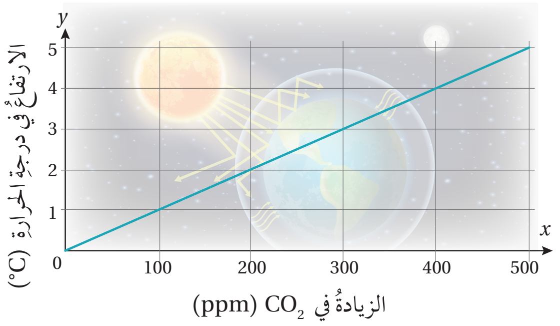
13 أمثّلُ المعادلةَ بيانيًّا، حيثُ $t \geq 0$.

14 بعدَ كمْ يومٍ منْ بدايةِ الشهرِ يكونُ عددُ البعوضِ في المستنقعِ 46000؟

معلومة

يُعَدُّ ثاني أكسيدِ الكربونِ أحدَ الغازاتِ الّتي تحبسُ الحرارةَ الناتجةَ منَ الإشعاعِ الشمسيِّ، ممّا يؤثّرُ في المناخِ.

بيئةٌ: التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ للتنبُّؤِ بالعَلاقةِ بينَ زيادةِ ثاني أكسيدِ الكربونِ في الغلافِ الجويِّ بالأجزاءِ منْ مليونٍ (ppm) وارتفاعِ متوسطِ درجةِ الحرارةِ في العالمِ بالسّيليسيوسِ.



15 إذا زادَ CO_2 بمقدارِ 300 ppm، فما الارتفاعُ المتوقَّعُ في درجةِ الحرارةِ؟

16 ارتفعتْ درجةُ الحرارةِ بينَ عامَيْ 1980 م و 2000 بمقدارِ 0.4 °C أجدُ مقدارَ الزيادةِ في كميّةِ ثاني أكسيدِ الكربونِ.

17 أكتبُ معادلــةً خطّيّةً بمتغيرينِ يمكنُ اســتعمالُها لإيجادِ مقــدارِ الارتفاعِ في درجةِ الحرارةِ عندَ أيِّ ارتفاعٍ في كميّةِ CO_2 في الغلافِ الجويِّ.

معلومة

بعضُ الأشـجارِ التي قُطِعَ جِذْعُها لديهـا القدرةُ على جذبِ النيتروجين منَ الجوِّ وتسميدِ المنطقةِ المحيطةِ بها.

أشـجارٌ: يبيّنُ الجـدولُ المجاورُ العلاقةَ بيـنَ محيطِ جذعِ شـجرةٍ والزمنِ.

محيطُ جذعِ الشجرةِ (cm)	الزمنُ (بالسنواتِ)
2	1
4	2
6	3
8	4

18 أبيّـنُ أنَّ العلاقةَ بيـنَ محيطِ جِذْعِ الشجرةِ والزمنِ خطّيّةٌ.

19 أكتبُ معادلةً خطّيّةً بمتغيرينِ يمكنُ اسـتعمالُها لإيجـادِ محيـطِ جذعِ الشجرةِ في أيِّ سنةٍ.

20 أتنبّأُ بمحيطِ جذعِ الشجرةِ بعدَ 10 سنواتٍ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

21 **تبريرٌ:** أوجَدَ كلٌّ منْ باسمٍ ولينَ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(1, 6), (-2, -6)$ على النحوِ الآتي:

باسمٌ

$y - 6 = 4(x-1)$

لينُ

$y + 6 = 4(x+2)$

هلْ إجابةُ كلٍّ منهُما صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتِي.

22 **تبريرٌ:** كيفَ سيتغيّرُ التمثيلُ البيانيُّ للمعادلةِ $y - 12 = 8(x - 2)$، إذا تغيّرتْ إشاراتا الطرحِ في المعادلةِ إلى إشـاراتي جمعٍ؟ أبرّرُ إجابتي دونَ اللجوءِ إلى تمثيلِ المعادلةِ بيانيًّا.

23 **تبريرٌ:** أجدُ معادلةَ المسـتقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(5, 5), (9, 1)$ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ، ثمَّ أُبيّنُ أنَّ المقطعَ x يساوي 10، مبرّرًا إجابتي.

24 **أكتبُ** كيفَ أكتبُ معادلةَ مستقيمٍ إذا عُلِمَ ميلُهُ ونقطةٌ يمرُّ بها؟

الدرسُ 5 المستقيماتُ المتوازيةُ والمتعامدةُ

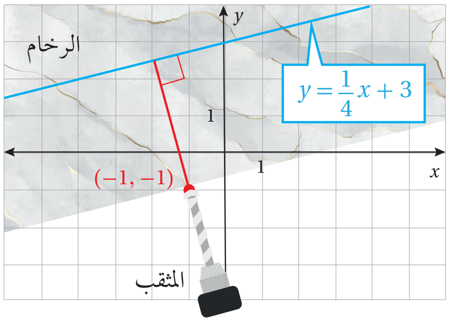
فكرةُ الدرسِ

- أكتبُ معادلةَ المستقيم المارِّ بنقطةٍ مُعْطاةٍ ويوازي مستقيمًا معلومًا.
- أكتبُ معادلةَ المستقيم المارِّ بنقطةٍ مُعطاةٍ ويعامِدُ مستقيمًا معلومًا.

المصطلحاتُ

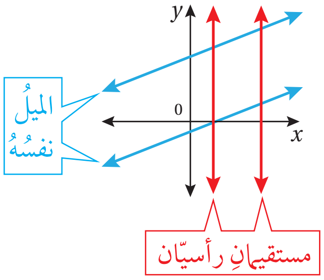
مستقيمانِ متوازيانِ، مستقيمانِ مُتعامِدانِ، معكوسُ المقلوبِ.

أستكشفُ



يُوصَلُ رأسُ مِثْقَبِ رُخامٍ بالحاسوبِ؛ لتحديدِ إحداثيّاتِ نقطةِ الثَّقْبِ والعمقِ الذي يجبُ أنْ يبلُغَه المِثقبُ.

أفترضُ أنَّ رأسَ المِثقبِ عندَ النقطةِ $(-1, -1)$، أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ برأسِ المِثقبِ والعموديِّ على مستقيمٍ يقعُ على سطحِ الرّخامِ ومعادلتُهُ هيَ: $y = \frac{1}{4}x + 3$.



يُسمّى المستقيمانِ الواقعانِ في المستوى نفسِه ولا يقطعُ أحدُهُما الآخرَ **مستقيمينِ متوازيينِ** (parallel lines)، ويكونُ لهُما الميلُ نفسُه. والمستقيماتُ الرأسيةُ جميعُها متوازيةٌ.

مثال 1

① **أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(-2, 5)$ والموازي للمستقيمِ $y = \frac{3}{2}x - 7$.**

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ المستقيمِ المُعْطى.

ميلُ المستقيمِ $y = \frac{3}{2}x - 7$ هوَ $\frac{3}{2}$

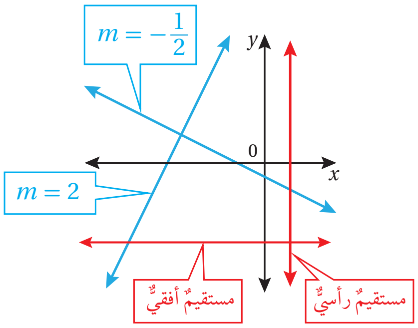
الْخُطْوَةُ 2 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ باستعمالِ الميلِ والنقطةِ المُعْطاةِ.

أبدأُ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ	$y - y_1 = m(x - x_1)$
أعوّضُ $m = \frac{3}{2}$, $(x_1, y_1) = (-2, 5)$	$y - 5 = \frac{3}{2}(x - (-2))$
أبسّطُ	$y - 5 = \frac{3}{2}(x + 2)$
خاصيّةُ التوزيعِ	$y - 5 = \frac{3}{2}x + 3$
أجمعُ 5 إلى الطرفينِ	$y - 5 + 5 = \frac{3}{2}x + 3 + 5$
أبسّطُ	$y = \frac{3}{2}x + 8$

أتحققُ من فهمي:

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(3, -1)$ والموازي للمستقيمِ $y = 2x + 5$.

يُسَمّى المستقيمانِ اللذانِ يتقاطعانِ مُكوِّنَينِ زوايا قوائمَ **مستقيمينِ متعامدينِ** (perpendicular lines). ويكونُ ميلُ أحدِهِما **معكوسَ مقلوبِ** (opposite reciprocals) مَيلِ الآخرِ، وهذا يعني أنَّ حاصلَ ضربِ مَيْلَيْهِما يساوي -1 والمستقيماتُ الرأسيّةُ والأفقيّةُ متعامِدةٌ.



أتعلّمُ

$\frac{3}{4}$ معكوسُ مقلوبِ $-\frac{4}{3}$ لأنَّ:

$\frac{3}{4} \times -\frac{4}{3} = -1$

مثال 2

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(4, 0)$ والعموديِّ على المستقيمِ $4y = -8x + 1$

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ المستقيمِ المُعْطى.

لإيجادِ ميلِ المستقيمِ المُعْطى أحتاجُ إلى كتابةِ المعادلةِ بصورةِ الميلِ والمقطعِ.

معادلةُ المستقيمِ المُعْطى $4y = -8x + 1$

أقسمُ طَرَفَي المعادلةِ على 4 $\frac{4y}{4} = \frac{-8x}{4} + \frac{1}{4}$

أبسّطُ $y = -2x + \frac{1}{4}$

ميلُ المستقيمِ $y = -2x + \frac{1}{4}$ هوَ -2

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ ميلَ المستقيمِ العموديِّ على المستقيمِ المُعْطى.

ميلُ المستقيمِ العموديِّ على المستقيمِ المُعْطى يساوي معكوسَ مقلوبِ العددِ -2 ؛ أيْ $\frac{1}{2}$

الْخُطْوَةُ 3 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ العموديِّ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

أبدأُ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m(x - x_1)$

أعوّضُ $m = \frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (4, 0)$ $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 4)$

أبسّطُ $y = \frac{1}{2}(x - 4)$

خاصيّةُ التوزيعِ $y = \frac{1}{2}x - 2$

أتحققُ من فهمي:

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(1, 8)$ والمُعامِدِ للمستقيمِ $3y - 9x = 12$.

يمكنُ تحديدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ متوازيينِ أو متعامِدينِ أو غيرَ ذلكَ منْ خلالِ الميلِ.

مثال 3

1 أحدّدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ $-3x + 4y = 32$ و $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ متوازيينِ أو متعامدينِ أو غيرَ ذلكَ.

الخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ كلِّ مستقيمٍ.

- ميلُ المستقيمِ $-3x + 4y = 32$

معادلةُ المستقيمِ المُعْطى	$-3x + 4y = 32$
أجمعُ $3x$ إلى كِلا الطَّرَفينِ	$-3x + 4y + 3x = 32 + 3x$
أقسمُ طَرَفَيِ المعادلةِ على 4	$\frac{4y}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{32}{4}$
أبسّطُ	$y = \frac{3}{4}x + 8$

إذنْ، ميلُ المستقيمِ $-3x + 4y = 32$ يساوي $\frac{3}{4}$

- ميلُ المستقيمِ $y - 1 = \frac{3}{4}\ (x + 2)$ يساوي $\frac{3}{4}$

الخُطْوَةُ 2 أحدّدُ العلاقةَ بينَ المستقيمينِ.

بما أنَّ ميلَي المستقيمَينِ متساويانِ، إذنْ، فالمستقيمانِ متوازيانِ.

2 أحدّدُ ما إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيينِ أو متعامِدينِ أو غيرَ ذلكَ، حيثُ $A(1, 1), B(-1, -5), C(3, 2), D(6, 1)$

الخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ كلِّ مستقيمٍ.

- مَيلُ $\overleftrightarrow{AB}$

صيغةُ الميلِ	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(1, 1)$ وعن (x_2, y_2) بِـ $(-1, -5)$	$= \frac{-5 - 1}{-1 - 1}$
أُبسّطُ	$= \frac{-6}{-2} = 3$

- مَيلُ $\overleftrightarrow{CD}$

صيغةُ الميلِ $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(3, 2)$ وعن (x_2, y_2) بِـ $(6, 1)$ $$= \frac{1 - 2}{6 - 3}$$

أُبسّطُ $$= -\frac{1}{3}$$

الْخُطْوَةُ 2 أحدّدُ العلاقةَ بينَ المستقيمينِ.

المَيْلانِ غيرُ متساويينِ، إذنْ، فالمستقيمانِ غيرُ متوازيينِ. ولتحديدِ ما إذا كان المستقيمانِ متعامِدينِ أجدُ حاصلَ ضربِ مَيْلَيْهِما.

$$3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

بما أنَّ حاصلَ ضربِ مَيْلَي $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يساوي -1، إذنْ، فالمستقيمانِ متعامدانِ.

أتحققُ من فهمي:

3 أحدّدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ $2x + y = 7$ و $y - 2x = 3$ متوازيينِ أو متعامدينِ أو غيرَ ذلكَ.

4 أحدّدُ ما إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيينِ أو متعامدينِ أو غيرَ ذلكَ، حيثُ $A(3, 6), B(-9, 2), C(5, 4), D(2, 3)$

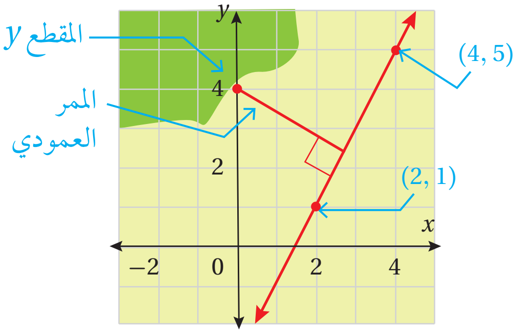
يمكنُ كتابةُ معادلةِ أيِّ مستقيمٍ يمرُّ بنقطةٍ معلومةٍ يوازي أو يعامِدُ مستقيمًا معلومًا في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ الحياتيّةِ.

مثال 4: منَ الحياةِ

عمارةٌ: ترغبُ إحدى البلدياتِ بربطِ مدخلِ الحديقةِ العامةِ بمسارِ الجري داخلَ الحديقةِ منْ خلالِ مَمرٍّ عموديٍّ على المسارِ. معتمدًا الشكلَ المجاورَ الذي يمثّلُ مخطَّطَ الحديقةِ، أجدُ معادلةَ المستقيمِ الذي يمثلُ المَمَرَّ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثلُ مسارَ الجري.

تقــعُ النقطتانِ $(2, 1)$, $(4, 5)$ على مســارِ الجــري، إذنْ، يمكنُ منْ خلالِهما إيجادُ ميلِ المستقيمِ الذي يمثّلُ المسارَ.



صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بِـ $(2, 1)$ وعن (x_2, y_2) بِـ $(4, 5)$ $= \frac{5 - 1}{4 - 2}$

أُبسّطُ $= \frac{4}{2} = 2$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثلُ معادلةَ الممرِّ.

بما أنَّ الممرَّ عموديٌّ على مسارِ الجري، إذنْ، أجدُ مقلوبَ معكوسِ ميلِ مسارِ الجري.

بما أنَّ ميلَ مسارِ الجري يساوي 2، فإنَّ مقلوبَ معكوسِه $-\frac{1}{2}$

الْخُطْوَةُ 3 أجدُ معادلةَ المستقيمِ الذي يمثلُ الممرَّ.

بما أنَّ المســتقيمَ الذي يمثلُ المَمرَّ يقطعُ المحورَ y في النقطةِ $(0, 4)$، إذنْ، فإنَّ المقطعَ y لهُ يساوي 4، وعليهِ فإنَّ معادلةَ الممرِّ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ هيَ:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

أتحققُ من فهمي:

في المثالِ الســابقِ، تخطّطُ البلديةُ لإنشــاءِ مسارِ ركضٍ آخرَ داخلَ الحديقةِ موازٍ لمســارِ الركضِ الأولِ ويمرُّ في مَدخلِ الحديقةِ. أجدُ معادلةَ المستقيمِ الذي يمثلُ مسارَ الركضِ الجديدَ.

أتدرب وأحل المسائل

أكتــبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المســتقيمِ المــارِّ بالنقطةِ المُعْطــاةِ والموازي للمستقيمِ المُعْطاةِ معادلتُه في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $(-1, 5), y = \frac{1}{2}x - 10$

2 $(2, -7), 2y = 5x - 3$

3 $(4, 8), x + 4y - 9 = 0$

4 $(9, 3), 2x - 7y + 1 = 0$

أكتبُ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ المُعطاةِ والمُعامِدِ للمستقيمِ المُعْطاةِ معادلتُه في كلٍّ ممّا يأتي:

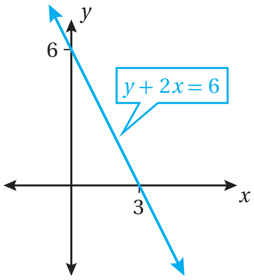
6 $(-5, -4), y = \frac{1}{2}x + 1$

5 $(2, -7), y = x - 2$

8 $(-3, 0), 3x - 4y = -4$

7 $(2, 2), 3y = -2x + 6$

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ للمستقيمِ الذي معادلتُه $y + 2x = 6$



9 أُبيّنُ أنَّ النقطةَ $(1, 4)$ تقعُ على المستقيمِ.

10 أجدُ ميلَ المستقيمِ.

11 أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

12 أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بنقطةِ الأصلِ والموازي للمستقيمِ المُعطى بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

13 يحتوي الصندوقُ المجاورُ على زوجينِ منَ المستقيماتِ المتعامدةِ. فأيُّ المستقيماتِ مختلفٌ؟ أبرّرُ إجابتِي.

$3x + 5y = 7$
$6x + 3y = 7$
$3y - 5x = 7$
$8x - 4y = 7$
$4y + 2x = 7$

أحدّدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيينِ أو متعامدينِ أو غيرَ ذلك في كلٍّ ممّا يأتي:

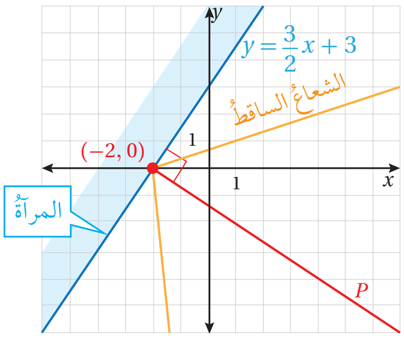
14 $A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$

15 $A(8, 4), B(4,3), C(4,-9), D(2,-1)$

16 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -1), D(-6, -5)$

17 $A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$

18 **أشعةٌ:** تمثّلُ المعادلةُ $y = \frac{3}{2}x + 3$ مستقيمًا يقعُ على سطحِ مرآةٍ، وتمثّلُ النقطةُ $(-2, 0)$ نقطةَ التقاءِ الشعاعِ الساقطِ معَ هذا المستقيمِ، أجدُ معادلةَ العمودِ P المُقامِ على المرآةِ.



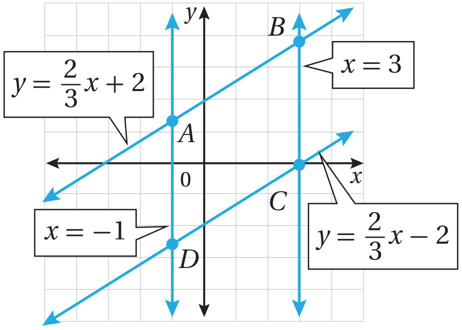
أتذكّرُ

زاويةُ سقوطِ الشعاعِ تساوي زاويةَ انعكاسِه.

أتذكّرُ

متوازي الأضلاعِ شكلٌ رباعيٌّ فيهِ كلُّ ضلعينِ متقابلينِ متوازيانِ.

19 أستعملُ الميلَ لتحديدِ ما إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ $ABCD$ المُبيَّنُ في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ يمثلُ متوازيَ أضلاعٍ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: تمثلُ النقاطُ $A(5, 10), B(1, 5), C(6, 1)$ ثلاثةَ رؤوسٍ لمتوازي الأضلاعِ $ABCD$

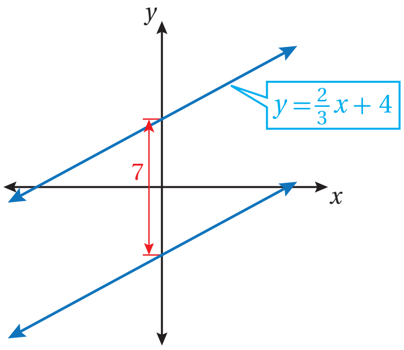
20 أجدُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ A و C.

إرشادٌ

ترتيبُ قراءةِ الرؤوسِ غيرُ مهمٍّ.

21 أجدُ إحداثيَّيْ نقطتينِ مُحْتمَلتينِ للرأسِ الرابعِ D لمتوازي الأضلاعِ، مبرّرًا إجابتِي.

22 **تبريرٌ:** يبيّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ لمستقيمينِ متوازيينِ في المستوى الإحداثيِّ. أجدُ معادلةَ المستقيمِ السُّفْليِّ، وأبرّرُ إجابتِي.



23 **تحدٍّ:** أجدُ قيمةَ a التي تجعلُ المستقيمينِ $y = ax + 5$ و $2y = (a+4)x - 1$ متوازيينِ.

24 **أكتبُ** كيفَ يمكنُ تحديدُ ما إذا كانَ مستقيمانِ في المستوى الإحداثيِّ متوازيينِ أو متعامِدينِ أو غيرَ ذلك؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 مَيلُ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(5,-4)$ وَ $(5,-10)$:

a) موجبٌ
b) سالبٌ
c) صفرٌ
d) غيرُ مُعرَّفٍ

2 ميلُ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ $(0, 0)$ هو 2، فأيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ أيضًا على المستقيمِ؟

a) $(-4,2)$
b) $(2,4)$
c) $(-2, 4)$
d) $(2,-4)$

3 المقطعُ y للتمثيلِ البيانيِّ للمعادلةِ $5x + 2y = 30$ هوَ:

a) -15
b) -6
c) 6
d) 15

4 المقطعُ x للتمثيلِ البيانيِّ للمعادلةِ $y = 4x+32$ هوَ:

a) -32
b) -8
c) 8
d) 32

5 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ تمثّلُ مستقيمًا ميلُه $\frac{1}{3}$ ويمرُّ بالنقطةِ $(-2, 1)$؟

a) $y = \frac{1}{3}x + 1$
b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$
d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

6 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ تمثّلُ مستقيمًا لهُ أكبرُ ميلٍ؟

a) $y = 3x$
b) $y = x + 12$
c) $y = 5x - 1$
d) $y = 8x + 4$

أُبيّنُ أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ دائمًا وأيُّها خطأٌ:

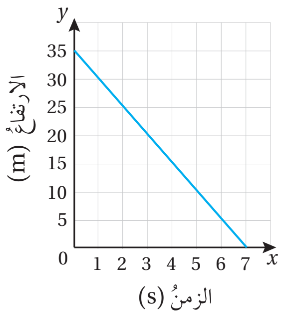
7 جميعُ المستقيماتِ الأفقيّةِ لها الميلُ نفسُه.

8 إذا كانَ ميلُ المستقيمِ 1 ، فإنَّه يمرُّ بنقطةِ الأصلِ.

9 معدّلُ التغيُّرِ يكونُ إمّا سالبًا وإمّا موجبًا.

10 إذا كانَ لنقطتينِ الإحداثيُّ x نفسُه فهُما تقعانِ على المستقيمِ الرأسيِّ نفسِه.

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ العَلاقةَ بينَ ارتفاعِ طائرةٍ عموديّةٍ بالأمتارِ والزمنِ بالثواني اللازمِ لوصولِها إلى سطحِ الأرضِ.

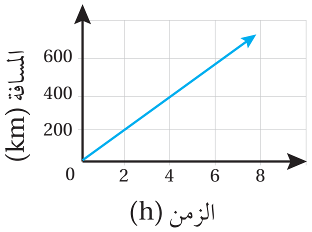


11 بعدَ كمْ ثانيةٍ تصلُ الطائرةُ إلى سطحِ الأرضِ؟

12 بعدَ كمْ ثانيةٍ تكونُ الطائرةُ على ارتفاعِ 15 m؟

13 ما مدلولُ المقطعِ y في هذهِ الحالةِ؟

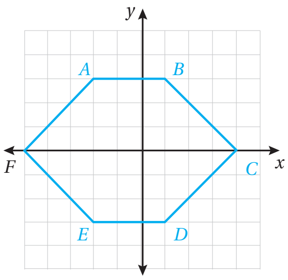
يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العَلاقةَ بينَ المسافةِ التي قطعَتْها شاحنةٌ على طريقٍ مُنحَدِرٍ والزمنِ الذي استغرقَتْهُ.



14 أجدُ المسافةَ التي قطعَتْها الشاحنةُ بعدَ 4 ساعاتٍ منَ انطلاقِها.

15 هلْ تسيرُ الشاحنةُ بسرعةٍ ثابتةٍ على الطريقِ؟ أبرّرُ إجابتِي.

يبيّنُ الشكلُ الآتي المضلّعَ السداسيَّ *ABCDEF*.



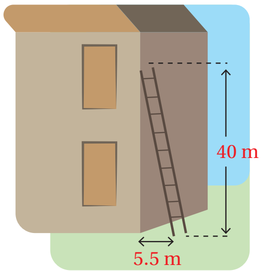
16 أجدُ ميلَ كلٍّ منْ:

$\overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{AD}$

17 أجدُ معادلةَ كلٍّ منْ:

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{DC}, \overleftrightarrow{AF}$

18 أجدُ ميلَ السُّلّمِ في الشكلِ المجاورِ.

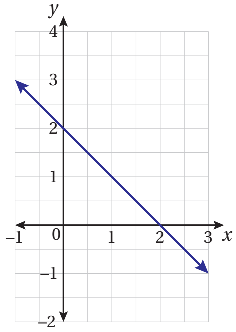


تمثّلُ المعادلةُ $y = 5x+k$ مستقيمًا يمرُّ بالنقطةِ (2, 11).

19 أجدُ قيمةَ k .

20 أجدُ معادلةَ المستقيمِ الموازي للمستقيمِ في الفرعِ السابقِ المارِّ بالنقطةِ (4, 11).

21 أجدُ الميلَ والمقطعينِ الإحداثيّينِ للمستقيمِ المُمَثَّلِ في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ.



تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

22 ميلُ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ (a, b) و (c, d) هو:

a) $\frac{d-c}{b-a}$

b) $\frac{b-d}{a-c}$

c) $\frac{d-b}{a-c}$

d) $\frac{a-c}{b-d}$

23 مستقيمٌ أفقيٌّ يمرُّ بالنقطةِ (5, 22)، فأيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ على المستقيمِ؟

a) (5, 2)

b) (0,22)

c) (22, 5)

d) (0, 5)

24 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ تمثلُ معادلةَ مستقيمٍ أفقيٍّ؟

a) $3x + 6y = 0$

b) $2x+7=0$

c) $-3y = 29$

d) $x-2y = 4$

25 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ المقطعُ y لها **لا** يساوي 5؟

a) $2x = y - 5$

b) $3x + y = 5$

c) $y = x + 5$

d) $2x - y = 5$

الوحدةُ 4

المثلثاتُ المتطابقةُ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعملُ المثلثاتُ كثيرًا في التصاميمِ الهندسيةِ؛ لأنَّ خصائصَها الهندسيةَ تضيفُ قوةً كبيرةً وجمالًا للتصميمِ؛ فأيُّ قوةٍ تؤثرُ في المثلثِ تتوزعُ بالتساوي على أضلاعِهِ، لذلكَ نرى المثلثاتِ كثيرًا في الجسورِ، والمباني، وأعمدةِ الكهرباءِ العاليةِ، والرافعاتِ.

تعلَّمتُ سابِقًا:

✓ تصنيفَ المثلثاتِ بحسبِ أطوالِ أضلاعِها وزواياها.

✓ تمييزَ المضلعاتِ المتطابقةِ، وتحديدَ العناصرِ المتناظرةِ في مضلعَين متطابقَينِ.

✓ حلَّ مسائلَ تعتمدُ على مفهومِ التطابقِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- إثباتَ تطابقِ مثلثَينِ باستخدامِ حالاتِ التطابقِ المتعددةِ.
- تعرّفَ خصائصِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ والمتطابقِ الأضلاعِ.
- حلَّ مسائلَ حياتيةٍ على تطابقِ المثلثاتِ.

مشروعُ الوحدةِ: أبني جسرًا

أســتعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ، الّذي سنوظفُ فيهِ ما نتعلمُهُ في هذهِ الوحدةِ حولَ تطابقِ المثلثاتِ، لِعملِ نموذجِ جسرٍ.

الموادُّ والأدواتُ اللازمةُ:

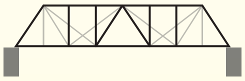
- أعوادُ آيسكريم.
- سيليكون لاصقٌ.

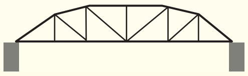
خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

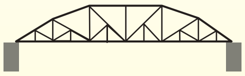
تُستعملُ المثلثاتُ المتطابقةُ كثيرًا في تصميمِ الجسورِ؛ لأَنَّها توزعُ الأحمالَ بالتســاوي بَيْنَ أجزاءِ الجســرِ، ممّا يزيدُ مِنْ قدرتِهِ على تحمّلِ الأثقالِ.

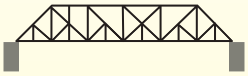
1. أبحــثُ في شــبكةِ الإنترنــتِ عَنْ تصاميمَ لجســورٍ باســتعمالِ أعوادِ الآيســكريمِ، مســتعينًا بالكلماتِ المفتاحيــةِ الآتيــةِ: ice cream stick bridge, popsicle stick bridge.

2. أختــارُ تصميمًا جميلًا وجاذبًا للجســرِ، ثُمَّ أرســمُ مخططًــا لَهُ علــى ورقــةٍ، وأحرصُ على اســتعمالِ المثلثــاتِ المتطابقةِ الضلعَيــنِ والمتطابقةِ الأضلاعِ بشكلٍ متماثلٍ في تصميمي.







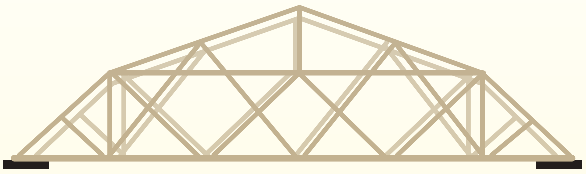


3. أبدأُ تصميمَ الجســرِ، وإلصاقَ الأعوادِ بشــكلٍ جيدٍ؛ لضمانِ ثباتِ الجســرِ، ويمكنُني البحــثُ عَنْ مقاطعِ فيديــو تســاعدُني على تنفيــذِ التصميمِ باســتعمالِ الكلماتِ المفتاحيةِ السابقةِ.

4. أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا يتضمنُ صورَ جسورٍ معدنيةٍ عالميةٍ اســتُعملَتِ المثلثــاتُ في تصميمِهــا. أضيفُ بعضَ المعلوماتِ حولَ كلِّ جسرٍ، مثلَ: الطولِ، والبلدِ الّذي يقعُ فيهِ، وتاريخِ الإنشاءِ.

عرضُ النتائجِ:

- أعــرضُ جســري أمــامَ الصــفِّ، وأحــددُ المثلثــاتِ المتطابقــةَ فيــهِ.
- أقــدّمُ العــرضَ التقديمــيَّ، وأتحــدثُ بالتفصيلِ حولَ الجسورِ الّتي يحتويها.
- نصوِّتُ لأجملِ جسرٍ.



الدرسُ 1 تطابقُ المثلثاتِ (SSS, SAS, HL)

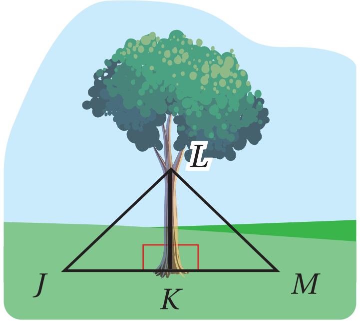
فكرةُ الدرسِ

- أثبتُ تطابقَ مثلثَينِ باستعمالِ حالتَيْ SSS وَ SAS.
- أثبتُ تطابــقَ مثلثَينِ قائمَــيِ الزاويةِ باستعمالِ حالةِ HL.

المصطلحاتُ

المسلمةُ، النظريةُ، البرهانُ، البرهانُ السهميُّ، الزاويةُ المحصورةُ، البرهانُ ذو العمودَين.

أستكشفُ



يســتعملُ المزارعونَ طرائــقَ مختلفةً لدعمِ الأشجارِ الصغيرةِ، منها الطريقةُ المبيَّنةُ في الشــكلِ المجــاورِ، حيثُ تثبَّتُ الشجرةُ بأسلاكٍ تصلُ بَيْنَ جذعِها وأوتادٍ في الأرضِ.

ما العلاقةُ بَيْنَ ΔLKJ وَ ΔLKM الّتي تجعلُ الشجرةَ أكثرَ ثباتًا؟

المسلمةُ (Postulate) عبارةٌ رياضيةٌ تُقبَلُ على أنَّها صحيحةٌ مِنْ دونِ برهانٍ، أما **النظريةُ** (theorem) فهي عبارةٌ أوْ تخمينٌ تحتاجُ إلى كتابةِ **برهانٍ** (proof) لإثباتِ صحتِها؛ فالبرهانُ دليلٌ منطقيٌّ على كلِّ عبارةٍ مكتوبةٍ فيهِ تكونُ مبرّرةً بعبارةٍ سبقَ إثباتُها أو قبولُ صحّتِها، ويمكنُ استعمالُ العباراتِ أو التخميناتِ المُثبتِ صحتُها في البراهينِ لتبريرِ صحةِ عباراتٍ أُخرى.

مفهومٌ أساسيٌّ خطواتُ كتابةِ البرهانِ

الخطوةُ 1: أكتبُ المعطياتِ وأرسمُ شكلًا يوضِّحُها إنْ أمكنَ.

الخطوةُ 2: أكتبُ العبارةَ أو التخمينَ المطلوبَ إثباتُهُ.

الخطوةُ 3: أكوِّنُ سلسلةً مِنَ العباراتِ الّتي تربطُ المعطياتِ بالمطلوبِ.

الخطوةُ 4: أبرِّرُ كلَّ عبارةٍ مستعملًا تعريفاتٍ أو خصائصَ جبريّةً أو مسلّماتٍ أو نظريّاتٍ.

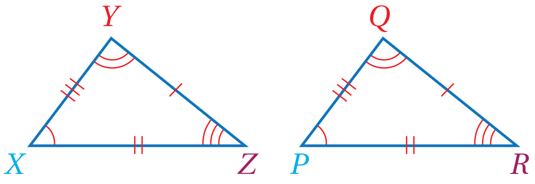
الخطوةُ 5: أكتبُ العباراتِ أو التخمينَ الذي أثْبَتُّهُ.

تعلمْتُ ســابقًا أنَّهُ إذا كانتِ الأضلاعُ المتناظرةُ في شكلَينِ هندســيَّينِ متطابقةً، وزواياهُما المتناظرةُ متطابقةً، فإنَّ الشكلَينِ متطابقانِ، فمثلًا المثلثانِ الآتيانِ متطابقانِ؛ لأنَّ:

$\angle Y \cong \angle Q$ $\overline{XZ} \cong \overline{PR}$

$\angle X \cong \angle P$ $\overline{XY} \cong \overline{PQ}$

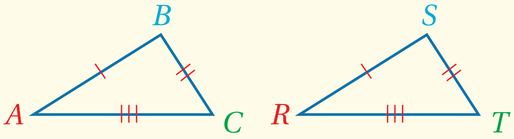
$\angle Z \cong \angle R$ $\overline{YZ} \cong \overline{QR}$



لكنَّ هذِهِ المعلوماتِ أكثرُ مِنْ كافيةٍ لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، إذْ يمكنُ إثباتُ ذلكَ باستعمالِ تطابقِ الأضلاعِ المتناظرةِ فقطْ مِنْ دونِ الحاجةِ إلى بيانِ تطابقِ الأجزاءِ المتناظرةِ جميعِها.

مسلمةٌ

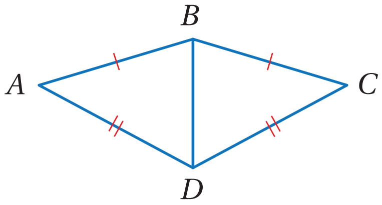
التطابقُ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)



- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَتْ أضلاعُ مثلثٍ مَعَ الأضلاعِ المناظرةِ لَها في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ SSS، حيثُ إنّ الحرفَ S هو اختصارٌ للكلمةِ الانجليزيّةِ (Side) وتعني ضلعًا.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\overline{BC} \cong \overline{ST}$, $\overline{AC} \cong \overline{RT}$
  فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta RST$

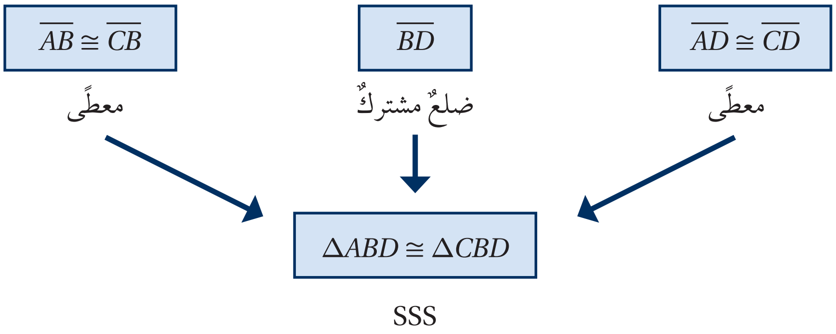
ويمكنُ استعمالُ **البرهانِ السهميِّ** (flow proof) لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، وَهُوَ برهانٌ تُستعملُ فيهِ عباراتٌ مكتوبةٌ في مستطيلاتٍ، وأسهمٌ تبيّنُ التسلسلَ المنطقيَّ لهذهِ العباراتِ، ويُكتبُ أسفلَ كلِّ مستطيلٍ السببُ الّذي يبرّرُ العبارةَ المكتوبةَ داخلَهُ.

مثال 1



أثبتُ أنَّ المثلثَينِ ΔCBD وَ ΔABD المبيّنَينِ في الشكلِ المجاورِ متطابقانِ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

البرهانُ:

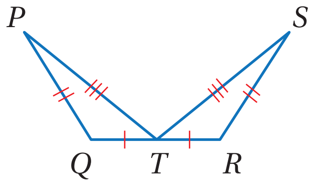


أتعلّمُ

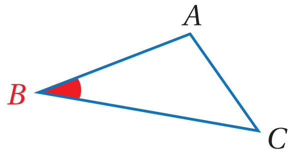
يمكنُ كتابةُ البرهانِ السهميِّ بصورةٍ رأسيةٍ أوْ أفقيةٍ.

أتحققُ من فهمي:

أثبتُ أنَّ المثلثَينِ $\triangle QPT$ وَ $\triangle RST$ المبيّنَينِ في الشكلِ أدناه متطابقانِ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.



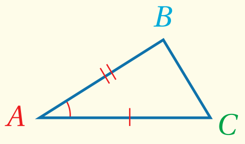
تُسمّى الزاويةُ المتكوّنةُ مِنْ ضلعَينِ متجاورَينِ في مضلعٍ **الزاويةَ المحصورةَ** (included angle)، ففي الشكلِ المجاورِ $\angle B$ محصورةٌ بَيْنَ الضلعَينِ $\overline{BA}$ وَ $\overline{BC}$.

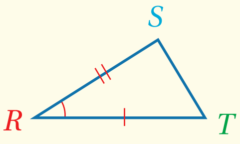


ومثلَما يمكنُ استعمالُ حالةِ (SSS) لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، يمكنُ أيضًا استعمالُ زوجَينِ مِنَ الأضلاعِ المتطابقةِ والزاويةِ المحصورةِ بينَهُما لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ.

مسلمةٌ **التطابقُ بضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ بينَهُما (SAS)**

- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَ ضلعانِ والزاويةُ المحصورةُ بينَهُما في مثلثٍ مَعَ نظائرِها في مثلثٍ آخرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ SAS، حيثُ إنّ الحرفَ S اختصارٌ للكلمةِ الانجليزيّةِ (Side) وتعني ضلعًا، والحرفَ A اختصارٌ للكلمةِ الانجليزيّة (Angle) وتعني زاويةً.



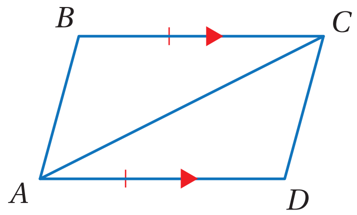


- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AC} \cong \overline{RT}$, $\angle A \cong \angle R$, $\overline{AB} \cong \overline{RS}$ ، فإنَّ: $\triangle ABC \cong \triangle RST$

ويمكنُ استعمالُ **البرهانِ ذي العمودَينِ** (two–column proof) لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، وَهُوَ برهانٌ تُكتبُ فيهِ العباراتُ مرتبةً في عمودٍ، والتبريراتُ في عمودٍ مُوازٍ لَهُ.

مثال 2

أثبتُ أنَّ $\triangle CDA$ وَ $\triangle ABC$ المبيّنَين في الشكلِ المجاورِ متطابقانِ، باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَين.

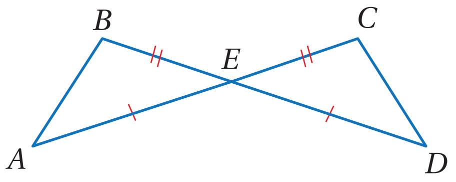


البرهانُ:

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	1) معطًى
2) $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	2) معطًى
3) $\angle BCA \cong \angle DAC$	3) زاويتانِ متبادلتانِ داخليًّا
4) $\overline{AC}$	4) ضلعٌ مشتركٌ
5) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	5) SAS

أتحققُ من فهمي:

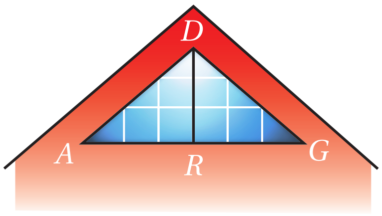
أثبتُ أنَّ $\triangle DCE$ وَ $\triangle ABE$ المبيّنَين في الشكلِ المجاورِ متطابقانِ، باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَين.



نحتاجُ في كثيرٍ مِنَ المسائلِ إلى تحديدِ حالةِ التطابقِ المناسبةِ لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ، وفقًا للمعطياتِ المقدَّمةِ في المسألةِ.

مثال 3: من الحياةِ

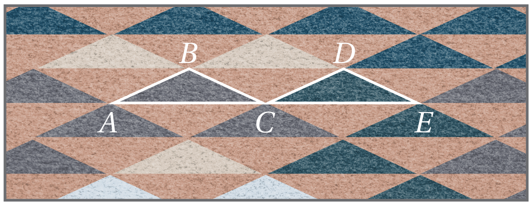
عمارةٌ: صمّمَ مهندسٌ معماريٌّ النافذةَ المجاورةَ. إذا كانَ $\overline{DA} \cong \overline{DG}$ وَ $\angle ADR \cong \angle GDR$، فأكتبُ برهانًا ذا عمودَين؛ لإثباتِ أنَّ $\triangle DRA \cong \triangle DRG$



البرهانُ:

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\overline{DA} \cong \overline{DG}$	1) معطًى
2) $\angle ADR \cong \angle GDR$	2) معطًى
3) $\overline{DR}$	3) ضلعٌ مشتركٌ
4) $\triangle DRA \cong \triangle DRG$	4) SAS

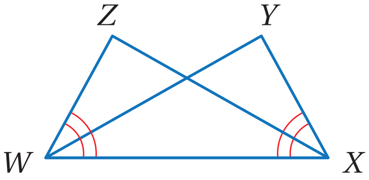
أتحققُ من فهمي:



بساطٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ بساطًا تقليديًّا يستعملُ الحائكُ في تصميمِهِ انسحابًا لمثلثٍ متطابقِ الضلعَينِ. أثبتُ أنّ ΔABC وَ ΔCDE المبيّنَينِ في الشكلِ متطابقانِ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

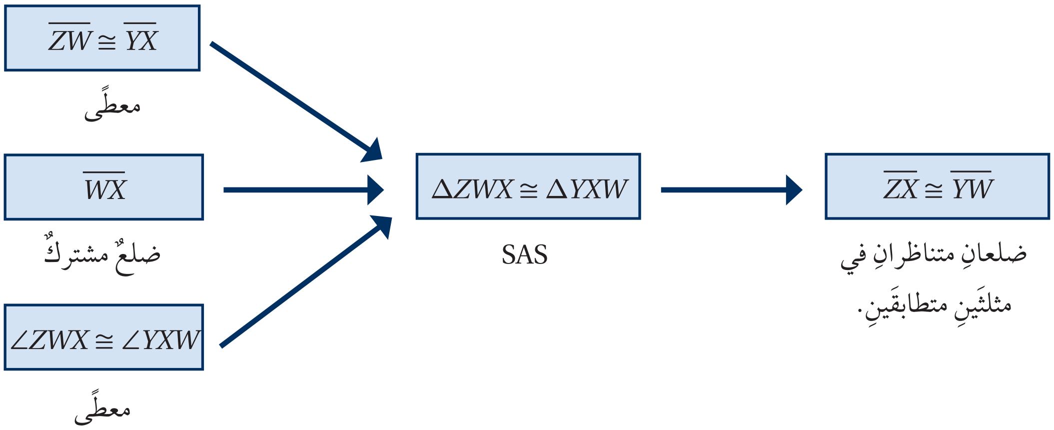
عندَ إثباتِ أنَّ المثلثَينِ متطابقانِ، فإنَّ الأجزاءَ المتناظرةَ مِنَ المثلثَينِ متطابقةٌ أيضًا وفقَ التعريفِ.

مثال 4



في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\angle ZWX \cong \angle YXW$، وَ $\overline{ZW} \cong \overline{YX}$ فأثبتُ أنَّ $\overline{ZX} \cong \overline{YW}$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

البرهانُ:



$\overline{ZW} \cong \overline{YX}$

معطًى

$\overline{WX}$

ضلعٌ مشتركٌ

$\angle ZWX \cong \angle YXW$

معطًى

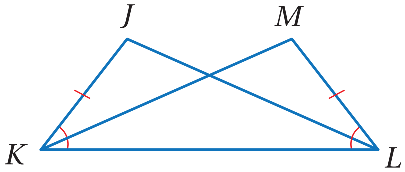
$\Delta ZWX \cong \Delta YXW$

SAS

$\overline{ZX} \cong \overline{YW}$

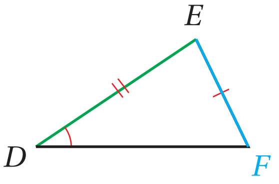
ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ.

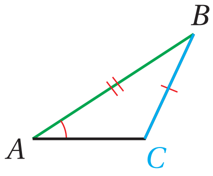
أتحققُ من فهمي:



في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\angle JKL \cong \angle MLK$ وَ $\overline{JK} \cong \overline{ML}$، فأثبتُ أنَّ $\angle J \cong \angle M$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

تعلمْتُ في الأمثلةِ السابقةِ أنَّهُ يمكنُ استعمالُ حالتَيْ SSS وَ SAS في إثباتِ تطابقِ مثلثَينِ. ولكنْ ماذا عَنْ حالةِ ضلعَينِ وزاويةٍ غيرِ محصورةٍ بينَهُما؟



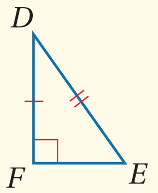


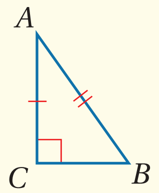
يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مثلثَينِ فيهما ضلعانِ متناظرانِ متطابقانِ وزاويةٌ غيرُ محصورةٍ تُطابقُ زاويةً غيرَ محصورةٍ في المثلثِ الآخَرِ. ولكنَّ المثلثَينِ غيرُ متطابقَينِ. وَمِنْ هنا يتبيّنُ أنَّ حالةَ ضلعَينِ وزاويةٍ غيرِ محصورةٍ بينَهُما غيرُ فعّالةٍ، إلّا أنَّهُ يمكنُ استعمالُها في إثباتِ تطابقِ مثلثَينِ قائمَيِ الزاويةِ؛ إذا تطابقَ الوتَرانِ، وتطابقَ ساقانِ في المثلثَينِ.

نظريةٌ

تطابقُ المثلثاتِ القائمةِ الزاويةِ بوَترٍ وساقٍ (HL)

- **بالكلماتِ:** إذا طابقَ وَترٌ وساقٌ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ وَترًا وساقًا في مثلثٍ قائمٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ.
  وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ HL، حيثُ إنّ الرمزَ H اختصارٌ للكلمةِ الإنجليزيّةِ (Hypotenuse) وتعني وترًا، و الحرفَ L اختصارٌ للكلمةِ الانجليزيّةِ (Leg) وتعني ساقًا.

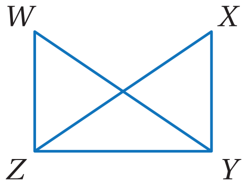




- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 5

في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ وَ $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$ وَ $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$، فأكتبُ برهانًا ذا عمودَينِ؛ لإثباتِ أنَّ $\Delta WYZ \cong \Delta XZY$

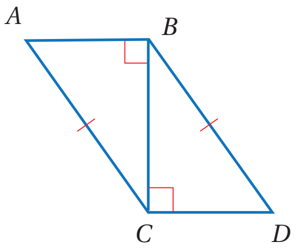


البرهانُ:

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$	1) معطًى
2) $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$, $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$	2) معطًى
3) $\angle WZY, \angle XYZ$ زاويتانِ قائمتانِ	3) تعريفُ المستقيماتِ المتعامدةِ
4) $\Delta WYZ, \Delta XZY$ مثلثانِ قائما الزاويةِ	4) تعريفُ المثلثِ القائمِ الزاويةِ
5) $\overline{ZY}$	5) ضلعٌ مشتركٌ
6) $\Delta WYZ \cong \Delta XZY$	6) HL

أتحققُ من فهمي:

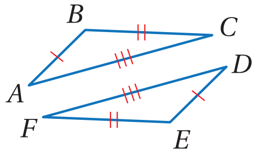
أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المجاورِ في كتابةِ برهانٍ ذي عمودَين؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$



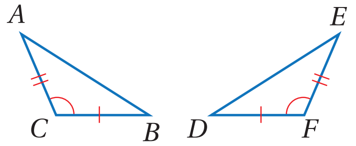
أتدرب وأحل المسائل

أبيّنُ أنَّ كلَّ زوجٍ مِنَ المثلثاتِ الآتيةِ متطابقٌ أَمْ لا، مبررًا إجابتي:

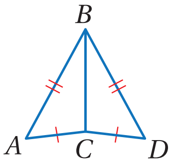
1



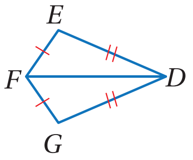
2



3



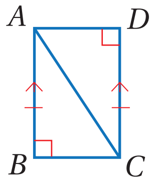
4



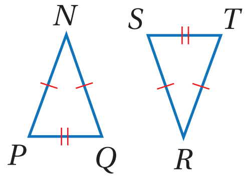
أتذكرُ

إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمَين متوازيَين، فإنَّ لكلِّ زاويتَين متبادلتَين داخليًّا القياسَ نفسَه.

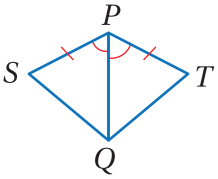
5 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَين؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$



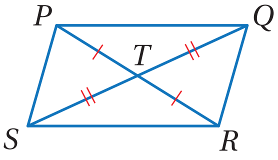
6 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَين؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle NPQ \cong \triangle RST$



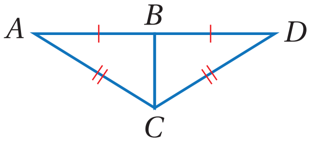
7 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle SPQ \cong \triangle TPQ$



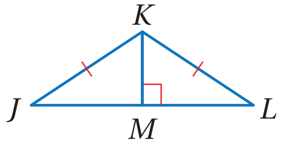
8 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle PQT \cong \triangle RST$



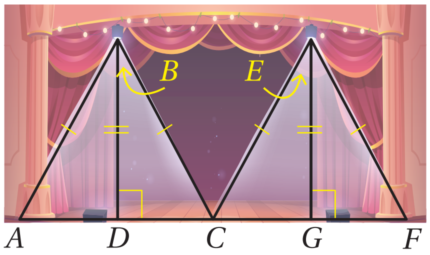
9 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\angle A \cong \angle D$



10 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{JM} \cong \overline{ML}$



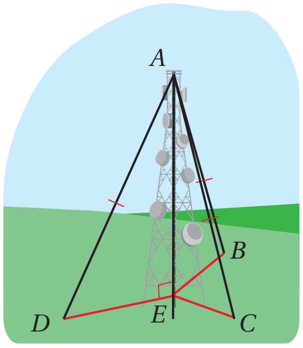
مصباحٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ الضوءَ الناشئَ عَنْ مصباحَينِ يبعدانِ المسافةَ نفسَها عَنْ أرضيةِ مسرحٍ:



11 أثبتُ أنَّ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

12 هَلِ المثلثاتُ الأربعةُ الموضّحةُ في الشكلِ متطابقةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

13 **اتّصالاتٌ:** برجُ اتّصالاتٍ عموديٌّ على الأرضِ، يتصلُ رأسُهُ بكلٍّ مِنَ النقاطِ D وَ B وَ C عَنْ طريقِ كابلاتٍ لَها الطولُ نفسُهُ كما في الشكلِ المجاورِ. أثبتُ أنَّ $\triangle AEB$ وَ $\triangle AEC$ و $\triangle AED$ متطابقةٌ.

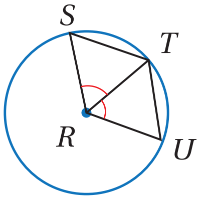


معلومةٌ

اخترعَ العالِمُ (غراهامْ بِلْ) النموذجَ الأوليَّ للهاتفِ عامَ 1876، إذْ حاولَ إيجادَ وسيلةٍ لمساعدةِ الصُّمِّ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

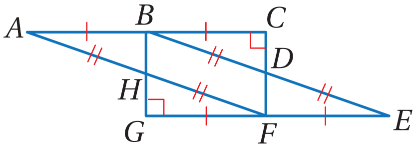
14 **تبريرٌ:** في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\angle SRT \cong \angle URT$، وَ R مركزُ الدائرةِ، فأكتبُ برهانًا ذا عمودَينِ؛ لإثباتِ أنَّ $\triangle TRS \cong \triangle TRU$ ، مبررًا إجابتي.



أتذكّرُ

أطوالُ أنصافِ أقطارِ الدائرةِ متساويةٌ في الطّولِ.

15 **تحدٍّ:** أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المجاورِ؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ACF \cong \triangle EGB$



إرشادٌ

أرسمُ $\triangle ACF$ وَ $\triangle EGB$ بشكلٍ منفصلٍ.

16 **أكتبُ** كيفَ أتحققُ مِنْ تطابقِ مثلثَينِ بثلاثةِ أضلاعٍ، أَوْ ضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ بينَهُما؟

الدرسُ 2 تطابقُ المثلثاتِ (ASA, AAS)

فكرةُ الدرسِ

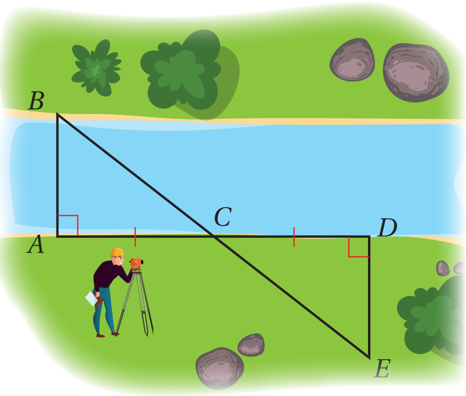
أثبتُ تطابقَ مثلثَينِ باستعمالِ حالتَيْ ASA وَ AAS .

المصطلحاتُ

الضلعُ المحصورُ.

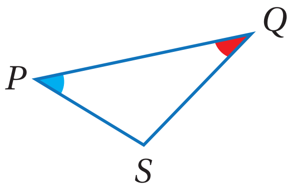
أستكشفُ

يظهرُ في الشكلِ المجاورِ مسّاحٌ يقيسُ عرضَ نهرٍ مستعملًا تطابقَ المثلثاتِ. أصفُ كيفَ يمكنُهُ ذلكَ؟



تعلمْتُ في الدرسِ السابقِ كيفَ أثبتُ تطابقَ مثلثَينِ باستعمالِ ثلاثةِ أضلاعٍ أوْ ضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ بينَهُما، وسأتعلمُ في هذا الدرسِ حالاتٍ أُخرى لإثباتِ تطابقِ مثلثَينِ.

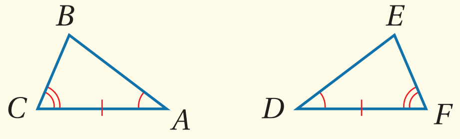
يسمّى الضلعُ الواقعُ بَيْنَ زاويتَينِ متتاليتَينِ في مضلعٍ **الضلعَ المحصورَ** (included side). ففي المثلثِ المجاورِ $\overline{PQ}$ هُوَ الضلعُ المحصورُ بَيْنَ $\angle P$ وَ $\angle Q$



يمكنُ إثباتُ تطابقِ مثلثَينِ باستعمالِ زوجٍ مِنَ الأضلاعِ المتطابقةِ وزوجَينِ مِنَ الزوايا المتطابقةِ في المثلثَينِ.

مسلمةٌ **التطابقُ بزاويتَينِ وضلعٍ محصورٍ بينَهُما (ASA)**

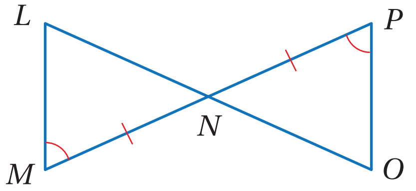
- **بالكلماتِ:** إذا طابقَتْ زاويتانِ والضلعُ المحصورُ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَهُما في مثلثٍ آخرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ ASA.



- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{DF}, \angle C \cong \angle F$ ، فإنَّ: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

مثال 1

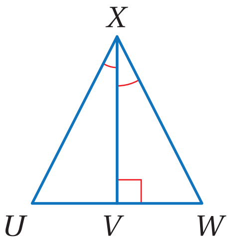
في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{NM} \cong \overline{NP}$ وَ $\angle M \cong \angle P$، فأثبتُ أنَّ $\triangle NML \cong \triangle NPO$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



البرهانُ:

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\overline{NM} \cong \overline{NP}$	1) معطًى
2) $\angle M \cong \angle P$	2) معطًى
3) $\angle MNL \cong \angle PNO$	3) زاويتانِ متقابلتانِ بالرأسِ
4) $\Delta NML \cong \Delta NPO$	4) ASA

أتحققُ من فهمي:



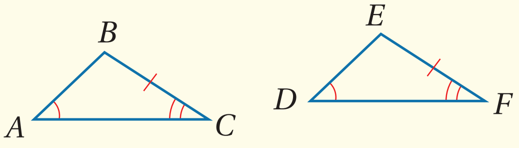
في الشــكلِ المجاورِ، إذا علمْــتُ أنَّ $\angle UXV \cong \angle WXV$، فأثبــتُ أنَّ $\Delta UXV \cong \Delta WXV$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

ويمكنُ أيضًا إثباتُ تطابقِ مثلثَينِ باستعمالِ زاويتَينِ وضلعٍ غيرِ محصورٍ بينَهُما.

نظريةٌ

التطابقُ بزاويتَينِ وضلعٍ غيرِ محصورٍ بينَهُما (AAS)

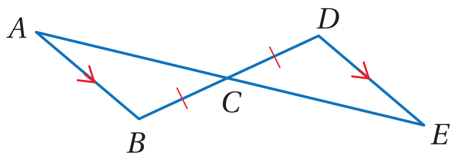
- **بالكلماتِ:** إذا طابقَتْ زاويتانِ وضلعٌ غيرُ محصورٍ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَهُما في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ AAS.

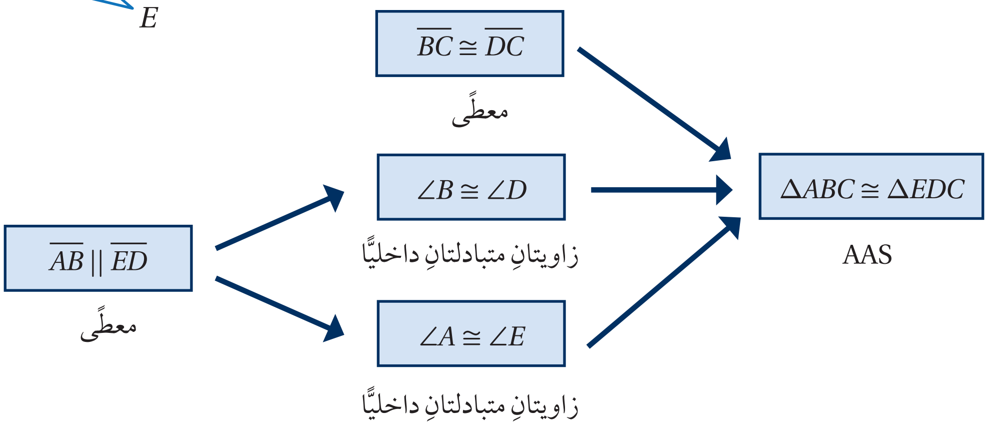


- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle F, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال 2

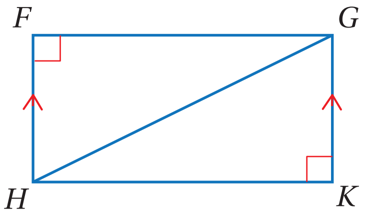
في الشــكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ وَ $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$، فأثبتُ أنَّ $\Delta ABC \cong \Delta EDC$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.





أتحققُ من فهمي:

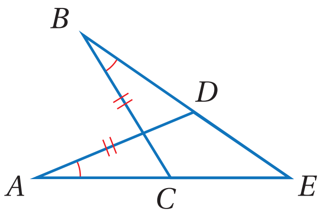
في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{GK} \parallel \overline{HF}$، وأنَّ $\angle F$ وَ $\angle K$ زاويتانِ قائمتانِ، فأثبتُ أنَّ $\Delta HFG \cong \Delta GKH$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

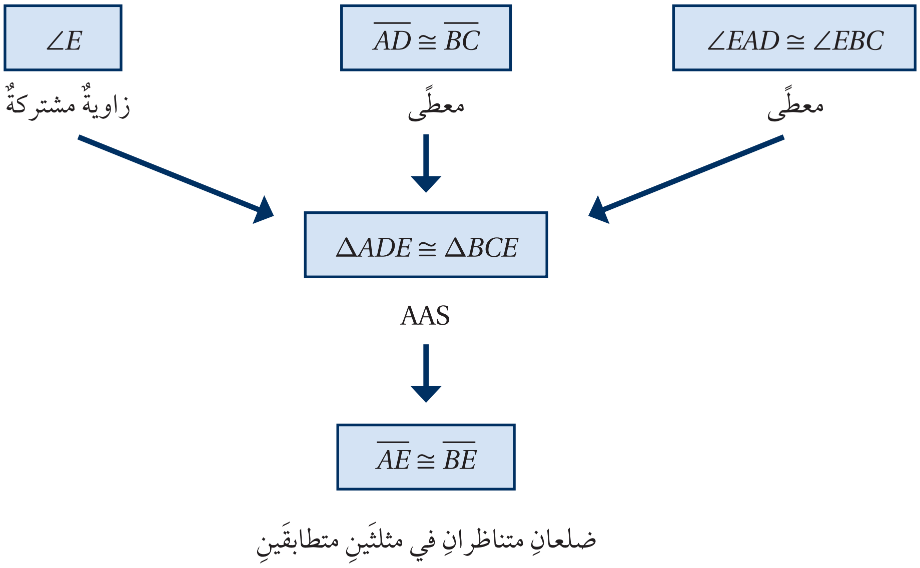


تعلمْتُ في الدرسِ السابقِ أنَّهُ عندَ إثباتِ أنَّ المثلثَينِ متطابقانِ، فإنَّ الأجزاءَ المتناظرةَ مِنَ المثلثَينِ متطابقةٌ أيضًا وفقَ التعريفِ.

مثال 3

في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{AD} \cong \overline{BC}, \angle EAD \cong \angle EBC$ ، فأثبتُ أنَّ $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.





$\angle EAD \cong \angle EBC$

معطًى

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$

معطًى

$\angle E$

زاويةٌ مشتركةٌ

$\Delta ADE \cong \Delta BCE$

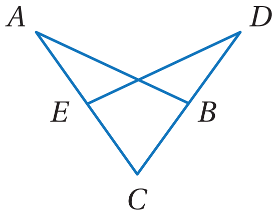
AAS

$\overline{AE} \cong \overline{BE}$

ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ

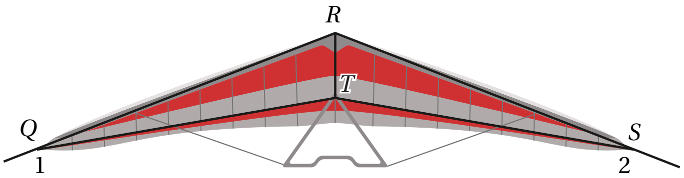
أتحققُ من فهمي:

في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{CA} \cong \overline{CD}, \angle ABC \cong \angle DEC$ فأثبتُ أنَّ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



تُستعملُ المثلثاتُ المتطابقةُ في كثيرٍ مِنَ التصميماتِ؛ لِما لَها مِنْ أهميةٍ في ضمانِ دعمِ الأشياءِ وتوازنِها مِنْ حولِنا.

مثال 4: منَ الحياةِ

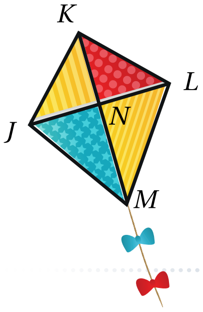


طائرةٌ شراعيةٌ: يصمَّمُ جناحا الطائرةِ الشراعيةِ بحيثُ يبدُوانِ مثلثَينِ متطابقَينِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ لضمانِ توازنِ الطائرةِ في الجوِّ. إذا كانَتْ $\angle 2 \cong \angle 1$ وَ $\angle RTQ \cong \angle RTS$، فأثبتْ أنَّ $\overline{QT} \cong \overline{ST}$

لأثبتُ أنَّ $\overline{QT} \cong \overline{ST}$، فلا بدَّ أولًا إثباتُ أنَّ $\Delta QRT \cong \Delta SRT$

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\angle 1 \cong \angle 2$	1) معطًى
2) $\angle RTQ \cong \angle RTS$	2) معطًى
3) $\angle RQT \cong \angle RST$	3) زاويتانِ متكاملتانِ مَعَ الزاويتَينِ المتطابقتَينِ $\angle 2$ و $\angle 1$
4) $\overline{RT}$	4) ضلعٌ مشتركٌ
5) $\Delta RQT \cong \Delta RST$	5) AAS
6) $\overline{QT} \cong \overline{ST}$	6) ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ

أتحققُ من فهمي:

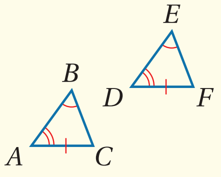
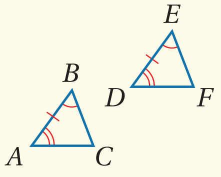
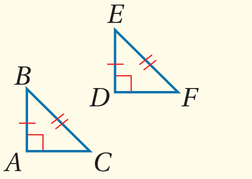
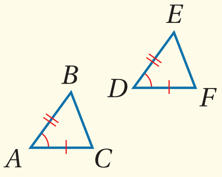
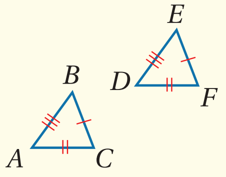


طائرةٌ ورقيةٌ: إذا كانَتْ N في الطائرةِ الورقيةِ المجاورةِ نقطةَ منتصفِ $\overline{JL}$، وَ $\overline{KM} \perp \overline{JL}$ وَ $\angle KLN \cong \angle KJN$، فأثبتْ أنَّ $\overline{KJ} \cong \overline{KL}$

تعلمْتُ طرائقَ عدةً لإثباتِ تطابقِ المثلثاتِ يمكنُ تلخيصُها في الجدولِ الآتي:

ملخصُ المفهومِ

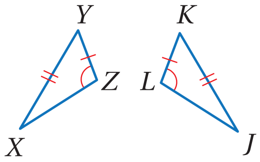
إثباتُ تطابقِ المثلثاتِ

AAS	ASA	HL (مثلثاتٌ قائمةُ الزاويةِ فقط)	SAS	SSS
				
يتطابقُ مثلثانِ إذا طابقَتْ زاويتانِ وضلعٌ غيرُ محصورٍ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَها في مثلثٍ آخَرَ.	يتطابقُ مثلثانِ إذا طابقَتْ زاويتانِ وضلعٌ محصورٌ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَها في مثلثٍ آخَرَ.	يتطابقُ مثلثانِ قائما الزاويةِ إذا طابقَ وترٌ وساقٌ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ وترًا وساقًا في مثلثٍ قائمٍ آخَرَ.	يتطابقُ مثلثانِ إذا طابقَ ضلعانِ وزاويةٌ محصورةٌ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَها في مثلثٍ آخَرَ.	يتطابقُ مثلثانِ إذا كانَتْ أضلاعُهُما المتناظرةُ متطابقةً.

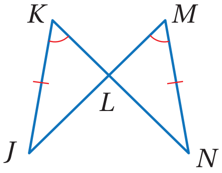
أتدرب وأحل المسائل

أحددُ أنَّهُ يمكنُ إثباتُ تطابقِ كلِّ زوجٍ مِنَ المثلثاتِ الآتيةِ أَمْ لا، مبررًا إجابتي:

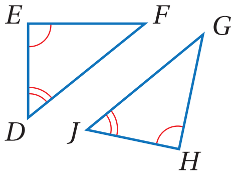
3 $\triangle XYZ, \triangle JKL$



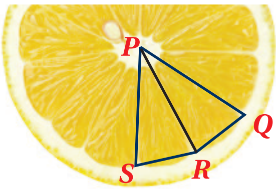
2 $\triangle JKL, \triangle NML$



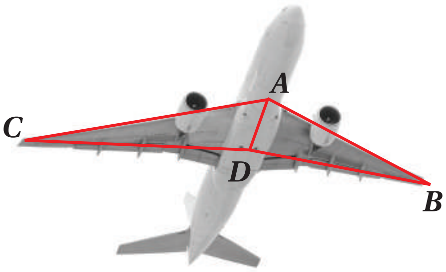
1 $\triangle DEF, \triangle JHG$



4 في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{PR}$ ينصّفُ $\angle QPS$، وَ $\angle QRP \cong \angle SRP$، فأثبتُ أنَّ $\triangle QRP \cong \triangle SRP$



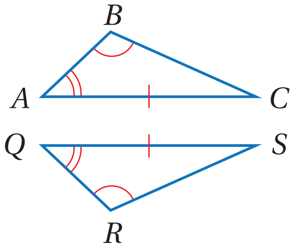
5 في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\angle ADB \cong \angle ADC, \overline{DB} \cong \overline{DC}$، $\angle ABD \cong \angle ACD$، فأثبتُ أنَّ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$



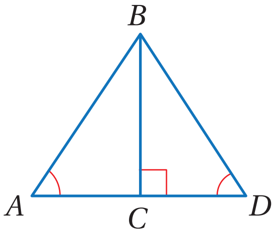
معلومةٌ

يمكنُ للطائرةِ أَنْ تحلّقَ لبعضِ الوقتِ مِنْ دونِ محرِّكاتٍ، وذلكَ بفضلِ التصميمِ الانسيابيِّ والدقيقِ للأجنحةِ.

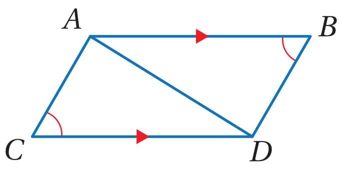
6 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ABC \cong \triangle QRS$



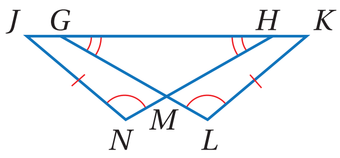
7 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ABC \cong \triangle DBC$



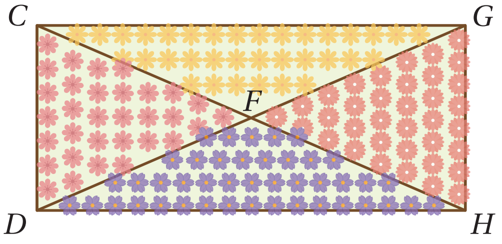
8 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{AC} \cong \overline{DB}$



9 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{GK} \cong \overline{HJ}$



حديقةٌ: تخططُ سالي لزراعةِ حديقتِها مستطيلةِ الشكلِ بأنواعٍ مختلفةٍ مِنَ الزهورِ في أربعةِ أحواضٍ مثلثةِ الشكلِ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا علمْتُ أنَّ F نقطةَ منتصفِ $\overline{DG}$ وَ $\angle CDF \cong \angle FGH$، فأثبتُ أنَّ:



10 $\Delta CFD \cong \Delta HFG$

11 $\overline{CF} \cong \overline{HF}$

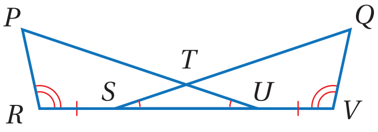
12 **نهرٌ:** أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأثبتُ أنَّ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

معلومةٌ

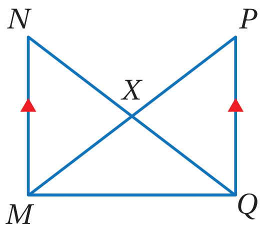
تعتمدُ أجهزةُ المِساحةِ الحديثةِ على نظامِ تحديدِ المواقعِ العالميِّ (GPS)

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

13 **تحدٍّ:** أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المجاورِ لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta PUR \cong \Delta QSV$



14 **تبريرٌ:** هَلْ يمكنُ إثباتُ تطابقِ $\Delta MNQ \cong \Delta QPM$ بالاعتمادِ على المعلوماتِ المعطاةِ على الشكلِ المجاورِ؟ أبرّرُ إجابتي.



15 **أكتبُ** كيفَ أتحققُ مِنْ تطابقِ مثلثَينِ باستعمالِ زاويتَينِ وضلعٍ محصورٍ بينَهُما؟

الدرسُ 3 المثلثاتُ المتطابقةُ الضلعَينِ والمثلثاتُ المتطابقةُ الأضلاعِ

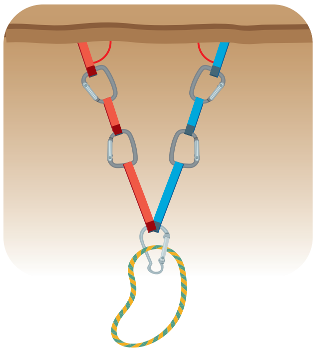
فكرةُ الدرسِ

- أستعملُ خصائصَ المثلثاتِ المتطابقةِ الضلعَينِ.
- أستعملُ خصائصَ المثلثاتِ المتطابقةِ الأضلاعِ.

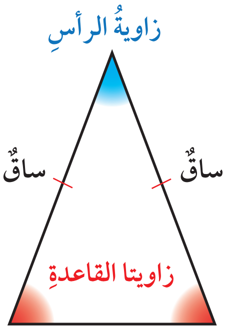
المصطلحاتُ

السّاقانِ، زاويةُ الرأسِ، القاعدةُ، زاويتا القاعدةِ، النتيجةُ.

أستكشفُ



يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مرساتَينِ باللونَينِ الأحمرِ والأزرقِ لهُما الطولُ نفسُهُ، ثبّتَهُما متسلّقٌ في شقٍّ صخريٍّ في أثناءِ تسلّقِهِ أحدَ الجبالِ. ما العلاقةُ بَينَ الزاويتَينِ المكوّنتَينِ بَيْنَ كُلٍّ مِنَ المرساتَينِ والشقِّ الصخريِّ؟



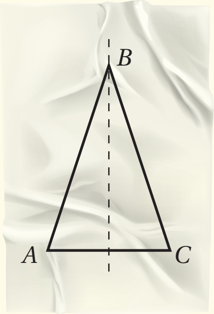
تعلمْتُ سابقًا أنَّ المثلثَ المتطابقَ الضلعَينِ هُوَ المثلثُ الّذي فيهِ ضلعانِ متطابقانِ على الأقلِّ.

إنَّ لأجزاءِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ أسماءً خاصةً، إذْ يسمّى الضلعانِ المتطابقانِ **السّاقَينِ** (legs)، وتسمّى الزاويةُ الّتي ضلعاها السّاقانِ **زاويةَ الرأسِ** (vertex angle)، ويسمّى الضلعُ الثالثُ **القاعدةَ** (base). والزاويتانِ المكوّنتانِ مِنَ القاعدةِ والضلعَينِ المتطابقَينِ تسمّيانِ **زاويتَيِ القاعدةِ** (base angles).

سأستكشفُ في النشاطِ الآتي العلاقةَ بَيْنَ زاويتَي القاعدةِ والسّاقَينِ في المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ.

نشاطٌ هندسيٌّ — المثلثُ المتطابقُ الضلعَينِ

الإجراءاتُ:



الْخُطْوَةُ 1 أرسمُ المثلثَ ABC المتطابقَ الضلعَينِ على ورقةٍ شفافةٍ، كما في الشكلِ المجاورِ، حيثُ $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

الْخُطْوَةُ 2 أطوي المثلثَ حولَ الرأسِ B بحيثُ ينطبقُ الساقانِ على بعضِهِما تمامًا.

أحللُ النتائجَ:

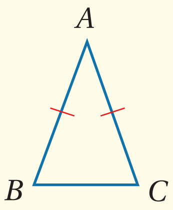
- ماذا ألاحظُ بالنسبةِ للزاويتَينِ $\angle A$ وَ $\angle C$؟
- أرسمُ مثلثًا آخَرَ متطابقَ الضلعَينِ، وأقارنُ بَيْنَ زاويتَي القاعدةِ. ماذا أستنتجُ؟

يمكنُني ملاحظةُ النظرياتِ الآتيةِ مِنَ النشاطِ الهندسيِّ السابقِ:

نظرياتٌ — المثلثُ المتطابقُ الضلعَينِ

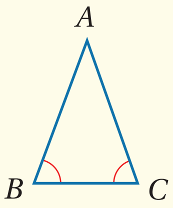
نظريةُ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ

- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَ ضلعانِ في مثلثٍ، فإنَّ الزاويتَينِ المقابلتَينِ لَهُما متطابقتانِ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ فإنَّ $\angle B \cong \angle C$



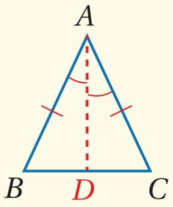
عكسُ نظريةِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ

- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَتْ زاويتانِ في مثلثٍ، فإنَّ الضلعَينِ المقابلَينِ لَهُما متطابقانِ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\angle B \cong \angle C$ فإنَّ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



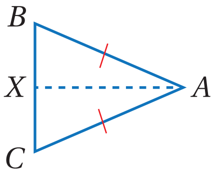
منصّفُ زاويةِ الرّأسِ

- **بالكلماتِ:** يكونُ منصّفُ زاويةِ الرأسِ عموديًّا على القاعدةِ، وينصّفُها.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ وَ $\overline{AD}$ ينصّفُ $\angle BAC$ ، فإنَّ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ وَ $\overline{BD} \cong \overline{CD}$



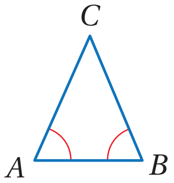
مثال 1: إثباتُ نظريةٍ

في ΔABC، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{AB} \cong \overline{AC}$، فأثبتُ أنَّ $\angle B \cong \angle C$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



العباراتُ	المبرراتُ
1) أفرضُ أنَّ X نقطةُ منتصفِ $\overline{BC}$	1) كلُّ قطعةٍ مستقيمةٍ لَها نقطةُ منتصفٍ واحدةٌ.
2) أرسمُ قطعةً مساعدةً $\overline{AX}$	2) كلُّ نقطتَينِ تحدّدانِ مستقيمًا.
3) $\overline{BX} \cong \overline{CX}$	3) X نقطةُ منتصفِ $\overline{BC}$
4) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	4) معطًى
5) $\overline{AX}$	5) ضلعٌ مشتركٌ
6) $\Delta ABX \cong \Delta ACX$	6) SSS
7) $\angle B \cong \angle C$	7) زاويتانِ متناظرتانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ

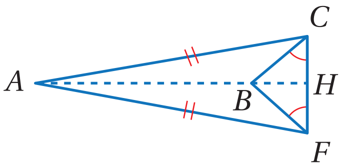
أتحققُ من فهمي:



في $\triangle ABC$، إذا علمْتُ أنَّ $\angle A \cong \angle B$، فأثبتُ أنَّ $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَين.

يمكنُني استعمالُ نظرياتِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ في تحديدِ القطعِ المستقيمةِ المتطابقةِ والزوايا المتطابقةِ في أشكالٍ هندسيةٍ تحتوي مثلثاتٍ متطابقةَ الضلعَينِ.

مثال 2



1 أسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ غيرَ المشارِ إلى تطابقِهما في الشكلِ:

$\angle AFC$ تقابلُ $\overline{AC}$ وَ $\angle ACF$ تقابلُ $\overline{AF}$؛ لذا فإنَّ $\angle AFC \cong \angle ACF$

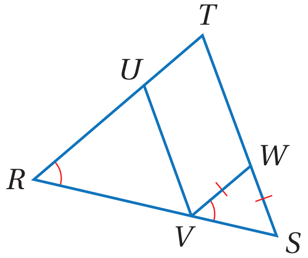
(نظريةُ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ)

2 أسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ غيرَ المشارِ إلى تطابقِهما في الشكلِ:

$\overline{BC}$ تقابلُ $\angle BFC$ وَ $\overline{BF}$ تقابلُ $\angle BCF$؛ لذا فإنَّ $\overline{BC} \cong \overline{BF}$

(عكسُ نظريةِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ)

أتحققُ من فهمي:



3 أسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ غيرَ المشارِ إلى تطابقِهما في الشكلِ.

4 أسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ غيرَ المشارِ إلى تطابقِهما في الشكلِ.

أتذكرُ

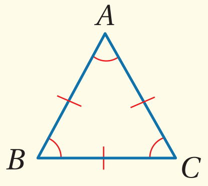
المثلثُ المتطابقُ الأضلاعِ أضلاعُهُ الثلاثةُ متطابقةٌ.

النتيجةُ (Corollary) هِيَ نظريةٌ يكونُ برهانُها مبنيًّا على نظريةٍ أُخرى. ويمكنُ استعمالُ النتيجةِ لتبريرِ خطواتِ البراهينِ، أَوْ حلِّ أسئلةٍ ذاتِ علاقةٍ. وفي ما يأتي نتيجتانِ لنظريةِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ، وعكسِ نظريةِ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ:

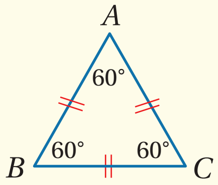
نتيجتان

المثلثُ المتطابقُ الأضلاعِ

- **بالكلماتِ:** يكونُ المثلثُ متطابقَ الأضلاعِ إذا وفقط إذا كانَ متطابقَ الزوايا.
- **بالرموزِ:** $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ إذا وفقطْ إذا كانَ $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$



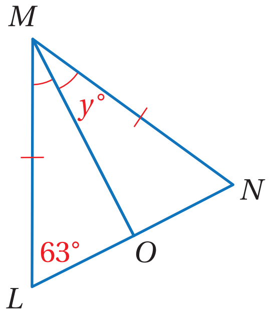
- **بالكلماتِ:** قياسُ كلِّ زاويةٍ في المثلثِ المتطابقِ الأضلاعِ 60°
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ فإنَّ $\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60°$



يمكنُ استعمالُ خصائصِ المثلثاتِ المتطابقةِ الضلعَينِ والمتطابقةِ الأضلاعِ والجبرِ لإيجادِ قِيَمٍ مجهولةٍ.

مثال 3

1 أجدُ قيمةَ y في الشكلِ المجاورِ.



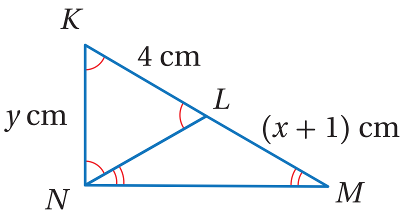
بما أنَّ $\angle NMO \cong \angle LMO$ إذنْ $\overline{MO}$ منصّفٌ لزاويةِ الرأسِ في مثلثٍ متطابقِ الضلعَينِ، وبذلكَ فإنَّ $\overline{LN} \perp \overline{MO}$، ومنهُ $m\angle MON = 90°$.

وبما أنَّ ΔMLN متطابقُ الضلعَينِ، فإنَّ $\angle N \cong \angle L$، ومنهُ فإنَّ $m\angle N = 63°$.

مجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ	$m\angle N + m\angle MON + y° = 180°$
أعوضُ $m\angle N = 63°, m\angle MON = 90°$	$63° + 90° + y° = 180°$
أجمعُ	$153° + y° = 180°$
أطرحُ 153° مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$y° = 27°$

إذنْ، قيمةُ y تساوي 27°

② أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.



الْخُطْوَةُ 1 أجدُ قيمةَ y

بمـا أنَّ $\angle LKN \cong \angle KLN \cong \angle KNL$ ، فإنَّ ΔKLN متطابقُ الأضلاعِ،

ومنهُ فإنَّ $y = 4$ cm .

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ قيمةَ x

بما أنَّ $\angle LMN \cong \angle LNM$، فإنَّ $\overline{LM} \cong \overline{LN}$، ومنهُ فإنَّ ΔLMN متطابقُ الضلعَينِ.

وبما أنَّ ΔKLN متطابقُ الأضلاعِ، فإنَّ $LN = 4$.

قطعتانِ مستقيمتانِ متطابقتانِ $LN = LM$

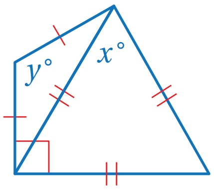
أعوضُ $LN = 4, LM = x + 1$ $4 = x + 1$

أطرحُ 1 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ $x = 3$

إذنْ، قيمةُ x تساوي 3 cm

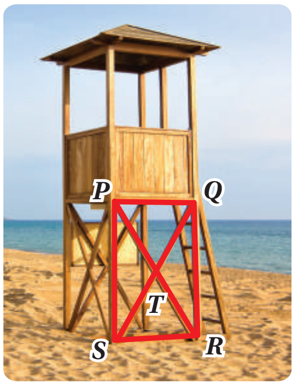
أتحقّقُ من فهمي:

③ أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.



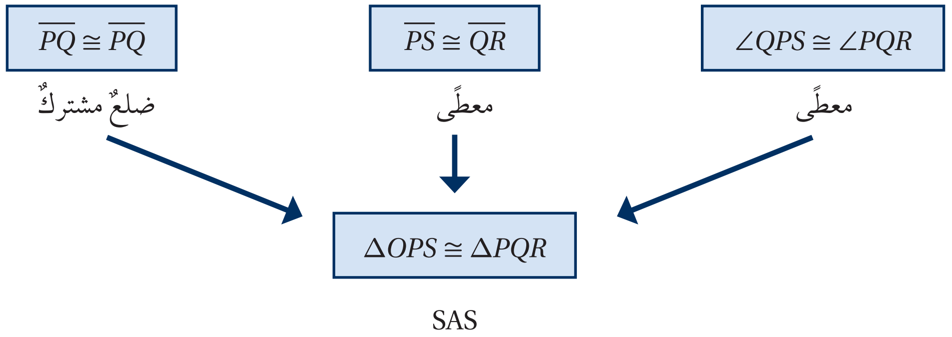
يمكنُ رؤيةُ المثلثاتِ المتطابقةِ الضلعَينِ والمتطابقةِ الأضلاعِ في كثيرٍ مِنَ التصميماتِ والهياكلِ والجسورِ والمباني؛ لِما لَها مِنْ أهميةٍ في دعمِها وجعلِها أكثرَ ثباتًا.

مثال 4: مِنَ الحياةِ



برجُ المنقذِ: في برجِ المنقذِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ وَ $\angle PQR \cong \angle QPS$، فأثبتُ أنَّ:

① $\Delta QPS \cong \Delta PQR$

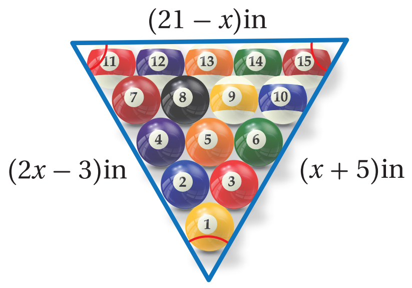


② ΔQPT متطابقُ الضلعَينِ.

العباراتُ	المبرراتُ
1) $\angle PTS \cong \angle QTR$	1) زاويتانِ متقابلتانِ بالرأسِ.
2) $\angle PSQ \cong \angle QRP$	2) زاويتانِ متناظرتانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ.
3) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$	3) معطًى.
4) $\Delta QTR \cong \Delta PTS$	4) AAS
5) $\overline{PT} \cong \overline{QT}$	5) ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ.
6) ΔQPT متطابقُ الضلعَينِ	6) تعريفُ المثلثِ المتطابقِ الضلعَينِ.

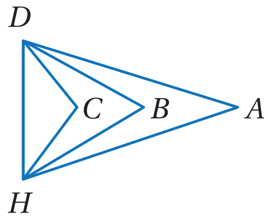
أتحققُ من فهمي:

بلياردو: تُرتَّبُ كراتُ البلياردو على شكلِ مثلثٍ متطابقِ الأضلاعِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ لأنَّ شكلَ المثلثِ قادرٌ على نقلِ الطاقةِ الحركيةِ مِنَ الكرةِ الأولى في الواجهةِ إلى غيرِها مِنَ الكراتِ، فتتحرّكُ كلُّها مِنْ ضربةٍ واحدةٍ. أجدُ قيمةَ المتغيرِ x.



أتدرب وأحل المسائل

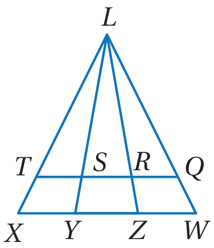
باستعمالِ الشكلِ المجاورِ، أجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



① إذا كانَ $\overline{AD} \cong \overline{AH}$، فأسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ.

② إذا كانَ $\angle BDH \cong \angle BHD$، فأسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ.

باستعمالِ الشكلِ المجاورِ، أجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



3 إذا كانَ $\overline{LT} \cong \overline{LQ}$، فأسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ.

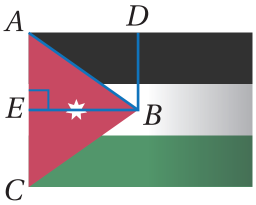
4 إذا كانَ $\overline{LX} \cong \overline{LW}$، فأسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ.

5 إذا كانَ $\overline{LY} \cong \overline{LZ}$، فأسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ.

6 إذا كانَ $\angle LXW \cong \angle LWX$، فأسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ.

7 إذا كانَ $\angle LSR \cong \angle LRS$، فأسمّي قطعتَينِ مستقيمتَينِ متطابقتَينِ.

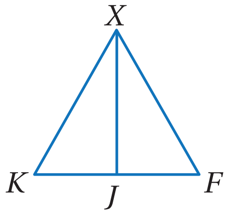
8 **العلمُ الأردنيُّ**: العلمُ الأردنيُّ مستطيلٌ طولُهُ مِثلا عرضِهِ، فيهِ مثلثٌ متطابقُ الضلعَينِ لونُهُ أحمرُ، وارتفاعُ المثلثِ $\overline{BE}$ يساوي نصفَ طولِ العلمِ. أثبتُ أنَّ $\Delta DAB \cong \Delta EBA$



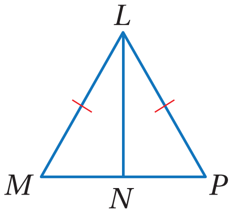
أتعلّم

يمثّلُ المثلثُ الأحمرُ في العَلَمِ الأردنيِّ السلالةَ الهاشميةَ.

9 في الشكلِ الآتي، إذا علمْتُ أنَّ ΔXKF متطابقُ الأضلاعِ، وَ $\overline{XJ}$ ينصّفُ $\angle X$، فأكتبُ برهانًا ذا عمودَينِ؛ لإثباتِ أنَّ J نقطةُ منتصفِ $\overline{KF}$.

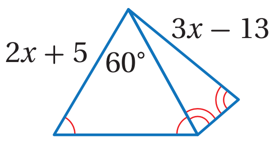


10 في الشكلِ الآتي، إذا علمْتُ أنَّ ΔMLP متطابقُ الضلعَينِ، وَ N نقطةُ منتصفِ $\overline{MP}$، فأكتبُ برهانًا سهميًّا؛ لإثباتِ أنَّ $\overline{LN} \perp \overline{MP}$

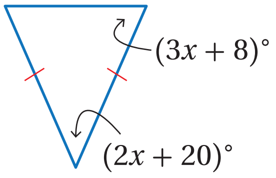


أجدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

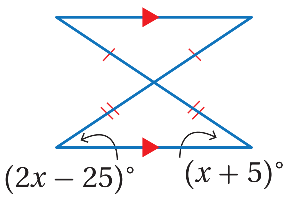
11



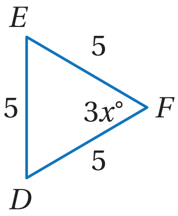
12



13



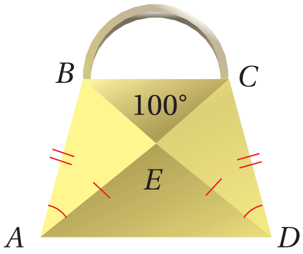
14



أتذكّر

مجموعُ قياساتِ زوايا المثلّثِ 180°

حقيبةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ تصميمًا لحقيبةٍ قُماشيةٍ:



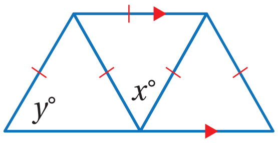
15 أثبتُ أنَّ $\Delta ABE \cong \Delta DCE$

16 أسمّي المثلثاتِ المتطابقةَ الضلعَينِ في الحقيبةِ.

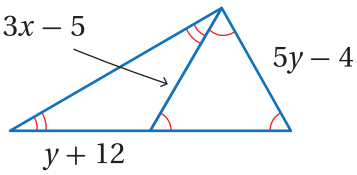
17 أسمّي ثلاثَ زوايا تتطابقُ مَعَ $\angle EAD$

أجدُ قيمةَ x وَ y في كلٍّ ممّا يأتي:

18



19

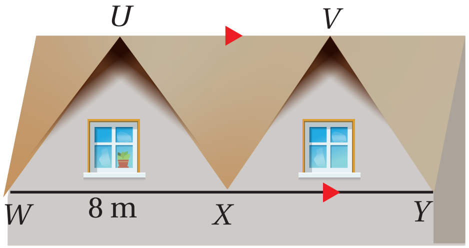


أتذكّرُ

مجموعُ قياساتِ الزّوايا على مستقيمٍ يساوي 180°

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

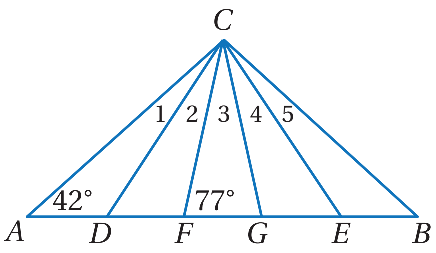
تبريرٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ الواجهةَ الأماميةَ لمنزلٍ على شكلِ مثلثَينِ متطابقَيِ الضلعَينِ رأساهُما U وَ V حيثُ $\Delta WUX \cong \Delta XVY$:



20 أسمّي زاويتَينِ متطابقتَينِ مَعَ $\angle WUX$، مبررًا إجابتي.

21 أجدُ المسافةَ بَيْنَ الرأسَينِ U وَ V، مبررًا إجابتي.

22 **تَحدٍّ:** في الشكلِ المجاورِ، إذا علمْتُ أنَّ ΔABC متطابقُ الضلعَينِ، وَ ΔDCE متطابقُ الأضلاعِ، وَ ΔFCG متطابقُ الضلعَينِ، فأجدُ قياساتِ الزوايا 1 وَ 2 وَ 3 وَ 4 وَ 5.



إرشادٌ

أبدأُ بإيجادِ قياساتِ الزّوايا مِنَ المثلّثِ الداخليِّ FCG

23 **أكتبُ** كيفَ أثبتُ أنَّ قياسَ كلِّ زاويةٍ مِنْ زوايا المثلثِ المتطابقِ الأضلاعِ 60°؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

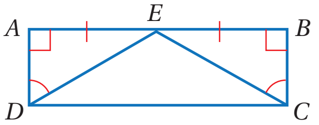
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كانَ $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ فأيُّ الجملِ الآتيةِ صحيحةٌ؟

a) $\overline{BC} \cong \overline{ZX}$ **b)** $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$

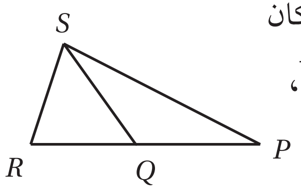
c) $\overline{AB} \cong \overline{YZ}$ **d)** $\overline{AC} \cong \overline{XY}$

2 بناءً على المعلوماتِ المُعطاةِ على الشّكلِ المجاورِ، أيٌّ ممّا يأتي تُستعمَلُ لإثباتِ أنَّ $\triangle ADE \cong \triangle BCE$؟



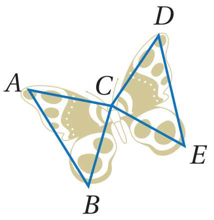
a) SAS **b)** ASA **c)** AAS **d)** HL

3 في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ وَ $\overline{QR} \cong \overline{RS}$، وَ $m\angle PRS = 72°$، فما قياسُ $\angle QPS$؟



a) 27° **b)** 54° **c)** 63° **d)** 72°

4 تبدو أجنحةُ بعضِ الفراشاتِ على شكلِ مثلثاتٍ متطابقةٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ $\overline{AC} \cong \overline{DC}$ وَ $\angle ACB \cong \angle ECD$، فما العبارةُ الإضافيةُ الّتي أحتاجُ إليها؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ACB \cong \triangle ECD$؟



a) $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ **b)** $\overline{AB} \cong \overline{ED}$

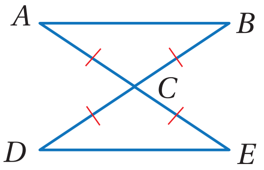
c) $\angle BAC \cong \angle CED$ **d)** $\angle ABC \cong \angle CDE$

5 إذا كانَ $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$، وكانَ $m\angle A = 47.1°$ وَ $m\angle C = 13.8°$، فإنَّ $m\angle Y$ يساوي:

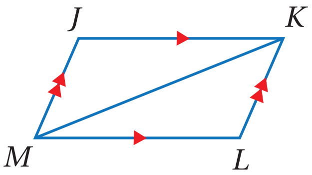
a) 13.8° **b)** 76.2°

c) 60.9° **d)** 119.1°

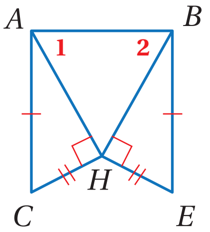
6 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



7 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ المجاورِ لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle MJK \cong \triangle KLM$

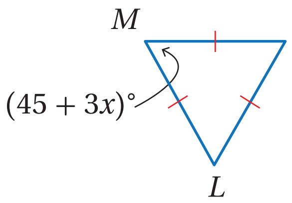


8 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ الآتي؛ لأثبتَ أنَّ $\angle 1 \cong \angle 2$

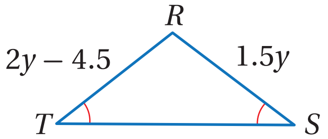


أجِدُ قيمةَ المتغيرِ في كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ:

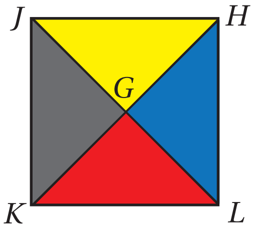
9



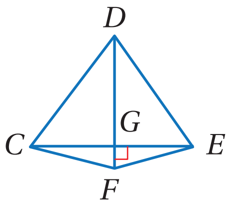
10



11 في الشكلِ الآتي، إذا علمْتُ أنَّ $GJ = GH = GL = GK$، فأثبتُ أنَّ $\Delta JGK \cong \Delta LGH$

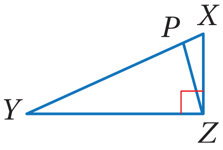


12 في الشكلِ الآتي، إذا علمْتُ أنَّ $\overline{DF}$ ينصّفُ $\angle CDE$، وَ $\overline{CE} \perp \overline{DF}$، فأكتبُ برهانًا سهميًّا؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta DGC \cong \Delta DGE$



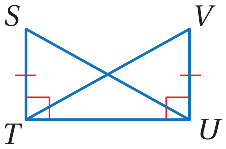
تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

13 في الشكلِ المجاورِ ΔXZY قائمُ الزاويةِ، فيهِ $\overline{YP} \cong \overline{YZ}$ وَ $m\angle PYZ = 26°$، ما قياسُ $\angle XZP$؟



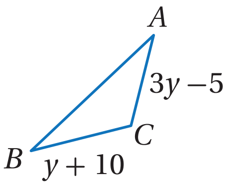
a) 13° **b)** 26° **c)** 32° **d)** 64°

14 أيُّ النظرياتِ أوِ المسلّماتِ يمكنُ بها إثباتُ تطابقِ ΔSTU وَ ΔVUT؟



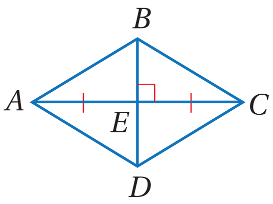
a) *ASA* **b)** HL **c)** SSS **d)** SAS

15 قيمةُ y بالوحداتِ الّتي تجعلُ ΔABC المجاورَ متطابقَ الضلعَينِ تساوي:



a) $1\frac{1}{4}$ **b)** $7\frac{1}{2}$ **c)** $2\frac{1}{2}$ **d)** $15\frac{1}{2}$

16 أيُّ جُمَلِ التطابقِ الآتيةِ يمكنُ إثباتُها بالمعلوماتِ المعطاةِ في الشكلِ المجاورِ؟



a) $\Delta AEB \cong \Delta CED$ **b)** $\Delta ABD \cong \Delta BCA$

c) $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ **d)** $\Delta DEC \cong \Delta DEA$