١٢

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دولـــة فلـسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

فريق التأليف:

د. عادل فوارعة (منسقًا)
أ. عوني الفقيه
أ. كريم العارضة
أ. رجاء العاجز
أ. قيس شبانة
أ. نسرين دويكات

مركز المناهج

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٨/ ٢٠١٩ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية:	إشراف فني	أ. كمال فحماوي
	تصميم فني	منال رمضان

تحكيم علمي:	د. محمد نجيب
تحرير لغوي:	عمر عبد الرحمن

متابعة المحافظات الجنوبية:	د. سمية النّخالة

الطبعة الأولى
٢٠١٩ م / ١٤٤٠ هـ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983280 هاتف | +970-2-2983250 فاكس

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٨ م

مقدمة

لقد اعتُمد في بناء خطة تطوير المنهاج التربوي في فلسطين الأهداف التعليمية التي حددتها المعايير، وما الذي يتوجب على المتعلم معرفته أو ما يحتاج اليه أو ما يحب أن يكتسبه الطالب أو ما سيقوم بأدائه في السنة الدراسية، وتضمن أيضاً أن الطلبة يتلقون تعليماً يضاهي مستويات التعليم في الدول المتقدمة، لضمان النجاح والمنافسة ومواكبة التحديات التي تفرضها التطورات العلمية والتربوية والتقنية والعالمية، ويضمن أيضاً كفايات يؤهلهم للالتحاق بالجامعات ومتابعة تعليمهم العالي والتنافس في سوق العمل المحلي والعالمي.

وتم إنجاز هذا العمل بجهود أكاديميين مختصين وتربويين ومدرسين من الميدان التربوي في مركز المناهج في فلسطين، حيث كان التوجه في إطار عمل وطني موحد ومنطقي رياضي ومترابط يدعم مهارات التواصل والعمل التعاوني والقدرة على التعلم الذاتي، ويتيح للمتعلم تطبيق مهارات التفكير في تعلمهم الرياضيات، وذلك لأن تعليم التفكير يساعد المتعلم تعرف إمكاناته العقلية وقدراته ومن ثم تنميتها واستثمارها بشكل أفضل ويساعده على تكوين فهم مجد للحياة، الأمر الذي يحقق له الاستقلالية والثقة بالنفس والاتزان عند اتخاذ القرار ليعرف كيف يستطيع الدفاع عنه.

تكون هذا الكتاب من خمس وحدات دراسية موزعة على فصلين دراسيين، حيث احتوت مادة الفصل الأول على الوحدة الأولى وهي المصفوفات، والوحدة الثانية وهي التفاضل، والفصل الثاني على الوحدة الثالثة وهي التكامل، الوحدة الرابعة وحدة الإحصاء والاحتمالات، الوحدة الخامسة وحدة المالية.

أملنا بهذا العمل، وقد حققنا عناصر العملية التعليمية كافة، من خلال منهاج فلسطيني واقعي منظّم، نضعه بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم: معلمين، ومشرفين تربويين، ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويد العمل، وتحسينه، لما فيه مصلحة طلبتنا.

فريق التأليف

المحتويات

البنود الملونة باللون الأحمر يستثنى منها الفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الوحدة الأولى

١

المصفوفـــــــات

(Matrices)

شجرة الزيتون من الأشجار الرئيسة في الزراعة الفلسطينية، تزرع بترتيب وتنظيم يساعد المزارع في تطوير وتحسين زراعته.
كيف تساعد هذا المزارع في ذلك؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والعمليات عليها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرف على مفهوم المصفوفة.
- تنظيم بيانات معطاة على شكل مصفوفة وتحديد رتبة هذه المصفوفة.
- إيجاد ناتج جمع وطرح المصفوفات.
- إيجاد ناتج ضرب المصفوفات.
- إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة ٢×٢ ، ٣×٣.
- إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة ٢×٢.
- حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.
- توظيف المصفوفات في مسائل عملية وحل تمارين عامة.

١ - ١ المصفـوفة (Matrix)

نشاط ١

تشجع وزارة التربية والتعليم العالي الفلسطينية النشاطات اللاصفية للطلبة، ومن هذه النشاطات الرحلات العلمية.

ذهب طلاب الصف الثاني عشر في مدرسة الشهيد ياسر عرفات الثانوية رحلة علمية لمصنع ألبان فيه خطي إنتاج وينتج كل خط ثلاثة أصناف هي: علب جبنة، علب رايب، علب لبنة، تحدث مدير المبيعات إلى الطلبة عن الكميات المباعة في شهر أذار ، حيث باع المصنع ٢٣٥٠ علبة جبنة من خط الإنتاج الأول، ٣٣٨٠ علبة جبنة من خط الإنتاج الثاني، ١٦٨٠ علبة رايب من خط الإنتاج الأول، ٢١٠١ علبة رايب من خط الإنتاج الثاني، ١١٠٦ علبة لبنة من خط الإنتاج الأول، ٢٧٠٦ علبة لبنة من خط الإنتاج الثاني.

عدد علب الجبنة المباعة من خط الإنتاج الأول ٢٣٥٠ علبة.

عدد علب اللبنة المباعة من خط الإنتاج الثاني هو ....؟

استرجعت فاتورة مبيعات في شهر آذار وكان عدد العلب فيها ٣٣٨٠ من الصنف..... ومن خط إنتاج.....؟

رتب مدير المبيعات البيانات بهذه الصورة.

$$\begin{array}{c} \\ \text{خط الإنتاج الأول} \\ \text{خط الإنتاج الثاني} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{علب الجبنة} & \text{علب الرايب} & \text{علب اللبنة} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ٢٣٥٠ & ١٦٨٠ & ١١٠٦ \\ ٣٣٨٠ & ٢١٠١ & ٢٧٠٦ \end{bmatrix} \end{array}$$

(الصنف)

أفكر وأناقش

أي الطرق أسهل في تذكر الطلبة للمعلومات والإجابة عن الأسئلة؟ هل يمكن ترتيب البيانات السابقة بطرق أخرى؟

تعريف:

المصفوفة: ترتيب من الأعداد الحقيقية على شكل مستطيل، مكونة من عدد من الصفوف وعدد من الأعمدة ومحصورة بالحاصرتين [ ]، ويرمز للمصفوفة بأحد الرموز: أ، ب، جـ، ....

أتعلم

(١) إذا كانت أ مصفوفة تتكون من م صف، ن عمود (م ، ن $\in$ ص$^{+}$) فإن م × ن تسمى رتبة المصفوفة أ، وتقرأ م في ن، ويرمز لها بالرمز (أ$_{\text{م × ن}}$) .

(٢) الأعداد الحقيقية المكونة للمصفوفة تسمى عناصر (مدخلات)،

أ$_{\text{ي هـ}}$ تعني مدخلة الصف ي والعمود هـ في المصفوفة أ.

(٣) ناتج الضرب م×ن يمثل عدد مدخلات(عناصر) المصفوفة أ.

(٤) تكتب المصفوفات حسب مدخلاتها، فمثلاً : أ$_{\text{٣×٢}}$ = $\begin{bmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{bmatrix}$ ، أ$_{\text{٢×٢}}$ = $\begin{bmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{bmatrix}$

نشاط ٢

إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ & ٤- \\ ١- & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢- & ٣- \\ \sqrt{٥} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٥- \end{bmatrix}$

رتبة أ تساوي ٣×٣ ، رتبة ب .... ، رتبة جـ ......

أ$_{٢١}$ هي مدخلة الصف الأول والعمود الثاني وتساوي ٣ ، ب$_{٢٢}$ = ... ، جـ$_{٣١}$ = ...

العدد -٤ هو مدخلة الصف الثاني والعمود الأول في المصفوفة أ وتمثل بالرموز أ$_{١٢}$

أفكر وأناقش

ما الفرق بين مصفوفة رتبتها ٢×٣ و مصفوفة رتبتها ٣×٢ ؟

مثال (١): المصفوفة أ من الرتبة ٢×٢، إذا عرفت مدخلات المصفوفة أ بحيث أن أ$_{\text{ي هـ}}$ = ي + هـ ،
اكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها؟

الحل: أ$_{\text{٢×٢}}$ = $\begin{bmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{bmatrix}$ ، أ$_{١١}$ = ١ + ١ =٢ ، أ$_{٢١}$ = ١ + ٢ = ٣

أ$_{١٢}$ =٢ + ١ = ٣ ، أ$_{٢٢}$ = ٢ + ٢ = ٤

$$\text{ﺃ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

مصفوفات خاصة:

مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكون من صفّ واحد فقط.

مثال: $\text{ﺃ} = \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{٥} & -١ \end{bmatrix}$ ، ﺃ رتبتها ١×٣ ، تسمى ﺃ مصفوفة صف.

مصفوفة العمود: هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثال: $\text{جـ} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، جـ رتبتها ٢×١ ، تسمى جـ مصفوفة عمود.

المصفوفة المربعة: المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

مثال (١): $\text{ﺃ} = \begin{bmatrix} \sqrt{٢} & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٣ \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ ويمكن تسميتها مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

تسمى المدخلات $\sqrt{٢}$ ، ٣ القطر الرئيس للمصفوفة ﺃ ، والمدخلات ١ ، $\frac{١}{٢}$ القطر الثانوي للمصفوفة ﺃ.

مثال (٢): $\text{جـ} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & -٤ & ١٢ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ويمكن كتابتها بالصورة $\text{جـ}_{٣}$ أو $\text{جـ}_{٣\times٣}$.

المصفوفة الصفرية: المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، ويرمز لها بالرمز (و).

مثال: $و_{٢\times٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$.

مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة مربعة مدخلات القطر الرئيس فيها ١ وباقي مدخلاتها أصفار، ويرمز لها م.

$م = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، م مصفوفة وحدة من الرتبة ٢×٢، ويمكن كتابتها بالصورة $م_{٢}$.

أفكر وأناقش

أكتب المصفوفة $م_{٣}$ ....، أكتب مصفوفة صفرية من الرتبة ١×٣؟

تساوي المصفوفات:

نشاط ٣

ضمن سياسة وزارة التربية والتعليم العالي لتعزيز صمود التجمعات السكانية القريبة من المستوطنات الإسرائيلية، فتحت العديد من المدارس في هذه التجمعات.
ومن هذه المدارس مدرسة غوين الأساسية المختلطة في السمّوع، ومدرسة سوسيا الأساسية المختلطة في يطّا والجدول الآتي يبين أعداد الطلبة في المدرستين:

الصف / المدرسة	الصف الأول		الصف الثاني		الصف الثالث	
	ذكور	إناث	ذكور	إناث	ذكور	إناث
غوين	١	١	٣	٣	١	٠
سوسيا	٠	٢	٢	٤	٠	١

تمثل أعداد الطلبة في مدرسة غوين الأساسية المختلطة بالمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ورتبتها تساوي ....

تمثل أعداد الطلبة في مدرسة سوسيا الأساسية المختلطة بالمصفوفة $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ورتبتها تساوي ....

ما العلاقة بين رتبة كل من المصفوفتين ....؟

ما العلاقة بين ($أ_{١١}$ ، $ب_{١١}$)، ($أ_{٢١}$ ، $ب_{٢١}$)، ($أ_{٣١}$ ، $ب_{٣١}$)؟

تعريف:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية ($أ_{يهـ} = ب_{يهـ}$) والعكس صحيح.

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \\ \sqrt{٩} & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ - ٥ & ١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، هل أ = ب ؟ لماذا ؟

الحل: أ) رتبة المصفوفة أ هي ٣ × ٢ ، رتبة المصفوفة ب هي ٣ × ٢ ومنها رتبة أ تساوي رتبة ب.

ب) $أ_{١١} = ب_{١١} = ١$ ، $أ_{٢١} = ب_{٢١} = -٤$ ، $أ_{١٢} = ب_{١٢} = ٠$ ، $أ_{٢٢} = ب_{٢٢} = ٢$ ، $أ_{١٣} = ب_{١٣} = ٥$ ، $أ_{٢٣} = ب_{٢٣} = ٣$.

ومنها المدخلات المتناظرة متساوية في كل من المصفوفتين أ ، ب.

إذاً المصفوفة أ تساوي المصفوفة ب.

مثال (٢): إذا كانت $\begin{bmatrix} -٢ & ص & \frac{١}{٢} \\ ٢س & ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ & \frac{١}{٢} \\ -٦ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ما قيمة س، ص؟

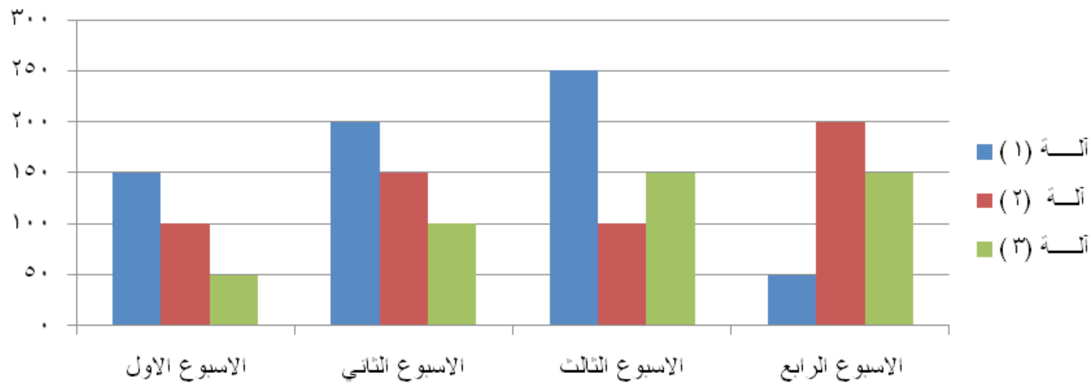
الحل: المصفوفتان متساويتان، فمدخلاتهما المتناظرة متساوية.

ص= ٦

٢س = -٦   ومنها   س = -٣

١ - ١ تمارين ومسائل

س١: يوضح الرسم البياني مبيعات مصنع لثلاثة أنواع من الآلات في أربعة أسابيع، أنظم هذه المعلومات في مصفوفة ؟



س٢: إذا كانت $ﺃ = \begin{bmatrix} ١- & ٢ & ٤ \\ \sqrt{٥} & \frac{٢}{٣} & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٨ & ٣- \\ \sqrt{١٦} & ٤ \\ ٢,٣ & ٥- \end{bmatrix}$

١) ما رتبة كل من المصفوفات ﺃ ، ب ، جـ ؟

٢) ما قيمة $ﺃ_{٢٢}$ ، $ب_{١٢}$ ، $جـ_{١٣}$ ، $جـ_{٢٣}$ ؟

٣) ما قيمة $ﺃ_{٢١} + جـ_{٢٣}$ ؟

س٣: أجد قيمة س، ص في المصفوفات الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ص \\ ١-س & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ ٢- & ٢- \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} س+٤ \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣س \end{bmatrix}$

س٤: المصفوفة جـ من الرتبة ٣×٢، إذا عرفت مدخلاتها بحيث أن $جـ_{ي هـ} = ٢ي - هـ$، أكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها.

١ - ٢ جمع المصفوفات وطرحها
(Summation and Subtraction of Matrices)

نشاط ١

ضمن النشاطات الرياضية السنوية لمدرسة عكا الثانوية للبنين، جرى على ملاعب المدرسة سباق لمسافات ١٠٠م ،٢٠٠م ، ٥٠٠م وكانت النقاط التي حصل عليها أعلى ٣ طلاب كما في الجدول الآتي:

الطالب / السباق	سباق ١٠٠م	سباق ٢٠٠م	سباق ٥٠٠م
علي	٨	٦	٤
صلاح	١١	٣	٣
محمد	٦	٥	٥

المصفوفة التي تمثل نقاط علي $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \end{bmatrix}$

المصفوفة التي تمثل نقاط صلاح .... المصفوفة التي تمثل نقاط محمد ....

المصفوفة التي تمثل نقاط سباق (١٠٠م) هي $\begin{bmatrix} ٨ \\ ١١ \\ ٦ \end{bmatrix}$، والتي تمثل نقاط سباق (٢٠٠م).......

المصفوفة التي تمثل مجموع نقاط سباق (١٠٠م) ، (٢٠٠م) تساوي $\begin{bmatrix} ١٤ \\ ١٤ \\ ١١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ + ٨ \\ ٣ + ١١ \\ ٥ + ٦ \end{bmatrix}$

مصفوفة الفرق بين نقاط (١٠٠م) ، (٥٠٠م) ....

تعريف:

تجمع المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية جمع المصفوفتين بجمع مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

تطرح المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية طرح المصفوفتين بطرح مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

مثال (١): إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٩ & ٣ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ ١ & -٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، أجد أ + ب ، أ − ب ؟

الحل: $\text{أ} + \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ + ٠ & ٩ + ٣ & ٣ + ٦ \\ -٣ + ١ & ٢ + -٤ & ١ + ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١٢ & ٩ \\ -٢ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ - ٠ & ٩ - ٣ & ٣ - ٦ \\ -٣ - ١ & ٢ - -٤ & ١ - ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ & -٣ \\ -٤ & ٦ & ١ \end{bmatrix}$

مثال (٢): إذا كان $\begin{bmatrix} ٢ & \text{س} \\ \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ \text{ص} & \text{ع} \end{bmatrix}$ أجد قيم كل من س، ص، ع ؟

الحل: $\begin{bmatrix} ٢+١ & \text{س}+٠ \\ \text{س}+٢ & \text{ص}+-١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ \text{ص} & \text{ع} \end{bmatrix}$

س + ٠ = ٧ ومنها س = ٧

س + ٢ = ص ومنها ص = ٩

ص + (-١) = ع ومنها ع = ٨

ضرب المصفوفة بعدد حقيقي:

إذا كان ك عدداً حقيقياً، $\text{أ}_{\text{م}\times\text{ن}}$ مصفوفة، فإن $(\text{ك}\text{أ})_{\text{م}\times\text{ن}}$ مصفوفة، تنتج مدخلاتها من ضرب كل مدخلة من مدخلات المصفوفة أ في ك.

مثال (١): إذا كان $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٩ & -٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ أجد: ١) ٢ أ ٢) $\frac{١}{٢}$ أ ٣) - أ

الحل: ١) ٢ أ

$$\begin{bmatrix} ١٨ & ٦- \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \times ٢ & ٣- \times ٢ \\ ٥ \times ٢ & ٠ \times ٢ \end{bmatrix} = \text{أ}\ ٢$$

٢)

$$\begin{bmatrix} \frac{٩}{٢} & \frac{٣}{٢}- \\ \frac{٥}{٢} & ٠ \end{bmatrix} = \text{أ}\ \frac{١}{٢}$$

٣) -أ $= \begin{bmatrix} ٩- & ٣ \\ ٥- & ٠ \end{bmatrix}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمعكوس الجمعي للمصفوفة أ.

مثال (٢): إذا كان أ $= \begin{bmatrix} ١١ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ١- \\ ٣- & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

أجد: ١) -أ + ٢ب ٢) ٣ب − ٢أ

الحل: ١) -أ + ٢ب

$$\begin{bmatrix} ٢ + ١١- & ٦ + ٣- & ٢- + ٢- \\ ٦- + ٥- & ٠ + ٦- & ٤ + ٩- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ١- \\ ٣- & ٠ & ٢ \end{bmatrix} ٢ + \begin{bmatrix} ١١- & ٣- & ٢- \\ ٥- & ٦- & ٩- \end{bmatrix} = \text{ب}٢ + \text{أ}-$$

$$\begin{bmatrix} ٩- & ٣ & ٤- \\ ١١- & ٦- & ٥- \end{bmatrix} =$$

٢) ٣ب − ٢أ

$$\begin{bmatrix} ٢٢ & ٦ & ٤ \\ ١٠ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ٣- \\ ٩- & ٠ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٦ & ٩ \end{bmatrix} ٢ - \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ١- \\ ٣- & ٠ & ٢ \end{bmatrix} ٣ = \text{أ}٢ - \text{ب}٣$$

$$\begin{bmatrix} ١٩- & ٣ & ٧- \\ ١٩- & ١٢- & ١٢- \end{bmatrix} =$$

مثال (٣): أجد قيمة س، ص فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ \text{ص} \end{bmatrix} ٣ - \begin{bmatrix} \text{س} \\ ٣ \end{bmatrix} ٢$$

الحل: $\begin{bmatrix} \text{٢س} \\ ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٢ \\ \text{٣ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{٢س} - ١٢ \\ ٦ - \text{٣ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٢س − ١٢ = ٢ ومنها س = ٧

٦ − ٣ص = ٩ ومنها ص = -١

مثال (٤): إذا كانت المصفوفة ا = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣- \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$، أجد المصفوفة ب$_{٣\times٢}$ بحيث ا + ب = و

الحل: لتكن ب = $\begin{bmatrix} \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{١١} \\ \text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{١٢} \\ \text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{١٣} \end{bmatrix}$ ، ا + ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣- \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{١١} \\ \text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{١٢} \\ \text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{١٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢ + ب$_{١١}$ = ٠ ، ١ + ب$_{٢١}$ = ٠ ، -٣ + ب$_{١٢}$ = ٠ ، ٢ + ب$_{٢٢}$ = ٠ ، ٥ + ب$_{١٣}$ = ٠ ، ١ + ب$_{٢٣}$ = ٠

ب$_{١١}$ = -٢ ، ب$_{٢١}$ = -١ ، ب$_{١٢}$ = ٣ ، ب$_{٢٢}$ = -٢ ، ب$_{١٣}$ = -٥ ، ب$_{٢٣}$ = -١

ب = $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٢- & ٣ \\ ١- & ٥- \end{bmatrix}$ ، تسمى المصفوفة ب = -ا المعكوس الجمعي للمصفوفة ا.

أتعلم

المصفوفة + المعكوس الجمعي لها = و (المصفوفة الصفرية)

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

اذا كانت ꟊ، ب، جـ مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∋ ح:

أ) ꟊ + ب = ب + ꟊ .... (الخاصية التبديلية).

ب) (ꟊ + ب) + جـ = ꟊ + (ب + جـ) .... (الخاصية التجميعية).

جـ) ꟊ + و = و + ꟊ = ꟊ .... (المصفوفة الصفرية).

د) ꟊ + (-ꟊ) = (-ꟊ) + ꟊ = و................................ (المعكوس الجمعي).

هـ) ك (ꟊ + ب) = ك ꟊ + ك ب .... (ضرب عدد في مجموع مصفوفتين).

مثال (٥): أجد المصفوفة س في المعادلة الآتية: $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} + ٢س = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ ،

الحل: $\left(\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥- & ٤- \end{bmatrix} \right) + ٢س = \left(\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥- & ٤- \end{bmatrix} \right)$ (بإضافة المعكوس الجمعي)

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + ٢س = \begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ٣- & ٧- \end{bmatrix}$ ومنها س $= \begin{bmatrix} \frac{١-}{٢} & \frac{١-}{٢} \\ \frac{٣-}{٢} & \frac{٧-}{٢} \end{bmatrix}$

أتعلم

المعادلة $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} + ٢س = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ تسمى معادلة مصفوفية، حيث س مصفوفة،

وكذلك $\begin{bmatrix} س \\ ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ **تسمى معادلة مصفوفية، حيث س ، ص أعداد حقيقية.**

١ - ٢ تمارين ومسائل

س١: تحتوي مكتبة جامعة الخليل على ٢٠٠٠ كتاب علمي، ٢٥٠٠ كتاب تاريخي، ٤٠٠٠ كتاب أدبي، وتحتوي مكتبة جامعة بيت لحم على ٥٠٠٠ كتاب علمي، ٥٥٠٠ كتاب تاريخي، ٦٥٠٠ كتاب أدبي، وتحتوي مكتبة جامعة النجاح الوطنية على ٣٥٠٠ كتاب علمي، ٤٥٠٠ كتاب تاريخي، ٥٠٠٠ كتاب أدبي.

أ) أرتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وأرمز لها بالرموز أ ، ب ، جـ على الترتيب؟

ب) أجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وأضعها في مصفوفة؟

جـ) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في ب على عدد الكتب التي في أ ؟ أرتب ذلك في مصفوفة؟

س٢: أجد ناتج ما يأتي:

١) $\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٣ & -٢ \\ -٥ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٠ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

أجد: ١) (أ + ب) − ٢ جـ ٢) (أ + ب) + جـ ٣) أ + (ب + جـ)

٤) ٢ (أ + جـ) ٥) (ب + جـ) ٦) (جـ + ب)

س٤: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ س - ٣ص & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & س + ص \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} \text{س} \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix} + ٣ \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢\text{ص} \\ -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

س٥: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١٠ & -٣ \end{bmatrix} - ٢\undertilde{\text{س}} = ٣ \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ٤ & ٩ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} -٣ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٥ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ & -٢ \\ ٠ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢}\undertilde{\text{ص}}$

١ - ٣

ضرب المصفوفات
(Matrix Multiplication)

نشاط ١

تعتبر السياحة في فلسطين من مصادر الدخل القومي، ويعتبر قطاع الفنادق من عناصر هذه السياحة، ويترتب على هذا القطاع تقديم خدمات مناسبة للنزلاء لتشجيع هذه السياحة.

أراد موظف المشتريات في أحد الفنادق شراء ٢٠ صندوقاً من البرتقال، ١٠ صناديق من التفاح، ٥ صناديق من الموز، وكانت لائحة الأسعار للصندوق الواحد في محلين للفواكه كالآتي:

المحل الأول: صندوق البرتقال بدينارين، وصندوق التفاح بأربعة دنانير، وصندوق الموز بخمسة دنانير.

المحل الثاني: صندوق البرتقال بثلاثة دنانير، وصندوق التفاح بثلاثة دنانير، وصندوق الموز بأربعة دنانير.

كيف يمكن مساعدة موظف المشتريات على اختيار المحل الأنسب لشراء الفاكهة بأقل الأسعار؟

تمثل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢٠ & ١٠ & ٥ \end{bmatrix}$ عدد الصناديق، وتمثل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ...، وتمثل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ...

ثمن الفواكه في المحل الأول= ٢٠ × ٢ + ١٠ × ..... + ٥ × ٥ = ٤٠ + ٤٠ + ... = ١٠٥ دنانير

ثمن الفواكه في المحل الثاني= ٢٠ × ... + ١٠ × ٣ + ٥ × .... = ٦٠ + ٣٠ + ٢٠ = ١١٠ دنانير

ويمكن تمثيل هذه العملية $\begin{bmatrix} ٢٠ & ١٠ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠٥ & ١١٠ \end{bmatrix}$

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين، وكان عدد الأعمدة في أ يساوي عدد الصفوف في ب، فإن المصفوفة أ . ب معرفة، والناتج مصفوفة جـ من الرتبة (عدد صفوف أ في عدد أعمدة ب)، أي أن $أ_{م×ن} . ب_{ن×هـ} = جـ_{م×هـ}$

نشاط ٢

أكمل الجدول الآتي:

رتبة المصفوفة أ	رتبة المصفوفة ب	أ . ب معرفة	أ . ب غير معرفة	رتبة المصفوفة الناتجة
٢×٣	٣×٢	✓	______	٢×٢
٣×٢	٣×٢	....	....	______
٣×١	....	✓	______	٣×٣

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٠ & ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ -١ & -٢ & -١ \end{bmatrix}$

أجـد: أ.ب ، ب.أ إن أمكن؟

الحل: $أ_{٢×٣} \,.\, ب_{٣×٣} = جـ_{٢×٣} = \begin{bmatrix} جـ_{١١} & جـ_{٢١} & جـ_{٣١} \\ جـ_{١٢} & جـ_{٢٢} & جـ_{٣٢} \end{bmatrix}$

$$جـ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٠ & ١ & -٢ \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} -١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ -١ & -٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$جـ_{١١}$ = ٢ × -١ + -١ × ٠ + ٤ × -١ = -٦ وهي ناتج جمع (ضرب مدخلات الصف الأول من المصفوفة أ في مدخلات العمود الأول من المصفوفة ب). وهكذا بقية مدخلات المصفوفة جـ.

$$جـ = \begin{bmatrix} ٢ × -١ + -١ × ٠ + ٤ × -١ & ٢ × ٢ + -١ × ١ + ٤ × -٢ & ٢ × -٥ + -١ × -٢ + ٤ × -١ \\ ٠ × -١ + ١ × ٠ + -٢ × -١ & ٠ × ٢ + ١ × ١ + -٢ × -٢ & ٠ × -٥ + ١ × -٢ + -٢ × -١ \end{bmatrix}$$

$$جـ = أ \,.\, ب = \begin{bmatrix} -٦ & -٥ & -١٢ \\ ٢ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

ب . أ غير معرفة، لأن عدد أعمدة ب لا يساوي عدد صفوف أ.

أتعلم

المدخلة جـ$_{\text{ي هـ}}$ = مجموع حواصل ضرب المدخلات في الصف ي من المصفوفة أ في مدخلات العمود هـ من المصفوفة ب.

مثال (٢): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ وكانت جـ = أ . ب، أجد قيمة جـ$_{21}$.

الحل: جـ = $\begin{bmatrix} جـ_{11} & جـ_{21} \\ جـ_{12} & جـ_{22} \end{bmatrix}$ ومنها جـ$_{21}$ = ٣ × -١ + ١ × ٢ = -١

مثال (٣): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، أجد أ . ب ، ب . أ ، أ . م$_2$ ، م$_2$. أ ؟

الحل: أ . ب = $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -16 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

ب . أ = $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ ألاحظ أن أ . ب ≠ ب . أ

أ . م$_2$ = $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

م$_2$. أ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

ألاحظ أن أ . م$_2$ = م$_2$. أ = أ ، م$_2$ المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات الثنائية.

نشاط ٣

أحل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} . س = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

الحل: المصفوفة س من الرتبة ٢×١ (لماذا؟) س = $\begin{bmatrix} ل \\ ص \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ل \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ل+ص \\ ل-٢ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

٢ل + ص = ٣ .... (١) ، ل – ٢ص = ٤ .... (٢)

بحل المعادلتين ينتج أن ل = ٢ ، ص = -١ (أتحقق من الحل).

خصائص عملية الضرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن عملية الضرب والجمع في العبارات الآتية معرفة، ك∈ح فإن:

١. (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ)................ الخاصية التجميعية.

٢. أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ)... توزيع الضرب على الجمع من اليمين.

٣. (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ).. توزيع الضرب على الجمع من اليسار.

٤. أ . م = م . أ = أ .... (م) المصفوفة المحايدة.

٥. ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

١ - ٣ تمارين ومسائل

س١: أكمل الجدول الآتي:

رتبة المصفوفة أ	رتبة المصفوفة ب	أ . ب معرفة	أ . ب غير معرفة	رتبة مصفوفة الناتج
١×٣	٣×٢			
٢×٣	٢×٣			
....	١×٣	✓	______	٢×٣

س٢: أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٨ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٥ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} -٥ & ٠ & ١ \\ ٦ & -١ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٢ & ٤ & ٢ \\ ٤ & ١٠ & ٠ \\ -٧ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١٥ & ٨ & ٧ \\ -٦ & ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٩ & ٥ & ٣ \\ ٤ & -٢ & -١ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

أجد (إن أمكن):

١) ب . جـ ٢) ٢أ . (-ب) ٣) جـ^{٢} ٤) أ^{٢}

س٤: أجد قيم س ، ص فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} \text{س} & -٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -١٤ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

س٥: إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٣ \\ -١ & -٢ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ أجد:

١) (أ . ب) . جـ

٢) أ . (ب . جـ)

٣) ٢ (أ . ب)

٤) (٢أ) . ب

٥) أ . (٢ب)

١ - ٤ المحددات (Determinants)

نشاط ١

الصلاة ركن من أركان الإسلام الخمسة، فرضت على سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم في ليلة الإسراء والمعراج.

والصلوات المفروضة خمس، لكل منها عدد محدد من ركعات الفرض، فصلاة الفجر ركعتان، وصلاة الظهر أربع ركعات، وصلاة المغرب . . .

نشاط ٢

كل شكل هندسي منتظم يمكن ربطه بعدد حقيقي يمثل محيطه، فالمربع الذي طول ضلعه ٤سم يرتبط بالعدد ١٦سم، والمستطيل الذي أبعاده ٣سم، ٤سم يرتبط بالعدد.......

بماذا يمكن ربط المصفوفة الثنائية $ٲ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ؟

تعريف: إذا كانت $ٲ_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ٲ_{١١} & ٲ_{٢١} \\ ٲ_{١٢} & ٲ_{٢٢} \end{bmatrix}$، فإن المقدار $(ٲ_{١١} \times ٲ_{٢٢}) - (ٲ_{٢١} \times ٲ_{١٢})$ يسمى محدد المصفوفة ٲ

ويرمز له بالرمز $|ٲ|$.

مثال (١): إذا كان $ٲ = \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ١ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$.

أجد: ١) $|ٲ|$ ٢) $|ب|$ ٣) $|ٲ . ب|$

الحل: ١) $|ٲ| = \begin{vmatrix} ٦ & -٣ \\ ١ & \frac{١}{٢} \end{vmatrix} = (٦ \times \frac{١}{٢}) - (-٣ \times ١) = ٣ + ٣ = ٦$

٢) $|ب| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٢ \times ٣) - (١ \times ١) = ٦ - ١ = ٥$

(٣) $\text{أ} . \text{ب} = \begin{bmatrix} ٩ & -٣ \\ ٢,٥ & ٢,٥ \end{bmatrix}$ ، $|\text{أ} . \text{ب}| = (٩ \times ٢,٥) - (-٣ \times ٢,٥) = ٣٠$

مثال (٢): إذا كان $\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٧$، أجد قيمة س.

الحل: $(٣ \times ٥) - (\text{س} \times ٢) = ٧$ ومنها $\text{س} = ٤$

تعريف:

تعريف: إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{bmatrix}$ ، فإن محدد المصفوفة أ هو:

$$|\text{أ}| = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٢١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٣١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

مثال (٣): أجد محدد المصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & -٣ & ٢ \\ ٠ & -٢ & ٥ \end{bmatrix}$؟

الحل: $|\text{أ}| = ٢ \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} + -١ \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix}$

$= ٢((-٣\times٥) - (٢\times-٢)) - ٣((١\times٥) - (٢\times٠)) + (-١)((١\times-٢) - (-٣\times٠))$

$= ٢(-١١) - ٣(٥) -١(-٢) = -٢٢ - ١٥+٢ = -٣٥$

مثال (٤): إذا كان $\begin{vmatrix} -٣ & -٢ & ١ \\ س & ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ & -٢ \end{vmatrix} = -٢$، أجد قيمة س.

الحل: $-٣((٢ \times -٢) - (-١\times٣)) + ٢((س\times-٢) - (-١\times٤)) + ١((س\times٣) - (٢\times٤)) = -٢$

$-٣(-٤ + ٣) + ٢(-٢س + ٤) + ١(٣س - ٨) = -٢$

$٣ - ٤س + ٨ + ٣س - ٨ = -٢$

$٣ - س = -٢$ ومنها $س = ٥$

١ - ٤ تمارين ومسائل

س١: أجد: ١) $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ ، ٢) $\begin{vmatrix} ١٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، ٣) $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ -٣ & ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ & -٢ \end{vmatrix}$

س٢: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أجد $|أ . ب|$ ، $|أ + ب|$ ، $|أ - ٢ب|$

س٣: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥$

س٤: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} س & -٢ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٠ \end{vmatrix} = ١١$

١ - ٥ النظير الضربي للمصفوفة المربعة
(Inverse Matrix)

نشاط ١

اتفق شخصان على تكوين شيفرات بينهما باستخدام المصفوفات، بحيث تم إعطاء كل حرف من حروف اللغة العربية مدلولاً رقمياً، كما في الجدول المقابل:

أ	١	ض	١٥
ب	٢	ط	١٦
ت	٣	ظ	١٧
ث	٤	ع	١٨
ج	٥	غ	١٩
ح	٦	ف	٢٠
خ	٧	ق	٢١
د	٨	ك	٢٢
ذ	٩	ل	٢٣
ر	١٠	م	٢٤
ز	١١	ن	٢٥
س	١٢	هـ	٢٦
ش	١٣	و	٢٧
ص	١٤	ي	٢٨

ويتم إرسال الرسالة بمصفوفات من الرتبة ٢×١، بحيث يتفق الاثنان على مصفوفة من الرتبة ٢×٢ يتم ضربها في مصفوفات الشيفرة ويتم إرسال المصفوفة الناتجة، ويقوم الآخر بفك الشيفرة بعملية عكسية لمعرفة مضمون الرسالة.

الرسالة: أب $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، أم $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢٤ \end{bmatrix}$ تشفيرها بضربهما في $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

فتصبح الرسالة $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٧٤ \\ ٤٩ \end{bmatrix}$ لفك الشيفرة، أضرب الرسالة في $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$.

ما العلاقة بين المصفوفتين $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ؟

أحاول مع زميلي تصميم شيفرة لكلمة فلسطين، حسب المعلومات السابقة.

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين ثنائيتين، وكان أ.ب = ب.أ = $م_٢$ ($م_٢$ المصفوفة المحايدة أو مصفوفة الوحدة).
فإن ب تسمى النظير الضربي لِـ أ، وبالرموز ب = $أ^{-١}$ ، ($أ^{-١}$ النظير الضربي للمصفوفة أ).

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ أبين أن ب = أ $^{١-}$ ؟

الحل: أ . ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١\times٢ + ٢-\times١ & ٢-\times٢ + ٥\times١ \\ ١\times٥ + ٢-\times٢ & ٢-\times٥ + ٥\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

ب . أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥\times٢- + ٢\times٥ & ٢\times٢- + ١\times٥ \\ ٥\times١ + ٢\times٢- & ٢\times١ + ١\times٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أ . ب = ب . أ = م ومنها ب = أ $^{١-}$ وكذلك أ = ب $^{١-}$.

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة الثنائية:

تعريف:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ فإن أ $^{١-}$ = $\frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{٢١}- & أ_{٢٢} \\ أ_{١١} & أ_{١٢}- \end{bmatrix}$ حيث | أ | ≠ ٠ .

إذا كان | أ | = ٠ ، فإن أ ليس لها نظير ضربي (تسمى أ مصفوفة منفردة).

مثال (٢): أي من المصفوفات الآتية منفردة؟

١) $\begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ١٠ & ٥- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} \sqrt{٤} & \frac{٣}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & ١ \end{bmatrix}$.

الحل: ١) $\begin{vmatrix} ٣- & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = (١×٤) − (-٣×٢) = ١٠ ≠ ٠ ليست منفردة. ٢) $\begin{vmatrix} ١٠ & ٥- \\ ٢- & ١ \end{vmatrix}$ = ٠ منفردة.

٣) $\begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١٢ − ١٢= ٠ منفردة. ٤) $\begin{vmatrix} ٢ & \frac{٣}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & ١ \end{vmatrix}$ = -١ ليست منفردة.

مثال (٣): أجد أ $^{-1}$ (إن أمكن) حيث أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$.

الحل: | أ | = ٧×٥ − ٤×٩ = ٣٥ − ٣٦ = -١

أ $^{-1}$ = $\frac{١}{-١}$ $\begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ -٩ & ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -٧ & ٤ \\ ٩ & -٥ \end{bmatrix}$ أتحقق من أن النظير الضربي لِ أ $^{-1}$ هو أ .

مثال (٤): أحل المعادلة المصفوفية الآتية: س . $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل: أضرب طرفي المعادلة بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ من اليسار.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ لماذا ؟

س . ($\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$) = ($\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$)

س . $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ لماذا؟

س . م = $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ومنهــا س = $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

١ - ٥ تمارين ومسائل

س١: أجد النظير الضربي للمصفوفات الآتية (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

س٢: أجد قيمة س التي تجعل المصفوفات الآتية منفردة حيث ١) $\begin{bmatrix} ٢ & س \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ٩ & س \\ س & ٤ \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، وكانت ب = ٤أ ، أجد ب$^{-١}$ ؟

س٤: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ ، أجد: (أ . ب)$^{-١}$ ، ب$^{-١}$. أ$^{-١}$ ؟ ماذا تلاحظ؟

س٥: أحل المعادلة المصفوفية ٢س . $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

١ - ٦ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات
(Solving Linear System of Equations by Matrices)

نشاط ١

نظمت مدرسة ثانوية رحلة إلى جامعة النجاح الوطنية في مدينة نابلس التي تبعد ١٨٠ كم عن المدرسة، فإذا كان معدل سرعة الحافلة على الطريق السريع ٩٠ كم/ ساعة، ومعدل سرعتها داخل المدن ٣٠ كم/ ساعة، وكان زمن سير الحافلة ٤ ساعات.

لو فرضنا عدد ساعات السير على الطريق السريع هو س، وداخل المدن هو ص، فإن:

٩٠س + ٣٠ص= ... ،   س + ص= ... ،

أحل المعادلتين، ومنها س = ١ ، ص= .... لماذا ؟

نشاط ٢

لدينا النظام الآتي: ٣س+ص = ٧

س−ص = ١

لحل هذا النظام باستخدام المصفوفات:

. أتأكد أن المعادلتين مرتبتان على الصورة ﺃ س + ب ص = جـ.

. أكتب مصفوفة المعاملات ولتكن ﺃ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ حيث العمود الأول معاملات س والعمود الثاني معاملات ص.

. أكتب مصفوفة المتغيرات $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، مصفوفة الثوابت $\begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix}$

. المعادلة المصفوفية الناتجة هي $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ... \\ ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix}$

سنتعرف على كيفية حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام المصفوفات.

١- طريقة النظير الضربي:

مثال (١): أحل النظام الآتي باستخدام النظير الضربي: ٢س + ص = ٤

٥س − ٢ص = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$

أضرب طرفي المعادلة المصفوفية بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ من اليمين.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{-٢}{٩} \end{bmatrix}$ لماذا ؟

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{-٢}{٩} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{-٢}{٩} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} \quad \text{ومنها} \quad \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

ومنها س = ١ ، ص = ٢ (أتحقق من ذلك).

٢- طريقة المحددات (طريقة كريمر).

طريقة كريمر: في النظام $أ_١$ س + $ب_١$ ص = ك

$أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = ل ،

تكون س = $\frac{|أ_{س}|}{|أ|}$ ، ص = $\frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$ حيث $أ = \begin{bmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{bmatrix}$ ، $|أ| \neq ٠$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ك & ب_١ \\ ل & ب_٢ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} أ_١ & ك \\ أ_٢ & ل \end{bmatrix}$.

مثال (١): أحل النظام الآتي باستخدام طريقة كريمر: ٢س – ص = ٧ ، س + ٢ ص = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix}$

$\text{ﺃ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات، ومنها | ﺃ | = (٢×٢) – (١×-١) = ٥

$\text{ﺃ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٧ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ استبدال العمود الأول في المصفوفة ﺃ بالثوابت، ومنها | $\text{ﺃ}_{\text{س}}$ | = ١٥

$\text{ﺃ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ استبدال العمود الثاني في المصفوفة ﺃ بالثوابت، ومنها | $\text{ﺃ}_{\text{ص}}$ | = -٥

ومنها س = $\frac{|\text{ﺃ}_{\text{س}}|}{|\text{ﺃ}|} = \frac{١٥}{٥}$ = ٣ ، ص = $\frac{|\text{ﺃ}_{\text{ص}}|}{|\text{ﺃ}|} = \frac{-٥}{٥}$ = -١ (أتحقق).

مثال (٢): أحل المعادلة المصفوفية الآتية بطريقة كريمر $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ١ \end{bmatrix}$

الحل: $\text{ﺃ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ﺃ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ﺃ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

| ﺃ | = ٧ ، |$\text{ﺃ}_{\text{س}}$| = ٧ ، | $\text{ﺃ}_{\text{ص}}$ | = ١٤

س = $\frac{|\text{ﺃ}_{\text{س}}|}{|\text{ﺃ}|} = \frac{٧}{٧}$ = ١ ، ص = $\frac{|\text{ﺃ}_{\text{ص}}|}{|\text{ﺃ}|} = \frac{١٤}{٧}$ = ٢ (أتحقق).

١ - ٦ تمارين ومسائل

س١: أحل الأنظمة الخطّيّة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

١) ٣س − ٤ص = ٤ ، -٢س + ٤ص = ٤

٢) س − ص = ٣ ، ٢س = ٦ − ص

س٢: أحل الأنظمة الخطّيّة الآتية باستخدام طريقة كريمر:

١) س − ص = ٨ ، ٢س + ص = ١

٢) ٢ ص − س = ١ ، ٢س + ص − ٨ = ٠

س٣: في نظام من معادلتين خطّيّتين كانت | أ | = ١١، |أ$_{س}$| = ٣٣، | أ$_{ص}$ | = ١١، أجد قيم س ، ص ؟

س٤: في نظام من معادلتين خطّيّتين على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ ، كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ٣ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات، ب = $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت.

أ) أكتب المعادلتين الخطّيّتين بدلالة س ، ص.

ب) أستخدم طريقة كريمر لحل النظام.

١ - ٧ تمارين عامة:

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١. إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} -٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٤ & ٠ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ما قيمة $أ_{٣٢}$ ؟

أ) ٢ ب) -٥ ج) -٢ د) ٤

٢. إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ما رتبتها ؟

أ) ٢×٣ ب) ٣×٢ ج) ٦ د) ٢، ٣

٣. إذا كان $\begin{bmatrix} ٥ & ٢س+٣ \\ ص-٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ، ص على الترتيب ؟

أ) ٧، -١ ب) ٥، -٣ ج) ٢، ١ د) ١، ٢

٤. إذا كانت أ ، ب ، ج مصفوفات بحيث أن أ . ٢ب = ج ، أ من الرتبة ٢×٣، ج من الرتبة ٢×٤، فما رتبة المصفوفة ب ؟

أ) ٣×٤ ب) ٢×٣ ج) ٢×٤ د) ٦×٨

٥. إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ فما قيمة | ٢س | ؟

أ) ٣ ب) ٦ ج) ١٢ د) -٢٨

٦. ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣س & ٣ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة؟

أ) ١٢ ب) -٢ ج) ٢ د) صفر

٧. إذا كان $أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ أجد المصفوفة أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

٨. إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ أجد $(أ)^{٥}$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ \frac{٥}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣٢ \\ \frac{١}{٣٢} & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

٩. ما ناتج $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ & ٦- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٦- \\ ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ & ٦- \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ٣- \end{bmatrix}$

١٠. إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية، وكان أ + $م_{٢}$ = $و_{٢}$ فما هي المصفوفة أ ؟

أ) $و_{٢}$ ب) $-م_{٢}$ جـ) $م_{٢}$ د) -أ

س٢: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- & ٢ \\ ٤ & ٥- & ٦ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ،

د = $\begin{bmatrix} ٢- & ٦ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٤- \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ل = $\begin{bmatrix} ٤- & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أجد الآتي (إن أمكن):

أ) جـ + ل ب) ٣جـ − ٢ل جـ) (أ.ب) . د د) $ل^{١-}$ هـ) | جـ |

س٣: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + ٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٧ & ٤ \\ ٨ & ٦ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} - ٣\text{م}_{٢} = \text{ص} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٤ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ \\ -٤ \\ ٦ \end{bmatrix} = \text{س}$

س٤: أكتب أنظمة المعادلات الآتية على شكل معادلات مصفوفية:

أ) ٢س − ٣ص = ٠ ، س + ٢ص = ٧

ب) س − ٣ص + ٣ع = ٢ ، ٤س + ص − ع = ٢ ، ٥س − ع + ص = ٠

س٥: أستخدم طريقة كريمر لحل النظام الآتي:

٢ ص − ٤ س = ٢ ، ٥س + ص = ٨

س٦: إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & \text{س} \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٦$ ، أحسب قيمة س.

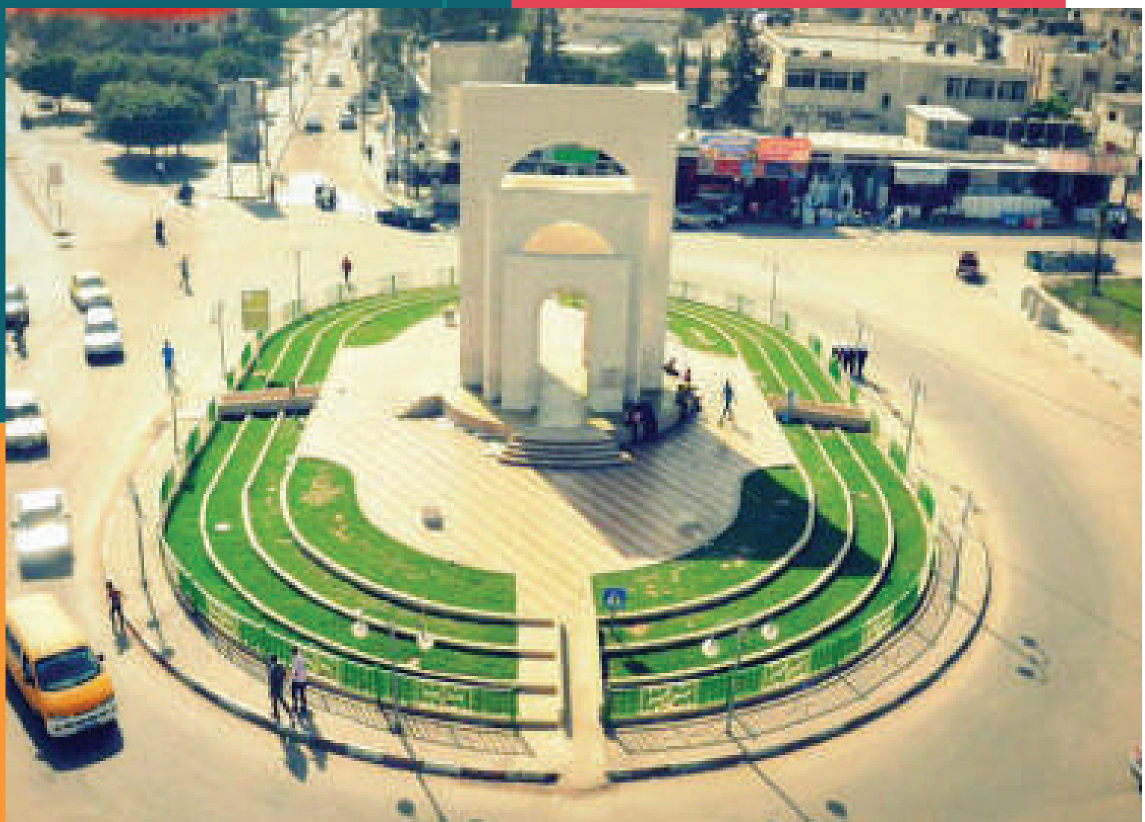
س٧: في نظام من معادلتين خطّيّتين بمتغيرين س ، ص كانت قيمة ص = ٢ ، $|أ_{\text{س}}| = -٢١$ ، $|أ_{\text{ص}}| = -١٤$ أحسب قيمة س.

س٨: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اميز انواع المصفوفات ومسمياتها الاساسية			
اجد محدد المصفوفة			
اوظف خواص المحددات في حل مشكلات حياتية			
احل معادلات مصفوفية بعدة طرق			

الوحدة الثانية
٢

التفاضل
(Differentiation)



كيف يمكن إنشاء مثل هذا الميدان بأقل تكاليف ممكنة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف وقواعد الاشتقاق في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتران ق(س) وإيجاده.
- التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتران، وإيجادها باستخدام التعريف.
- التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.
- إيجاد معادلة المماس، ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة تقع عليه.
- إيجاد المشتقة الأولى باستخدام قاعدة السلسلة.
- إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران.

٢ - ١

متوسط التغير
(Rate of Change)

نشاط ١

تعتبر السُّمنة من أسباب كثير من الأمراض، لهذا يلجأ الكثير من الأشخاص إلى المحافظة على كتلهم أو التخفيف من هذه الكتل.

بيسان فتاة فلسطينية اتبعت برنامجاً غذائياً معيناً للتخفيف من كتلتها، حيث كانت كتلتها قبل البدء بهذا البرنامج ٨٠كغم، وبعد عشرة أيام من اتباعها للبرنامج أصبحت كتلتها ٧٨كغم، وبعد خمسة أيام أخرى أصبحت كتلتها ٧٧ كغم، ألاحظ التغير في كتلة بيسان في الأيام العشرة الأولى؟

التغير في كتلة بيسان في الأيام العشرة الأولى = ٧٨ − ٨٠ = -٢كغم، أي أن كتلة بيسان نقصت ٢كغم.

التغير في كتلة بيسان في الأيام الخمسة التالية ....؟

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت فيه س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن Δس = $س_٢ - س_١$ تمثل التغير في س وتقرأ دلتا س.

وبناءً على التغير في س تتغير ص، حيث Δص = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) تمثل التغير في ص وتقرأ دلتا ص.

مثال (١): إذا كان ص = ق (س) =٢س + ٣ أجد Δس ، Δص ، عندما تتغير س من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٤.

الحل: Δس = $س_٢ - س_١$ = ٤ − ١ = ٣

Δص = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) = ق(٤) − ق(١) =١١ − ٥ = ٦

تعريف:

يسمى المقدار $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$.

مثال (٢): إذا كان ص= ق(س)=٢س^٢ + ٤ ، س∈ح ، وتغيرت س من س$_١$= ٢ إلى س$_٢$= ٥، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٥٤ - ١٢}{٥ - ٢}$$

$$= ١٤$$

مثال (٣): إذا كان ص= ق(س) = ١ – ٣س ، س∈ح، وزادت س من س$_١$= ٣ بمقدار ٢، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$\triangle س = س_٢ - س_١$$

٢ = س$_٢$ – ٣ ومنها س$_٢$ = ٥

متوسط التغير = $\frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = \frac{{}^-١٤ - {}^-٨}{٥ - ٣}$

$$= {}^-٣$$

مثال (٤): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_١$= ‎-٢ إلى س$_٢$ = ٩ يساوي ‎-٦ ، أجد:

أ) التغير في ص ب) ق(٩) علما بأن ق(‎-٢) = ٦

الحل: أ) التغير في س = $\triangle$س = س$_٢$ – س$_١$ = ٩ – ‎-٢ = ١١

متوسط التغير= $\frac{\triangle ص}{\triangle س} = \frac{\triangle ص}{١١}$ = ‎-٦، ومنها $\triangle$ص = ‎-٦ × ١١ = ‎-٦٦

ب) $\triangle$ص = ص$_٢$ – ص$_١$

= ق(٩) – ق(‎-٢)

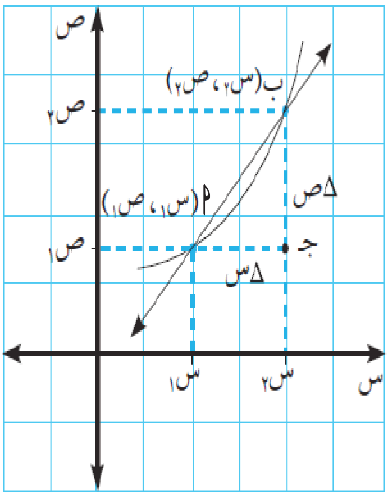
-٦٦ = ق(٩) − ٦

ق(٩) = -٦٦ + ٦ = -٦٠

أتذكر

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ص= ق(س)، والنقطتان ﻫ$(\text{س}_{١}، \text{ص}_{١})$ ، ب$(\text{س}_{٢}، \text{ص}_{٢})$ واقعتين عليه، فإن ميل المستقيم القاطع ﻫب = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

ومتوسط التغير للاقتران ص= ق(س) يساوي $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$ أي أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع.



مثال (٥): تقع النقطتان ﻫ(-١، -٣)، ب(٣، ٩) على منحنى الاقتران ص= ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع ﻫب.

الحل: ميل المستقيم القاطع ﻫب = $\frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$= \frac{٩ - -٣}{٣ - -١} = ٣$

٢ - ١ تمارين ومسائل

س١: إذا كان ص = ق(س)= ٥س – ١ أجد △س ، △ص عندما تتغير س:

أ) من $س_١$ = ٢ إلى $س_٢$ = ٣,٨

ب) من $س_١$ = ٤ إلى $س_٢$ = -٢

س٢: أجد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) في الحالات الآتية:

أ) ق(س) = $\sqrt{س - ٣}$ ، عندما تتغير س من $س_١$ = ٧ إلى $س_٢$ = ٤

ب) ق(س) = $س^٢$ – ١ ، عندما $س_١$ = ٢ ، △س = ٤

س٣: ليكن ص = ق(س) اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٤ هو ١٣، أجد:

أ) التغير في ص

ب) ق(٤) علما بأن ق(١) = ٦

س٤: إذا كان ق(س) = س + ٧ ، أجد ميل القاطع المارّ بالنقطتين أ(-٢ ، ق(-٢)) ، ب(٣ ، ق(٣)).

٢ - ٢ مفهوم المشتقة الأولى
(First Derivative)

نشاط ١

في ملاعب كرة القدم الفلسطينية هناك هدّافون، ولكل هدّاف مهارات تختلف عن الآخر في تسديد الكرات الثابتة والمتحركة، ويقوم مدرب الفريق بتكليف أمهر هدّافيه بتسديد الكرة باتجاه المرمى حسب موقع خطأ الخصم. وكلما اقتربت المسافة بين مكان التسديد والمرمى، زادت فرصة تسجيل الهدف. لذلك تعتبر ضربة الجزاء هدفاً محقّقاً عند كثير من الفرق الرياضية.

علامَ يعتمد الهدّاف في تسديد الكرة باتجاه المرمى؟ السرعة، ....؟

نشاط ٢

إذا كان ق(س) = ٢س ، $س_١$ = ٢ ، أكمل الجدول الآتي:

$\triangle$س	٣	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٣}$
ق($س_١$ + $\triangle$س)	١٠	....	٦	....	$\frac{١٤}{٣}$
$\frac{ق(س_١ + \triangle س) - ق(س_١)}{\triangle س}$	٢	٢	....	٢	....

ما علاقة $\lim\limits_{\triangle س \leftarrow ٠}$ $\frac{ق(س_١ + \triangle س) - ق(س_١)}{\triangle س}$، ومعامل س في ق(س) ؟ ....

تعريف: المشتقة الأولى للاقتران ص= ق(س) عند النقطة (س$_1$ ،ق(س$_1$)) هي:

$$\underset{\triangle\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1 + \triangle\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\triangle\text{س}}$$ ويرمز لها بالرمز ق$^{/}$(س$_1$) أو $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=\text{س}_1}$ أو $\left.\text{ص}^{/}\right|_{\text{س}=\text{س}_1}$

وللتبسيط يمكن كتابة $\triangle$س= هـ ، فتكون ق$^{/}$(س$_1$) = $\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٥ ، أجد ق$^{/}$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: $$\text{ق}^{/}(٢) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٥}{\text{هـ}}$$

= صفر

مثال (٢): إذا كان ق(س) = ٣س، أجد ق$^{/}$(١) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: $$\text{ق}^{/}(١) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(١ + \text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{٣(١ + \text{هـ}) - ٣(١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{٣ + ٣\text{هـ} - ٣}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{هـ}}{\text{هـ}}$$

= ٣

مثال (٣): إذا كان ق(س) = ٥ − ٢س، أجد ق$^{/}$(٤) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: $$\text{ق}^{/}(٤) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٤+\text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{٥-٢(٤+\text{هـ}) - (٥-٨)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٨ - ٢\text{هـ} + ٣}{\text{هـ}}$$

$$\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{-٢\text{هـ}}{\text{هـ}}$$

= -٢

مثال (٤): إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ١، أجد ق$^{/}$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: $$\text{ق}^{/}(٢) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{٣(٢ + \text{هـ})^{٢} +١ - (٣(٢)^{٢} + ١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{٣(٤+٤\text{هـ}+\text{هـ}^{٢})+١ - (٣\times٤+١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{١٣ + ١٢\text{هـ} + ٣\text{هـ}^{٢} - ١٣}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{١٢\text{هـ} + ٣\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(١٢ + ٣\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} ١٢ + ٣\text{هـ} = ١٢ + ٣\times٠$$

= ١٢

مثال (٥): إذا كان ق(٢) = ٨ ، ق$'$(٢) = ٢ أجد $\underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(2) - \text{ق}(2 + \text{هـ})}{5\text{هـ}}$

الحل: $\underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(2) - \text{ق}(2 + \text{هـ})}{5\text{هـ}} = \dfrac{-1}{5} \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(2+\text{هـ}) - \text{ق}(2)}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{-1}{5} \text{ق}'(2)$ لماذا؟

$= \dfrac{-1}{5} \times 2 = \dfrac{-2}{5}$

مثال (٦): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س في الفترة [٣ ، ٣ + هـ].

يساوي $\dfrac{\text{هـ}^2 - 5\text{هـ}}{\text{هـ}}$ ، أجد ق$'$(٣).

الحل: متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(3+\text{هـ}) - \text{ق}(3)}{\text{هـ}} = \dfrac{\text{هـ}^2 - 5\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$\text{ق}'(3) = \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(3+\text{هـ}) - \text{ق}(3)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^2 - 5\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(\text{هـ} - 5)}{\text{هـ}} = -5$

ألاحظ أن ق$'$(س$_1$) تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [س$_1$ ، س$_1$ + هـ] عندما تؤول هـ إلى الصفر.

مثال (٧): إذا كان ق(س) = س^2 + ٣، أجد ق$'$(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد ق$'$(٢) ؟

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+\text{هـ})^2 + 3 - (\text{س}^2+3)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}^2 + 2\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^2) + 3 - (\text{س}^2 + 3)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^2 + 3 - \text{س}^2 - 3}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2\text{س}\text{هـ} + \text{هـ}^2}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(2\text{س} + \text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} (2\text{س} + \text{هـ}) = 2\text{س}$

ومنها $\text{ق}'(2) = 2 \times 2 = 4$

ملاحظة: سنقتصر إيجاد المشتقة بإستخدام التعريف على الإقترانات كثيرة الحدود التي درجتها أقل من ٣.

٢ - ٢ تمارين ومسائل

س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد ق$^/$(س) عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ) ق(س) = ٢س ــ ٧ ، س = -٣

ب) ق(س) = ٣ ــ س ، س = ٢

جـ) ق(س) = س^٢ + س ، س = - $\frac{١}{٢}$

س٢: إذا كان ق$^/$ (٣) = ٨ ، أجد:

أ) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + هـ) ــ ق(٣)}{هـ}$

ب) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + هـ) ــ ق(٣)}{٢هـ}$

جـ) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣) ــ ق(٣ + هـ)}{هـ}$

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_١$ = ٣ إلى س$_٢$= ٣ + هـ

يساوي $\frac{٢}{(-١ + هـ)}$ ، أجد قيمة ق$^/$ (٣).

س٤: إذا كانت △ص = $\frac{٧هـ ــ هـ^٢}{٤}$ هي التغير في الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_١$ = ٥

إلى س$_٢$ = ٥ + هـ، أجد ق$^/$ (٥).

س٥: إذا كان ص = ق(س) = س^٢ + ١ ، أجد ق$^/$ (س) باستخدام تعريف المشتقة.

٢ - ٣

قواعد الاشتقاق
(Differentiation Rules)

نشاط ١

شاهدت منى على طاولة والدها لوحة كما في الشكل المجاور، فسألت والدها: ما هذه اللعبة يا أبي؟ أجابها الأب: إنها لعبة الشطرنج. هل تسمح لي يا أبي أن العب معك هذه اللعبة؟ قال لها: يا بنيّتي لهذه اللعبة قواعد، يجب على اللاعب تعلمها لكي يحرك القطع المختلفة المكونة لهذه اللعبة. فمثلاً يتحرك الملك خطوة واحدة في كل الاتجاهات. إن تعلّم قواعد اللعبة، أو المهارة يسهّل تطبيقها وفهمها وإتقانها. ومن أسماء القطع في لعبة الشطرنج: الفرس، والفيل. كيف تتحرك هذه القطع؟ ....

نشاط ٢

حاول همّام إيجاد ق$^/$ (٢) حيث ق(س) = ٢س^{٥} + س^{٣} − ٢س^{٢} باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، فبدأ بالحل بالطريقة التي تعلمها في الدرس السابق كما يأتي:

$$ق^/(٢) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$$

$$ق^/(٢) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٢(٢ + هـ)^{٥} + (٢+هـ)^{٣} - ٢(٢+هـ)^{٢} - ٦٤}{هـ}$$

فوجد صعوبة في إيجاد هذه النهاية، كيف سيجد همّام ق$^/$(٢) ؟

قاعدة (١): إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ عدد حقيقي، فإن ق$^/$(س) = صفر. $\forall$ س $\in$ ح.

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٣ ، أجد ق$^/$(س) ، ق$^/$(٥)

الحل: ق$^/$(س) = صفر لجميع قيم س $\in$ ح

ق$^/$(٥) = صفر

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) = $س^{ن}$ ، فإن ق/(س) = ن $س^{ن-١}$ ، ن عدد حقيقي، س ≠ ٠

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{ءص}{ءس}$ في كل من الحالات الآتية:

أ) ص = ٤س

ب) ص = $س^{-٥}$ ، س ≠ ٠

جـ) ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ ، س ≠ ٠

د) ص= $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠

الحل: أ) ص = $س^{٤}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ $س^{٤-١}$ = ٤$س^{٣}$ ، ∀ س ∈ ح

ب) ص = $س^{-٥}$ ، س ≠ ٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = -٥ $س^{-٥-١}$

= -٥$س^{-٦}$

جـ) ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ = $س^{-٣}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = -٣ × $س^{-٣-١}$ = -٣ $س^{-٤}$ = $\frac{-٣}{س^{٤}}$

د) ص = $\sqrt{س}$ = $س^{\frac{١}{٢}}$ ، س ≥ ٠.

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢}$ $س^{\frac{١}{٢}-١}$ = $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ، س > ٠.

قاعدة (٣): إذا كان الاقترانان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س، وكانت أ ∈ ح، وكان هـ(س)= أ ق(س)، فإن هـ/(س) = أ ق/(س).

مثال (٣): إذا كان ق(س) = ٢$س^{٥}$ ، أجد ق/(س) ، ق/(-١).

الحل: ق(س) = ٢$س^{٥}$

ق/(س) = ٢ × ٥ $س^{٥-١}$ = ١٠$س^{٤}$

ق/(-١) = ١٠ × $(-١)^{٤}$ = ١٠ × ١ = ١٠

قاعدة (٤): إذا كان الاقترانان ك(س) ، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) + ع(س) ، فإن ق/(س) = ك/(س) + ع/(س).

مثال (٤): إذا كان ك(س) = س^٢ ، ع(س) = ٢س، ق(س) = ك(س) + ع(س)، أجد ق/(س) ، ق/(٠)؟

الحل: ق/(س) = ك/(س) + ع/(س)

= (٢ س) + (٢)

= ٢س + ٢

ق/(٠) = ٢×٠ + ٢ = ٢

قاعدة (٥): إذا كان الاقترانان ك(س) ، ع(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س ، وكان ق(س) = ك(س) – ع(س) ، فإن ق/(س) = ك/(س) – ع/(س).

مثال (٥): إذا كان ك(س) = ٥س ، ع(س) = ٢س^٣ ، ق(س) = ك(س) – ع(س)، أجدق/(س)، ق/(-٢) ؟

الحل: ق/(س) = ك/(س) – ع/(س)

ق/(س) = ٥ – ٦س^٢

ق/(-٢) = ٥ – ٦ (-٢)^٢

= ٥ – ٢٤

= -١٩

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٦): إذا كان ق(س) = س^٢ – ٥س + ٦ أجد ق/(س) ، ق/(٣)

الحل: ق(س) = س^٢ – ٥س + ٦

ق/(س) = ٢س – ٥ + صفر

ق/(٣) = ٢×٣ – ٥

= ١

مثال (٧): إذا كان ك/(١) = ٣ ، ع/(١) = ٢ وكان ق(س) = ك(س) – ٢ع(س) ، أجد ق/(١) ؟

الحل: ق/(س) = ك/(س) – ٢ع/(س)

ق/(١) = ك/(١) – ٢ع/(١)

= ٣ – ٢ × ٢ = -١

قاعدة (٦): إذا كان الاقترانان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) فإن

ل/(س) = ق(س) × هـ/(س) + هـ(س) × ق/(س)

وبالكلمات ل/(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

مثال (٨): إذا كان ص = (س^٢+٣س+٢) (٥س+١) أجد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$

الحل: ص = (س^٢+٣س+٢) (٥س+١)

$\frac{دص}{دس}$ = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$\frac{دص}{دس}$ = (س^٢+٣س+٢)×٥ + (٥س+١)×(٢س + ٣)

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$ = (٤ + ٦ + ٢)×٥ + (١٠ + ١) × (٤ + ٣)

= ٦٠ + ٧٧ = ١٣٧

مثال (٩): إذا كان ك(٢) = ٥ ، ك/(٢) = ٣ ، ع(٢) = ٤ ، ع/(٢) = ٦ وكان

ق(س) = ك(س) × ع(س) ، أجد ق/(٢).

الحل: ق/(س) = ك (س) × ع/(س) + ع(س) × ك/(س)

ق/(٢) = ك (٢) × ع/(٢) + ع(٢) × ك/(٢)

= ٥ × ٦ + ٤ × ٣

= ٣٠ + ١٢ = ٤٢

قاعدة (٧): إذا كان الاقتران ل(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، هـ(س) ≠ ٠ فإن:

ل/(س) = $\frac{هـ(س) × ق/(س) - ق(س) × هـ/(س)}{(هـ(س))^٢}$

وبالكلمات ل/(س) = $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام}}{\text{(المقام)}^٢}$

مثال (١٠): إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ١}{٢س - ٥}$ ، س ≠ $\frac{٥}{٢}$ ، أجد ق/(س).

الحل: ق/(س) = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^٢}$

$$= \frac{(٢س - ٥)\times٣ - (٣س + ١)\times٢}{(٢س - ٥)^٢}$$

$$= \frac{٦س - ١٥ - ٦س - ٢}{(٢س - ٥)^٢} = \frac{-١٧}{(٢س - ٥)^٢}$$

مثال (١١): إذا كان ل(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ صفر، وكان ق/(٢) = -١ ، ق(٢) = ١ ، هـ(٢) = ٢،

ل/(٢) = -٢ أجد هـ/(٢).

الحل: ل/(س) = $\frac{هـ(س) \times ق/(س) - ق(س) \times هـ/(س)}{(هـ(س))^٢}$

ل/(٢) = $\frac{هـ(٢) \times ق/(٢) - ق(٢) \times هـ/(٢)}{(هـ(٢))^٢}$

-٢ = $\frac{٢ \times -١ - ١ \times هـ/(٢)}{(٢)^٢}$

-٨ = -٢ - هـ/(٢)

ومنها هـ/(٢) = ٦ لماذا ؟

مثال (١٢): إذا كان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{س+١}$ ، س ≠ -١ أجد ق/(١)، علماً بأن هـ(١) = ٢ ، هـ/(١) = ٣

الحل: ق/(س) = $\frac{(س+١) \times هـ/(س) - هـ(س) \times ١}{(س+١)^٢}$

ق/(١) = $\frac{(١+١) \times هـ/(١) - هـ(١)}{(٢)^٢}$

$$= \frac{٢هـ/(١) - هـ(١)}{٤}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

قاعدة (٨): إذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت ق$^{/}$(س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، فإن المشتقة الأولى للاقتران ق$^{/}$(س) تسمى المشتقة الثانية للاقتران ق(س) ويرمز لها بالرمز ق$^{//}$(س) أو $\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢}$ أو ص$^{//}$.

وكذلك يرمز للمشتقة الثالثة للاقتران ق(س) بالرمز ق$^{///}$(س) أو $\frac{ى^٣ ص}{ى س^٣}$ أو ق$^{(٣)}$ (س) أو ص$^{///}$، وهكذا.*

مثال (١٣): إذا كان ق(س)= س^٣ − ٤س^٢ + ٣س + ٢ أجد ق$^{/}$(س)، ق$^{//}$(س)، ق$^{(٣)}$ (س).

الحل: ق$^{/}$(س) = ٣س^٢ - ٨ س + ٣

ق$^{//}$(س) = ٦س - ٨

ق$^{(٣)}$ (س) = ٦

مثال (١٤): إذا كان ص = ٣س^٢ − ٥س + ٧ ، أجد $\frac{ى ص}{ى س}\Big|_{س=٢}$. $\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢}\Big|_{س=٢}$ ، $\frac{ى^٣ ص}{ى س^٣}\Big|_{س=٢}$

الحل: $\frac{ى ص}{ى س}$ = ٦س − ٥ ومنها $\frac{ى ص}{ى س}\Big|_{س=٢}$ = ٧

$\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢}$ = ٦ ومنها $\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢}\Big|_{س=٢}$ = ٦

$\frac{ى^٣ ص}{ى س^٣}$ = صفر ومنها $\frac{ى^٣ ص}{ى س^٣}\Big|_{س=٢}$ = صفر.

مثال (١٥): إذا كان ع(س) = ٣س^٤ + ب س^٢، وكانت ع$^{/}$(١) = ٢٢، أجد قيمة الثابت ب، ثم أجد ع$^{//}$(٠).

الحل: ع$^{/}$(س) = ١٢س^٣ + ٢ب س

ع$^{/}$(١) = ١٢(١)^٣ + ٢ب (١)

٢٢ = ١٢ + ٢ب

١٠ = ٢ب ومنها ب = ٥

ع$^{/}$(س) = ١٢س^٣ + ١٠س

ع$^{//}$(س) = ٣٦س^٢ + ١٠

ع$^{//}$(٠) = ١٠

* المشتقة النونية يرمز لها بالرمز ق$^{(ن)}$ ، ن ≥ ٣

٢ - ٣ تمارين ومسائل

س١: أجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ب) ص = ٥س + ٣

ج) ص = $\frac{٣}{س^٢}$ + ٥س ، س ≠ ٠

د) ص = ٧س^٢ + $\sqrt[٣]{س^٢}$

هـ) ص = (٢س + ٥) (٣ – س^٣)

و) ص = $\frac{س}{س + ٣}$، س ≠ -٣ ، عندما س = ١

س٢: أجد ق$^/$(٣)، علماً بأن ق(س) = س^٢ – س + ٥

س٣: إذا كان ق(س) = س^٢ + ٣س، وكان ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥، هـ$^/$(٢) = ١ أجد ل$^/$(٢).

س٤: إذا كان ق(س) = $\frac{٣س+٢}{٤س+١}$ ، س ≠ $\frac{-١}{٤}$ ، أحسب ق$^/$(٢)؟

س٥: إذا كانت ق(س) = س^٣ ل(س) + هـ(س)، وكان ل(٢) = ٥، هـ$^/$(٢) = ٧ ، ل$^/$(٢) = –٣ فما قيمة ق$^/$(٢) ؟

س٦: أجد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات إزاء النقط المبينة بجانبها:

أ) ق(س) = س^٤ – ٢س^٣ + س + ١ ، س = ٢

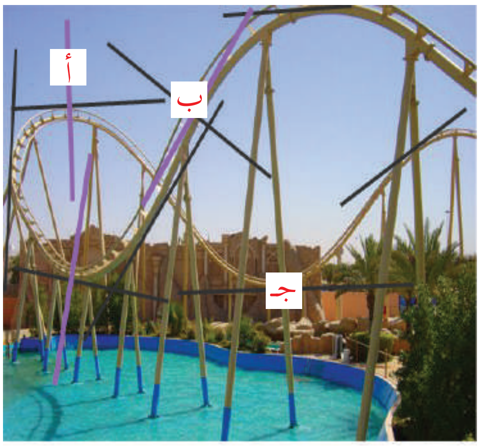
ب) هـ(س) = $\frac{١}{\sqrt{س}}$، س > ٠ ، س = ١

س٧: أجد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للاقتران ق(س) = ٢س^٤ + س^٣ – ٤س + ١، ثم أبين أن ق$^{(٥)}$(١) = صفر.

٢ - ٤

تطبيقات هندسية (المماس والعمودي)
Tanget Line

نشاط



غالبية المسارات التي تُركب في الملاهي هي متعرجات تصمم على شكل منحنيات، وذلك لإضفاء البهجة والسرور للمتنزهين. وتسير العربات في هذه المسارات المتعرجة بصورة مستقيمة، وتكون قوة دفع الأجسام عمودية على العربات، حيث تظهر قوة وهمية تؤثر على الأجسام، وتشعر الشخص بأنه على وشك السقوط، وتشعره بالخوف، والحقيقة غير ذلك. أي النقاط التي تكون فيها حركة العربة تمثل خطّاً مستقيماً على هذه المنحنيات (يمكن الاستعانة بالشكل المجاور)؟

النقاط: أ ، ب ، جـ ، ..... ، ......، ......، ... هل يمكن حصر النقاط؟

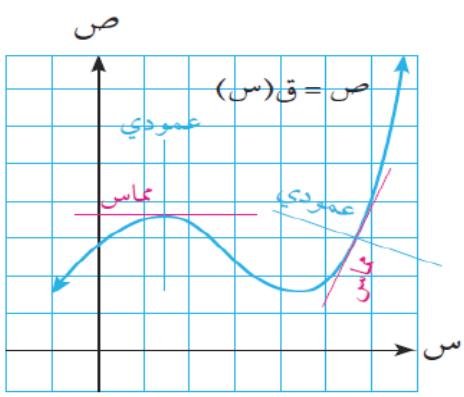
تعريف:

- ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ص= ق(س) عند النقطة (س$_1$، ص$_1$) الواقعة عليه يساوي ق$^/$(س$_1$) ومعادلته هي: ص − ص$_1$ = م(س − س$_1$)، حيث م = ق$^/$(س$_1$)، ص$_1$ = ق(س$_1$)

- ميل العمودي على منحنى الاقتران ص= ق(س) عند النقطة (س$_1$، ص$_1$) الواقعة عليه يساوي $\frac{-1}{م}$ ، م ≠ ٠ ومعادلته هي: ص − ص$_1$ = $\frac{-1}{م}$ (س − س$_1$)، حيث م = ق$^/$(س$_1$)، ص$_1$= ق(س$_1$).

ملاحظة: عندما يكون المماس أفقياً فإن ميله يساوي صفراً، ويكون موازياً لمحور السينات.

المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س) عند س = س$_1$ تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة التي إحداثها السيني = س$_1$، وبمعرفة نقطة التماس (س$_1$ ، ص$_1$) يمكننا إيجاد معادلة المماس لمنحنى الاقتران، ومعادلة العمودي عليه.



مثال (١): أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٣ - س^٢ + ١$ عندما $س = ٣$.

الحل: ميل المماس عند $(س = ٣)$ هو $ق^{/}(٣)$

$$ق^{/}(س) = ٣س^٢ - ٢س$$

$$ق^{/}(٣) = ٣ \times ٣^٢ - ٢ \times ٣$$

$$= ٢١$$

$$ميل\ المماس \Big|_{س=٣} = ٢١$$

مثال (٢): أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س^٣}{س^٢ + ١}$ عند النقطة $(١ ، \frac{١}{٢})$ الواقعة عليه.

الحل: معادلة المماس هي:

$$ص - ص_١ = م\ (س - س_١)$$

نقطة التماس هي $(س_١ ، ص_١) = (١ ، \frac{١}{٢})$

ميل المماس عند $(١ ، \frac{١}{٢}) = م = ق^{/}(١)$

$$لكن\ ق^{/}(س) = \frac{((س^٢+١) \times ٣س^٢) - (س^٣ \times ٢س)}{(س^٢ + ١)^٢}$$

$$ق^{/}(١) = \frac{((١^٢+١) \times ٣\times١^٢) - (١^٣ \times ٢ \times ١)}{(١^٢ + ١)^٢}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٢}{٢^٢}$$

$$= \frac{٦ - ٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

أي أن معادلة المماس هي:

$$ص - \frac{١}{٢} = ١\ (س - ١)$$

$$ص - \frac{١}{٢} = س - ١$$

$$ص - س + \frac{١}{٢} = ٠$$

مثال (٣): أجد النقطة/النقاط على المنحنى ص = ق(س) = $س^٢$ ـ ٤س + ٥، والتي يكون عندها المماس أفقياً.

الحل: نقطة التماس هي($س_١$، $ص_١$) = ($س_١$ ، ق($س_١$))

بما أن المماس أفقي فإن المماس // محور السينات، ميل المماس = صفر

$ق^/$($س_١$) = صفر

$ق^/$(س) = ٢س ـ ٤

$ق^/$($س_١$) = ٢$س_١$ ـ ٤ = صفر

ومنها $س_١$ = ٢

نقطة التماس هي (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ١) لماذا ؟

مثال (٤): أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ($س^٢$+١)(س+١) عند النقطة (١، ٤) الواقعة عليه.

الحل: معادلة العمودي على المماس لمنحنى عند النقطة (١ ، ٤) هي:

ص ـ $ص_١$ = $\frac{-١}{م}$ (س ـ $س_١$) حيث ($س_١$ ، $ص_١$) = (١، ٤) ، م = $ق^/$(١)

$ق^/$(س) = ($س^٢$ + ١)×١ + (س + ١) × ٢س

= $س^٢$ + ١ + ٢$س^٢$ + ٢س

= ٣$س^٢$ + ٢س + ١

ميل المماس = $ق^/$(١) = ٣×$(١)^٢$ + ٢×١ + ١

= ٦

ومنها ميل العمودي = $\frac{-١}{٦}$

معادلة العمودي هي ص ـ ٤ = − $\frac{١}{٦}$ (س ـ ١)

٦ص + س ـ ٢٥ = ٠ لماذا؟

٢ - ٤ تمارين ومسائل

س١. أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢ + ٢}{س + ٣}$ س ≠ -٣ ، عندما س = -٢.

س٢. أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^٣ + ٢س^٢ – س + ١ عند النقطة (٠، ١) الواقعة عليه.

س٣. أجد الإحداثي السيني للنقطة/النقاط الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = (س^٢ – ٤)(٢س + ١) التي يكون المماس عندها أفقياً.

س٤. أجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٠، ٧) الواقعة عليه، ويعامد المستقيم الذي ميله = – $\frac{١}{٣}$

س٥. إذا كان ق(س) = أس^٢ + ٥س – ٢ ، وكان ميل المماس لمنحنى ق(س) عندما (س = ١) يساوي ١١، أجد قيمة الثابت أ.

٢ - ٥ قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب)
Chain Rule

نشاط ١

تشتهر فلسطين بزراعة شجرة الزيتون، وتعتبر هذه الشجرة رمزاً من رموز صمود الشعب الفلسطيني في أرضه، وتزرع في مناطق واسعة من محافظة نابلس، وقد أسهمت وفرة كميات إنتاج "زيت الزيتون" في توفير بيئة مناسبة لصناعة الصابون في نابلس. وتعتبر صناعة الصابون النابلسي المصنوع من زيت الزيتون من أشهر الصناعات الفلسطينية، ويمكن تمثيل ذلك:

شجرة الزيتون ← بعصر الثمار ← .... ← بالصناعة ← الصابون ....

نشاط ٢

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين بحيث مدى هـ(س) ⊇ مجال ق(س) فإننا نعرف الاقتران المركب (قοهـ)(س) = ق(هـ(س)).

أكمل ما يلي: إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٢س ـ ١ فإن:

(قοهـ)(س) = ق(هـ(س))

= (.............)^{٢}

= ٤س^{٢} ـ ٤س + ١ لماذا؟

(قοهـ)$'$(س) = ٨س ـ ٤ ،

هل يمكن إيجاد (قοهـ)$'$(س) بطريقة أخرى ؟

قاعدة السلسلة:

إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س) فإن الاقتران المركب (قοهـ)(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س، ويكون (قοهـ)$'$(س) = ق$'$(هـ(س))هـ$'$(س).

مثال (١): إذا كان ق(س) = $س^٣$ + ٢س + ٥ ، هـ(س) = $س^٢$ + ١ ، أجد (ق∘هـ)$^/$(س)، ثم أجد (ق∘هـ)$^/$(١).

الحل: (ق∘هـ)$^/$(س) = ق$^/$(هـ(س))هـ$^/$(س)

لكن ق$^/$(س) = ٣$س^٢$ + ٢ ، هـ$^/$(س) = ٢س

ومن ذلك (ق∘هـ)$^/$(س) = ق$^/$($س^٢$ + ١) × ٢س

= (٣$(س^٢ + ١)^٢$ + ٢)×٢س ، لماذا؟

= ٦$س^٥$ + ١٢$س^٣$ + ١٠س ، لماذا؟

(ق∘هـ)$^/$(١) = ٦ × ١ + ١٢ × ١ + ١٠ × ١ = ٢٨

مثال (٢): إذا كان ق(س) = $س^٢$ − ١ ، هـ(س) = ٢س + ١ أجد (ق∘هـ)$^/$(٤)، (هـ∘ق)$^/$(٤)

الحل: (ق∘هـ)$^/$(٤) = ق$^/$(هـ(٤))هـ$^/$(٤)

ق$^/$(س) = ٢س ، هـ$^/$(س) = ٢

هـ(٤) = ٩ ، هـ$^/$(٤) = ٢ ،

(ق∘هـ)$^/$(٤) = ق$^/$(٩) × ٢

= ١٨ × ٢

= ٣٦

(هـ∘ق)$^/$(٤) = هـ$^/$(ق(٤))ق$^/$(٤)

= هـ$^/$(١٥) × ٨

= ٢ × ٨ = ١٦

نتيجة (١):

إذا كان ص = ق(ع)، ع = هـ(س)، اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ص = ق(هـ(س)) وبالتالي:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ق$^/$(ع) × هـ$^/$(س)

= $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

أي أن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

مثال (٣): إذا كانت ص = $ع^٢$ + ع ، ع = ٢س + ١ ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل: $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

$= (٢ع +١) \times ٢$

$= (٢(٢س+١) + ١) \times ٢$

$= (٤س + ٣) \times ٢$

$= ٨س + ٦$

مثال (٤): إذا كانت ص = م^{٢} + ٢م ، م = س^{٢} + س + ١ ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٠ .

الحل: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءم} \times \frac{ءم}{ءس}$

$= (٢م + ٢) (٢س + ١)$

عندما س = ٠ تكون م = ١

$\frac{ءص}{ءس} = (٢\times١ + ٢) (٢\times٠+١) = ٤$

مثال (٥): إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ$'$(١) = ٤، ق$'$(١) = -١ ، ق$'$(٦) = -٢، هـ(١) = ٦ ، أجد (ق٥هـ)$'$ (١).

الحل: (ق٥هـ)$'$ (١) = ق$'$(هـ(١))هـ$'$(١)

= ق$'$(٦) × ٤

= -٢ × ٤ = -٨

نتيجة (٢):

إذا كانت ص = (ق(س))^{ن} ، ن عدد نسبي وكان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$\frac{ءص}{ءس} = ن(ق(س))^{ن-١} \cdot ق'(س)$

مثال (٦): إذا كانت ص = (٤س + ٢)^{٣} أجد $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل: $\frac{ءص}{ءس} = ٣(٤س + ٢)^{٢} \times ٤$

$= ١٢ (٤س + ٢)^{٢}$

٢ - ٥ تمارين ومسائل

س١. إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س + ١ أجد (قοهـ)$'$(س).

س٢. إذا كانت ص = (٢س − ١)^{٢} ، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

س٣. إذا كان ص = ع^{٢} − ٥ع + ١ ، ع = ٢س + ٣ ، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

س٤. إذا كان م(س) = (س^{٢} − س)^{٤} ، أجد م$'$(٢).

س٥. إذا كان ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١) ، أجد ق$'$(١)، علماً بأن هـ$'$(١) = ٥ ، هـ$'$(٤) = ٢ .

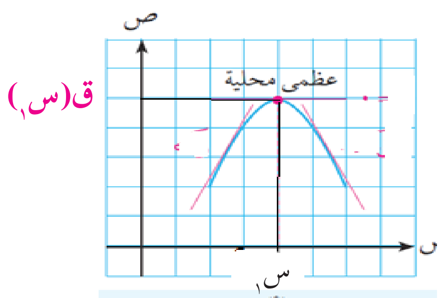
س٦. إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ$'$(٢) = ٣، ق$'$(٢) = ٥، ق$'$(٤) = -٢، هـ(٢) = ٤، ق(٢) = ٣، هـ$'$(٣) = ١، أجد (قοهـ)$'$(٢)، (هـοق)$'$(٢)

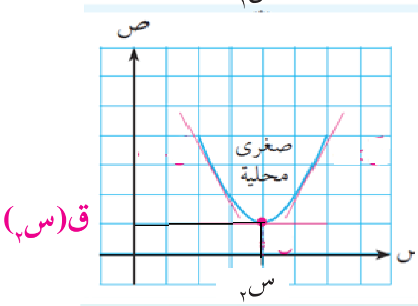
٢ - ٦

القيم القصوى
(Extreme Values)

نشاط

مهنة صيد السمك في قطاع غزة من أكثر المهن التي تُدرّ دخلاً، لكن وبسبب استمرار الحصار على قطاع غزة باتت شريحة الصيادين هي الأفقر، فمساحة الصيد المسموحة لهم فقيرة بالأسماك، كما يتعرض الصيّادون لإطلاق نار مستمر من زوارق الاحتلال، لتضاف مهنة الصيد إلى عشرات المهن الأخرى التي تعاني البطالة في القطاع، يخاطر الصياد بحياته لتوفير قوته وقوت أسرته، ففي شهر نيسان يجمع الصيادون أكبر كمية ممكنة من سمك السردين، وتقل كمية هذا النوع من السمك في شهر أيلول، حيث تكون الكمية قليلة جداً، وتتفاوت الكمية في باقي أشهر السنة. أحاول مع زميلي رسم منحنى تقريبي يبين كميات السمك التي تجمع في أشهر السنة.





يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران ص = ق(س) المعرف على ح،

- نلاحظ أن قيمة الاقتران عند س = $س_1$ أكبر من قيمة الاقتران عند جميع قيم س المجاورة لـ $س_1$، لذلك يقال إن للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند $س_1$ هي ق($س_1$).
- كما نلاحظ أن قيمة الاقتران عند س = $س_2$ أصغر من قيمة الاقتران عند جميع قيم س المجاورة لـ $س_2$، أي أن للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند $س_2$ هي ق($س_2$).
- تسمى القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران قيماً قصوى له.

ملاحظة: سنقتصر في دراستنا للقيم القصوى على الاقترانات كثيرة الحدود المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح فقط.

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وكانت س = جـ في مجال الاقتران، فإنه يقال أن ق(جـ):

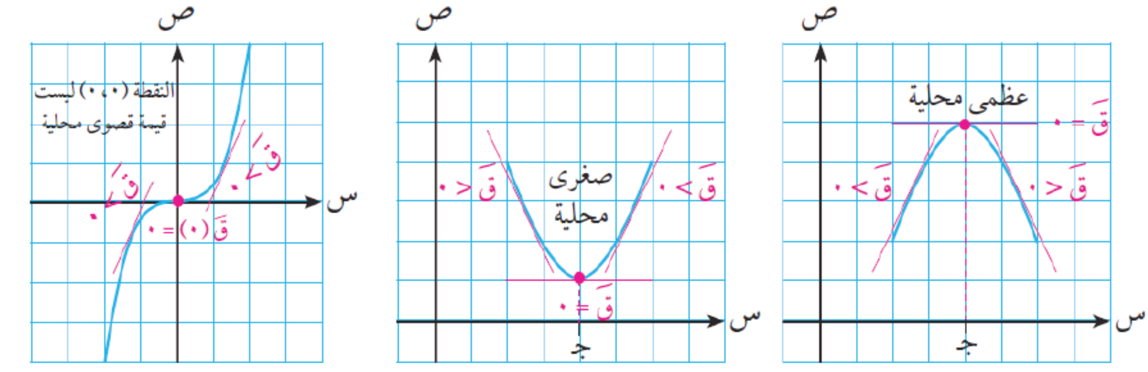
أ. قيمة عظمى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) $\geq$ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِ جـ.

ب. قيمة صغرى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) $\leq$ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِ جـ.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية:

إن التمثيل البياني لأي اقتران على مجاله يساعد في تحديد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران، ولكن: كيف تساعدنا المشتقة الأولى لهذا الاقتران في تعيين القيم القصوى المحلية له؟

أتأمل الأشكال الآتية، وألاحظ العلاقة بين إشارة ق′(س) والقيم القصوى للاقتران.



(أ) (ب) (ج)

في الشكل (أ): ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)، ق′(جـ) = صفر، إشارة ق′(س) تغيرت من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ .

في الشكل (ب): ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)، ق′(جـ) = صفر، إشارة ق′(س) تغيرت من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ .

في الشكل(ج): ق′(جـ) = صفر، إشارة ق′(س) موجبة لقيم س < جـ وموجبة لقيم س > جـ .

ق(جـ) ليست قيمة قصوى محلية للاقتران.

ماذا تستنتج؟

نتيجة (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت ق′(جـ) = صفراً، حيث جـ ∈ مجال ق(س)، فإن:

أ. إذا تغيرت إشارة ق′(س) من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

ب. إذا تغيرت إشارة ق′(س) من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

يسمى هذا باختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى.

مثال (١): أعيّن جميع القيم القصوى للاقتران $ق(س) = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٣س^{٢} + ٨ س + ٢$.

الحل: $ق'(س) = س^{٢} - ٦س + ٨$

$ق'(س) = ٠$

$س^{٢} - ٦س + ٨ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٤) = ٠$

$س = ٢ ، ٤$

إشارة ق/(س)	+ + + + + + + +	صفر	- - - - - - -	صفر	+ + + + + +
س		٢		٤	

إشارة $ق'(س)$ تغيرت من موجبة حيث $س < ٢$ إلى سالبة حيث $س > ٢ \Leftarrow ق(٢)$ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة $ق'(س)$ تغيرت من سالبة حيث $س < ٤$ إلى موجبة حيث $س > ٤ \Leftarrow ق(٤)$ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

القيمة العظمى المحلية $= ق(٢) = \frac{٢٦}{٣}$

القيمة الصغرى المحلية $= ق(٤) = \frac{٢٢}{٣}$

مثال (٢): أعيّن القيم القصوى للاقتران $= س^{٢} - ٦س + ٩$.

الحل: $ق'(س) = ٢س - ٦$

$ق'(س) = ٠$

$٢س - ٦ = ٠$

$س = ٣$

إشارة ق/(س)	- - - - - - -	صفر	+ + + + + + + +
س		٣	

إشارة $ق'(س)$ تغيرت من سالبة حيث $س < ٣$ إلى موجبة حيث $س > ٣ \Leftarrow ق(٣)$ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

القيمة الصغرى المحلية $= ق(٣) = ٩ - ١٨ + ٩ = ٠$.

مثال (٣): إذا كان ق(س) = س^{٣} – ١٢س – ٥ ، س ∈ ح ، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س).

الحل: ق$^{/}$(س) = ٣س^{٢} – ١٢

ق$^{/}$(س) = صفر

٣س^{٢} – ١٢ = ٠

س^{٢} – ٤ = ٠

س = ٢ أو -٢

إشارة ق$^{/}$(س)	+ + + + + + + +	صفر	- - - - - - - -	صفر	+ + + + + +
س		-٢		٢	

ألاحظ أن إشارة ق$^{/}$(س) تغيرت من موجبة حيث س < -٢ إلى موجبة حيث س > -٢ ⟸ عند (س= -٢) يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة ق$^{/}$(س) تغيرت من سالبة حيث س < ٢ إلى موجبة حيث س > ٢ ⟸ عند (س= ٢) يوجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

مثال (٤): أعيّن القيمة/ القيم القصوى المحلية إن وجدت للاقتران ق(س)= س^{٣} ، س ∈ ح.

الحل: ق$^{/}$(س) = ٣س^{٢}

ق$^{/}$(س) = ٠

٣س^{٢} = ٠

س = ٠

إشارة ق$^{/}$(س)	+ + + + + + + +	صفر	+ + + + + + + +
س		صفر	

لم تتغير إشارة ق$^{/}$(س) حول (س = ٠)، ومنها لا توجد للاقتران ق(س) قيمة قصوى محلية.

٢ - ٦ تمارين ومسائل

س١. أعيّن القيمة/ القيم القصوى إن وجدت لكل من الاقترانات الآتية:

أ . ق(س) = ٤س – ٢س^٢ ، س ∈ ح

ب. ق(س) = س(س^٢ – ١٢) ، س ∈ ح

جـ. ق(س) = س^٣ – ٣س + ٢ ، س ∈ ح

د. ق(س) = - س^٢ +١٠س + ٥ ، س ∈ ح

س٢. أعيّن القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^٢ – ٢س + ١ ، س ∈ ح

س٣. إذا كان للاقتران ق(س) = - س^٢ + ب س -٣ ، س ∈ ح قيمة عظمى محلية عند س = -٢ فما قيمة ب؟

س٤. إذا كان ق(س) = س^٣ – ٥ ، س ∈ ح، أبيّن أنه لا توجد للاقتران ق(س) أي قيم قصوى.

س٥. الشكل الآتي يبين إشارة ق$^/$(س)، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س) وأبيّن نوعها، علماً بأن ق(س) كثير حدود معرّف على ح.

إشارة ق$^/$(س)	++++++++	صفر	- - - --- -	صفر	++++ +
س		-٢		٢	

٢ - ٧ تمارين عامة:

س١: أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١- إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [-٤ ، ٢] يساوي ٣ ، ق(-٤) = ٢ ما قيمة ق(٢)؟

أ) ٢٠ ب) ٢٦ جـ) ١٦ د) ١٨

٢- ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) المارّ في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

أ) -٣ ب) ٣ جـ) ٢ د) ٦

٣- إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$، ما قيمة ق$^{/}$(٤)؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) - $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) ٢

٤- ما ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٥}{\text{س}^٢ - ١}$ عند س = ٢ ؟

أ) $\frac{٤}{٩}$ ب) - $\frac{٢٠}{٩}$ جـ) ١٥ د) $\frac{٥}{٣}$

٥- إذا كانت ص = (س − ١)^{٥} ما قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س= -١ ؟

أ) ٥ ب) ٢٥ جـ) صفر د) ٨٠

٦- إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س − ٢ ما قيمة (ق○هـ)$^{/}$(١) ؟

أ) -٢ ب) ٢ جـ) صفر د) ٤

٧- إذا كان ق(س) = ٦س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٦} + ١٠، ما قيمة ق$^{/}$(١) ؟

أ) ٦ ب) ١٦ جـ) ٢٠ د) ١٠

٨- إذا كان ق(س) = س^{٢}، هـ(س) = س + ١ فما قيمة (هـ○ق)$^{/}$(٢) ؟

أ) ٣ ب) ١ جـ) ٤ د) ٢

٩- إذا كانت ص = (١ − ٢س^{٢})^{٢} ما قيمة $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ عندما س = ٣ ؟

أ) -٢٠ ب) ٨ جـ) -٨ د) ٢٠

١٠- إذا كان ق(س) = هـ($٣س^٢+١$) فما قيمة ق$'$(س) ؟

أ) $٣س^٢$ هـ$'$($٣س^٢+١$) ب) ٣ هـ$'$($٣س^٢+١$) ج) ٦س هـ$'$($٣س^٢+١$) د) ٣س هـ$'$($٣س^٢+١$)

س٢: إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ = ٢ إلى $س_٢$ = ٥ هو ١٠، أجد ق(٥) علماً بأن ق(٢) = ٦ ؟

س٣: إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = $س^٢$ + ٣ عندما تتغير س من ٢ إلى ﻢ يساوي ٦ فما قيمة الثابت ﻢ ؟

س٤: إذا كان ق(س) = $س^٢$ + ١، أجد ق$'$(٣) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

س٥: إذا كان ق(س) = ($س^٢$+٢) (٣س+٤) أجد $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$

س٦: إذا كان م (س) = $س^٢$ × ق(س) أجد م$'$(٣) علما بأن ق(٣) = -٢ ، ق$'$(٣) = ٥

س٧: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = $س^٣$ + $٥س^٢$ – ٣ عند النقطة التي إحداثيها السيني = ١

س٨: أجد قيمة الثابت ﻢ التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ﻢ$س^٢$ + ٣س + ١ مساوياً ٤ عندما س = ١

س٩: أجد القيم القصوى للاقتران ق(س) = $س^٣$ + $٣س^٢$ + ٧

س١٠: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
أجد متوسط التغير			
أستخدم القواعد في ايجاد المشتقات			
أجد مشتقات الاقترانات واحل مسائل منوعة عليها			

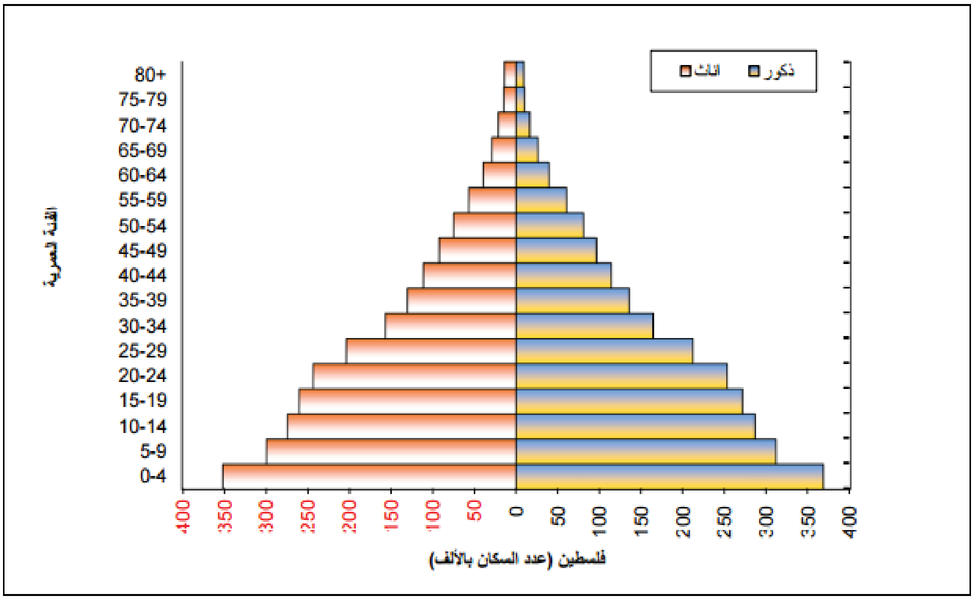
الوحدة الثالثة

٣

الإحصاء والاحتمال

(Statistics and Probability)

الهرم السكاني في فلسطين تقديرات منتصف عام، 2016



أقارن بين عدد الذكور وعدد الإناث في فلسطين.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التوزيع الطبيعي المعياري في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرف إلى العلاقة بين العلامة المعيارية والعلامة الخام.
- حساب العلامة المعيارية، وتفسيرها.
- التعرف إلى التوزيع الطبيعي المعياري، وخواصّه.
- استخدام جدول التوزيع الطبيعي في إيجاد المساحة تحت المنحنى.
- توظيف خواص التوزيع الطبيعي في حل مسائل عملية.

٣ - ١

العلامة المعيارية
(Standard Score)

نشاط ١

إذا كانت علامتا الطالبة رنيم في مبحثي الرياضيات والفيزياء هي ٩٣ ، ٨٨ على الترتيب، فهل يعني ذلك أن تحصيل الطالبة رنيم أفضل في الرياضيات ؟ .... لماذا ؟ ....

للحكم على أفضلية التحصيل، لا يكفي أن نعتمد على العلامة فقط، وإنما نحتاج إلى معرفة الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلامات جميع طلبة الصف.

أتذكر

الوسط الحسابي (μ): هو مجموع القيم (المشاهدات) مقسوماً على عددها.

$$\mu = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_\text{ر}}{\text{ن}}$$

الانحراف المعياري (σ): هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \mu)^{٢}}{\text{ن}}}$$

نشاط ٢

إذا كانت درجات الحرارة في مدينة صفد في خمسة أيام من شهر نيسان، هي: ٢٠، ١٦، ١٤، ١٢، ٨ أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لدرجات الحرارة.

الوسط الحسابي $\mu = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_\text{ر}}{\text{ن}}$ = ...

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \mu)^{٢}}{\text{ن}}}$ = ...

تبعد درجة الحرارة ١٦ عن الوسط الحسابي بمقدار ....

العلامة المعيارية (ع) :Standard Score

القيمة الخام: هي القيمة الأصلية التي نحصل عليها في اختبار أو مقياس ما، ويرمز لها بالرمز "س".

العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها القيمة (العلامة) الخام عن الوسط الحسابي، وبالرموز فإن: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

نشاط ٣

معتمداً على المعلومات الواردة في الجدول الآتي الذي يبين علامات ثلاثة طلاب في الرياضيات والمحاسبة. أجيب عن كل مما يأتي:

تحصيل بلال أفضل في ....

أجد العلامة المعيارية للطالب بلال في الرياضيات والمحاسبة

العلامة المعيارية للرياضيات $ع_١ = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٨٢ - ٦٤}{١٠} = ١,٨$

العلامة المعيارية للمحاسبة $ع_٢ = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٨٠ - ٧٠}{٥} = ٢$

	الرياضيات	المحاسبة
الوسط الحسابي	٦٤	٧٠
الانحراف المعياري	١٠	٥
بلال	٨٢	٨٠
يامن	٦٤	٧٠
كنان	٦٠	٦٠

تحصيل بلال أفضل في المحاسبة؛ لأن علامته المعيارية في المحاسبة أكبر من العلامة المعيارية في الرياضيات.

تحصيل يامن أفضل في..................

تحصيل كنان أفضل في..................

مثال (١): مزارع فلسطيني يزرع البندورة في سهل مرج ابن عامر، كان الوسط الحسابي لكتلة (٣٠٠) صندوق بندورة ١٧ كغم، وانحرافها المعياري (٢) كغم، اختيرت ٣ صناديق، وكانت كتلها ١٣ كغم، ١٩ كغم، ١٧ كغم على الترتيب. أجد العلامة المعيارية لكتل كل من الصناديق الثلاثة.

الحل: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$، حيث ع هي العلامة المعيارية، س الكتلة الخام، μ الوسط الحسابي للكتل، σ الانحراف المعياري لها.

- العلامة المعيارية للصندوق الأول $ع_١ = \frac{١٣ - ١٧}{٢} = -٢$

- العلامة المعيارية للصندوق الثاني $ع_٢ = \frac{١٩ - ١٧}{٢} = ١$

- العلامة المعيارية للصندوق الثالث $ع_٣ = \frac{١٧ - ١٧}{٢} =$ صفر

مثال (٢): حصلت عهد على علامة ما في الرياضيات، وكانت العلامة المعيارية المقابلة لها (١,٥) علماً بأن الوسط الحسابي لعلامة طالبات صفها كان (٨٥) والانحراف المعياري (٦)، أجد علامة عهد في اختبار الرياضيات.

الحل: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$١,٥ = \frac{س - ٨٥}{٦}$ ، $٩ = س - ٨٥$ ومنها $س = ٩٤$

مثال (٣): إذا كانت أعمار (٥) أشخاص كالآتي: ٢٠، ٨، ١٢، ١٤، ١٦، أجد:

١) العلامة المعيارية المناظرة لأعمار هؤلاء الأشخاص.

٢) الوسط الحسابي للعلامات المعيارية.

٣) الانحراف المعياري للعلامة المعيارية.

الحل: $\mu = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن} = \frac{٢٠ + ١٦ + ١٤ + ١٢ + ٨}{٥} = \frac{٧٠}{٥} = ١٤$

العمر (س)	(س − μ)	$(س - \mu)^٢$	$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$
٢٠	٦	٣٦	$\frac{٦}{٤} = ١,٥$
١٦	٢	٤	$\frac{٢}{٤} = ٠,٥$
١٤	٠	٠	صفر
١٢	٢-	٤	$\frac{-٢}{٤} = -٠,٥$
٨	٦-	٣٦	$\frac{-٦}{٤} = -١,٥$
المجموع		٨٠	صفر

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{س} - \mu)^{٢}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٨٠}{٥}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

٢) الوسط الحسابي للعلامات المعيارية:

$$\bar{\text{ع}} = \frac{١,٥ + ٠,٥ + ٠ + -٠,٥ + -١,٥}{٥} = \text{صفر}$$

٣) الانحراف المعياري للعلامات المعيارية:

$$\sigma_{\text{ع}} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ع} - \bar{\text{ع}})^{٢}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{(١,٥-٠)^{٢} + (٠,٥-٠)^{٢} + (٠-٠)^{٢} + (-٠,٥-٠)^{٢} + (-١,٥-٠)^{٢}}{٥}}$$

$$\sigma_{\text{ع}} = \sqrt{\frac{٥}{٥}} = ١$$

نتيجة: إذا كانت $\text{س}_١$، $\text{س}_٢$، ....، $\text{س}_{\text{ن}}$ مجموعة من القيم الأصلية، وكانت العلامات المعيارية المقابلة لها هي $\text{ع}_١$ ، $\text{ع}_٢$ ، ....، $\text{ع}_{\text{ن}}$ فإن الوسط الحسابي $\bar{\text{ع}}$ لمجموعة هذه العلامات يساوي صفراً، والانحراف المعياري لها $\sigma_{\text{ع}} = ١$.

مثال (٤): إذا كانت العلامات المعيارية المناظرة لأطوال ٥ أشجار صنوبر كالآتي:

ل ، ٠,٥ ، صفر، -٠,٥، -١,٥ فما قيمة ل

الحل: ل + ٠,٥ + ٠ + -٠,٥ + -١,٥ = صفر

ل + -١,٥ = صفر

ل = ١,٥

مثال (٥): إذا كانت علامتا طالبين في امتحان المحاسبة ٧٠ ، ٨٨ وكانت علامتاهما المعياريتان المناظرتان -٠,٨ ، ١ على الترتيب، ما الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف في الامتحان؟

$$\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{٧٠ - \mu}{\sigma} = -٠,٨$$

وبالضرب التبادلي: $٧٠ - \mu = -٠,٨\sigma$ .... (١)

$$\frac{٨٨ - \mu}{\sigma} = ١$$

وبالضرب التبادلي: $٨٨ - \mu = \sigma$ .... (٢)

أحل المعادلتين (١) ، (٢) بالحذف

$$٨٨ - \mu = \sigma$$

$$٧٠ - \mu = -٠,٨\sigma$$

بالطرح $١,٨\sigma = ١٨$ ومنها $\sigma = ١٠$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين ينتج أن $١٠ = ٨٨ - \mu$ ومنها $\mu = ٧٨$

أي أن الوسط الحسابي = ٧٨ والانحراف المعياري = ١٠

٣ - ١ تمارين ومسائل

س١: في مزرعة خراف، إذا كانت كتل (٥) خراف كالآتي ٤٠ كغم، ٥٠ كغم، ٦٠ كغم، ٧٠ كغم، ٥٥ كغم. أجد العلامات المعيارية للكتل؟

س٢: إذا علمت أن علامة علي في امتحان اللغة العربية ٧٢، وفي المحاسبة ٦٩، وفي الرياضيات ٧٥، والوسط الحسابي لعلامات طلبة الصف في المواد الثلاث بالترتيب هو ٦٩، ٦٨، ٧٩، والانحراف المعياري ١، ٤، ٢، في أي المواد كان تحصيل علي أفضل؟

س٣: إذا كان الوسط الحسابي لأطوال أشجار الصنوبر في محيط برك سليمان في بيت لحم ١٧متراً والانحراف المعياري لمجموعة الأطوال يساوي ٣م، أجد الأطوال الحقيقية للأشجار التي العلامات المعيارية لأطوالها هي: ٢ ، -١,٨.

س٤: إذا حولت القيم الخام لمجتمع إحصائي إلى علامات معيارية وكانت كالآتي ٠,٥ ، ٠,٥ك ، -١,٥ ، ٠ ، -٠,٥، أجد قيمة ك ؟ أتحقق أن الانحراف المعياري للعلامات المعيارية يساوي ١.

س٥: إذا كانت العلامتان ٤٤ ، ٨٤ تقابلهما العلامتان المعياريتان -٢ ، ٣ على الترتيب. أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع العلامات الأصلية؟

س٦: إذا كانت العلامات المعيارية المقابلة للعلامتين ٨٥ ، ٧٠ هي ١ ، -٢ على الترتيب. أحسب العلامة المعيارية للعلامة الخام ٧٥.

٣ - ٢

التوزيع الطبيعي المعياري
(Standard Normal Distribution)

نشاط ١

تكمن وظيفة الهيموجلوبين في الدم، بأنّه يقوم بحمل الأكسجين والغذاء إلى الخلايا الحيويّة كافّة في جميع مناطق الجسم، ويجب أن تكون نسبة الهيموجلوبين في مستويات محدّدة تختلف حسب عمر الإنسان وجنسه، حتى تتمكّن أعضاء الجسم من القيام بوظائفها بكفاءة عالية. والمستوى الطبيعي للهيموجلوبين يجب أن يكون كالآتي: عند الذكور البالغين: من ١٣,٥ - ١٧,٥جرام/ ديسيليتر، عند الإناث: من ١١ - ١٤ جرام/ ديسيليتر، وعند الأطفال: من ١١ - ١٦ جرام/ ديسيليتر، وعند الأم الحامل: من ١١ - ١٤ جرام/ ديسيليتر.

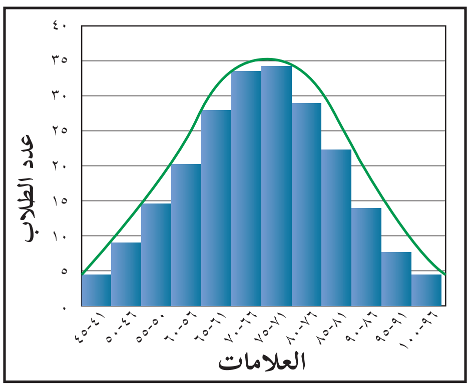
إذا كانت نسبة الهيموجلوبين عند سيدة عمرها ٤٥ سنة هي ٨,٨، فإن هذه النسبة تكون أقل من المعدل الطبيعي.

إذا كانت نسبة الهيموجلوبين عند رجل مدخن هي ١٢,٥، فإن هذه النسبة تكون................

إذا كانت نسبة الهيموجلوبين عند طفل هي ١٣، فإن هذه النسبة تكون............................

نشاط ٢

مثّل المعلم حمدان علامات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانياً، كما هو في الشكل المجاور. ألاحظ أن هناك تجمعاً لعلامات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع العلامات يشبه الجرس تقريباً. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعاً طبيعياً.



الوسط الحسابي للعلامات يقع في الفئة (٧١-٧٥)

الوسيط للعلامات يقع في الفئة ....

المنوال للعلامات هو مركز الفئة ....

أتعلم

إذا كان الوسط = الوسيط = المنوال يكون التوزيع طبيعياً.

التوزيع الطبيعي:

يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية، ومنها التوزيع الطبيعي، ويعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في علم الإحصاء، لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية، مثل: الأطوال، والكتل، والأعمار، ودرجات الحرارة، والدخول الشهرية، وغيرها من الظواهر المتصلة.

خصائص التوزيع الطبيعي:

١) التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالوسط.
٢) يتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال.
٣) المنحنى متصل.
٤) يقترب المنحنى من المحور س، ولكنه لا يمسه.

التوزيع الطبيعي المعياري: هو التوزيع للعلامات المعيارية، وسطه الحسابي يساوي صفراً، وانحرافه المعياري يساوي (١).

وسنركز في دراستنا هذه على التوزيع الطبيعي المعياري.

جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري:

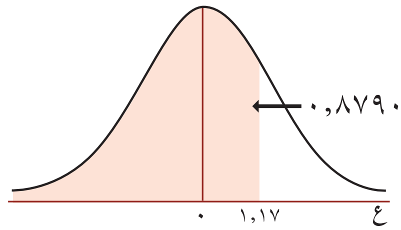
المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي وحدة مساحة واحدة، وقد وضع العلماء جداول خاصة تبين نسبة المساحة تحت المنحنى والمحدودة بقيمة معينة من العلامات المعيارية.
سنعتمد الجداول الملحقة في نهاية الكتاب والتي تعطي المساحة المحصورة تحت ع حيث ع عدد حقيقي.

مثال (١): باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد كلاًّ من:

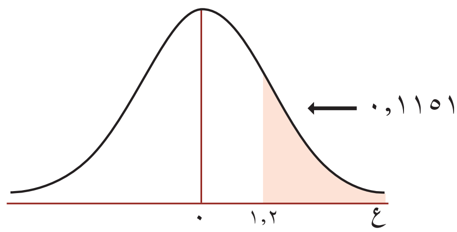
أ) المساحة تحت (ع = ١,١٧)
ب) المساحة فوق (ع = ١,٢)
جـ) المساحة تحت (ع = -١)
د) المساحة فوق (ع = -٠,٥)
هـ) المساحة المحصورة بين (ع$_{١}$ = -٠,٨) و (ع$_{٢}$ = ٠,١٥)

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥

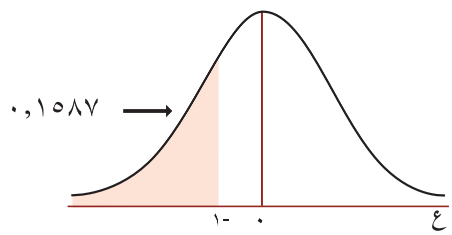
الحل: أ) المساحة تحت (ع = ١,١٧) = ٠,٨٧٩٠ ويتم إيجادها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وتحدد من تقاطع الصف ١,١ ومن العمود ٠,٠٧، حيث أن تقاطع العمود مع الصف يمثل قيمة المساحة. ألاحظ الشكل:



ب) المساحة فوق (ع = ١,٢) = ١ – المساحة تحت (ع = ١,٢) = ١ – ٠,٨٨٤٩ = ٠,١١٥١ ألاحظ الشكل:

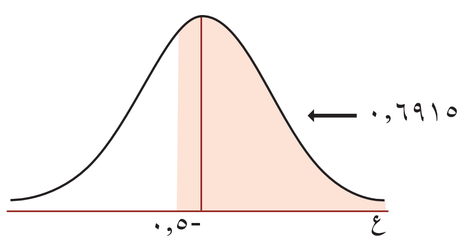


ج) المساحة تحت (ع = -١) = ٠,١٥٨٧ مباشرة من الجدول، ألاحظ الشكل:



د) المساحة فوق (ع = -٠,٥) = ١ ـ (المساحة تحت ع = -٠,٥)

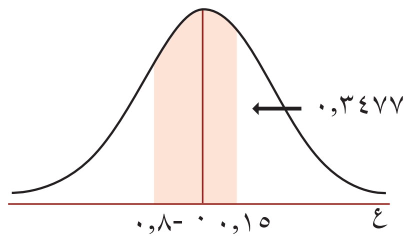
= ١ ـ ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٩١٥ ألاحظ الشكل:



هـ) المساحة المحصورة بين ($ع_١$ = -٠,٨) و ($ع_٢$ = ٠,١٥)

= المساحة تحت (ع = ٠,١٥) ـ المساحة تحت (ع = -٠,٨)

= ٠,٥٥٩٦ ـ ٠,٢١١٩ = ٠,٣٤٧٧

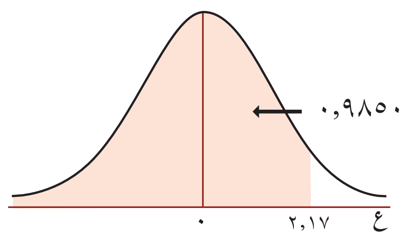


مثال (٢): أجد قيمة ع في كل مما يأتي:

أ) المساحة تحتها تساوي ٠,٩٨٥٠

ب) المساحة فوقها تساوي ٠,٦٦٢٨

الحل: أ) المساحة تحت ع تساوي ٠,٩٨٥٠ ، أبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٨٥٠ ، أجد أنها تقع عند تقاطع صف ع = ٢,١ وعمود ٠,٠٧ ، ومنها ع = ٢,١٧ ، ألاحظ الشكل الآتي:

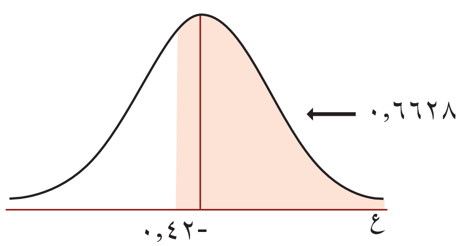


ب) المساحة فوق ع تساوي ٠,٦٦٢٨ = ١ ـ المساحة تحت ع

المساحة تحت ع = ١ ـ ٠,٦٦٢٨

= ٠,٣٣٧٢

من الجدول ع = -٠,٤٢ ألاحظ الشكل المجاور:



مثال (٣): الوسط الحسابي لأعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ١٢٠٠ ساعة بانحراف معياري مقداره ٣٠٠ ساعة، فإذا كانت هذه الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي واختير أحد المصابيح عشوائياً، فما النسبة المئوية لأن يبقى المصباح الكهربائي صالحاً مدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة.

الحل: نسبة أن يبقى المصباح صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة = المساحة فوق ($ع|_{س=١٨٠٠}$)

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

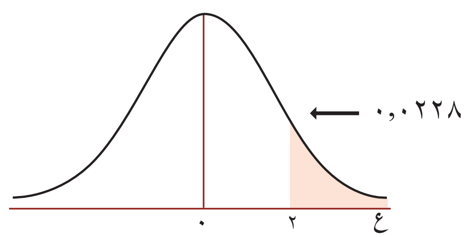
$$ع|_{س=١٨٠٠} = \frac{١٨٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} = ٢$$

المساحة = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ − المساحة تحت (ع = ٢)

= ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

النسبة المطلوبة = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٪ = ٢,٢٨٪



مثال (٤): الوسط الحسابي لكتل ١٠٠٠ شخص يساوي ٦٥ كغم، والانحراف المعياري للكتل ١٠ كغم، فإذا كانت الكتل تتبع التوزيع الطبيعي، فما نسبة الأشخاص الذين تقع كتلهم بين ٦٥ كغم و ٩٥ كغم؟ وما عددهم؟

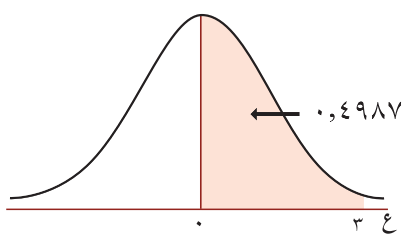
الحل: نسبة الأشخاص الذين كتلهم بين ٦٥ كغم، ٩٥ كغم

= المساحة المظللة في الشكل المقابل.

أحول القيمة الخام ٩٥ إلى علامة معيارية

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$ع|_{س=٩٥} = \frac{٩٥ - ٦٥}{١٠} = ٣$$



نسبة الأشخاص = المساحة بين (ع = صفر ، و ع = ٣) لماذا؟

= المساحة تحت (ع = ٣) − ٠,٥ لماذا؟

= ٠,٩٩٨٧ − ٠,٥

= ٠,٤٩٨٧

أي أن النسبة المئوية للأشخاص الذين تنحصر كتلهم بين ٦٥ كغم و ٩٥ كغم = ٤٩,٨٧٪

عدد هؤلاء الأشخاص = ١٠٠٠ × ٠,٤٩٨٧ ≈ ٤٩٩ شخصاً.

٣ - ٢ تمارين ومسائل

س١: أجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في كل من الحالات الآتية:

أ) تحت (ع = ١,٣٨)

ب) فوق (ع = ٠,٩٠)

جـ) بين (ع = -١,٥) و (ع = ١,٥)

س٢: أجد العلامة المعيارية (ع) في كل من الحالات الآتية:

أ) المساحة تحت ع هي ٠,٨٥٥٤

ب) المساحة فوق ع هي ٠,٧٧٣٤

جـ) المساحة بين -ع و ع هي ٠,٦

س٣: مدرسة ثانوية فيها ٥٠٠ طالب، أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ١٦٥سم، وبانحراف معياري ١٠سم، ما نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٥٠سم، ١٨٠سم ؟ وما عددهم ؟

س٤: إذا كان الزمن الذي يستغرقه بائع جرائد للوصول إلى أحد البيوت يتخذ توزيعاً طبيعياً، بوسط حسابي ١٢ دقيقة وبإنحراف معياري دقيقتان، وكان هذا الموزّع ينقل الجرائد يوميّاً على مدار ٣٦٥ يوماً، ما عدد الأيام التي يستغرق فيها الموزّع زمناً:

أ) يزيد على ١٧ دقيقة؟

ب) ينحصر بين ٩ - ١٣ دقيقة؟

س٥: إذا كانت علامات ٦٠٠ طالب تتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٢ وبانحراف معياري ٨ وكانت علامة النجاح هي ٦٠، أجد:

أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٦٢، ٧٨

ب) عدد الطلبه الراسبين.

س٦: تتبع رواتب ١٠٠٠ موظف في إحدى الشركات توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٠٠ دينار، وبانحراف معياري ٢٠ ديناراً. أحسب عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٦٨٠ ديناراً و ٧٤٠ ديناراً.

٣ - ٣ تمارين عامة:

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

١) ما قيمة الوسط الحسابي (μ) والانحراف المعياري (σ) لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) $\mu = ١$ ، $\sigma = ١$ ب) $\mu = ٠$ ، $\sigma = ٠$ جـ) $\mu = ٠$ ، $\sigma = ١$ د) $\mu = ١$ ، $\sigma = ٠$

٢) ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ٧٧ علماً بأن الوسط الحسابي ٧٠ والانحراف المعياري ١٤ ؟

أ) -٢ ب) -٠,٥ جـ) ٠,٥ د) ٢

٣) إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات ٧٥ والانحراف المعياري ١٥ فما العلامة الخام المناظرة للعلامة المعيارية ع = ٢؟

أ) ١٠٣ ب) ١٠٨ جـ) ١٠٤ د) ١٠٥

٤) إذا كان تقييم أداء موظفي بنك أ يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٣,٨ وبإنحراف معياري ٠,٤ وتقييم موظفي بنك ب يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٣,٦ وبإنحراف معياري ٠,٢ ، إذا كان وسيم موظفاً في بنك أ وتقييمه ٤,٣ وفراس موظفاً في بنك ب تقييمه ٣,٧ ما العبارة الصحيحة في كل مما يلي:

أ) أداء فراس أفضل من أداء وسيم. جـ) كلا الموظفين لهما نفس الأداء.

ب) أداء وسيم أفضل من أداء فراس. د) لا يمكن الحكم على أدائهما.

٥) ما المساحة تحت (ع = ٢,٨٥)؟

أ) ٠,٩٩٧٨ ب) ٠,٠٠٢٢ جـ) ٠,٠٣٢٢ د) ٠,٩٧٨٨

٦) ما مساحة المنطقة بين (٠,٩٦ > ع > ١,٦٥):

أ) ٠,٠٩٩١ ب) ٠,١١٩٠ جـ) ١,٨١٢ د) ١,٧٨٢

٧) ما مجموع العلامات المعيارية لتوزيع طبيعي معياري؟

أ) ١ ب) ٠ جـ) -١ د) ٠,٥٠٠٠

٨) إذا كانت العلامة الخام أقل من الوسط الحسابي في توزيع ما، فإن العلامة المعيارية المناظرة (ع) تكون:

أ) سالبة ب) موجبة جـ) صفر د) موجبة أو سالبة

٩) إذا كانت العلامات المعيارية لخمسة طلاب كما يلي ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{-٣}{٢}$، أ ، $\frac{-١}{٢}$ فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ١ ب) -١ جـ) $\frac{-١}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

١٠) ما المساحة الواقعة (فوق ع = ٠,٧٥)؟

أ) ٠,٢٢٦٦ ب) ٠,٢٧٣٤ جـ) ٠,٧٥١٢ د) ٠,٥٧٢١

س٢: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ٧١ ، ٥٣ هما ٠,٥ ، -١ على الترتيب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام لطلبة الصف.

س٣: خط إنتاج في مصنع ينتج أكياساً من الأرز بوسط حسابي يساوي ١,٠١ كغم، وبانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم. أجد:

أ) نسبة الأكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣ كغم.

ب) نسبة الأكياس التي تتراوح كتلها بين ١ كغم و ١,٠٥ كغم.

س٤: إذا ارتبط عمر بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها السيارة باستعمال هذه البطارية، وعلم أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ١٠٠٠٠٠كم، وبانحراف معياري ١٠٠٠٠كم. وأنتجت إحدى الشركات ٢٠٠٠٠ بطارية من هذا النوع في الشهر. أجد:

أ) عدد البطاريات التي يتراوح عمرها بين ٩٠٠٠٠ كم، ١١٠٠٠٠ كم.

ب) عدد البطاريات التي يزيد عمرها على ١٢٠٠٠٠ كم.

جـ) النسبة المئوية للبطاريات التي تتراوح أعمارها بين ٨٠٠٠٠ كم، ١١٠٠٠٠ كم.

س٥: نادي رياضي مكون من ٤٠٠ عضو تتبع أعمارهم التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٤٠ سنة وبانحراف معياري ٥ أجد:

أ) عدد الأعضاء الذين تزيد أعمارهم على ٥٠ سنة.

ب) عدد الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٥ سنة إلى ٤٥ سنة.

س٦: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجد العلامة المعيارية			
اجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي			
احل مسائل منتمية لايجاد كل من الوسط والانحراف المعياري			
اوظف المنحنى الطبيعي في حل مشكلات حياتية			

الوحدة الرابعة

٤

التكامل

(Integration)

أفكر وأناقش: كيف أجد مساحة المناطق المحصورة بين بعض الأقواس والمحور الأفقي في الصورة؟

يتوقـع مـن الطلبـة بعـد الإنتهـاء مـن دراسـة هـذه الوحـدة والتفاعـل مـع أنشـطتها أن يكونـوا قادريـن علـى توظيـف قواعـد التكامـل غيـر المحـدود فـي الحيـاة العمليّـة مـن خـلال الآتـي:

- التعرف إلى مفهوم التكامل غير المحدود.
- إيجاد التكامل غير المحدود.
- التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود وتوظيفها في إيجاده.
- التعرف إلى التكامل المحدود، وحسابه.
- التعرف إلى خواص التكامل المحدود وتوظيفها في حسابه.
- استخدام طريقة التعويض في إيجاد بعض التكاملات.
- توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية.
- توظيف التكامل المحدود في إيجاد بعض المساحات.

٤ - ١

التكامل غير المحدود
(Indefinite Integral)

نشاط ١

كان علي في رحلة ليلية قمرية مع صديق له على شاطئ البحر، عندما شاهدا معاً ظاهرة طبيعية وهي المد والجزر، وتحدثا معاً على وجود كثير من الظواهر الطبيعية المتعاكسة في الحياة الطبيعية، مثل: التجمد والانصهار، والتجاذب والتنافر، والتأكسد والاختزال، وفي الرياضيات هناك عمليتا الجمع والطرح، وعملية إيجاد مربع عدد حقيقي موجب، هي عكس عملية إيجاد الجذر التربيعي لهذا المربع.

إذا كان ق(س) = س^{٣} فإن ق$^{/}$(س) = ٣س^{٢}، إذا كان ق$^{/}$(س) = ٢س، فإن ق(س) = ...؟

إن عملية إيجاد الاقتران ق(س) الذي عُلِمت مشتقته الأولى ق$^{/}$(س) هي عملية عكسية لعملية الاشتقاق التي تعلمتها في الوحدة السابقة.

مثال (١): أكتب ثلاثة اقترانات مشتقتها الأولى هي ٤س^{٣}؟

الحل: ق(س)= س^{٤}، ك(س)= س^{٤} + ١٣، هـ(س) = س^{٤} ـ π، جميعها مشتقتها هي ٤س^{٣}.

ألاحظ أن ق(س) – ك(س) = س^{٤} – (س^{٤} + ١٣) = -١٣ وكذلك ك(س) – هـ(س) = (س^{٤} + ١٣) – (س^{٤} – π) = ١٣ + π أي أن الفرق بين أي اقترانين لهما نفس المشتقة هو عدد ثابت، لذلك فإن الاقتران الذي مشتقته ٤س^{٣} سيكون على الصورة ق(س) = س^{٤} + جـ، أي أن التكامل عملية عكسية للتفاضل.

تعريف:

إذا كان الاقتران ق$^{/}$(س) هو المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، فإن الاقتران ق(س) + جـ يمثل مجموعة الاقترانات التي مشتقتها الأولى ق$^{/}$(س)، ويسمى بالتكامل غير المحدود للاقتران ق$^{/}$(س)، أو يسمى بالاقتران الأصلي الذي مشتقته ق$^{/}$(س).

وبالرموز يكتب: $\int$ ق$^{/}$(س) ءس = ق(س) + جـ ، جـ $\in$ ع، الرمز $\int$ هو إشارة التكامل، ءس تشير أن الاقتران بدلالة المتغير س ، جـ يسمى ثابت التكامل.

مثال (٢): أجد $\int$ ٢ءس ؟

الحل: $\int$ ٢ءس = ق(س) ، حيث ق/(س) = ٢

ق(س) = ٢س + جـ

$\int$ ٢ءس = ٢س + جـ (الاقتران الأصلي).

مثال (٣): أجد $\int$ ٣س^{٢} ءس ؟

الحل: $\int$ ٣س^{٢} ءس = ك(س)، حيث ك/(س) = ٣س^{٢}

ك(س) = س^{٣} + جـ

$\int$ ٣س^{٢} ءس = س^{٣} + جـ (الاقتران الأصلي).

مثال (٤): أي من الاقترانين ق(س) = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س + جـ

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

يمكن اعتباره اقتراناً أصلياً للمشتقة (٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ؟

الحل: ق/(س) = ٦س^{٢} + ٨س + ٤

هـ/(س) = ٦س^{٢} + ١٠س + ٤

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ هو الاقتران الأصلي للمشتقة (٦س^{٢} + ١٠س + ٤)

وبالرموز $\int$(٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ءس = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

مثال(٥): إذا كان ق(س) = $\int$(س^{٢} + س)(س – ٢) ءس ، أجد ق/(س) ؟

الحل: ق/(س) = مشتقة $\int$(س^{٢} + س)(س – ٢) ءس، وبما أن الاشتقاق عملية عكسية للتكامل،

فإن ق/(س) = (س^{٢} + س)(س – ٢).

٤ - ١ تمارين ومسائل

س١. أكمل الجدول الآتي:

	المشتقة $ق^{/}(س)$	الاقتران الأصلي $ق(س) + جـ$
١.	$٤س^{٣}$	
٢.		$س^{٤} + س^{٣} + ٢س + جـ$
٣.	$٢س + ١$	
٤.		$\int (٤س^{٢} + ٣)\ ءس$

س٢. أضع إشارة ✓ أمام العبارة الصائبة وإشارة ✗ أمام العبارة الخاطئة:

أ) $\int (٥س + ٤)\ ءس = \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٤س$

ب) $\int (٦س^{٥} + ٣س^{٢})\ ءس = س^{٦} + س^{٣} + جـ$

جـ) $\int (٢س^{٣} + ٣س)\ ءس = ٦س + ٣$

د) $\int \frac{-٥}{س^{٢}}\ ءس = \frac{٥}{س} + جـ$

هـ) $\int ٢نق ءس = نق^{٢} + جـ$

و) $\int ٢نق ءنق = نق^{٢} + جـ$

س٣. إذا كان $ق(س) = \int \frac{س^{٢} + ٣}{س + ١}\ ءس$، أجد $ق^{/}(س)$.

٤ - ٢

قواعد التكامل غير المحدود
(Rules of Indefinite Integral)

نشاط

الميراث شرعة الله سبحانه وتعالى في كتابه العزيز، ورغم هذا التشريع إلا أن بعض المشاكل بين الناس تحدث بسبب عدم رجوع الناس إلى الأنظمة والتشريعات والقوانين التي تخص توزيع هذا الميراث، حيث إن الاعتماد على هذه القوانين أو القواعد، يساعد في عملية توزيع الميراث بسهولة.

وللعلوم الأخرى في الحياة قوانين وقواعد تسهّل فهم المسائل والمشكلات العملية والعلمية، وتعمل على تحليلها وحلّها.

إذا كان الاقتران الأصلي للمشتقة ق$'$(س) = ٣س^{٢} هو س^{٣} + جـ، فكيف يمكن إيجاد الاقتران الأصلي للمشتقة ق$'$(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} ـ ٣ ؟ هل يوجد قواعد لإيجاد الاقتران الأصلي؟

الاقتران الأصلي لِـ ٤س^{٣} هو س^{٤} + جـ

الاقتران الأصلي لِـ ٣س^{٢} هو س^{٣} + جـ

الاقتران الأصلي لِـ -٣ هو ....

الاقتران الأصلي لِـ ٤س^{٣} + ٣س^{٢} ـ ٣ هو ......

مثال (١): أجد $\int$ ٣ءس ؟

الحل: المطلوب هو إيجاد الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته الأولى ق$'$(س) = ٣.

من معلوماتنا في التفاضل، ألاحظ أن الاقترانات:

ق$_{١}$(س) = ٣س ، ق$_{٢}$(س) = ٣س + ٥،

ق$_{٣}$(س) = ٣س ـ $\sqrt{٢}$ ، ق$_{٤}$(س) = ٣س + ثابت

هي اقترانات مشتقتها الأولى ق$'$(س) = ٣، ألاحظ أن الفرق بين هذه الاقترانات هو في الحد الثابت فقط، ولذلك فإن الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته ق$'$(س) = ٣ هو ق(س) = ٣س + جـ.

أي أن $\int$ ٣ءس = ٣س + جـ

قاعدة (١): $\int$ ٢ ءس = ٢ س + جـ ، ٢ ، جـ عددين حقيقيين.

مثال (٢): أجد التكاملات الآتية:

١) $\int$ -٥ءس   ٢) $\int \sqrt{٣}$ ءص   ٣) $\int \frac{١}{٢}$ ءع.

الحل: ١) $\int$ -٥ءس = -٥س + جـ، الاقتران بدلالة المتغير س.

٢) $\int \sqrt{٣}$ ءص = $\sqrt{٣}$ ص + جـ، الاقتران بدلالة المتغير ص.

٣) $\int \frac{١}{٢}$ ءع = $\frac{١}{٢}$ ع + جـ، الاقتران بدلالة المتغير ع.

مثال (٣): أتأمل الجدول الآتي، وأجيب عن الأسئلة اللاحقة:

ق(س)	$\frac{س^{٣}}{٣}$	$\frac{س^{٤}}{٤}$ + ٧	$\frac{س^{٥}}{٥}$	$\frac{س^{٦}}{٦}$ + ٢
ق/(س)	$س^{٢}$	$س^{٣}$	$س^{٤}$	$س^{٥}$

١. ما العلاقة بين درجة ق/(س) و درجة ق(س)؟

٢. ما العلاقة بين معامل الحد الذي يحتوي على س في ق(س) ودرجة ق(س) ؟

الحل: ١. درجة الاقتران ق(س) تزيد ١ عن درجة ق/(س).

معامل الحد الذي يحتوي على س يساوي مقلوب درجة الاقتران.

قاعدة (٢): $\int س^{ن}$ ءس = $\frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$ + جـ، جـ عدد حقيقي، ن ≠ -١.

مثال (٤): أجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int س^{٢}$ءس   ب) $\int س^{-٣}$ءس   جـ) $\int س^{\frac{١}{٢}}$ ءس   د) $\int \sqrt{س^{٢}}^{٣}$ ءس

الحل: أ) $\int س^{٢}$ءس = $\frac{س^{٢+١}}{٢ + ١}$ + جـ = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + جـ

ب) $\int س^{-3} \, ءس = \frac{س^{-3+1}}{-3+1} + جـ = \frac{س^{-2}}{-2} + جـ$

ج) $\int س^{\frac{1}{2}} \, ءس = \frac{س^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + جـ = \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + جـ = \frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + جـ$

د) $\int \sqrt[3]{س^2} \, ءس = \int س^{\frac{2}{3}} \, ءس = \frac{س^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + جـ = \frac{س^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + جـ = \frac{3س^{\frac{5}{3}}}{5} + جـ = \frac{3}{5}\sqrt[3]{س^5} + جـ$

قاعدة (٣): إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل، فإن $\int \text{أ}\, ق(س)\, ءس = \text{أ} \int ق(س)\, ءس$ ، $\text{أ} \in ح$

مثال (٥): أجد التكاملات الآتية:

أ) $\int 2س^3 \, ءس$ ب) $\int \frac{3}{5} س^4 \, ءس$ ج) $\int \sqrt{2}\, ل^7 \, ءل$

الحل: أ) $\int 2س^3 \, ءس = 2\int س^3 \, ءس = \frac{2س^4}{4} + جـ = \frac{س^4}{2} + جـ$

ب) $\int \frac{3}{5} س^4 \, ءس = \frac{3}{5} \int س^4 \, ءس = \frac{3}{5} \times \frac{س^5}{5} + جـ = \frac{3س^5}{25} + جـ$

ج) $\int \sqrt{2}\, ل^7 \, ءل = \sqrt{2} \int ل^7 \, ءل = \sqrt{2}\, \frac{ل^8}{8} + جـ$

قاعدة (٤): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل، فإن:

١. $\int (ق+هـ)(س)\, ءس = \int ق(س)\, ءس + \int هـ(س) ءس$

٢. $\int (ق-هـ)(س)\, ءس = \int ق(س)\, ءس - \int هـ(س)\, ءس$

مثال (٦): أجد $\int (3س^2 + 4س)\, ءس$

الحل: $\int (3س^2 + 4س)\, ءس = 3\int س^2 \, ءس + 4 \int س \, ءس$

$= س^3 + 2س^2 + جـ$ لماذا ؟

مثال (٧): أجد $\int (\frac{١}{٢}\text{س}^{٣} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}})\,\text{ءس}$

الحل: $\int (\frac{١}{٢}\text{س}^{٣} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}})\,\text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\text{س}^{٣} - \int \frac{٥}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٣}\text{ءس} - ٥\int \text{س}^{-٢}\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٤}}{٨} + ٥\text{س}^{-١} + \text{جـ}$ لماذا؟

يمكن تعميم القاعدة (٤) لأكثر من اقترانين.

مثال (٨): أجد $\int (\text{س} + ٣)^{٢}\text{ءس}$

الحل: $(\text{س} + ٣)^{٢} = (\text{س} + ٣)(\text{س} + ٣) = \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩$

$\int (\text{س} + ٣)^{٢}\text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩)\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢}\text{ءس} + \int ٦\text{س}\,\text{ءس} + \int ٩\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٦\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

مثال (٩): أجد $\int \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} + ٣}\,\text{ءع}$ ، $\text{ع} \neq -٣$

الحل: $\int \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} + ٣}\,\text{ءع} = \int \frac{(\text{ع} + ٣)(\text{ع} - ٣)}{(\text{ع} + ٣)}\,\text{ءع} = \int (\text{ع} - ٣)\,\text{ءع} = \frac{\text{ع}^{٢}}{٢} - ٣\text{ع} + \text{جـ}$

مثال (١٠): إذا كان $\text{ص} = \int (٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,\text{ءس}$ = أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

الحل: $\text{ص} = \int (٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,\text{ءس} = \frac{٥\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥ \times ٣\text{س}^{٢}}{٣} + \frac{٣ \times ٢\text{س}}{٢} + \text{صفر}$

$= ٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ ماذا تلاحظ؟

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟ وضّح ذلك.

٤ - ٢ تمارين ومسائل

س١: أجد التكاملات الآتية:

أ. $\int \frac{٢}{٣} \, \text{ءس}$

ب. $\int \pi \, \text{ءع}$

ج. $\int -\sqrt{٥} \, \text{س ءس}$

د. $\int (٢\text{س}^{٢} + ٣) \, \text{ءس}$

هـ. $\int (٧\text{س}^{٣} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}} + ١) \, \text{ءس}$

و. $\int \text{ك}^{٢} \, \text{ءس}$ ، ك ثابت $\neq ٠$

س٢: أجد $\int (٢\text{ص} - ٥)(\text{ص} + ٣) \, \text{ءص}$

س٣: أجد $\int \frac{\text{ل}^{٢} - ٥\text{ل} + ٦}{\text{ل} - ٢} \, \text{ءل}$ ، $\text{ل} \neq ٢$

س٤: أجد $\int (٢\text{س} + ١)(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤) \, \text{ءس}$

س٥: إذا كان $\text{ق(س)} = \int (٣\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤) \, \text{ءس}$، أجد $\text{ق}'\text{(س)}$.

س٦: إذا كان $\text{ص} = \int (٢\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٥} \, \text{ءس}$، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

٤ - ٣

تطبيقات هندسية على التكامل غير المحدود
(Geometric Applications for Indefinite Integral)

نشاط

ذهب بلال في رحلة مدرسية إلى مدينة حيفا وزار مدينة الألعاب فيها، ركب بلال في لعبة القطار الذي يسير في مسار متعرج، وبعدها سأل بلال معلمه عن كيفية تصميم هذه الألعاب وتركيبها، بما يضمن سلامة المتنزهين، أجابه المعلم: بأن تصميم الألعاب يعتمد على إيجاد قاعدة رياضية لمنحنى مسار القطار، وهذه مهمة المهندسين.

كيف يمكن معرفة قاعدة الاقتران، إذا علم ميل منحنى هذا الاقتران عند أي نقطة؟ كيف يمكن إيجاد قيمة الثابت جـ؟

لتكن ق$^/$(س) = ٢س تمثل ميل منحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه، أجد قاعدة الاقتران ق(س)؟

حسب قاعدة التكامل غير المحدود $\int$ ق$^/$(س) ءس = ق(س)

قاعدة الاقتران ق(س) = $\int$ ٢س ءس = س^{٢} + جـ ألاحظ أنه لا يمكن إيجاد صورة عنصر معين في ق(س) إلا بمعرفة قيمة جـ.

لكن إذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٣) فإنه يمكن إيجاد قاعدة الاقتران، وإيجاد صورة أي عنصر في هذا الاقتران؟

مثال (١):

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالقاعدة ق$^/$(س) = ٣س − ١، أجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطة (٠ ، ٧)؟

الحل: ق(س) = $\int$ ق$^/$(س) ءس = $\int$ (٣س − ١) ءس = $\frac{٣س^{٢}}{٢}$ ـ س + جـ

الاقتران يمر بالنقطة (٠ ، ٧)

ق(٠) = ٧ ومنها جـ = ٧ لماذا؟

ومنها ق(س) = $\frac{٣س^{٢}}{٢}$ ـ س + ٧

مثال (٢):

إذا كان ق$^{//}$(س) = ٢ − ٤س ، ق(س) له مماس أفقي عند النقطة (٣ ، ٣٠) الواقعة عليه، أجد قاعدة الاقتران ق(س)؟

الحل: ق$^{//}$(س) = ٢ − ٤س ومنها ق$^{/}$(س) = $\int$ ق$^{//}$(س) ءس

ق$^{/}$(س) = $\int$(٢ − ٤س) ءس = ٢س − ٢س^{٢} + جـ$_{١}$

ق(س) له مماس أفقي عند النقطة (٣ ، ٣٠) ومنها ق$^{/}$(٣) = ٠

٢(٣) − ٢(٣)^{٢} + جـ$_{١}$ = ٠ ومنها جـ$_{١}$ = ١٢

ق(س) = $\int$ ق$^{/}$(س) ءس

ق(س) = $\int$(٢س − ٢س^{٢} + ١٢)ءس = س^{٢} − $\frac{٢س^{٣}}{٣}$ + ١٢س + جـ$_{٢}$

النقطة (٣ ، ٣٠) واقعة على منحنى الاقتران ⇐ ق(٣) = ٣٠

(٩) - $\frac{٢×٢٧}{٣}$ + ١٢ ×٣ + جـ$_{٢}$ = ٣٠ ومنها جـ$_{٢}$ = ٣

قاعدة الاقتران ق(س) = س^{٢} − $\frac{٢س^{٣}}{٣}$ + ١٢س + ٣

٤ - ٣ تمارين ومسائل

س١: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة ق$^{/}$(س) = ٥، أجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٢ ، ٣).

س٢: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة ق$^{/}$(س) = س + ٣، أجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطة (٢ ، ٧).

س٣: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ك(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة ك$^{/}$(س) = (س+١)^{٣}، أجد ك(٢) علماً بأن منحنى ك(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٢).

س٤: إذا كان ق$^{//}$(س) = -١٢س + ٢ وكان ميل المماس يساوي ٤ عند النقطة (٠ ، ٣)، أجد قاعدة الاقتران ق(س).

٤ - ٤

التكامل المحدود
(Definite Integral)

نشاط ١

بلغت كمية الأمطار التراكمية التي هطلت على محافظة الخليل لموسم ٢٠١٧م حسب الأرقام التي أوردتها وزارة الزراعة ٤١٦ ملم. حيث يتم قياس هذه الكمية بمقياس كمية الأمطار الموجود في منطقة محددة، وذلك لصعوبة جمع الأمطار في منطقة غير محددة.
وكذلك المماس يمكن أن يكون مماساً لعدد غير محدود من المنحنيات، كيف يمكن تحديد الاقتران الخاص لهذا المماس؟

نشاط ٢

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) هو ق/(س) = ٢س + ٣، كيف يمكن حساب مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ = ٢ إلى $س_٢$ = ٥؟
لحساب هذا التغير يلزمنا ق(س)، حيث:

ق(س) = $\int$ ق/(س) ءس

= $\int$ (.......) ءس

= $س^٢$ + ٣س + جـ

التغير في الاقتران = ق(٥) − ق(٢) =

= (٢٥ + ١٥ + جـ) − (   )

= ٣٠

هل نحن بحاجة لمعرفة قيمة الثابت جـ لحساب هذا التغير؟

تعريف: إذا كانت ق/(س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، وكان ق/(س) قابلاً للتكامل، فإن

$\int_{ا}^{ب}$ ق/(س)ءس = ق(ب) − ق(ا)، ا ، ب عددان حقيقيان. وهذا التكامل يسمى تكاملاً محدوداً، حدّه العلوي = ب، وحدّه السفلي = ا، وقيمته تساوي عدداً ثابتاً.

مثال (١): أحسب قيمة التكامل $\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\, \text{ءس}$ ؟

الحل: $\text{ق(س)} = \int (\text{س} - ٣)\, \text{ءس}$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٢} - ٣\text{س} + \text{جـ}$$

$$\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\, \text{ءس} = \text{ق}(٢) - \text{ق}(١)$$

$$= (٢ - ٦ + \text{جـ}) - (\frac{١}{٢} - ٣ + \text{جـ})$$

$$= \frac{-٣}{٢} + \text{جـ} - \text{جـ} = \frac{-٣}{٢}$$

يمكن حل المثال بطريقة أخرى

$$\int_{١}^{٢} (\text{س} - ٣)\, \text{ءس} = \left. (\frac{\text{س}^{٣}}{٢} - ٣\text{س}) \right|_{١}^{٢}$$

أعوض الحد العلوي، ثم أطرح منه ناتج تعويض الحد السفلي.

$$= (٢ - ٦) - (\frac{١}{٢} - ٣) = \frac{-٣}{٢}$$

مثال (٢): أجد $\int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)\text{ءس}$

الحل: $\int_{-١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)\text{ءس} = \left. (\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{س}) \right|_{-١}^{٢}$

$$= (٨ - ٤ + ٢) - (-١ - ١ - ١)$$

$$= ٩$$

مثال (٣): إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}$ أحسب متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣.

الحل: متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١}$

لكن ق(٣) − ق(١) = $\int_{١}^{٣}$ (٢س^٣ + ٥س) ءس

$= \left. \frac{س^٤}{٢} + \frac{٥س^٢}{٢} \right|_{١}^{٣}$

$= (\frac{٨١}{٢} + \frac{٤٥}{٢}) - (\frac{١}{٢} + \frac{٥}{٢})$

= ٦٣ − ٣

= ٦٠

متوسط التغير $= \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$

مثال (٤): إذا كان $\int_{٢}^{٤}$ (بس − ٧) ءس = ٣٤، أجد قيمة الثابت ب.

الحل: $\int_{٢}^{٤}$ (بس − ٧) ءس = $\left. (\frac{بس^٢}{٢} - ٧س) \right|_{٢}^{٤}$ = ٣٤

= (٨ب − ٢٨) − (٢ب − ١٤) = ٣٤

٦ب − ١٤ = ٣٤

٦ب = ٤٨

ب = ٨

مثال (٥): إذا كان $\int_{٥}^{ب}$ ٦س ءس = -٦٣، أجد قيمة/قيم الثابت ب.

الحل: $\int_{٥}^{ب}$ ٦س ءس = $\left. ٣س^٢ \right|_{٥}^{ب}$ = -٦٣

٣ب^٢ − ٧٥ = -٦٣

ب^٢ = ٤ لماذا؟

ب = ± ٢

نشاط ٣

أجد ق/(س) في كل مما يأتي:

١) $ق(س) = \int_{١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢س)\, ءس$

٢) $ق(س) = \int_{-١}^{٧} (٣س^{٢} - ٢س)^{٩}\, ءس$

أتعلم

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفراً.

٤ - ٤ تمارين ومسائل

س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{-1}^{2} 6\pi \ \text{ءس}$

ب) $\int_{0}^{2} (5 - 3\text{س}^{2}) \ \text{ءس}$

جـ) $\int_{1}^{3} \left(\frac{1}{\text{س}^{2}} - \frac{1}{\text{س}^{3}}\right) \ \text{ءس}$

د) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{\text{س}} \ \text{ءس}$

س٢: إذا كان $\int_{3}^{5} \text{ب}^{2} \ \text{ءس} = 32$ فما قيمة/ قيم الثابت ب ؟

س٣: إذا كان $\int_{-2}^{\text{م}} (3 - 2\text{س}) \ \text{ءس} =$ صفراً، فما قيمة/ قيم الثابت م ؟

س٤: أحسب $\int_{0}^{2} (2\text{س} - 1)^{2} \ \text{ءس}$.

س٥: أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

أ) $\text{ص} = \int (4\text{س}^{3} + 2\text{س} - 5) \ \text{ءس}$

ب) $\text{ص} = \int_{2}^{7} (4\text{س}^{3} + 2\text{س} - 5) \ \text{ءس}$

٤ - ٥

خصائص التكامل المحدود
(Definite Integral Properties)

نشاط ١

ماجد طالب مجتهد، يذهب صباحاً إلى مدرسته التي تبعد عن منزله ٣كم، وبعد المدرسة يذهب إلى دكّان والده الذي يبعد عن المدرسة ٢كم، وفي المساء يعود من الطريق نفسه، ويقوم بواجباته المدرسية. فإذا كانت المدرسة تقع بين منزله ودكان والده، وجميعها على استقامة واحدة:

المنزل ______ ٣كم ______ المدرسة ______ ٢كم ______ الدكان

١) يسير ماجد في ذهابه من المنزل إلى المدرسة في اليوم الواحد مسافة ....

٢) يسير ماجد في ذهابه من المدرسة إلى الدكّان في اليوم الواحد مسافة ....

٣) يسير ماجد في ذهابه من المنزل إلى الدكّان في اليوم الواحد مسافة ....

٤) يسير ماجد في ذهابه من المنزل إلى الدكّان في ٤ مسافات ....

٥) عندما يخرج من المنزل في الصباح، ثم يعود إليه مساءً، تكون إزاحته = صفراً (لماذا؟)

٦) إذا اعتبرنا أن إزاحته من المنزل إلى الدكّان ٥كم باتجاه الدكّان، فإن إزاحته من الدكّان إلى المنزل ....

نشاط ٢

١. $\int_{٢}^{٢} ٧ \, ءس = ٧س \Big|_{٢}^{٢} = ٧ (٢ - ٢) = ٠$

٢. $\int_{٥}^{٥} (٢س + ٣) \, ءس = (.........) \Big|_{٥}^{٥} = ٠$ (لماذا ؟)

خاصية (١): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int_{أ}^{أ} ق(س) \, ءس = ٠$ لكل أ ∈ ح

فمثلاً: أ. $\int_{١}^{١} (٢س^{٢} + ٣س + ٢) \, ءس = ٠$ حسب الخاصية (١)

ب. $\int_{٢}^{٢} (\sqrt{س} + ٥) \, ءس = ٠$ حسب الخاصية (١)

نشاط ٣ أكمل الجدول الآتي:

التكامل	قيمته	التكامل	قيمته
$\int_{١}^{٢} (س + ١)\, دس$	$\frac{٥}{٢}$	$\int_{٢}^{١} (س + ١)\, دس$	$\frac{-٥}{٢}$
$\int_{٣}^{٥} ٧\, دس$	١٤	$\int_{٥}^{٣} ٧\, دس$	
$\int_{٠}^{١} س^{٥}\, دس$		$\int_{١}^{٠} س^{٥}\, دس$	$-\frac{١}{٦}$

من الجدول ماذا نلاحظ ؟

خاصية (٢): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، فإن: $\int_{أ}^{ب} ق(س) دس = - \int_{ب}^{أ} ق(س) دس$

مثال (١): إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} ق(س)\, دس = ٨$ ، أحسب $\int_{٢}^{١} ق(س)\, دس$ ؟

الحل: $\int_{٢}^{١} ق(س)\, دس = - \int_{١}^{٢} ق(س)\, دس = -٨$ حسب الخاصية (٢)

مثال (٢): إذا كان $\int_{٢}^{٣} ق(س)\, دس = -٣$ ، أجد $\int_{٣}^{٢} -٢ق(س)\, دس$ ؟

الحل: $\int_{٣}^{٢} -٢ق(س)\, دس = -٢ \int_{٣}^{٢} ق(س)\, دس$

$= \text{٢} \int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{ق(س) ءس}$ لماذا؟

$= \text{٢ (-٣) = -٦}$

نشاط ٤

أكمل الجدول الآتي:

التكامل	(١) قيمته	التكامل	(٢) قيمته	التكامل	(٣) قيمته	أكتب علاقة بين (١)،(٢)،(٣)
$\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٥ ءس}$	٥	$\int_{\text{٢}}^{\text{٥}} \text{٥ ءس}$	١٥	$\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{٥ ءس}$	٢٠	٥+١٥= ٢٠
$\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}^{\text{٢}} \text{ءس}$	$\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$	$\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \text{س}^{\text{٢}} \text{ءس}$		$\int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \text{س}^{\text{٢}} \text{ءس}$	$\frac{\text{٦٤}}{\text{٣}}$	
$\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{(س – ٣) ءس}$		$\int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{(س – ٣)ءس}$	$-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$	$\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{(س – ٣) ءس}$		

من الجدول أعلاه، ماذا نلاحظ؟

خاصية (٣): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، على [أ ، جـ] ، ب ∈ [أ ، جـ] فإن:

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) ءس}$ (خاصية الإضافة).

مثال (٣): إذا علمت أن $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س) ءس} = \text{٣}$، $\int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \text{ق(س) ءس} = \text{-٩}$ أجـد $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{ق(س) ءس}$ ؟

الحل: $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{ق(س) ءس} = \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \text{ق(س) ءس}$ حسب الخاصية (٣)

$= \text{(٣) + (-٩) = -٦}$

مثال (٤): إذا علمت أن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس = ٢، $\int_{٤}^{٣}$ ٥ق(س) ءس = ١٥ أجـد $\int_{١}^{٤}$ -٢ق(س) ءس ؟

الحل: $\int_{١}^{٤}$ -٢ق(س) ءس = -٢ $\int_{١}^{٤}$ ق(س) ءس

لكن $\int_{١}^{٤}$ ق(س) ءس = $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس + $\int_{٣}^{٤}$ ق(س) ءس

$\int_{٣}^{٤}$ ق(س) ءس = - $\int_{٤}^{٣}$ ق(س) ءس = -٣ لماذا؟

$\int_{١}^{٤}$ ق(س) ءس = ٢ + (-٣) = -١ لماذا؟

$\int_{١}^{٤}$ -٢ق(س) ءس = -٢ (-١) = ٢

خاصية (٤): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل، على [أ ، ب] ، فإن:

$\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) ± هـ(س)) ءس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس ± $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ءس

مثال (٥): إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) ءس = -٥ ، أجـد $\int_{-١}^{٢}$ (٣ق(س) + س + ٢) ءس ؟

الحل: $\int_{-١}^{٢}$ (٣ق(س) + س + ٢) ءس = $\int_{-١}^{٢}$ ٣ق(س) ءس + $\int_{-١}^{٢}$ (س + ٢) ءس

= ٣ $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) ءس + $\left(\frac{س^{٢}}{٢} + ٢س\right)\Big|_{-١}^{٢}$

= ٣(-٥) + [($\frac{٤}{٢}$ + ٤) _ ($\frac{١}{٢}$ + ٢(-١))]

= -١٥ + (٦ + $\frac{٣}{٢}$) = $\frac{-١٥}{٢}$

٤ - ٥ تمارين ومسائل

س١: أحسب $\int_{٢}^{٢} (س^٢ - ٦س)\, ءس$

س٢: أحسب التكاملات الآتية: أ) $\int_{٢}^{٣} (س - ٦)\, ءس$ ب) $\int_{٢}^{٥} (س - ٦)\, ءس$ جـ) $\int_{٣}^{٥} (س - ٦)\, ءس$

س٣: إذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س)\, ءس = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} ٢ق(س)\, ءس = ٤$، أجد قيمة الآتي:

أ) $\int_{٠}^{٢} -٣ق(س)\, ءس$ ب) $\int_{-١}^{٠} ق(س)\, ءس$ جـ) $\int_{-١}^{٢} (٣ق(س) + س)\, ءس$

س٤: إذا كان $\int_{٢}^{٣} ٣ق(س)\, ءس = ١٢$ ، $\int_{٢}^{٣} -٢هـ(س)\, ءس = ٦$ ، أجد قيمة:

$\int_{٢}^{٣} (٥هـ(س) - ٣ق(س))\, ءس$

س٥: إذا كان $\int_{١}^{م} (٢س + ٥)\, ءس = ٠$ ، أجد قيمة/قيم الثابت م.

٤ - ٦ التكامل بالتعويض
(Integration by Substitution)

نشاط ١

ذهبت إيمان إلى السوق واشترت ٣ كغم من التفاح، و٢ كغم من البندورة، و٢ كغم من الموز، و٣ كغم من الخيار، وكيلوغرام واحد من الفجل، ووضعتها في أكياس، ولما همّت بحمل هذه الأغراض، وجدت صعوبةً في حملها؛ لذلك اقترح عليها صاحب المحل أن تضع جميع هذه الأكياس في كيس واحد كبير؛ لتسهيل حملها والتنقل بها.

بعض الاقترانات لا يمكن تكاملها باستخدام القواعد التي درستها، وهذه الاقترانات يمكن تكاملها بطرق متعددة ومتنوعة، وسنتعرف في دراستنا لهذه الوحدة إلى طريقة التكامل بالتعويض على أنواع معينة من الاقترانات.

نشاط ٢

أجد $\int (\text{س} - ٣)^{٢}\,\text{ءس}$

$\int (\text{س} - ٣)^{٢}\,\text{ءس} = \int (\qquad)\,\text{ءس}$ لماذا ؟

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

وبالطريقة نفسها أجد $\int (٤\text{س} - ٩)^{٣}\,\text{ءس}$

لكن هل يمكن أن أجد $\int (٤\text{س} - ٩)^{١٠}\,\text{ءس}$ بسهولة بالطريقة نفسها ؟

يمكن إيجاد $\int (\text{س} - ٣)^{٢}\,\text{ءس}$ بطريقة أخرى، تسمى طريقة التكامل بالتعويض

الحل: أفرض أن $\text{ص} = (\text{س} - ٣)$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$ ، $\text{ءس} = \text{ءص}$ بالتعويض في التكامل

$$\int (\text{س} - ٣)^{٢}\,\text{ءس} = \int \text{ص}^{٢}\,\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٣)^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

مثال (١): أجد $\int (٣س + ١)^{٩}\, ءس$

الحـــل: أفرض أن ص = ٣س + ١ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٣$ ، $ءس = \frac{ءص}{٣}$

أعوض في التكامل

$$\int (٣س + ١)^{٩}\, ءس = \int ص^{٩}\, \frac{ءص}{٣} = \frac{١}{٣} \int ص^{٩}\, ءص$$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ = \frac{ص^{١٠}}{٣٠} + جـ$$

$$= \frac{(٣س + ١)^{١٠}}{٣٠} + جـ$$

مثال (٢): أجـد $\int_{٠}^{١} س(٣س^{٢} - ١)^{٣}\, ءس$

الحل: نفرض أن ص = (٣س^{٢} – ١)، $\frac{ءص}{ءس} = ٦س$ ومنها $ءس = \frac{ءص}{٦س}$

أعوض في التكامل

$$\int س(٣س^{٢} - ١)^{٣}\, ءس = \int س ص^{٣}\, \frac{ءص}{٦س} = \frac{١}{٦} \int ص^{٣}\, ءص$$

$$= \frac{١}{٦} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = \frac{(٣س^{٢} - ١)^{٤}}{٢٤} + جـ$$

$$\int_{٠}^{١} س(٣س^{٢} - ١)^{٣}\, ءس = \left. \frac{(٣س^{٢} - ١)^{٤}}{٢٤} \right|_{٠}^{١}$$

$$= \frac{(٣ \times ١ - ١)^{٤}}{٢٤} - \frac{(٣ \times ٠ - ١)^{٤}}{٢٤} = \frac{١٥}{٢٤}$$

مثال (٣): أجــد $\int$ (٢س + ١)(س^{٢} + س − ٥)^{٣} ءس

الحل: أفرض أن ص = (س^{٢} + س − ٥) ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٢س + ١)

أعوض في التكامل

$\int$ (٢س + ١)(س^{٢} + س − ٥)^{٣} ءس = $\int$ (٢س + ١)(ص)^{٣} $\frac{\text{ءص}}{(\text{٢س+١})}$

= $\int$ ص^{٣} ءص = $\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}$ + جـ = $\frac{(\text{س}^{٢} + \text{س} - ٥)^{٤}}{٤}$ + جـ

٤ - ٦ تمارين ومسائل

أجــد التكاملات الآتية:

س١: $\int$ (٢ − ٣س)^{٣} ءس

س٢: $\int \frac{٣}{(\text{س} - ١)^{٥}}$ ءس

س٣: $\int$ (أس + ب)^{٤} ءس ، أ ، ب ثوابت

س٤: $\int$ س^{٢}(س^{٣} + ١)^{٤} ءس

س٥: $\int_{١}^{٢}$ (٢س − ٣)^{٢} ءس

س٦: $\int_{٠}^{١}$ (٢س − ٥)(س^{٢} − ٥س + ٧)$^{-٢}$ ءس

س٧: $\int \sqrt{\text{٣س} - ١}$ ءس

س٨: $\int$ (س + ٢) $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + \text{٤س}}$ ءس

٤ - ٧

تطبيقات على التكامل المحدود (إيجاد المساحات)

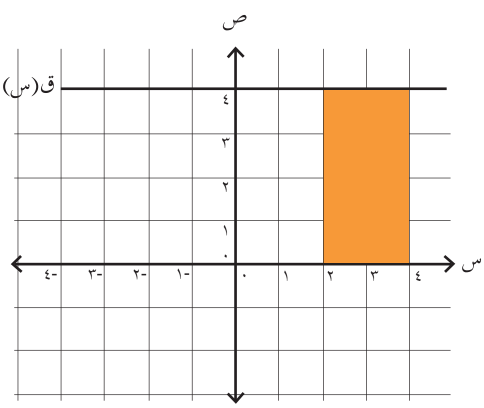
(Definite Integral Applications) (Areas)

نشاط ١

تعمل دائرة تسجيل الأراضي في فلسطين على تسجيل الأراضي بأسماء مالكيها الحقيقيين، ومن متطلبات هذا التسجيل معرفة مساحة كل قطعة من هذه الأراضي.
بعض من هذه القطع أشكالها هندسية مستوية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، إضافةً إلى الأشكال التي يمكن تركيبها من هذه الأشكال، وبعضها الآخر ذات أشكال غير منتظمة، لا يمكن حساب مساحتها باستخدام قوانين المساحات. كيف يمكن إيجاد مساحة مثل هذه القطع؟

في هذا الدرس سنستخدم التكامل المحدود لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في فترة معينة، علماً بأن ق(س) ممثل بيانياً ويقع منحناه فوق محور السينات.

نظرية: إذا كان ق(س) اقتراناً موجباً (فوق محور السينات)، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تساوي $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس



مثال (١): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢، س = ٤ كما في الشكل المجاور.

الحل: $\int_{٢}^{٤}$ ٤ ءس = ٤س $\Big|_{٢}^{٤}$ = ٤×٤ − ٤×٢ = ٨ وحدات مربعة.

ألاحظ أن المنطقة المحصورة هي مستطيلة الشكل.

مساحة المستطيل = الطول × العرض = ٤ × ٢ = ٨ وحدات مربعة.

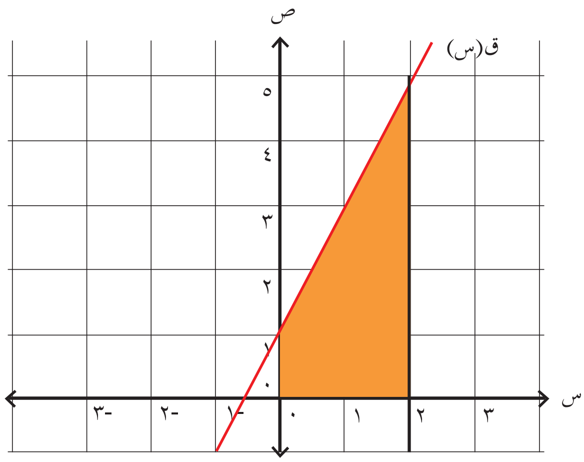
مثال (٢): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢س + ١ ومحور السينات، والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢، ألاحظ الشكل المرسوم.

الحل: المساحة (م) المظللة في الشكل تساوي

$$م = \int_{٠}^{٢} (٢س + ١)\, ءس = (س^{٢} + س) \Big|_{٠}^{٢}$$

$$= (٤+٢) - (٠) = ٦ \text{ وحدات مربعة}$$

هل يمكن حساب المساحة بطريقة أخرى؟



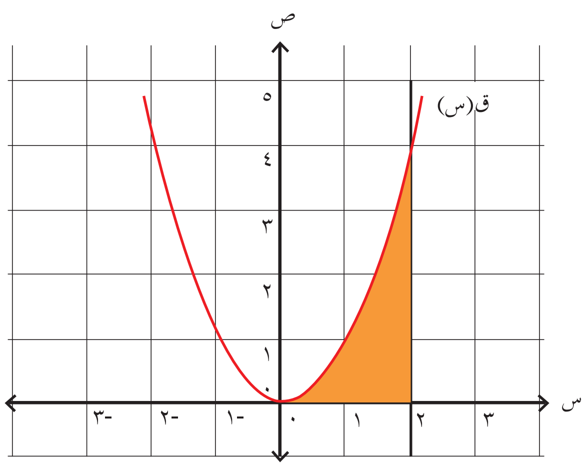
مثال (٣): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $س^{٢}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢ ، ألاحظ الشكل المرسوم.

الحل: المساحة (م) المظللة في الشكل تساوي

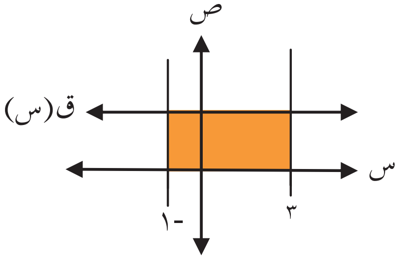
$$م = \int_{٠}^{٢} س^{٢}\, ءس = \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{٨}{٣} - \frac{٠}{٣} = \frac{٨}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

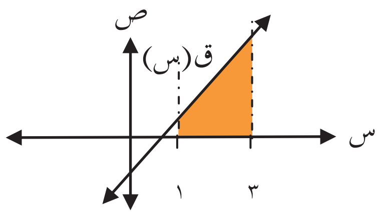
هل يمكن حساب المساحة بطريقة أخرى؟



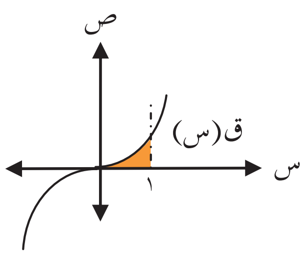
٤ - ٧ تمارين ومسائل



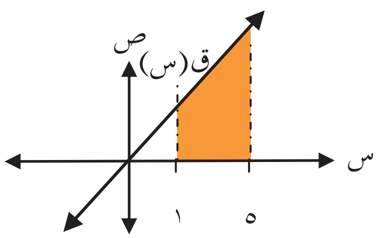
س١: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣، ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٣



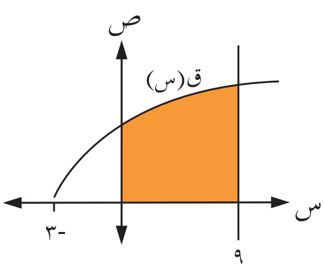
س٢: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣س − ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣



س٣: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $س^{٣}$ ، ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ١



س٤: إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = أس ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٥ تساوي ٨ فما قيمة الثابت أ ، أ > صفر.



س٥: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ك(س) = $\sqrt{٣س + ٩}$ ومحور السينات والمستقيمين س = صفر ، س = ٩.

٤ - ٨ تمارين عامة:

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) إذا كان ق(س) = $\int$ (٢س + ١) ءس فما قيمة ق$^{/}$(٢)؟

أ) صفر   ب) ٢   جـ) ٥   د) ٦

٢) ما الاقتران الذي يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة ق$^{/}$(س) = ٤س^{٢} + ٦س + ٢ ؟

أ) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ١   ب) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٦س^{٢} + ٢س + ١

جـ) ق(س) = ٨س + ٦   د) ق(س) = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢

٣) إذا كان $\int$ ق$^{/}$(س) ءس = ٣س − ٤س^{٢} + ٢، ما قيمة ق$^{/}$(١) ؟

أ) -٨   ب) -٥   جـ) ١   د) صفر

٤) ما هو $\int$ س $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ءس؟

أ) س$^{\frac{٥}{٣}}$ + جـ   ب) $\frac{٣}{٥}$س$^{\frac{٥}{٣}}$ + جـ   جـ) س$^{\frac{٨}{٣}}$ + جـ   د) $\frac{٣}{٨}$س$^{\frac{٨}{٣}}$ + جـ

٥) إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ ق$^{/}$(س) ءس = ١٢، وكان ق(٥) = ٢ق(٢)، ما قيمة ق(٢) ؟

أ) ١٢   ب) ٥   جـ) ٤   د) ٢

٦) إذا كان هـ(س) = $\int_{٠}^{٣}$ (٢س + ٣س^{٢} + ١) ءس، ما قيمة هـ$^{/}$(٢)؟

أ) صفر   ب) ٣   جـ) ٨   د) ١٥

٧) إذا كان $\int_{١}^{ب}$ ب ءس = ٢، ما قيمة/ قيم الثابت ب ؟

أ) ١ ، ٢   ب) ١ ، -٢   جـ) -١، ٢   د) -١ ، -٢

٨) إذا كان $\int_{٢}^{٧}$ ٣ق(س)ءس = ٩، $\int_{٧}^{٥}$ ق(س) ءس = -٢، ما قيمة $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) ءس ؟

أ) ٧   ب) ١١   جـ) ٥   د) ١

٩) ما قيمة $\int_{1}^{1} (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)^{٥}\, \text{ءس}$

أ) صفر ب) $(٤)^{٦}$ جـ) $(٤)^{٥}$ د) $\frac{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

١٠) $\int (٢\text{س} + ٣)^{٧}\, \text{ءس} =$

أ) $(٢\text{س}+٣)^{٨} + \text{جـ}$ ب) $\frac{(٢\text{س} + ٣)^{٨}}{٨} + \text{جـ}$

جـ) $\frac{(٢\text{س} + ٣)^{٨}}{١٦} + \text{جـ}$ د) $\frac{(٢\text{س} + ٣)^{٨}}{٤} + \text{جـ}$

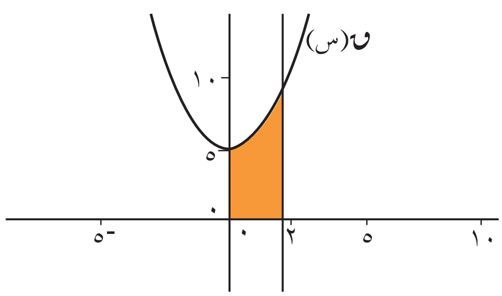
س٢: إذا علمت أن $\text{ق}^{/}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$، ق(٠) = ٣ أجد ق(١).

س٣: إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\text{ق}^{/}(\text{س}) = ٣ - ٢\text{س}$ ما قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (١، ٦).

س٤: إذا كان $\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ٧$ ، $\int_{1}^{3} \text{هـ}(\text{س})\, \text{ءس} = -٤$ ، ما قيمة $\int_{3}^{1} (٢\text{ق}(\text{س}) - ٥\text{هـ}(\text{س}) + ٢)\, \text{ءس}$ ؟

س٥: أجد $\int (٢\text{س} + ١) \sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤)^{٢}}\, \text{ءس}$.

س٦: أجد المساحة المحصورة بين منحنى
ق(س) = $\text{س}^{٢} + ٥$، ومحور السينات
والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢



س٧: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجد تكامل اقترانات غير محدودة			
اوظف قواعد التكامل في حل مسائل منتمية			
اكامل اقترانات باستخدام التعويض			
احل مشكلات وتطبيقات على التكامل المحدود			

الوحدة الخامسة

٥

الرياضيات المالية

(Financial Mathematics)

أين يقع هذا النفق ؟

يتوقع مـن الطلبـة بعـد الإنتهـاء مـن دراسـة هـذه الوحـدة والتفاعـل مـع أنشـطتها أن يكونـوا قادريـن علـى توظيـف مفاهيـم الفائـدة والسـندات فـي الحيـاة العمليّـة مـن خـلال الآتـي:

- التعرف إلى مفهوم الفائدة، وأنواعها.
- التعرف إلى عوامل الفائدة.
- إيجاد الفائدة البسيطة.
- إيجاد الفائدة المركبة.
- استنتاج الفرق بين الفائدتين البسيطة والمركبة.
- التعرف إلى مفهوم السندات، وأنواعها.

٥ - ١

الفائـــــدة
(Interest)

نشاط ١

يستثمر بعض الناس نقودهم عن طريق إيداعها في البنوك، حيث يقوم البنك باستثمارها في مشاريع تحقق لهم نسبة معينة من الأرباح، ويعطي فوائد للذين يدّخرون لديه بنسبة معينة، تسمى نسبة فائدة. وعندما يقترض أصحاب الأعمال من البنك، فإنه يأخذ منهم نسبة فائدة أيضاً مقابل ذلك.

فمثلاً، إذا أودع شخص مبلغ ٢٠٠ دينار في أحد البنوك، وكان هذا البنك يعطي فائدةً سنويةً نسبتها ٨٪ ، فما المبلغ الذي يقبضه الشخص من البنك أرباحاً عن المبلغ المودع؟ يقبض الشخص ٨ دنانير عن كل مائة دينار، لذا فإنه يقبض في نهاية العام ....

يسمى المبلغ ١٦ ديناراً الذي يقبضه في نهاية السنة الفائدة.

نشاط ٢

أم العبد امرأة فلسطينية زوجها أسير في سجون الاحتلال، لديها بنت وولد وتفكر كيف تؤمن لهما أقساط الدراسة الجامعية بعد ٦ سنوات، حيث إنها تمتلك مبلغ ٤٠٠٠ دينار ورثته عن أبيها، قررت فتح حساب بنكي لهما بمبلغ ٢٠٠٠ دينار، وأبلغها الموظف في البنك أنها ستحصل على ٢٠٠ دينار زيادة سنوياً:

١- ما مقدار الزيادة التي تحصل عليها أم العبد بعد ٦ سنوات؟

الزيادة بعد السنة الأولى : ٢٠٠ دينار.

الزيادة تكون ٦٠٠ بعد السنة ....

الزيادة بعد السنة السادسة :..............

٢- تسمى هذه الزيادة:................، النسبة المئوية للزيادة : ١٠٪ . لماذا؟

٣- جملة المبلغ الذي ستحصل عليه بعد ٦ سنوات: ....

٤- العوامل المؤثرة في الفائدة: الزمن، ....، ....

تعريف الفائدة (Interest):

هو المبلغ الذي يدفع مقابل استخدام المال، أو هي عائد استثمار مبلغ ما بمعدل معين لزمن معين. ويعبر عنه عادة بنسبة مئوية تسمى "سعر الفائدة" أو "معدل الفائدة" وهي نوعان:

الفائدة البسيطة: وهي الفائدة التي تحسب على أصل المبلغ في نهاية كل فترة زمنية.

الفائدة المركبة: وهي الفائدة التي تحسب على أصل المبلغ بعد إضافة الفائدة إلى الأصل في نهاية كل فترة زمنية، أي أنه بعد نهاية كل فترة زمنية يكون لدينا أصل جديد، وهذا الأصل الجديد هو أصل المبلغ السابق مضافاً إليه الفائدة من الفترة السابقة.

العوامل المؤثرة في حساب الفائدة، هي:

١- أصل المبلغ، ويرمز له بالرمز (م): وهو عبارة عن مبلغ القرض، أو المبلغ المستثمر.

٢- معدل الفائدة ويرمز لها بالرمز (ع): هو العائد من وحدة رأس المال (دينار) لكل وحدة زمن (سنة)[١].

٣- الفترة الزمنية ويرمز لها بالرمز (ن): وهي عبارة عن مدة القرض، أو مدة الاستثمار.

الفائدة البسيطة (Simple Interest):

تستخدم الفائدة البسيطة عند اقتراض الأموال، أو استثمارها لفترة زمنية قصيرة الأجل (عادة أقل من سنة)، وتحسب دائماً على أصل المبلغ عن كل وحدة زمنية، أي أنها لا تعتبر من فترة زمنية إلى أخرى عند ثبات أصل القرض، أو أصل المبلغ المستثمر.

تسمى هذه الفائدة بالفائدة البسيطة، وتحسب بالعلاقة:

ف = م × ع × ن

جملة المبلغ بفائدة بسيطة = المبلغ الأصلي + الفائدة البسيطة.

جـ = م + ف

حيث: (**ف**) هي الفائدة ،(م) أصل المبلغ، و(ع) معدل الفائدة، و(ن) الفترة الزمنية، أو المدة بالسنوات، وإذا كانت بالأشهر = عدد الأشهر ÷ ١٢

مثال (١): استثمر يامن مبلغ ١٠٠٠ دينار لمدة ٣ سنوات في أحد البنوك بمعدل فائدة سنوي قدره ٧٪ ، أجد مقدار الفائدة البسيطة، وجملة المبلغ.

الحل: المعطيات: م = ١٠٠٠ دينار ، ع = ٧٪ ، ن = ٣ سنوات.

ف = م × ع × ن = ١٠٠٠ × ٠,٠٧ × ٣ = ٢١٠ دنانير.

جملة المبلغ = المبلغ الأصلي + الفائدة البسيطة

جملة المبلغ = ١٠٠٠ + ٢١٠ = ١٢١٠ دنانير.

---

١ تم التعارف على كتابة معدل الفائدة في مقدار العائد لكل ١٠٠ وحدة من النقود / لكل وحدة زمن لذلك فإن معدل الفائدة يكتب كنسبة مئوية

مثال (٢): إذا كان العائد (الفائدة) من استثمار مبلغ تم استثماره لمدة ٤ سنوات هو ٤٨٠ ديناراً. أجد أصل المبلغ المستثمر، علماً بأن معدل الفائدة هو ٨٪ سنوياً.

الحل: المعطيات: ن = ٤ سنوات ، ف = ٤٨٠ ديناراً ، ع = ٨٪

ف = م × ع × ن

٤٨٠ = م × ٠,٠٨ × ٤

$$\text{م} = \frac{٤٨٠}{٠,٣٢} = ١٥٠٠ \text{ دينار}$$

نشاط ٣

أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

	المبلغ	معدل الفائدة البسيطة	الزمن بالسنوات	الفائدة	الجملة
١	٤٠٠٠	١٢٪	٣		
٢		٦٪	٤	٣٦٠٠	
٣	٥٠٠٠	٧٪			٨٥٠٠
٤			٥		
المجموع	٣٠٠٠٠			٩٢٩٠	

أنواع الفائدة البسيطة:

إذا كانت مدة الإيداع بالأيام، نميز بين طريقتين لحساب الفائدة البسيطة:

١) الفائدة التجارية : (ف): حيث تعتبر عدد أيام السنة في الفائدة التجارية ٣٦٠ يوماً،

أي ن = المدة بالأيام ÷ ٣٦٠

٢) الفائدة الصحيحة ($\overline{\text{ف}}$): حيث تعتبر عدد أيام السنة في الفائدة الصحيحة [1] ٣٦٥ يوماً

أي ن = المدة بالأيام ÷ ٣٦٥

١ السنة الكبيسة عدد أيامها ٣٦٦ يوماً (سنقتصر في دراستنا على السنة العادية فقط).

مثال (٣): أجد قيمة كل من الفائدة التجارية والصحيحة المترتبة على مبلغ قدره ٢٠٠٠٠ دينار، استثمر بمعدل فائدة بسيطة ٦٪ سنوياً لمدة ٩٠ يوماً، علماً بأن السنة عادية. ماذا نستنتج ؟

الحل: الفائدة التجارية:

$$\text{ف} = \text{م} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\text{ف} = ٢٠٠٠٠ \times ٠{,}٠٦ \times \frac{٩٠}{٣٦٠} = ٣٠٠ \text{ دينار.}$$

الفائدة الصحيحة:

$$\overline{\text{ف}} = \text{م} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\overline{\text{ف}} = ٢٠٠٠٠ \times ٠{,}٠٦ \times \frac{٩٠}{٣٦٥} = ٢٩٥{,}٩ \text{ ديناراً.}$$

ألاحظ أن الفائدة الصحيحة اقل من الفائدة التجارية.

لذلك تستخدم البنوك الفائدة التجارية عند منح القروض، والفائدة الصحيحة عند فتح حسابات التوفير.

ملاحظة: يكتفى بالحل لأقرب ثلاث منازل عشرية.

٥ - ١ تمارين ومسائل

س١: أودعت عبير مبلغاً قدره ١٣٨٠٠ دينار في بنك لمدة ١٠ أشهر، بمعدل فائدة بسيطة ٤٪ سنوياً، أجد:

أ) مقدار الفائدة.

ب) الجملة البسيطة للمبلغ في نهاية المدة.

س٢: أجد مقدار المبلغ الذي يجب إيداعه في بنك لمدة ٨ سنوات، للحصول على جملة مقدارها ٥٦٠٠ دينار بمعدل فائدة بسيطة ٥٪.

س٣: أحسب عدد الأشهر اللازمة لاستثمار مبلغ قدره ٢٤٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة ٨٪ سنوياً ليعطي فائدة قدرها ٨٠٠ دينار.

س٤: اقترض تاجر من البنك مبلغ ١٢٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة مقدارها ١١٪ لمدة ٣ سنوات أحسب جملة المبلغ.

س٥: قامت فيروز باستثمار مبلغ ١٢٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة ٣٪ سنوياً من أصل المبلغ المستثمر. أجد:

أ) الفائدة التي تحصل عليها فيروز في ٣ أشهر.

ب) الفترة الزمنية اللازمة للحصول على عوائد قدرها ٢١٦٠ ديناراً.

س٦: أودع جورج مبلغ ٨٠٠٠ دينار لمدة ٢٤٠ يوماً، بمعدل فائدة بسيطة ١٢٪ سنوياً. أحسب الفائدة التجارية والصحيحة.

س٧: حصلت لبنى على فوائد من البنك قيمتها ٤٢٠ ديناراً مقابل استثمارها مبلغ ١٢٠٠٠ دينار في حساب الربح البسيط لمدة ٧ شهور. أجد معدل الفائدة البسيطة التي يمنحها البنك للبنى.

٥ - ٢

الفائـــدة المركبـــة
(Compound Interest)

نشاط ١

تتنافس البنوك في جذب الإيداعات المالية للأفراد والشركات، وذلك للربح وزيادة رأس المال.

فاز فادي في إحدى المسابقات، وحصل على مبلغ ١٠٠٠٠ دينار، وذهب إلى أحد البنوك لاستثمار هذا المبلغ لمدة ٣ سنوات، فأخبره موظف البنك بأن لهذا المبلغ ربحين مختلفين في نهاية الثلاث سنوات، بفائدة واحدة ٦٪ تعجب فادي وتساءل عن الفرق في الربح:

١- ربح فادي بعد سنة ٦٠٠ دينار بحساب الربح البسيط.

٢- ربح فادي بعد ٣ سنوات .... بحساب الربح البسيط.

٣- ربح فادي بعد سنتين ١٢٠٠ دينار بحساب الربح البسيط، و ١٢٣٦ ديناراً بربح من نوع آخر. كم الفرق بين الربح في حسابين مختلفين..................

مفهوم الفائدة المركبة:

استعرضنا في الصف الحادي عشر مفهوم الفائدة المركبة وكيفية حسابها على الاستثمارات طويلة الآجال بشكل عام، وسوف نتعرف في هذا الدرس على تطبيقاتها الأخرى، وأنواعها.

مفهوم الفائدة المركبة: هي المردود المالي الناتج من استثمار مبلغ من المال خلال مدة زمنية محددة بمعدل فائدة معين، بحيث يضاف هذا المردود إلى المبلغ الأصلي في نهاية كل دورة زمنية، وتحسب جملة المبلغ بالفائدة المركبة حسب العلاقة:

جـ = م (١+ع)^{ن}

ف = جـ - م

م: المبلغ الأصلي ، ن: المدة الزمنية ، ع: المعدل ، **ف**: الفائدة المركبة ، جـ: جملة المبلغ.

مثال(١): أودع مبلغ ٣٠٠٠٠ دينار في بنك لمدة ٧ سنوات بمعدل فائدة مركبة ٦٪ سنوياً. أجد:

١) جملة المبلغ. ٢) مقدار الفائدة المركبة.

جـ = م (١+ع)^{ن}

جـ = ٣٠٠٠ (١+ ٠,٠٦)^{٧} = ٣٠٠٠ × ١,٥٠٣ = ٤٥١٠٨,٩ دينار

ف = جـ - م

ف = ٤٥١٠٨,٩ - ٣٠٠٠٠ = ١٥١٠٨,٩ دنانير.

مثال(٢): ما المبلغ الذي استثمره فادي لمدة ٦ سنوات، في بنك يعطي فائدة مركبة بمعدل ٩٪ سنوياً، فأعطى مبلغاً جملته ١٦٧٧١٠ دنانير.

جـ = م (١+ع)^{ن}

١٦٧٧١٠ = م (١,٠٩)^{٦}

م = $\dfrac{\text{١٦٧٧١٠}}{(\text{١,٠٩})^{\text{٦}}}$ = ٩٩٩٩٩,٩٩ ≈ ١٠٠٠٠٠ دينار

مثال(٣): يوفر نزار مبلغ ١٠٠٠ دينار في أحد البنوك، بفائدة مركبة ٦٪ سنوياً، إذا بلغت جملة المبلغ ٢٤٠٠ دينار. أجد الفترة الزمنية التي استثمر فيها المبلغ.

جـ = م (١+ع)^{ن}

٢٤٠٠ = ١٠٠٠(١,٠٦)^{ن} ومنها ٢,٤ = (١,٠٦)^{ن}

وباستخدام الآلة الحاسبة العلمية نأخذ لوغاريتم الطرفين:

لـو٢,٤ = **لـو**(١,٠٦)^{ن} ومنها ن = $\dfrac{\textbf{لـو}\text{٢,٤}}{\textbf{لـو}\text{١,٠٦}}$ = ١٥,٠٢سنة

إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام:

عند إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام، يكون قانون الجملة المستخدم في هذه الحالة، هو:

جـ = م $(\text{١}+\dfrac{\text{ع}}{\text{ر}})^{\text{ن ر}}$، حيث ر: عدد مرات إضافة الفائدة

مثال (٤): أحسب رأس المال الناتج من توظيف مبلغ ٣٠٠٠ دينار في بنك يعطي فائدة مركبة معدلها ٨٪ سنوياً لمدة ٩ سنوات، وتضاف الفائدة مرتين في العام، ثم أحسب الفائدة المركبة.

الحل: جـ = م $(\text{١}+\dfrac{\text{ع}}{\text{ر}})^{\text{ن ر}}$

جـ = ٣٠٠٠ $(\text{١}+\dfrac{\text{٠,٠٨}}{\text{٢}})^{\text{٩×٢}}$ = ٣٠٠٠(١,٠٤)^{١٨} = ٦٠٧٧,٤٥ ديناراً.

الفائدة المركبة = جـ - م = ٦٠٧٧,٤٥ - ٣٠٠٠ = = ٣٠٧٧,٤٥ ديناراً.

نشاط ٢

أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

	المبلغ	المعدل	المدة بالسنوات	الجملة	الفائدة
أ	٢٠٠٠٠	٤٪ سنوياً		٢٩٦٠٤,٨٨	
ب		٧٪ كل ٦ شهور	٦,٥ سنة	٣٦١٤٧,٦٨	٢١١٤٧,٦٨
ج	٨٠٠٠	١١,٥٪سنوياً		١٩١١١,٢٤	
د	١٠٠٠٠	٣,٧٪ كل ٣ شهور			١٠٦٨١,١٧

٥ - ٢ تمارين ومسائل

س١: أودعت جمعية الأمل للمكفوفين ٨٠٠٠ دينار في بنك، بحساب فائدة مركبة معدلها السنوي ٩٪ أجد جملة المبلغ بعد ٦ سنوات.

س٢: أودعت سعاد مبلغ ٥٠٠٠ دينار في البنك، بحساب فائدة مركبة معدلها ٧,٥٪ سنوياً. أجد عدد السنوات التي تلزم حتى تصبح جملة المبلغ ٧١٧٨,١٤٦٦ ديناراً .

س٣: أودع غسان ٤٠٠٠٠ دينار في بنك بفائدة مركبة بمعدل ما وفي نهاية ٨ سنوات بلغت الفوائد المستحقة له ١٥٦٥٧,٨٥ ديناراً. أجد معدل الفائدة المركبة السنوي.

س٤: أحسب رأس المال الناتج من توظيف مبلغ ١٥٠٠٠ دينار في بنك، يعطي فائدة مركبة معدلها ٧٪ سنوياً لمدة ٥ سنوات، وتضاف الفائدة مرتين في العام، ثم أحسب الفائدة المركبة.

س٥: اقترض ماجد مبلغ ٨٠٠٠ دينار من البنك بمعدل فائدة مركبة ٨٪ سنوياً، وبعد مدة زمنية كان المبلغ المطلوب منه ١٤٨٠٧,٤٤ دنانير، أجد مدة الاستثمار لهذا المبلغ.

س٦: أودع رامي مبلغ ٥٠٠٠ دينار في بنك بمعدل فائدة مركبة ١٢ ٪ سنوياً ولمدة ٣ سنوات، فإذا علمت أن الفوائد تضاف كل ٣ شهور. أجد جملة الوديعة.

٥ - ٣

السندات
(Bonds)

نشاط ١

نشاط (١): للشركات والمؤسسات الأهلية في فلسطين دور كبير في توفير فرص عمل لذوي الدخل المحدود والحالات الخاصة عن طريق تطوير بعض المشاريع.
تنوي مؤسسة الشهيدة شادية أبو غزالة التسوية إقامة مصنع لحفظ وتغليف المنتجات الزراعية في منطقة الأغوار، واتفقت عضوات الهيئة الإدارية للمؤسسة البحث عن طرق مختلفة لتمويل التكاليف، حيث اقترحت إحدى العضوات اخذ قرض من البنك وأخرى اقترحت بيع قطعة ارض تابعة للمؤسسة، وأخيرا قررت الهيئة الإدارية للمؤسسة إصدار سندات قيمتها الاسمية ١٠٠٠٠ دينار وبمعدل ١٠٠ دينار لكل سند وفائدة اسمية ٨٪.
إذا اشترت مها ٢٠ سنداً, ما مقدار الإيراد منها بعد ٥ سنوات؟ ....

السند: هو أداة دين يصدر عن الدولة أو الشركات المساهمة العامة أو عن بعض البلديات من أجل تمويل بعض المشاريع.
تطرح السندات للبيع في سوق المال لتحصيل مبالغ لتمويل الشركات أو المشروعات الكبيرة. وتصنف السندات وفقا لمعايير مختلفة مثل: الجهة المصدرة ، فترة الاستحقاق ، الفائدة، .... الخ.
ويكتب على السند معلوماته الرئيسة وهي: اسم الجهة المصدرة للسند وقيمته الاسمية ومعدل فائدته الاسمية والمدة الزمنية لاستحقاقه.

ويرتبط حساب السندات بعدة عوامل وهي:

١. القيمة الاسمية للسند: وهي القيمة النقدية التي تكون مدونة على السند. ويرمز لها بالرمز م .
٢. معدل الفائدة الاسمي (السنوية): ويرمز له بالرمز ع.
٣. المدة الزمنية لاستحقاق السند: ويرمز له بالرمز ν .
٤. مبلغ الفائدة عن كل وحدة زمنية ويرمز له بالرمز **ف** ، ويساوي حاصل ضرب القيمة الاسمية للسند في معدل الفائدة الاسمي له، إذا كانت الفائدة تدفع سنويا. حيث أن م **ف** ع
٥. معدل فائدة الاستثمار السوقية وهو قد يكون مساويا لمعدل الفائدة الاسمي أو أقل منه أو يساويه، ويرمز له بالرمز $\overline{ع}$.
٦. القيمة الحالية للقيمة الاسمية للسند: وهي تختلف من سنة إلى أخرى.

حيث أن القيمة الحالية للقيمة الاسمية للسند = $\frac{م}{(١+\overline{ع})^{ν}}$

٧. القيمة الحالية للفوائد وتساوي **ف** $\times \left[\dfrac{\left(\text{١} - \dfrac{\text{١}}{(\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}}}\right)}{\text{ع}} \right]$

٨. القيمة الحقيقية للسند ويرمز لها بالرمز ق(ح) وهي القيمة السوقية (الفعلية) للسند وبناء عليها يتم تقييم السند في لحظة ما، ويتم اتخاذ القرار ببيع المستثمر للسند في سوق الأوراق المالية أو استرجاعه من قبل الجهة المصدرة، حيث أن:

القيمة الحقيقية للسند = القيمة الحالية للفوائد + القيمة الحالية للقيمة الاسمية للسند

$$\text{ق(ح)} = \text{ف} \times \left[\dfrac{\left(\text{١} - \dfrac{\text{١}}{(\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}}}\right)}{\text{ع}} \right] + \left(\dfrac{\text{م}}{(\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}}} \right)$$

مثال (١): سند قيمته الاسمية ٥٠٠ دينار يستهلك بعد ١٠ سنوات بمعدل فائدة اسمي للسند ٨٪ سنويا، يستهلك السند قيمته الاسمية أجد القيمة الحقيقية للسند في الحالات الآتية:

١) معدل فائدة الاستثمار السوقية ٩٪سنويا.

٢) معدل فائدة الاستثمار السوقية ٨٪سنويا.

الحل: ١) معدل الفائدة الاسمي للسند ٨٪ سنويا ومعدل فائدة الاستثمار السوقية ٩٪سنويا.

$$\text{ف} = \text{م} \times \text{ع} = \text{٥٠٠} \times \dfrac{\text{٨}}{\text{١٠٠}} = \text{٤٠ديناراً}$$

$$\text{ق(ح)} = \text{ف} \times \left[\dfrac{\left(\text{١} - \dfrac{\text{١}}{(\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}}}\right)}{\text{ع}} \right] + \left(\dfrac{\text{م}}{(\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}}} \right)$$

$$\text{ق(ح)} = \text{٤٠} \times \left[\dfrac{\left(\text{١} - \dfrac{\text{١}}{(\text{١}+\text{٠,٠٩})^{\text{١٠}}}\right)}{\text{٠,٠٩}} \right] + \dfrac{\text{٥٠٠}}{(\text{١}+\text{٠,٠٩})^{\text{١٠}}}$$

$$\text{ق(ح)} = \text{٤٠} \times \left[\dfrac{\left(\text{١} - \dfrac{\text{١}}{\text{٢,٣٦٧}}\right)}{\text{٠,٠٩}} \right] + \dfrac{\text{٥٠٠}}{\text{٢,٣٦٧}} = \text{٤٠} \times \left[\dfrac{\text{١} - \text{٠,٤٢٢}}{\text{٠,٠٩}} \right] + \text{٢١١,٢٣٧}$$

ملاحظة: لا يوجد في فلسطين مؤسسات تطرح السندات.

$$\text{ق(ح)} = ٤٠ \times \left(\frac{٠,٥٧٨}{٠,٠٩}\right) + ٢١١,٢٣٧$$

$$\text{ق(ح)} = ٤٠ \times [٦,٤٢٢] + ٢١١,٢٣٧ \text{ ديناراً.}$$

$$= ٤٦٨,١١٧ \text{ ديناراً.}$$

٢) معدل الفائدة الاسمي للسند ٨٪ سنويا ومعدل فائدة الاستثمار السوقية ٨٪سنويا.

$$\text{ق(ح)} = \text{ف} \times \left[\frac{\left(١ - \frac{١}{(١+\text{ع})^{\text{ن}}}\right)}{\text{ع}}\right] + \left(\frac{\text{م}}{(١+\text{ع})^{\text{ن}}}\right)$$

$$\text{ق(ح)} = ٤٠ \times \left[\frac{\left(١ - \frac{١}{(١+٠,٠٨)^{١٠}}\right)}{٠,٠٨}\right] + \frac{٥٠٠}{(١+٠,٠٨)^{١٠}}$$

$$\text{ق(ح)} = ٤٠ \times \left[\frac{\left(١ - \frac{١}{٢,١٥٨٩}\right)}{٠,٠٨}\right] + \frac{٥٠٠}{٢,١٥٨٩}$$

$$\text{ق(ح)} = ٤٠ \times \left(\frac{١ - ٠,٤٦٣١}{٠,٠٨}\right) + ٢٣١,٦٠$$

$$\text{ق(ح)} = ٤٠ \times \left(\frac{٠,٥٣٦٩}{٠,٠٨}\right) + ٢٣١,٦٠$$

$$\text{ق(ح)} = ٤٠ \times (٦,٧١) + ٢٣١,٦٠$$

$$= ٢٦٨,٤ + ٢٣١,٦٠$$

$$\text{ق(ح)} = ٥٠٠ \text{ ديناراً.}$$

أتعلم

عندما يكون معدل الفائدة الاسمي على السند يساوي معدل فائدة الاستثمار السوقية تكون القيمة الحقيقية للسند تساوي القيمة الاسمية له. وعندما يكون معدل الفائدة الاسمي على السند أقل من معدل فائدة الاستثمار السوقية تكون القيمة الحقيقية للسند أقل من القيمة الاسمية، والعكس صحيح.

مثال (٢): أصدرت إحدى الشركات المساهمة العامّة سندات، القيمة الاسمية للسند ٥٠٠٠ دينار لمدة ١٦ سنة، بمعدل فائدة اسمي ١٢٪ ومعدل فائدة الاستثمار السوقية ٨٪، أجد القيمة الحقيقية للسند، علماً بأن الفائدة تدفع كل ربع سنة.

الحل: $\overline{ع} = \frac{٠,٠٨}{٤} = ٠,٠٢$ ، $ع = \frac{٠,١٢}{٤} = ٠,٠٣$ ، $ن = ١٦ \times ٤$

$ف = م \times ع = ٥٠٠٠ \times ٠,٠٣ = ١٥٠$ ديناراً

$$ق(ح) = ف \times \left(\frac{١ - \frac{١}{(١+\overline{ع})^{ن}}}{\overline{ع}} \right) + \frac{م}{(١+\overline{ع})^{ن}}$$

$$ق(ح) = ١٥٠ \times \left[\frac{١ - \frac{١}{(١+٠,٠٢)^{٦٤}}}{٠,٠٢} \right] + \frac{٥٠٠٠}{(١+٠,٠٢)^{٦٤}}$$

$$ق(ح) = ١٥٠ \times \left[\frac{١ - \frac{١}{٣,٥٥١}}{٠,٠٢} \right] + \frac{٥٠٠٠}{٣,٥٥١}$$

$$ق(ح) = ١٥٠ \times \left[\frac{١ - ٠,٢٨١}{٠,٠٢} \right] + \frac{٥٠٠٠}{٣,٥٥١}$$

$ق(ح) = (١٥٠ \times ٣٥,٩٥) + ١٤٠٨,٠$

$ق(ح) = ٥٣٩٢,٥ + ١٤٠٨,٠$

$= ٦٨٠٠,٥$ ديناراً.

٥ - ٣ تمارين ومسائل

س١: أجد القيمة الحقيقية لسند قيمته الاسمية ٤٥٠٠ دينارا لمدة ٥ سنوات ومعدل فائدته الاسمية ٧٪ سنويا، علما بان فائدة الاستثمار السوقية ٧٪ أيضاً، علما بأن $(١٫٠٧)^{٥}$ = ١٫٤٠٣.

س٢: اشترت يمنى سندا قيمته الاسمية ١٥٠٠ دينارا لمدة ٥ سنوات بمعدل فائدة اسمي ٧٪ سنويا ومعدل فائدة الاستثمار السوقية ٦٪ أجد القيمة الحقيقية للسند. علما بأن $(١٫٠٦)^{٥}$ = ١٫٣٣٨.

س٣: سند قيمته الاسمية ٣٦٠٠ دينار لمدة ٨ سنوات ومعدل فائدته الاسمية ٦٪ سنويا، إذا كان معدل فائدة الاستثمار السوقية ٩٪ أجد القيمة الحقيقية لهذا السند.

س٤: بلغ معدل الاستثمار في السوق المالية ٧٪ سنويا لمدة ٣ سنوات لسند قيمته الحقيقية ١٧٠٠ ديناراً ومعدل فائدته الاسمي ٧٪ سنويا أجد القيمة الاسمية للسند.

س٥: سند قيمنه الاسمية ٤٠٠٠ ديناراً لمدة ٥ سنوات، إذا كان معدل فائدة الاستثمار السوقية ١٠٪ أجد معدل الفائدة الاسمي علما بأن القيمة الحقيقية للسند هي ٧٤٨٤٫٤٧٢ دينار.

ملاحظة: في مثل هذه الأسئلة يعطى الطالب قيمة المقدار $(١+\overline{ع})^{ن}$، وفي أسئلة الفائدة المركبة يعطى قيم بعض اللوغاريتمات.

٥ - ٤

أنواع السندات
(Types of bond)

نشاط ١

إن التطور والتوسع التجاري الحاصل في الأسواق، قابله تطور في آلية عرض المعاملات المالية وتنوعها، وبالأخص السندات.

ينوي يامن استثمار مبلغ من المال بشراء سندات، ومن ضمن العروض المتوفرة سند قيمته ١٠٠٠ دينار وعائده الاسمي ٣٪ ومدته سنة، وسند قيمته ١٠٠٠ دينار، وعائده الاسمي حسب سعر الفائدة السوقي، ومدته ١٠ سنوات.

أي العروض أفضل للاستثمار؟ ....

هنا يجب أن لا ننظر فقط لمقدار الفائدة، بل يجب أخذ مدة الاستحقاق بعين الاعتبار، حيث إن السند الأول يسترجع قيمته كاملة في نهاية العام الأول إضافة إلى ٣٪، بينما يحصل صاحب السند الثاني على فائدة قيمتها ٥٪ ولكن سعرها غير معلوم في نهاية العام، أي هنالك أنواع مختلفة للسندات، من حيث الفائدة.

أنواع السندات من حيث الفائدة:

للسندات أنواع كثيرة من حيث الفائدة، منها: السندات المستديمة (ذات معدل الفائدة الثابت) وذات معدل الفائدة المتحرك، وصفرية الكوبون والدخل والمشاركة والرديئة.

سنتطرق في دراستنا إلى السندات المستديمة فقط:

١) السندات المستديمة:

هذا النوع من السندات ليس له فترة سداد محدد، وتصدرها عادة الحكومات لتمويل مشروعاتها، . ويستطيع حامل السند استرداد القيمة ببيع السند في السوق المالية، ويمكن حساب ثمن الشراء (القيمة الشرائية) لهذا السند باستخدام علاقة القيمة الحالية للدفعات المستديمة، أي أن ثمن شراء السند.

$$\text{ق(ح)} = \frac{\text{م} \times \text{ع}}{\overline{\text{ع}}} \quad \text{، علماً بأن ف} = \text{م} \times \text{ع}$$

م: القيمة الاسمية.

ع: معدل الفائدة السنوية.

$\overline{\text{ع}}$: معدل الفائدة في السوق المالي، وتسمى معدل الاستثمار.

ق(ح): القيمة الحالية للسندات المستديمة.

مثال (١): أصدرت إحدى الشركات المساهمة العامة، سندات مستديمة القيمة الاسمية للسند ١٠٠٠ دينار ومعدل الفائدة الاسمي على هذه السندات يساوي ٨٪ سنوياً، إذا كان معدل الفائدة في السوق ١٠٪ أجد القيمة الحقيقية لهذه السندات.

الحل: $ق(ح) = \frac{م \times ع}{\overline{ع}} = \frac{١٠٠٠ \times ٠,٠٨}{٠,١٠} = ٨٠٠$ دينار

مثال (٢): أصدرت إحدى الشركات المساهمة العامة سندات مستديمة بمعدل فائدة اسمي ١٠ ٪ ومعدل الفائدة في السوق ١٢٪ أجد القيمة الاسمية للسند، علماً بأن القيمة الحقيقية تساوي ٣٦٠٠ دينار.

الحل: $ق(ح) = \frac{م \times ع}{\overline{ع}}$

$٣٦٠٠ = \frac{م \times ٠,١}{١٢٪}$ ومنها $م = \frac{٤٣٢}{٠,١}$ أي أن $م = ٤٣٢٠$ ديناراً وهي القيمة الاسمية.

مثال (٣): استثمر سامي في شراء سندات مستديمة بقيمة اسمية ٥٠٠٠ ديناراً للسند بمعدل فائدة اسمي ع، ومعدل الفائدة في السوق ٨ ٪ فإذا كانت القيمة الحقيقية للسند حالياً ٦٢٥٠ ديناراً أجد معدل الفائدة الاسمية.

الحل: $م = ٥٠٠٠$ ، $\overline{ع} = ٨ ٪$ ،

$ق(ح) = ٦٢٥٠$

$ق(ح) = \frac{م \times ع}{\overline{ع}}$

$٦٢٥٠ = \frac{٥٠٠٠ \times ع}{٠,٠٨}$

ومنها $ع = ١٠ ٪$ لماذا؟

٥ - ٤ تمارين ومسائل

س١: أجد القيمة الحالية لسند دائم قيمته الاسمية ٤٥٠٠ دينار، ومعدل فائدته ٨٪ علماً بأن الفائدة الدورية الأولى تؤدى بعد ٧ سنوات، ومعدل الفائدة في السوق المالية ٦٪ سنوياً.

س٢: أجد ثمن شراء سند قيمته الاسمية ٣٠٠٠ دينار، يستهلك بعد ١٢ سنة بالقيمة الاسمية نفسها، وتدفع فوائده كل ثلاثة شهور، وبمعدل سنوي ٨٪ إذا علمت أن معدل الاستثمار في السوق المالية ٥٪ كل ثلاثة شهور. (ملاحظة: ٣ شهور تعني ربع سنوي).

س٣: أصدرت شركة مساهمة عامة سندات مستديمة بقيمة اسمية ٤٠٠٠ دينار للسند وبمعدل فائدة اسمي ٩٪ فإذا علمت أن القيمة الحقيقية للسند تساوي ٥١٤٢,٨٦، أجد معدل الفائدة السوقي.

س٤: اشترى وليد سندات مستديمة من أحد الشركات المساهمة العامة بقيمة اسمية ٣٠٠٠ دينار للسند وبمعدل فائدة اسمي ١٢٪، فإذا كان معدل الفائدة في السوق ١٢٪، أجد القيمة الحقيقية للسندات.

٥ - ٥ تمارين عامة:

س١: أختار رمز الإجابة الصحيحة مما يأتي:

١) إذا استثمر مبلغ قدره ٨٢٠٠٠ دينار، بمعدل ٥٪ سنوياً، فما الفائدة البسيطة بعد ٦ سنوات:

أ) ٢٤٢٠٠ ب) ٢٤٩٠٠ جـ) ٢٤١٠٠ د) ٢٤٦٠٠

٢) استثمر مبلغ قدره ٥٠٠٠ دينار بمعدل ٨٪ سنوياً، فما الجملة البسيطة للمبلغ بعد ١٠ سنوات:

أ) ٩٠٠٠ ب) ٥٤٠٠ جـ) ٩٤٠٠ د) ٩٥٠٠

٣) إذا بلغت الفائدة البسيطة لمبلغ ٨٠٠ دينار ٨٠ ديناراً، فإن معدل الفائدة يساوي:

أ) ٥٪ ب) ١٨٪ جـ) ١٠٪ د) ١٥٪

٤)إذا كانت الفائدة التجارية لمبلغ ما تساوي ١٤٦ فما قيمة الفائدة الصحيحة؟

أ) ١٤٩ ب) ١٤٤ جـ) ١٤٦ د) ١٤٧

٥) أصدرت إحدى الشركات المساهمة العامة سندات القيمة الاسمية للسند ١٠٠٠٠٠ دينار لمدة ١٥ سنة، وتحمل معدل فائدة اسمي ١٠٪ ، ومعدل الفائدة بالسوق ١٠٪ ما القيمة الحقيقية للسند في تاريخ الاستحقاق؟

أ) ١٠٠٠ دينار ب) ١٠٠٠٠٠ دينار جـ) ١٠٠٠٠ دينار د) ١١٠٠٠٠ دينار

٦) أي من الآتية ليست من عناصر احتساب الفائدة؟

أ) مبلغ القرض ب) سعر الفائدة جـ) المدة د) جملة المبلغ

٧) أراد علي أن يستثمر مبلغ ٢٨٠٠ دينار بفائدة بسيطة بمعدل ٤٪ سنوياً، وحصل في نهاية المدة على فائدة مقدارها ٢٨٠ ديناراً، كم مدة الاستثمار؟

أ) ٨ سنوات ب) سنة ونصف جـ) سنتان ونصف د) ٣ سنوات

٨) تتساوى الفائدة المركبة مع الفائدة البسيطة في:

أ) جميع فترات القرض ب) الفترة الأولى للقرض فقط

جـ) الفترتان الأولى والثانية د) لا تتساوى في أي فترة من الفترات.

٩) استثمر مبلغ ١٠٠٠ دينار لمدة ١٠ سنوات، وبلغت جملته ١٥٥٢,٩٦٩ ديناراً، فما هي معدل الفائدة المركبة؟

أ) ٢,٥٪ ب) ٣,٥٪ جـ) ٤,٥٪ د) ١,٥٪

١٠) إذا بلغت القيمة الحقيقية لسندات مستديمة ٢٤٠٠٠ دينار، وبلغ معدل الفائدة في السوق ١٠٪ فما مبلغ الفائدة على السندات؟

أ) ٢٤٠٠ دينار ب) ٢٤٠٠٠ دينار جـ) ٢٤٠٠٠٠ دينار د) ٢٤٠ ديناراً.

س٢: اقترضت رتيل من بنك مبلغ ٨٠٠٠ دينار لمدة ١٢٠ يوماً بمعدل ١٢٪ سنوياً. أحسب الفائدة البسيطة التجارية والصحيحة.

س٣: حصل أحد التجار من البنك على فوائد قيمتها ٨٤٠ ديناراً مقابل مبلغ ٢٤٠٠٠ دينار، أودعه في البنك لمدة سنتين أحسب معدل الفائدة البسيطة التي حسبها البنك؟

س٤: أودعت فداء مبلغ ٥٠٠٠ دينار في البنك بمعدل فائدة مركبة ١٢٪ سنوياً، أحسب مبلغ الفائدة المستحقة لها بعد ٤ سنوات، إذا كانت الفوائد تضاف كل شهر؟

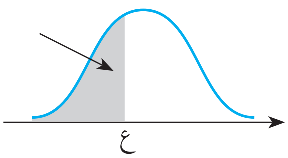
س٥: أجد المبلغ الذي تصبح جملته ٧١٧٦,٨٨ ديناراً في نهاية ٣ سنوات، بمعدل فائدة مركبة ٦٪ سنوياً تضاف كل شهرين.

س٦: أصدرت الدولة سندات دائمة القيمة الاسمية للسند ١٠٠٠ دينار، ومعدل الفائدة الاسمي ١٠٪ ، ومعدل الفائدة في السوق ٩٪ والفوائد تدفع كل سنة، أجد سعر إصدار هذه السندات.

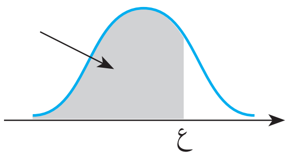
س٧: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
اجد حسب القواعد الفائدة بانواعها			
احدد انواع السندات وكيفية حسابها			
احل مشكلات حياتية على انواع السندات			

ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي



ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
−٣,٧	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
−٣,٦	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
−٣,٥	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢
−٣,٤	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٢
−٣,٣	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٣
−٣,٢	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
−٣,١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧
−٣,٠	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠
−٢,٩	٠,٠٠١٩	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤
−٢,٨	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠١٩
−٢,٧	٠,٠٠٣٥	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٦
−٢,٦	٠,٠٠٤٧	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٦
−٢,٥	٠,٠٠٦٢	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٤٨
−٢,٤	٠,٠٠٨٢	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٤
−٢,٣	٠,٠١٠٧	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٢	٠,٠٠٩٩	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٤
−٢,٢	٠,٠١٣٩	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٢	٠,٠١٢٩	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٢	٠,٠١١٩	٠,٠١١٦	٠,٠١١٣	٠,٠١١٠
−٢,١	٠,٠١٧٩	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٠	٠,٠١٦٦	٠,٠١٦٢	٠,٠١٥٨	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٠	٠,٠١٤٦	٠,٠١٤٣
−٢,٠	٠,٠٢٢٨	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠١٩٧	٠,٠١٩٢	٠,٠١٨٨	٠,٠١٨٣
−١,٩	٠,٠٢٨٧	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٣٣
−١,٨	٠,٠٣٥٩	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣٠١	٠,٠٢٩٤
−١,٧	٠,٠٤٤٦	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٣٩٢	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٦٧
−١,٦	٠,٠٥٤٨	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٥٥
−١,٥	٠,٠٦٦٨	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٠٦	٠,٠٥٩٤	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٥٩
−١,٤	٠,٠٨٠٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٠٨	٠,٠٦٩٤	٠,٠٦٨١
−١,٣	٠,٠٩٦٨	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٠١	٠,٠٨٨٥	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٢٣
−١,٢	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٢	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٠٩٨٥
−١,١	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
−١,٠	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
−٠,٩	٠,١٨٤١	٠,١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
−٠,٨	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧
−٠,٧	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
−٠,٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
−٠,٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
−٠,٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
−٠,٣	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
−٠,٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٣	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
−٠,١	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٥٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٤	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١



تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨
٣,٥	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨
٣,٦	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩
٣,٧	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩

الوحدة الأولى (المصفوفات)

حلول تمارين ومسائل ١ - ١

س١: $\begin{bmatrix} ٥٠ & ٢٥٠ & ٢٠٠ & ١٥٠ \\ ٢٠٠ & ١٠٠ & ١٥٠ & ١٠٠ \\ ١٥٠ & ١٥٠ & ١٠٠ & ٥٠ \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} ٥٠ & ١٠٠ & ١٥٠ \\ ١٠٠ & ١٥٠ & ٢٠٠ \\ ١٥٠ & ١٠٠ & ٢٥٠ \\ ١٥٠ & ٢٠٠ & ٥٠ \end{bmatrix}$

س٢: ١) رتبة أ = ٢×٣ ، رتبة ب = ٢×٢ ، رتبة جـ = ٣×٢

٢) $أ_{٢٢} = \frac{٢}{٣}$ ، $ب_{٢١} = ٣$ ، $جـ_{١٣} = ٣٫٢$ ، $جـ_{٢٣} = -٥$

٣) $أ_{٢١} + جـ_{٢٣} = -٣$

س٣: ١) ص = ٣ ، س = ٣ 　　 ٢) س = -٢ ، ص = -٦

س٤: جـ = $\begin{bmatrix} جـ_{٢١} & جـ_{١١} \\ جـ_{٢٢} & جـ_{١٢} \\ جـ_{٢٣} & جـ_{١٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

حلول تمارين ومسائل ١ - ٢

س١: أ) أ = $\begin{bmatrix} ٤٠٠٠ & ٢٥٠٠ & ٢٠٠٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٦٥٠٠ & ٥٥٠٠ & ٥٠٠٠ \end{bmatrix}$، جـ = $\begin{bmatrix} ٥٠٠٠ & ٤٥٠٠ & ٣٥٠٠ \end{bmatrix}$

ب) س = $\begin{bmatrix} ١٥٥٠٠ & ١٢٥٠٠ & ١٠٥٠٠ \end{bmatrix}$ ، جـ) $\begin{bmatrix} ٢٥٠٠ & ٣٠٠٠ & ٣٠٠٠ \end{bmatrix}$

س٢: ١) $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$ 　　 ٢) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & -٣ & ٠ \end{bmatrix}$

س٣: ١) $\begin{bmatrix} -٣ & ٨ \\ -١٠ & -١ \\ ٠ & -٥ \end{bmatrix}$ 　　 ٢) $\begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٥ & -١ \\ ٩ & ١ \end{bmatrix}$ 　　 ٣) $\begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٥ & -١ \\ ٩ & ١ \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} ٨ & ٢- \\ ١٦ & ٤- \\ ١٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٥) $\begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ٦) $\begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

س٤: ١) س = ٣ ، ص =١ ، ٢) س = -٤ ، ص = ٢

س٥: س = $\begin{bmatrix} ٩ & \frac{١}{٢} \\ ١٥- & ١- \end{bmatrix}$ ، ٢) ص = $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ & ٢- \\ ١٨- & ٨ & ٠ \end{bmatrix}$

حلول تمارين ومسائل ١ - ٣

س١:

رتبة المصفوفة أ	رتبة المصفوفة ب	أ ب معرفة	أ ب غير معرفة	رتبة مصفوفة الناتج
٣×١	٢×٣	✓	ــــــــ	٢×١
٣×٢	٣×٢	ــــــــ	✓	ــــــــ
١×٢	٣×١	✓	ــــــــ	٣×٢

س٢: ١) $\begin{bmatrix} ٣٣ \end{bmatrix}$ ٢) الضرب غير معرف ٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} ٣٣ & ١- & ٢ \\ ٥٠- & ٤ & ٤ \end{bmatrix}$

س٣: ١) $\begin{bmatrix} ٩٥ & ١٠٩ & ١٣ \\ ٤٧ & ٣١- & ٤ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ٧٢- & ٢٢- & ٢٢- \\ ٧٨- & ٥٨- & ٤٨- \\ ٦٠ & ٥٠- & ٣٠- \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٤٧ & ٥٩ & ٤ \\ ١٧- & ٢٣ & ١- \\ ٢٤ & ١٢- & ٦- \end{bmatrix}$ ٤) لا يمكن.

س٤: س = ٢ ، ص = ٥

س٥: ١) $\begin{bmatrix} ٣٣- & ١٠٥ & ٣٩ \\ ١١٦- & ٢١٧ & ٩٠ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ٣٣- & ١٠٥ & ٣٩ \\ ١١٦- & ٢١٧ & ٩٠ \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٤٢ \\ ١٨ & ٦٨- & ٥٦ \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٤٢ \\ ١٨ & ٦٨- & ٥٦ \end{bmatrix}$ ٥) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٤٢ \\ ١٨ & ٦٨- & ٥٦ \end{bmatrix}$

حلول تمارين ومسائل ١ - ٤

س١: ١) ٢ ٢) ٠ ٣) -٣٤

س٢: ١) |أ.ب| = ١٦ ٢) |أ+ب| = ٩ ٣) |أ-٢ب| = ١٨

س٣: س = ٤ **س٤:** س = ١

حلول تمارين ومسائل ١ - ٥

س١: ١) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & -\frac{٢}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$ ٢) لا يوجد ٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

س٢: ١) س = ٢ ٢) س = ±٦ **س٣:** ب$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} \frac{١٦-}{٣٢} & \frac{٨}{٣٢} \\ \frac{١٢}{٣٢} & \frac{٤-}{٣٢} \end{bmatrix}$

س٤: (أ.ب)$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، ب$^{-١}$. أ$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

س٥: س = $\begin{bmatrix} \frac{٢٧-}{٢} & \frac{١٩}{٢} \\ \frac{٤٤}{٢} & \frac{٣٢-}{٢} \end{bmatrix}$

حلول تمارين ومسائل ١ - ٦

س١: ١) س = ٨ ، ص = ٥ ٢) س = ٣ ، ص = ٠

س٢: ١) س = ٣ ، ص = -٥ ٢) س = ٣ ، ص = ٢

س٣: س =٣ ، ص=١

س٤: أ) س + ٢ص + ٢ = ٠ ، ٣س + ١١ص − ٩ = ٠

ب) س = -٨ ، ص = ٣

حلول تمارين ومسائل ١ - ٧

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	د	أ	ج	أ	ج	ب	أ	ج	د	ب

س٢: أ) $\begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٢٦ & ١٤ & -٤ \\ ٩٢ & ٦٣ & -٣٣ \\ ١٧٢ & ١٣٣ & -٨٣ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} \frac{٣}{٣٢} & \frac{٤}{٢٣} \\ \frac{-٢}{٢٣} & \frac{٥}{٢٣} \end{bmatrix}$ هـ) ١٦

س٣: أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & -\frac{١}{٢} \\ ٦ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٨ \end{bmatrix}$

س٤: أ) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٣ \\ ٤ & ١ & -١ \\ ٥ & ١ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$

س٥: س = ١ ، ص = ٣ **س٦:** س = ٣ **س٧:** س= ٣

الوحدة الثانية (التفاضل)

حلول تمارين ومسائل ٢ - ١

س١: أ) $\triangle$س = ١,٨ ، $\triangle$ص = ٩ ، ب) $\triangle$س = -٦ ، $\triangle$ص = -٣٠

س٢: أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٨

س٣: أ) ٣٩ ب) ٤٥ **س٤:** ١

حلول تمارين ومسائل ٢ - ٢

س١: أ) ٢ ب) -١ جـ) صفر

س٢: أ) ٨ ب) ٤ جـ) -٨

س٣: -٢ **س٤:** $\frac{٧}{٤}$ **س٥:** ٢س

حلول تمارين ومسائل ٢ - ٣

س١: أ) صفر ب) ٥ جـ) $\frac{-٦}{س^{٣}}$ + ٥ د) ١٤س + $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

هـ) -٨س^{٣} − ١٥س^{٢} + ٦ و) $\frac{٣}{١٦}$

س٢: ٥ **س٣:** ١٠ **س٤:** $\frac{-٥}{٨١}$ **س٥:** ٤٣

س٦: أ) ٢٤ ب) $\frac{٣}{٤}$ **س٧:** ق$^{/}$(س) = ٨س^{٣} + ٣س^{٢} − ٤ ، ق$^{//}$(س) = ٢٤س^{٢} + ٦س

ق$^{(٣)}$(س) = ٤٨س + ٦ ، ق$^{(٤)}$(س) = ٤٨ ، ق$^{(٥)}$(س) = ٠ ومنها ق$^{(٥)}$(١) = ٠

حلول تمارين ومسائل ٢ - ٤

س١: ميل المماس = ق$^{/}$(-٢) = -١٠ **س٢:** ص − س − ١ = صفر **س٣:** س = $\frac{-٤}{٣}$ ، س = ١

س٤: ص − ٣س − ٧ = ٠ **س٥:** م = ٣

حلول تمارين ومسائل ٢ - ٥

س١: ٢س + ٢ **س٢:** ٨س − ٤ **س٣:** ٤ع − ١٠ = ٨س + ٢

س٤: ٩٦ **س٥:** ١٢ **س٦:** -٦ ، ٥

حلول تمارين ومسائل ٢ - ٦

س١: أ) ق(١) = ٢ قيمة عظمى محلية.

ب) ق(-٢) = ١٦ قيمة عظمى محلية ، ق(٢) = -١٦ قيمة صغرى محلية.

جـ) ق(-١) = ٤ قيمة عظمى محلية، ق(١) = ٠ قيمة صغرى محلية.

د) ق(٥) = ٣٠ قيمة عظمى محلية.

س٢: القيمة الصغرى المحلية = ق(١) = صفر

س٣: ب = -٤

س٤: إشارة ق/(س) موجبة لكل س∋ح*.

س٥: عند (س = -٢) يوجد قيمة عظمى محلية، عند (س = ٢) يوجد قيمة صغرى محلية.

حلول تمارين ومسائل ٢ - ٧

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	أ	ب	جـ	ب	د	أ	د	جـ	ب	جـ

س٢: ٣٦

س٣: ٤

س٤: ٦

س٥: ٥٨

س٦: ٣٣

س٧: ١٣ص + س − ٤٠ = ٠

س٨: $أ = \frac{١}{٢}$

س٩: ق(-٢) = ١١ قيمة عظمى محلية، ق(٠) = ٧ قيمة صغرى محلية.

الوحدة الثالثة (التكامل)

حلول تمارين ومسائل ٣ - ١

س١:

	المشتقة ق/(س)	الاقتران الأصلي ق(س) + جـ
	٤س^{٣}	س^{٤} + جـ
	٤س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢	س^{٤} + س^{٣} + ٢س + جـ
	٢س + ١	س^{٢} + س + جـ
	٤س^{٢} + ٣	∫(٤س^{٣} + ٣)ءص

س٢:

العبارة	أ	ب	ج	د	هـ	و
الإجابة	×	✓	×	✓	×	✓

س٣: $ق^{/}(س) = \frac{س^{٢} + ٣}{س + ١}$

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٢

س١: أ) $\frac{٢}{٣}س + جـ$ ب) $\pi ٤ + جـ$ ج) $\frac{-\sqrt{٥}\,س^{٢}}{٢} + جـ$

د) $\frac{٢س^{٣}}{٣} + ٣س + جـ$ هـ) $\frac{٧س^{٤}}{٤} + \frac{٢}{س} + س + جـ$ و) $ك س^{٢} + جـ$

س٢: $\frac{٢ص^{٣}}{٣} + \frac{ص^{٢}}{٢} - ١٥ص + جـ$ **س٣:** $\frac{ل^{٢}}{٢} - ٣ل + جـ$

س٤: $\frac{٢س^{٥}}{٥} + \frac{٣س^{٤}}{٤} - \frac{٥س^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٤س + جـ$ **س٥:** $٣س^{٣} + ٥س^{٢} - ٢س + ٤$

س٦: $(٢س + ٢)(س^{٢} + ٢س)^{٥}$

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٣

س١: أ) $ق(س) = ٥س - ٧$ **س٢:** $ق(س) = \frac{س^{٢}}{٢} + ٣س - ١$

س٣: ٢٢ **س٤:** $ق(س) = -٢س^{٣} + س^{٢} + ٤س + ٣$

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٤

س١: أ) ١٨π ب) ٢ ج) $\frac{٢}{٩}$ د) $\frac{٤٥}{٤}$ **س٢:** $ب = \pm ٤$

س٣: $م = ٥ ، -٢$ **س٤:** $\frac{١٤}{٣}$ **س٥:** أ) $\frac{ءص}{ءس} = ٤س^{٣} + ٢س - ٥$ ب) $\frac{ءص}{ءس} =$ صفر

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٥

س١: صفر

س٢: أ) $\frac{-٧}{٢}$ ب) $\frac{-١٥}{٢}$ جـ) -٤

س٣: أ) -٦ ب) -٥ جـ) $\frac{-١٥}{٢}$

س٤: - ٢٧

س٥: ١ ، -٦

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٦

س١: $\frac{-(٢ - ٣\text{س})^{٤}}{١٢} + \text{جـ}$

س٢: $\frac{-٣}{٤(\text{س} - ١)^{٤}} + \text{جـ}$

س٣: $\frac{(\text{أس} + \text{ب})^{٥}}{٥\text{أ}} + \text{جـ}$

س٤: $\frac{(\text{س}^{٣} + ١)^{٥}}{١٥} + \text{جـ}$

س٥: $\frac{١}{٣}$

س٦: $\frac{-٤}{٢١}$

س٧: $\frac{٢(٣\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + \text{جـ}$

س٨: $\frac{٣(\text{س}^{٣} + ٤\text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{٨} + \text{جـ}$

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٧

س١: ١٢ وحدة مساحة.

س٢: ٨ وحدات مساحة.

س٣: $\frac{١}{٤}$ وحدة مساحة.

س٤: $\text{أ} = \frac{٢}{٣}$

س٥: ٤٢ وحدة مساحة.

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٨

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	ج	أ	ب	د	أ	أ	ج	د	أ	ج

س٢: $\frac{١٠}{٣}$

س٣: $\text{ق(س)} = ٣\text{س} - \text{س}^{٢} + ٤$

س٤: - ٣٨

س٥: $\frac{٣(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤)^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + \text{جـ}$

س٦: $\frac{٣٨}{٣}$ وحدة مساحة.

الوحدة الرابعة (الإحصاء)

حلول تمارين ومسائل ٤ - ١

س١: -١,٥ ، -٠,٥ ، ٠,٥ ، ١,٥ ، صفر   **س٢:** التحصيل أفضل في اللغة العربية.

س٣ : ٢٣ م ، ١١,٦ م   **س٤:** ك = ٣ ، σ = ١   **س٥:** σ = ٨ ، μ = ٦٠   **س٦:** -١

حلول تمارين ومسائل ٤ - ٢

س١: أ) ٠,٩١٦٢   ب) ٠,١٨٤١   جـ) ٠,٨٦٦٤

س٢: أ) ١,٠٦ ، ب) -٠,٧٥ ، جـ) ٠,٨٤   **س٣:** ٠,٨٦٦٤ ، ٤٣٣

س٤: أ) ٢   ب) ٢٢٨   **س٥:** أ) ٦٦,٧٨٪   ب) ٤٠   **س٦:** ٨١٩

حلول تمارين عامة ٤ - ٣

س١:

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	جـ	جـ	د	ب	أ	ب	ب	أ	د	أ

س٢: ٦٥ ، ١٢   **س٣:** أ) ٠,٨٤١٣   ب) ٠,٦٦٨٧

س٤: أ) ١٣٦٥٢   ب) ٤٥٦   جـ) ٨١,٨٥٪   **س٥:** أ) ٩   ب) ٢٧٣

الوحدة الخامسة (الرياضيات المالية)

حلول تمارين ومسائل ٥ - ١

س١: أ) الفائدة (ع) = ٤٦٠ دينار ، ب) جملة المبلغ (جـ) = ١٤٢٦٠ دينار

س٢: (م) = ٤٠٠٠ دينار   **س٣:** (ﻟ) = ٥ أشهر   **س٤:** (جـ) = ١٥٩٦٠ دينار

س٥: أ) (ف) = ٩٠ دينار   ب) الفترة الزمنية (ن) = ٦ سنوات

س٦: الفائدة التجارية (**ف**) = ٦٤٠ دينار

الفائدة الصحيحة ($\overline{\text{ف}}$) = ٦٣١,٢٣٢ دينار

س٧: الفائدة (ع) = ٦٪

حلول تمارين ومسائل ٥ - ٢

س١: (جـ) = ١٣٤١٦ دينار

س٢: (ن) = ٥ سنوات

س٣: (ع) = ٤,٢٪

س٤: (جـ) = ٢١١٥٠ دينار ، (**ف**) = ٦١٦٥ دينار

س٥: (ن) = ٨ سنوات

س٦: (جـ) = ٧١٢٥ دينار

حلول تمارين ومسائل ٥ - ٣

س١: ق(ح) = ٤٥٠١,٢ دينار

س٢: ق(ح) = ١٥٦٣,٦٤٢ دينار

س٣: ق(ح) = ٣٠٠٢,٣٥٦ دينار

س٤: (أ) = ١٧٠٠ دينار

س٥: الفائدة الاسمية = ٠,٣٣

حلول تمارين ومسائل ٥ - ٤

س١: ق(ح) = ٦٠٠٠ دينار

س٢: ق(ح) = ٢٩٤٥,٨٤٢ دينار

س٣: معدل الفائدة السوقي = ٧٪

س٤: ق(ح) = ٣٠٠٠ دينار

حلول تمارين ومسائل ٥ - ٥

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	د	أ	جـ	ب	ب	د	جـ	ب	جـ	أ

س٢: الفائدة التجارية (**ف**) = ٣٢٠ دينار

الفائدة الصحيحة ($\overline{\text{ف}}$) = ٣١٥,٦١٦ دينار

س٣: معدل الفائدة (ع) = ١,٧٥٪

س٤: جملة المبلغ (جـ) = ٣٠٦٠ دينار

س٥: المبلغ (م) = ٦٠٠٠ دينار

س٦: ق(ح) = ١١١١ دينار

أفكار ريادية

* تصميم اداة لقياس اثر استخدام مواقع التواصل الاجتماعي على تحصيل الطلبة.
* اعداد دراسة لمشروع عن كيفية تشجيع طلبة المدراس للتوجه للتخصصات المهنية.
* إعداد رحلات معرفية (Web quest) عن وحدة التكامل.

المراجع

بسيوني، جابر أحمد (٢٠١٤) : الإحصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الإسكندرية .

حمدان، فتحي خليل (٢٠١٢) ، الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية، دار وائل للنشر، عمان .

شاهر، ثائر فيصل (٢٠٠٩) : الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية، دار الحامد للنشر والتوزيع عمان.

رمضان، زياد (٢٠٠١) : مبادئ الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، ٢٠٠١.

الجندي، حسن عوض (٢٠١٤) :منهج الرياضيات المعاصر محتواه واساليب تدريسه، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة .

المومني، غازي فلاح، الرياضيات المالية المعاصرة ، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، ٢٠١٤

الخطيب، روحي إبراهيم (٢٠١٢) : التفاضل والتكامل ج١، دار المسيرة، عمان .

الخطيب، روحي إبراهيم (٢٠١٢) : التفاضل والتكامل ج٢، دار المسيرة، عمان .

فريدريك بل (١٩٨٦): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

فريدريك بل (١٩٨٦): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

ابو أسعد ، صلاح عبد اللطيف (٢٠١٠): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع

الزغلول، عماد (٢٠٠٥): الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

حسين فرج، عبد اللطيف (٢٠٠٥): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان

Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume1

Bell,E,T (1937): Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer (1989): History of Mathematics Wiley,N.Y

Bostock&Perkins (1989): Advanced Mathematics, volume2

المشروع

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.
ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:
١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.

٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.

٣. تحديد خطوات سير المشروع.

٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**

٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.

٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.

٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.

٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

لجنة المناهج الوزارية

د. صبري صيدم
د. بصري صالح
م. فواز مجاهد
أ. ثروت زيد
أ. عزام ابو بكر
أ. عبد الحكيم أبو جاموس
د. شهناز الفار
د. سمية النخالة
م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد
د. محمد صالح (منسقًا)
د. معين جبر
د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي
د. عادل فوارعة
أ. وهيب جبر
د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني
د.سعيد عساف
د. محمد مطر
د. علا الخليلي
د. شهناز الفار
د. علي نصار
د. أيمن الأشقر
أ. ارواح كرم
أ. حنان أبو سكران
أ. كوثر عطية
د. وجيه ضاهر
أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة
أ. احمد سياعرة
أ. قيس شبانة
أ. مبارك مبارك
أ. عبد الكريم صالح
أ. أحلام صلاح
أ. نسرين دويكات
أ. نادية جبر
أ. نشأت قاسم

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي

أ. عبد الرحمن عزام
أ. نهى يعقوب
أ. نهى عبدالرازق
أ. ريم صوافطة
أ. ثورة علان
أ. أسمهان نزال
أ. كفاية مضية
أ. اسماعيل أبوغضيب
أ. أيمن أبو زياد
أ. فادي ستيتي
أ. أحمد جعافرة
أ. موسى حراحشة
أ. ختام حنو
أ. سناء حماد
أ. رهام مصلح
أ. ياسر الساحلي
أ. سهى كمال
أ. خالد الدشت
أ. فلاح الترك
أ. أرواح كرم
أ. مؤيد الحنجوري
أ. محمد الفرا
أ. وسام موسى
أ. رائد عبدالعال
د. رحمة عودة
أ. حسين عرفات
أ. منال الصباغ
أ. سميرة حنيف
أ. رفيق الصيفي
أ. باسم المدهون
أ. سيرين أبو عيشة

تمت مناقشة الكتاب من قبل معلمين على مستوى مديريات الوطن عبر العديد من الورشات