الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية

الأول الثانوي

كتاب الجبر

الرياضيات

كتاب الطالب

2018-2019 م
1439-1440 هـ

الجمهوريّة العربيّة السوريّة
وزارة التربية
المركز الوطني لتطوير المناهج التربويّة

الرّياضيّات

الجبر

كتاب الطالب

الصفّ الأوّل الثّانوي

2018 – 2019 م

1439 هـ

طُبِعَ أوّلَ مرّةٍ للعامِ الدّراسيِّ 2013 - 2014 م

تأليف

فئة من المختصّين

مُقدّمة

تُقدّمُ الرّياضيّاتُ الأدواتِ لنمذجةِ الظّواهرِ وللتّنبُّؤِ بالنّتائجِ، وخصوصاً في مجالات العلوم التجريبيّةِ والتّقانية، وذلك لأنّها تتيح تطوير العديد من عناصر المعرفة. فهي تتغذّى على المسائل التي تنشأ من السعي وراء تحقيق فهمٍ أفضل للعالم المحيط بنا. كما إنّ تطوّرها مرتبط في الوقت نفسه، وإلى حدٍّ كبير، بقدرة الإنسان على استكشاف المفاهيم النظرية العميقة.

ونجد في تاريخ البشريّة نقاطاً مضيئة تشير إلى قدرة الإنسان على اصطناع الأدوات التي تتيح له تحقيق فهم أفضل للعالم المحيط به، وتسمح له أن يكون مؤثراً تأثيراً أكثر فعالية في محيطه. منذ البدء كانت الرّياضيّات، إلى جانب اللّغة، واحدة من الحوامل الرئيسة للجهد الذي بذله الإنسان في وضع المفاهيم الأساسيّة. لذلك يُنتظر من طلابنا في نهاية مرحلة دراستهم ما قبل الجامعيّة، أن يكونوا قد اكتسبوا المبادئ الأساسيّة للتّفكير الرياضياتي، وهي تعتمد على كمٍّ معرفيّ جيِّد، ودراية بطرائق حلّ المسائل، وبأساليب البرهان المعتمِد على الاستنتاج المنطقي، دون أن يكون ذلك بالضرورة مقترناً بدراسةِ ما يُعرّف باسم المنطق الرّياضيّ.

تحتفظ الرّياضيّات بعلاقاتٍ وثيقة مع العلوم الأخرى والتّقانة، إذ تُتيح لغة الرّياضيّات وصف ظواهر الطّبيعة ونمذجتها، وهي تتمايز عنها لأنّ الرّياضيّات تؤلف بحدّ ذاتها فرعاً ذا هويّة خاصّة مستقلة.

ويحتلّ الإثباتُ المعتَمِدُ على الاستنتاج الرّياضي موقعاً أساسيّاً في الرّياضيّات، إذْ لا يكفي التيقُّن من صحة الخواصِّ اعتماداً على بعض الأمثلة. يقود تعليم الرّياضيّات

وتعلُّمها الطّلاب إلى تذوّق ذلك الشّعور الرّائع الذي يشعر به المرء عند إثبات صحّة قضيةٍ بالبرهان القاطع اعتماداً على المناقشة المنطقيّة. مُمارسةُ الرّياضيّات هي امتلاك ناصيتها اعتماداً على الخيال والبحث، والتّحسُّسِ والاستكشافِ والشعورِ بمتعة الاكتشاف، وحلّ المسائل بدقّة ومنطق.

لقد سعينا في هذا الكتاب، إلى تقديم أداة تعليمٍ للرّياضيّات، يمكن أن تُستَعْمَل أيضاً وفي الوقت ذاته، أداةَ تعلّمٍ ذاتيّ. ننصح أنْ يكون الكتاب أداة العمل الرّئيسة، فتجري قراءةُ فقراتِ الدّرس من الكتاب، ومناقشةُ الطّلاب في فحوى ما يُقرأ، حيث يؤدّي المُدرِّس دور مدير الحوار والنّقاش الّذي من المفترض أن يُؤدّي إلى فهمٍ أعمقَ للدّرس، ويُطلب من الطّلاب حلُّ التّدريبات مع تقدّم الدّرس.

ولمّا كان تعلّم طرائق الاستكشاف والبحث هدفاً أساسيّاً من أهدافنا، فقد زوّدنا كلّ بحث بعدد من المسائل والتّمرينات التي جرى فيها توجيه تفكير الطّالب نحو الحلّ، آملين تمكين الطّالب من طرائق التّفكير العلمي الّتي يفيده اتّباعُها أياً كانت أنماط المسائل التي تواجهه مستقبلاً.

وأخيراً، نرجو من الزّملاء المدرّسين ومن الأعزّاء الطّلاب أن يزوّدونا بأيّ ملاحظةٍ أو انتقادٍ بنّاءَين على فحوى أو طرائق هذا الكتاب حتى تُؤخذ في الحُسبان.

المُعدّون

المحتوى

① الأعداد الحقيقية وخواصها 7
❶ مجموعات الأعداد 9
❷ العبارات الجبرية 12
❸ المعادلات الجبرية 14
❹ الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقة 16
تمرينات ومسائل 27
② مفهوم التابع 33
❶ مقدمة عامة 35
❷ مفهوم التابع العددي 37
❸ الخط البياني لتابع 40
❹ التابع المتزايد والتابع المتناقص 45
❺ جدول اطراد تابع 50
تمرينات ومسائل 54
③ المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية 59
❶ حل معادلة من الدرجة الثانية 61
❷ تحليل ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية وإشارته 66
❸ العلاقة بين أمثال وجذور ثلاثي حدود من الدرجة الثانية 69
❹ تطبيقات ونشاطات 71
تمرينات ومسائل 74
④ التوابع المألوفة 79
❶ التوابع الحدودية من الدرجة الثانية 81
❷ تابع المقلوب 86
❸ المستقيم الحقيقي والدائرة المثلثية 89
❹ النسب المثلثية لعدد حقيقي 94
تمرينات ومسائل 100
⑤ مبادئ في الاحتمالات 107
❶ مقدمة 109
❷ عناصر الاحتمال 111
❸ قانون الاحتمال 141
تمرينات ومسائل 122

1

الأعدادُ الحقيقيَّةُ وخواصُها

1 مجموعات الأعداد

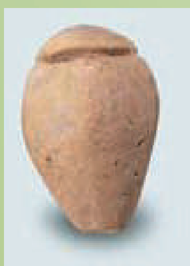
2 العبارات الجبريّة

3 المعادلات الجبريّة

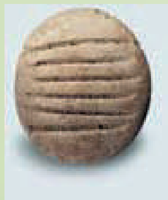
4 الترّتيب في مجموعة الأعداد الحقيقيّة

قبل حوالي ستة آلاف سنة، بدأ المزارعون في بابل في بلاد الرّافدين باستعمال الرّموز لتسجيل اتفاقاتهم وتعاملاتهم التجارية على سجلات من الصلصال.

وكانت لديهم رموز مختلفة للتّعبير عن أشياء مختلفة.

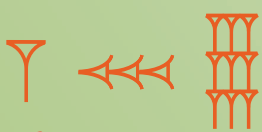


فربّما كان الشكل البيضوي يرمز إلى كيسٍ من القمح،



وربّما كانت الدائرة ترمز إلى جرّةٍ من زيت الزيتون.

مع تطوّر الأدوات بدأ البابليون باستعمال رموز لتمثيل الأعداد فكتبوا 𒁹 دلالة على العدد *1*، وكتبوا 𒈫 دلالة على العدد *2*، و 𒐈 على العدد *3*، و 𒐉 على العدد *4*، وهكذا... وعندما وصلوا إلى العدد *10* أداروا الرمز وكتبوه 𒌋. ولمّا وصلوا إلى العدد *60* قلبوا الرمز مجدداً وكتبوه 𒁹. أمّا العدد *99* فكانوا يكتبونه كالآتي :



60　*30*　*9*

1

مقدّمة في الأعداد الحقيقية وخواصها

1 مجموعات الأعداد

تعاريف

❶ نرمز إلى **مجموعة الأعداد الطبيعيّة** بالرّمز $\mathbb{N}$ وهي تشمل الأعداد :

$$\{0,1,2,\ldots,36,37,\ldots,1024,\ldots\}$$

يَعُدُّ العددُ الطبيعي الأشياء ضمن مجموعة، فهو 0 إذا لم يكن لدينا أيّ شيء، وهو 1 إذا كان لدينا شيءٌ واحدٌ، و 2 إذا كان لدينا شيئان، وهكذا ....

تحوي هذه المجموعةُ مجموعةَ الأعداد الأوّليّة $\mathbb{P}=\{2,3,5,7,11,\ldots\}$، التي درستها سابقاً.

❷ نرمز إلى **مجموعة الأعداد الصحيحة** بالرّمز $\mathbb{Z}$ وهي تشمل الأعداد :

$$\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

تُمثِّل الأعدادُ الصحيحةُ تدريجاتِ مستقيمٍ مدرَّجٍ بالواحداتِ، ويتكوّن كلُّ عدد صحيح من عدد طبيعيّ مسبوق بإشارة.

وهي تحوي العديد من المجموعات الجزئيّة الشهيرة، مثل مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجيّة، ومجموعة الأعداد الصحيحة الفرديّة، ومجموعة الأعداد الصحيحة السالبة.

❸ نرمز إلى **مجموعة الأعداد العشريّة** بالرّمز $\mathbb{D}$ وهي الأعداد التي تنتج من قسمة عدد صحيح على قوّة للعدد 10، أي تلك الأعداد التي يمكن كتابتها بالصيغة $\frac{p}{10^n}$ حيث p عددٌ صحيح و n عددٌ طبيعي. يُكتب كلُّ عدد من هذه الأعداد "كتابة عشريّة" مُكَوَّنة من جزء صحيح، وفاصلة، وجزء عشري مُنتهٍ لا يحوي أصفاراً لا لزوم لها، مثل

$$d=\frac{-310034}{10^3}=\underbrace{-310}_{\text{جزء صحيح}}.\underbrace{034}_{\text{جزء عشري}}$$

❹ نرمز إلى مجموعة الأعداد العاديّة بالرّمز $\mathbb{Q}$ وهي الأعداد التي تنتج من قسمة عدد صحيح على عدد طبيعي موجب تماماً، أي تلك الأعداد التي يمُكن كتابتها بالصيغة $\frac{a}{b}$ حيث a عددٌ صحيح و b عددٌ طبيعي لا يساوي 0. ونقول إنّ هذه الكتابة مُختزلةٌ أو إنّها في أبسط صورة إذا كان العددان a و b أوّليّان فيما بينهما، أي إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر مساوياً 1.

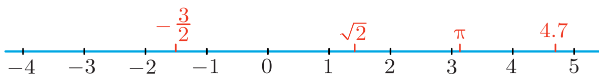
لكلِّ عددٍ عاديٍّ غير عشري كتابةٌ عشرية دوريّة غير منتهية، أي إنّ خاناته تتكرَّر بدءاً من حدٍّ معيّن فمثلاً :

$$-\frac{2399}{220} = -10.904545454545\cdots$$

$$\frac{18}{7} = 2.571428571428571428571428571428\cdots$$

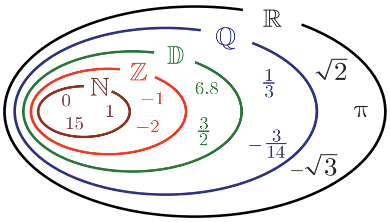
❺ وأخيراً نرمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقيَّة بالرمز $\mathbb{R}$ وهي تضم جميع الأعداد التي يمكن أن تكون قد رأيتها في دراستك السابقة، وتشمل جميع الأعداد العاديّة، وغير العاديّة مثل $\sqrt{2}$ و π و $\cos(11°)$ وغيرها.

يُوافق كلّ عدد حقيقي نقطة وحيدة على مستقيم مدرَّج؛ وبالعكس، كلُّ نقطة من مستقيم مدرّج توافق عدداً حقيقيّاً وحيداً نسميه **فاصلة** هذه النقطة.



فَكِّرْ

ما العلاقة بين المجموعات العدديّة المختلفة ؟



- كلُّ عددٍ عاديّ هو عددٌ حقيقي. نقول إنَّ المجموعة $\mathbb{Q}$ **محتواةٌ** في المجموعة $\mathbb{R}$، ونرمز إلى ذلك بالرَّمز $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
تذكّر أنَّ "$X \subset Y$" تُقرأ : المجموعة X محتواة في المجموعة Y، وهذا يعني أنّ كلّ عنصر من X ينتمي أيضاً إلى Y.
- كلُّ عددٍ عشري هو عددٌ عاديّ. لأنّه يكتب بالشكل $\frac{a}{10^n}$ حيث a من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$. نكتب إذن $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- كلُّ عددٍ صحيح هو كسر عشري. نكتب إذن $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- كلُّ عددٍ طبيعي هو عدد صحيح. نكتب إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

إذن لدينا : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

مثال

كيف نعيّن طبيعة عددٍ مُعطى، أي إلى أيّ مجموعات الأعداد ينتمي ؟

عيّن طبيعة كل من الأعداد الآتية : $\pi, \frac{(\sqrt{7}+4)(\sqrt{7}-4)}{3}, \frac{32}{4}, \frac{5}{3}, \frac{21}{560}$.

لتعيين طبيعة عدد نبحث عن أصغر مجموعة من بين مجموعات الأعداد التي درسناها سابقاً ينتمي إليها هذا العدد، وفي كثير من الحالات يكون من المناسب اختزال العدد مع المحافظة على قيمته الفعليَّة (دون تقريب).

الحل

- العدد $\frac{21}{560}$. نلاحظ أنّ $\frac{21}{560} = \frac{7\times 3}{7\times 8\times 10} = \frac{3}{8\times 10} = 0.0375 \in \mathbb{D}$، فهو إذن عددٌ عشري.
- العدد $\frac{5}{3}$ ينتمي إلى $\mathbb{Q}$. ولأنّ كتابته العشريّة $\frac{5}{3} = 1.66666\ldots$ دورية غير منتهية، فهو لا ينتمي إلى $\mathbb{D}$.
- العدد $\frac{32}{4}$ يساوي 8. فهو ينتمي إلى $\mathbb{N}$.
- العدد $\frac{(\sqrt{7}+4)(\sqrt{7}-4)}{3}$ يساوي $-3 = \frac{-9}{3} = \frac{7-16}{3}$ فهو إذن عدد صحيح.
- العدد π عددٌ حقيقي غير عادي وهو من ثَمّ لا ينتمي إلى أيٍّ من المجموعات $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{D}$.

تَدرَّبْ

① بيّن الصواب من الخطأ في المقولات التالية معلّلاً إجابتك :

1. كلُّ كسر عشري هو عددٌ عادي.
2. مقلوب عددٍ عادي غير معدوم هو عددٌ عادي.
3. كلُّ عددٍ صحيح هو عدد عشري.
4. مقلوب عددٍ عشري غير معدوم هو عددٌ عشري.

② اختزل الكسور التالية واكتبها بأبسط صيغة :

1. $A = \frac{24\times 18}{60}$
2. $B = \frac{32}{24}$
3. $C = \frac{20}{14}$
4. $D = \frac{15\times 25}{50\times 22}$
5. $E = \frac{14\times 18}{56}$
6. $F = \frac{91}{143}$
7. $G = \frac{22}{16}$
8. $H = \frac{12\times 33}{121}$

2 العبارات الجبرية

خاصّة أساسيّة.
أيّاً كانت الأعداد a و b و c كان $a(b+c)=ab+ac$.

نشرُ عبارة من الصيغة $a\left(b+c\right)$ هو تحويلها إلى مجموع الحدَّين ab و ac. فمثلاً :

$$x\left(2x+1\right)=2x^2+x$$

و

$$\left(x+1\right)\left(3-x\right)=3x+3-x^2-x=-x^2+2x+3$$

أمّا **تحليل** العبارة $ab+ac$ إلى عوامل فهو الانتقال إلى الصيغة $a\left(b+c\right)$. فمثلاً :

$$\begin{aligned} A(x) &= \underbrace{(x-1)}_{a}\underbrace{(2-x)}_{b}+\underbrace{(x-1)}_{a}\underbrace{(2x+1)}_{c} \\ &= \underbrace{(x-1)}_{a}\underbrace{\big((2-x)+(2x+1)\big)}_{(b+c)} \\ &= (x-1)(x+3) \end{aligned}$$

تفيد مهارتا النّشر والتّحليل في تبسيط بعض الصيغ، وحل المعادلات، وتعيين إشارة بعض المقادير كما سنرى.

متطابقاتٌ شهيرة

تفيد المتطابقات الشهيرة في نشر العبارات أو تحليلها إلى عوامل، وأهمُّها هي المتطابقات من **الدرجة الثانية** الآتية :

أيّاً كان العددان a و b كان

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

مثال

لننشر المقدار $(2x+3y)^2$. إنّ لهذا المقدار الصيغة $(a+b)^2$ إذ تؤدّي $2x$ دورَ a، وتؤدّي $3y$ دور b. إذن

$$(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$$

وكذلك تُستعمل المتطابقات الشهيرة في التحليل إلى عوامل كما في المثال الآتي :

مثال

لنحلّل المقدار $A = (x^2 + 2x + 1) - 3(x + 1)$. نكتب

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + 2x + 1) - 3(x + 1) \\ &= (x+1)^2 - 3(x+1) \\ &= (x+1)(x+1-3) = (x+1)(x-2) \end{aligned}$$

تَدرَّبْ

① حلِّل العبارة الآتية إلى جداء عوامل بسيطة:

$$A = (x+1)(2x+3) - (x+1)(-x+2) + 5(x+1)^2$$

عند تحليل عبارةٍ مكوّنةٍ من مجموع حدود، يمكن البدء بالبحث عن عامل مشترك بينها جميعاً.

② اختزلْ، في حالة $x \neq -\frac{4}{3}$، العبارة التالية بعد أن تحلِّل البسط $A = \frac{(x+1)^2 - (2x+3)^2}{3x+4}$.

③ أثبتْ أنّ $B = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 - 5$ يُكتب بالشكل $a\sqrt{3} + b$ حيث a و b عددان صحيحان.

④ أثبتْ أنّ $B = \left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$ عددٌ طبيعي.

⑤ أثبتْ صحّة المتطابقات التكعيبيَّة الآتية :

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

يُسمح لمن يحفظ هذه المتطابقات التكعيبية أنْ يستعملها في حلِّ التمرينات.

⑥ أثبتْ أنّ العدد $a = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ عدد صحيح وعيِّنه.

3 المعادلات الجبريّة

لنتأمّل العبارات الجبريّة :

$$A = 2x + 5$$
$$B = (2x + 4)(x - 6)$$
$$C = x^2 + y^2$$
$$D = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

نسمّي كلاً من الصيغ $A = 0$ أو $B = 0$ أو $C = 0$ أو $D = 0$ أو ما يُماثلها مُعادلة جبريَّة، ونسمّي المتغيِّرات x و y و $\cdots$ مجاهيل هذه المعادلات. وحلُّ أيٍّ منها ضمن مجموعة مُعطاة هو البحث في هذه المجموعة عن قيم متغيِّرات المعادلة.

فكما تعلم، للمعادلة $A = 0$ حلٌّ وحيدٌ في $\mathbb{R}$ هو $x = -\frac{5}{2}$، ولكن ليس لها حلول في $\mathbb{Z}$. وللمعادلة $B = 0$ حلاّن في $\mathbb{R}$ فقط هما $x = -2$ أو $x = 6$. وللمعادلة $C = 0$ حلٌّ وحيد هو $x = 0$ و $y = 0$.

نقول **إنَّ المعادلتين $E = 0$ و $F = 0$ متكافئتان** إذا كانت لهما الحلول نفسها. وتقوم الطريقة العامّة في حلّ معادلة من الصيغة $E = 0$ على تطبيق تحويلات بسيطة متتالية عليها لإرجاعها إلى مُعادلة مُكافئة لها تكون أسهل حلاً. وفيما يلي بعض هذه القواعد :

1. عندما نجمع العدد نفسه إلى طرفي معادلة $E = 0$ أو نطرحه من طرفيها، نحصل على معادلة جديدة مُكافئة لها، أي لها حلول المعادلة $E = 0$ نفسها.
2. عندما نضرب بالعدد غير المعدوم نفسه طرفي معادلة، أو نقسم طرفيها عليه، نحصل على معادلة جديدة مُكافئة لها.
3. إذا كانت A و B عبارتين جبريَّتين. فإنَّ المعادلة $AB = 0$ تُكافئ $A = 0$ **أو** $B = 0$. ويمكن تعميم هذه الخاصّة الى جداء ضرب ثلاث عبارات أو أكثر.

مثال

لحل المعادلة $(x - 5)(x + 11) = 0$ نبدأ بحلِّ كلٍّ من المعادلتين $x - 5 = 0$ و $x + 11 = 0$. تقبل الأولى العددَ 5 حلاً وحيداً، وتقبل الثانية العددَ -11 حلاً وحيداً. إذن العددان الحقيقيّان 5 و -11 هما حلاً المعادلة $(x - 5)(x + 11) = 0$ أو **جذراها**. ومجموعة الحلول هي $S = \{5, -11\}$.

مثال

لحلِّ المعادلة $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ نبدأ بملاحظة أنّ

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6)$$
$$= x(x-2)(x-3)$$

إذن يكون x حلاً للمعادلة $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ إذا وفقط إذا كان x حلاً لإحدى المعالات $x = 0$ أو $x - 2 = 0$ أو $x - 3 = 0$. فمجموعة حلول المعادلة $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ هي $S = = \{0, 2, 3\}$.

مثال

ليكن c عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً. لحل المعادلة $x^2 - c = 0$ نستفيد من المتطابقة الشهيرة

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

ونتذكّر أنّ $c = \left(\sqrt{c}\right)^2$ فنكتب $x^2 - \left(\sqrt{c}\right)^2 = \left(x+\sqrt{c}\right)\left(x-\sqrt{c}\right)$، فالمعادلة $x^2 - c = 0$ تُكافئ

$$\left(x+\sqrt{c}\right)\left(x-\sqrt{c}\right) = 0$$

وحلول هذه الأخيرة هي $\sqrt{c}$ أو $-\sqrt{c}$، فمجموعة حلول المعادلة $x^2 = c$ هي $\left\{-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right\}$.

تَدرَّبْ

① حلّ المعادلات الآتية :

❶ $(x-1)^2 = 16$

❷ $(x+5)^2 = 5$

❸ $(2-x)^2 = 2$

❹ $(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 = 0$

❺ $(2-x)(x-1)(4x-5) = 0$

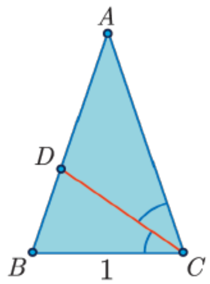
❻ $3(x+1) - (x+1)^2 = 0$

② أثبتْ أنّ $\sqrt{2}+1$ هو حلٌّ للمعادلة $x^2 - 2x - 1 = 0$، هل هناك حلٌّ آخر ؟

③ أثبتْ أنّ $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ هو حلٌّ للمعادلة $x^2 = 1 + x$، هل هناك حلٌّ آخر ؟

فَكِّرْ

يُسمّى العدد $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ العدد الذّهبي.



في الشكل المجاور، ABC مثلّث متساوي الساقين، والمثلّثان ABC و CDB متشابهان، و $[CD]$ منصف للزاوية $\angle BCA$، و $BC = 1$. تيقّن أنّ $AC = \Phi$.

4 التّرتيب في مجموعة الأعداد الحقيقيّة

قولنا إنّ العدد x عددٌ حقيقي موجب تماماً يعني أنّ x أكبر من الصفر ولا يساويه. فالكتابة $x > 0$، تُقرأ «x موجب تماماً»، أما الكتابة $x \geq 0$ فتعني أنّ x عددٌ موجب تماماً أو صفر.

وفيما يأتي عندما نقول إنّ x عددٌ موجب فهذا يعني أنّ $x \geq 0$.

تُقرأ الكتابة $x > \sqrt{5}$: «x أكبر تماماً من $\sqrt{5}$» ، وتُقرأ الكتابة $x \leq 2$: «x أصغر من العدد 2» وهي تعني أنّ x أصغر تماماً من 2 أو تساوي 2 .

وتعني الكتابة $-1 \leq x \leq \frac{4}{3}$ أنّ $x \geq -1$ و $x \leq \frac{4}{3}$ في آنٍ معاً.

تعني **مقارنة** عدد حقيقي a بآخر b معرفة أيُّهما أكبر، أو هل هما متساويان. أمّا الخاصة الأساسية لإجراء هذه المقارنة فهي الآتية :

خاصّة أساسيّة. يكون $a > b$ إذا وفقط إذا كان $b - a > 0$. وبذا تؤول المقارنة بين a و b إلى دراسة إشارة الفرق $b - a$.

مثال

لمقارنة العددين $a = \sqrt{2}$ و $b = \frac{7}{5}$. نحسب الفرق كما يلي :

$$
\begin{aligned}
a - b = \sqrt{2} - \frac{7}{5} &= \frac{5\sqrt{2} - 7}{5} \\
&= \frac{5\sqrt{2} - 7}{5} \times \frac{5\sqrt{2} + 7}{5\sqrt{2} + 7} \\
&= \frac{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 7^2}{5(5\sqrt{2} + 7)} \\
&= \frac{50 - 49}{5(5\sqrt{2} + 7)} = \frac{1}{5(5\sqrt{2} + 7)} > 0
\end{aligned}
$$

تذكر المتطابقة الشهيرة

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

إذن $a - b > 0$ أو $a > b$ أي $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$.

خاصّة أساسيّة. إذا كان a عدداً حقيقيّاً كان $a^2 \geq 0$.

مثال

ليكن x عدداً موجباً تماماً. لمقارنة العددين $a = x + \frac{1}{x}$ و $b = 2$. نحسب الفرق كما يأتي :

$$a - b = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$
$$= \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

إذن $a - b \geq 0$ أو $a \geq b$ ومنه $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

المتراجحات والعمليّات

ندرس فيما يأتي متراجحات تامّة، أي من النمط $a < b$، وتبقى جميع الخواص المدروسة صحيحة في حالة المتراجحات $a \leq b$.

❶ التّرتيب والجمع

إذا كان $a < b$ كان $a + c < b + c$ و $a - c < b - c$.

أي إذا أضفنا إلى طرفي متراجحة العدد نفسه، أو طرحنا من طرفيها العدد نفسه، لا يتغيّر اتّجاهها.

ونتيجة لذلك نحصل على قاعدة النّقل من طرف إلى آخر: إذا كان $x + a < b$ كان $x < b - a$ إذ يكفي أن نضيف إلى طرفَي المتراجحة الأولى العدد $-a$.

وكذلك لدينا الخاصة التالية :

إذا كان $a < b$ و $c < d$ كان $a + c < b + d$.

أي إذا جمعنا طرفاً إلى طرف متراجحتين **لهما الاتّجاه نفسه** فإنّنا نحصل على متراجحة لها الاتّجاه نفسه.

❷ التّرتيب والضّرب

- إذا كان $a < b$ و $c > 0$ كان $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- إذا كان $a < b$ و $c < 0$ كان $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

ونعبِّر عن ذلك بالقول :

- إذا ضُرِبَ طرفا متراجحة بعدد موجب تماماً، أو قُسِّم طرفاها على عدد موجب تماماً، لا يتغيّر اتّجاهها.
- إذا ضُرِبَ طرفا متراجحة بعدد سالب تماماً، أو قُسِّم طرفاها على عدد سالب تماماً، تغيَّر اتّجاهها.

وكذلك لدينا الخاصّة التّالية :

إذا كانت a,b,c,d أعداداً حقيقية موجبة وكان $a<b$ و $c<d$ كان $ac<bd$.

أي إذا ضربنا طرفاً بطرف متراجحتين تربطان أعداداً موجبة ولهما الاتّجاه نفسه حصلنا على متراجحة لها الاتجاه نفسه.

مثال كيف تحصر عبارة تحوي عددين ؟

① ليكن x و y عددين حقيقيين يحقّقان $2 \leq x \leq 3$ و $2 \leq y \leq 1$، عيِّنْ عددين حقيقيَّيْن يحصران المقدار $A = xy$ بينهما.

② ليكن x عدداً حقيقيّاً يحقّق $-1 < x < 2$، عيّن عددين يحصران المقدار $B = -2x - 3$ بينهما.

الحل

① استناداً إلى الفرْض لدينا $2 \leq x \leq 3$ و $1 \leq y \leq 2$. نريد ضرب هذه المتراجحات طرفاً بطرف، ولكي نفعل ذلك ارتكاب خطأ علينا التوثُّق أنَّ جميع الأعداد المذكورة موجبة. وهذا أمرٌ واضح هنا إذن : $2 \times 1 \leq xy \leq 3 \times 2$ أي $2 \leq A \leq 6$.

② نبدأ بحصر المقدار $-2x$ ثُمَّ المقدار $-2x-3$. لحصر المقدار $-2x$ نضرب أطراف المتراجحة $-1 < x < 2$ بالعدد -2 متنبّهين أنّه سالب وأنّ اتجاه المتراجحة سيتغيَّر، فنجد $2 > -2x > -4$. ثُمَّ إذا جمعنا العدد -3 إلى أطراف المتراجحة السابقة وجدنا $2-3 > -2x-3 > -4-3$، وعليه نكون قد أثبتنا أنّ $-7 < B < -1$.

❸ التَّرتيب وعلاقته بحساب مربَّع عدد أو جذره التَّربيعي أو مقلوبه

ليكن a و b عددين موجبين، عندئذ يكون $a^2 < b^2$ إذا وفقط إذا كان $a < b$.

في حالة عددين موجبين a و b يكون المجموع $a+b$ موجباً، ومن ثَمّ ينتج من المساواة :

$$b^2 - a^2 = \underbrace{(b+a)}_{\text{موجب}}(b-a)$$

أنّ للمقدارين b^2-a^2 و $b-a$ الإشارة نفسها. فإذا كان أحدهما موجباً تماماً كان الآخر موجباً تماماً.

فكّر

هل تبقى النتيجة السابقة صحيحة إذا لم نفترض العددين a و b موجبين ؟

وتنتج الخاصّة الآتية من السابقة:

> ليكن a و b عددين موجبين، عندئذ يكون $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ إذا وفقط إذا كان $a<b$.

لأنّه استناداً إلى ما سبق يكون $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ إذا وفقط إذا كان $\left(\sqrt{a}\right)^2<\left(\sqrt{b}\right)^2$ أي $a<b$.

تَدرَّبْ

أثبتْ صِحَّة كلٍّ من المتراجحتين : $\sqrt{2}<\frac{17}{12}$ و $\frac{41}{29}<\sqrt{2}$.

وكذلك لدينا الخاصة المهمة الآتية :

> ليكن a و b عددين موجبين تماماً. عندئذ يكون $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ إذا وفقط إذا كان $a<b$.

لماذا ؟

مثال

ليكن x عدداً حقيقياً يحقّق $2<x<5$. احصر المقدار $A=x+\frac{1}{x}$ بين عددين موجبين. أي عيّن عددين موجبين a و b (لا يتعلقان بقيمة x) يُحققان $a<A<b$.

الحل

إنّ $2<x$ تقتضي $\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$، ولأنّ $x>0$ فإنّ $x<5$ تقتضي $\frac{1}{5}>\frac{1}{x}$. إذن

$$\frac{1}{5}<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$$

نجمع إلى المتراجحة السابقة المتراجحة $2<x<5$ طرفاً إلى طرف فنجد :

$$2+\frac{1}{5}<x+\frac{1}{x}<5+\frac{1}{2}$$

أي $\frac{11}{5}<A<\frac{11}{2}$.

تدريب

① بيِّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة فيما يأتي :

♣ إذا كان $x \leq -3$ كان :

❶ $x-1<-2$ ❷ $x-1 \leq -4$ ❸ $x-1 \leq 4$.

♣ إذا كان $x>2$ كان :

❶ $-\frac{2}{3}x<-\frac{4}{3}$ ❷ $-\frac{2}{3}x<2-\frac{2}{3}$ ❸ $-\frac{2}{3}x>3$.

♣ إذا كان $0 \leq a \leq 1$ كان :

❶ $a \geq a^2$ ❷ $a^2 \leq 1$ ❸ $a \leq a^2$.

♣ إذا كان $0<a<3$ كان :

❶ $\frac{1}{a}<\frac{1}{3}$ ❷ $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{3}$ ❸ $\frac{1}{a}>\frac{1}{3}$.

♣ إذا كان $\frac{1}{2}<a<2$ كان :

❶ $\frac{1}{2}<\frac{1}{a}<2$ ❷ $\frac{1}{4}<\frac{1}{a^2}<4$ ❸ $\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{a}<\sqrt{2}$.

♣ إذا كان $\frac{1}{3}<x<\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{6}<y<\frac{1}{2}$ كان :

❶ $\frac{1}{2}<x+y<\frac{5}{4}$ ❷ $\frac{1}{18}<xy<\frac{3}{8}$ ❸ $18<\frac{1}{xy}<\frac{8}{3}$.

② قارن بين العددين a و b في الحالات التّالية :

❶ $a=5,\ b=2\sqrt{6}$. ❷ $a=\sqrt{5}\sqrt{7},\ b=6$.

❸ $a=8,\ b=3\sqrt{7}$. ❹ $a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\frac{7}{10}$.

❺ $a=\frac{9.01}{10^{53}},\ b=\frac{90.11}{10^{54}}$. ❻ $a=135\times10^{-25},\ b=2.1\times10^{-23}$.

③ في كلٍّ مما يلي، احصر المقدار A بين عددين، إذا علمتَ أنَّ a تُحقِّقُ الشرط المُعطى:

❶ $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2},\quad A=a^2+3$. ❷ $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2},\quad A=\frac{1}{a}-2$.

❸ $5<a<9,\quad A=\sqrt{a}+2$. ❹ $1 \leq a \leq 2,\quad A=(a-1)^2-3$.

❺ $6<a<11,\quad A=\sqrt{a-2}$. ❻ $8<a<15,\quad A=\sqrt{a+1}-1$.

④ ما إشارةُ كلٍّ من العددين $4\sqrt{5}-9$ و $\frac{1}{2\sqrt{2}-3}$ ؟

1

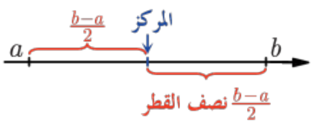
المجالات في مجموعة الأعداد الحقيقيّة

تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين يُحقِّقان المتراجحة $a < b$. يُبيِّن الجدول التّالي مُخْتَلَف أنماط المجالات :

المجال الذي نرمز إليه بالرمز	هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة x التي تحقّق المتراجحة	وتمثيلها على مستقيم مدرّج هو كما يأتي :	
$[a,b]$	$a \leq x \leq b$		مجالات محدودة
$]a,b[$	$a < x < b$		
$]a,b]$	$a < x \leq b$		
$[a,b[$	$a \leq x < b$		
$[a,+\infty[$	$a \leq x < +\infty$		مجالات غير محدودة
$]a,+\infty[$	$a < x < +\infty$		
$]-\infty,b]$	$-\infty < x \leq b$		
$]-\infty,b[$	$-\infty < x < b$		

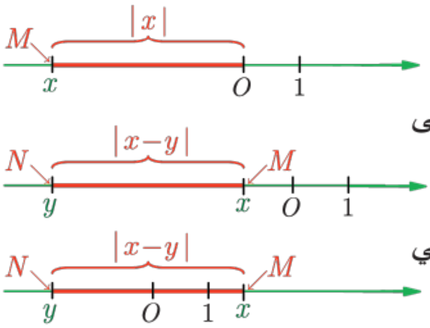
- يُقرأ الرمز $+\infty$ «زائد لانهاية»، ويُقرأ الرمز $-\infty$ «ناقص لانهاية». إضافة إلى المجالات التي عرّفناها، هناك المجال $]-\infty,+\infty[$ الذي يمثّل مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$.
- تُسمّى المجالات من النّمط $[a,b]$ مجالات مغلقة ومحدودة.
- لنتأمّل عددين حقيقيَّين a و b يُحقِّقان $a < b$، وليكن I واحداً من المجالات $[a,b]$ و $]a,b[$ و $]a,b]$ و $[a,b[$. عندئذ نسمّي العددين a و b طرفي المجال I. ونسمّي $c = \dfrac{a+b}{2}$ مركزه أو منتصفه، ونسمّي $r = \dfrac{b-a}{2}$ نصف قطره، وأخيراً نسمّي $b-a$ طوله.



- نستنتج من الملاحظة السابقة أنّ نقاط المجال $[a,b]$ هي تلك النقاط التي تبعد عن مركزه مسافة أصغر، أو تساوي نصف قطره. يُذكّرنا هذا بمفهوم القيمة المطلقة لعدد حقيقي التي تقيس المسافة بين العدد والمبدأ على المستقيم المُدَرّج، ولقد درسنا هذا المفهوم في العام الماضي.

تعريف

ليكن x عدداً حقيقيّاً، نسمّي القيمة المطلقة للعدد x المقدار $|x|$ الذي يساوي x في حالة $x \geq 0$ ويساوي $-x$ في حالة $x < 0$.



يقيس العدد $|x|$ المسافة بين النقطة M التي فاصلتها x على المستقيم المدرّج والمبدأ O.

وبوجه عام يمثّل المقدارُ $|x-y|$ المسافة بين النقطة M التي فاصلتها x والنقطة N التي فاصلتها y.

تذكّر أنّ القيمة المطلقة $|\cdot|$ تُحقّق الخواصّ الآتية :

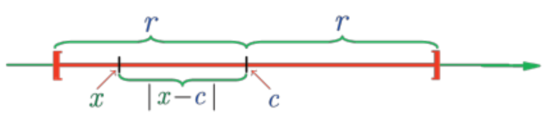
$|x| = \sqrt{x^2}$ و $|x| = |-x|$ والمساواة $|x| = |a|$ تُكافئ $(x = a$ أو $x = -a)$

وهي تُحقّق أيضاً المتراجحة المهمّة التالية :

أياً كان العددان x و y كان $|x+y| \leq |x| + |y|$

- لنرجع الآن إلى المجالات، تنتمي x إلى المجال **المغلق** $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان بُعد x عن $c = \dfrac{a+b}{2}$ (مركز المجال) أصغر أو يساوي $r = \dfrac{b-a}{2}$ (نصف قطر المجال). أي إذا تحقق الشرط $|x-c| \leq r$. نُعبّر عن هذه الخاصّة رمزاً كما يلي :

$x \in [c-r, c+r]$ إذا وفقط إذا كان $|x-c| \leq r$



فَكِّرْ

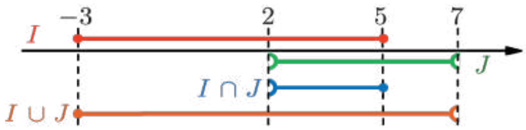
كيف نعبّر عن الخاصّة : x لا تنتمي إلى المجال المغلق $[a\,;b]$.

مثال

نتأمّل المجالات $I=[-3,5]$ و $J=]2,7[$ و $K=[6,+\infty[$، عيّن كلاً من $I\cap J$ و $I\cup J$، وكذلك $I\cap K$ و $I\cup K$.

الحل

لنمثّل بيانياً المجالين I و J. ولنتذكّر أنّ $I\cap J$ هو **تقاطع** المجالين I و J. أي مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تنتمي إلى هذين المجالين في آنٍ معاً، فهي إذن الأعداد التي تنتمي إلى المجال $]2,5]$.



أمّا $I\cup J$ فهو **اجتماع** المجالين I و J. أي مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تنتمي إلى أحد هذين المجالين أو إلى كليهما، فهي إذن الأعداد التي تقع في المجال $[-3,7[$.

بالمثل، نلاحظ من جهة ثانية، أنْ لا عناصر مشتركة بين المجالين I و K، إذن $I\cap K=\varnothing$، حيث يُقرأ الرمز $\varnothing$ «المجموعة الخالية». أمّا $I\cup K$ فهي المجموعة $[-3,5]\cup[6,+\infty[$ وهي ليست مجالاً

تَدَرَّبْ

① مثّل على مستقيم مدرّج مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تُحقّق الشرط المُعطى، في كلٍّ من الحالات الآتية :

❶ $|x-2|\le 3$ ❷ $\left|x-\dfrac{3}{2}\right|<1$ ❸ $|x|>0$ ❹ $|x-1|\ge 2$

② عيّنْ، في حال وجودها، قيم x التي تُحقّق الشرط المبيَّن في كلٍّ من الحالات الآتية :

❶ $|x-3|=2$ ❷ $|x+5|=10^{-2}$

❸ $|x-3|=|2-x|$ ❹ $|x-8|=|x+5|$

❺ $|x-5|=|x+5|$ ❻ $|x+2|=3|x-6|$

③ عبِّرْ باستعمال القيمة المطلقة عن قيم x التي تُحقّق الشرط المبيَّن في كلٍّ من الحالات الآتية :

❶ $x\in[2,12]$ ❷ $x\in]3,11[$ ❸ $x\in[-8,-4]$

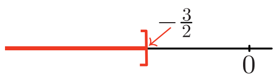
❹ $x\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$ ❺ $x\in\left]-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right[$ ❻ $x\in]-\infty,-1]\cup[7,+\infty[$

المتراجحات وإشارة المقدار $ax+b$

ليكن a و b عددين حقيقيَّين. حَلُّ المتراجحة $ax+b \leq 0$ هو إيجاد كلِّ الأعداد الحقيقية التي تجعل $ax+b$ سالباً أو معدوماً، والقيم التي نحصل عليها تسمى حلول المتراجحة.

مثال

حلُّ المتراجحة $2x+3 \leq 0$ هو تعيين قيم المتحوّل x التي تحقّقها، وتسمّى مجموعة هذه القيم S مجموعة حلول المتراجحة.



تُكتب المتراجحة $2x+3 \leq 0$ بالصيغة المُكافئة: $2x \leq -3$، وبتقسيم طرفي المتراجحة على العدد الموجب تماماً 2 نجد $x \leq -\frac{3}{2}$. فمجموعة الحلول S هي الأعداد الحقيقية التي هي أصغر أو تساوي $-\frac{3}{2}$ أي المجال $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

وبوجه عام يمكن تعيين قيم x التي تجعل المقدار $ax+b$ موجباً تماماً، وتلك التي تجعله سالباً تماماً. كما يلي :

مبرهنة

ليكن العددان الحقيقيّان a و b حيث $a \neq 0$، نجد فيما يلي إشارة $ax+b$ تِبعاً لقيم x :

▪ في حالة $a > 0$

x		$\frac{-b}{a}$	
$ax+b$	$-$	0	$+$

▪ في حالة $a < 0$

x		$\frac{-b}{a}$	
$ax+b$	$+$	0	$-$

أي إنّ إشارة المقدار $ax+b$ تُماثل إشارة a إذا كان $x > \frac{-b}{a}$، وتعاكس إشارة a إذا كان $x < \frac{-b}{a}$.

في الحقيقة، إنّ $ax+b=0$ يُكافئ $x = \frac{-b}{a}$ لأنّ $a \neq 0$.

❶ حالة $a > 0$

▪ $ax+b > 0$ يُكافئ $ax > -b$، وبالقسمة على العدد الموجب تماماً a نجد $x > \frac{-b}{a}$.

▪ $ax+b < 0$ يُكافئ $ax < -b$ ومن ثَمّ $x < \frac{-b}{a}$.

❷ حالة $a < 0$

▪ $ax+b > 0$ يُكافئ $ax > -b$ وبالقسمة على العدد السالب تماماً a نجد $x < \frac{-b}{a}$.

▪ $ax+b < 0$ يُكافئ $ax < -b$ ومن ثَمّ $x > \frac{-b}{a}$.

فكّرْ

ينعدم المقدار $ax+b$ عند $x_0=-\frac{b}{a}$، وهو يحافظ على إشارة واحدة على كل مجال من المجالين $]-\infty,x_0[$ و $]x_0,+\infty[$. ولتعيين هذه الإشارة يكفي أنّ نعيّن إشارة $at+b$ عند قيمة اختياريّة ما t من أحد هذين المجالين.

مثال

① ادرسْ إشارة كلٍّ من المقدارين $4-3x$ و $5x+2$.

② استنتجْ إشارة كلٍّ من المقدارين $E=(4-3x)(5x+2)$ و $F=\frac{4-3x}{5x+2}$ وذلك تبعاً لقيم x.

الحل

① إشارة $4-3x$. إنّ $4-3x=0$ عندما $x=\frac{4}{3}$، إذن إشارة هذا المقدار كما في الجدول المجاور.

x		$4/3$	
$4-3x$	$+$	0	$-$

إشارة $5x+2$. إنّ $5x+2=0$ عندما يكون $x=-\frac{2}{5}$، وإشارة هذا المقدار كما في الجدول المجاور.

x		$-2/5$	
$5x+2$	$-$	0	$+$

لدراسة إشارة جداء AB أو كسر $\frac{A}{B}$ ندرس إشارة كلٍّ من A و B ثُمّ نستفيد من قاعدة الإشارات.

② إشارة E. ننظّمُ جدولاً مُشتركاً يضمُّ إشارة كلٍّ من $4-3x$ و $5x+2$. يمكننا في هذا الجدول أنْ نقرأ الخواصَّ الآتية :

x		$-2/5$		$4/3$	
$4-3x$	$+$		$+$	0	$-$
$5x+2$	$-$	0	$+$		$+$
E	$-$	0	$+$	0	$-$

- $E=0$ في حالة $x=-\frac{2}{5}$ أو $x=\frac{4}{3}$.
- $E>0$ إذا كان $-\frac{2}{5}<x<\frac{4}{3}$ أي إذا كان $x\in\left]-\frac{2}{5},\frac{4}{3}\right[$.
- $E<0$ إذا كان $x<-\frac{2}{5}$ أو $x>\frac{4}{3}$ أي إذا كان $x\in\left]-\infty,-\frac{2}{5}\right[\cup\left]\frac{4}{3},+\infty\right[$.

ونترك لك أنْ تتدرّب بالمثل على تعيين إشارة المقدار F.

تَدرَّبْ

① حلَّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة المُعطاة، ومثِّل على مستقيم مدرّج مجموعة حلولها S، واكتبها بصيغة مجال في كلٍّ من الحالات الآتية :

❶ $8x+3<10x-1$ ❷ $-3x+1\geq 2x+4$

❸ $-\dfrac{1}{2}x-5\leq -4$ ❹ $\sqrt{2}x-1>2\sqrt{2}-1$

② ادرسْ إشارة المقدار $A(x)$ تِبعاً لقيم x في كلٍّ من الحالات الآتية :

❶ $A(x)=-3x+5$ ❷ $A(x)=2x-4$

❸ $A(x)=(x+1)(-2x+6)$ ❹ $A(x)=\dfrac{-3x+9}{4x-8}$: $(x\neq 2)$

❺ $A(x)=|2x-3|$ ❻ $A(x)=-(x-3)^2$

تمرينات ومسائل

1 العددان $A=\sqrt{2}-\sqrt{6}$ و $B=\sqrt{6}$ هما عددان غير عاديَّين. بيِّن: أيُّ الأعداد التالية عاديٌّ ؟

① A^2+B . ② $5-A^2$. ③ B^2 .

2 توثَّق أنّ العددين التاليين عددان عاديّان :

① $\sqrt{1+\frac{3}{5}}\times\sqrt{1-\frac{3}{5}}$. ② $\sqrt{1+\frac{5}{13}}\times\sqrt{1-\frac{5}{13}}$.

3 توثَّق أنّ العددين التاليين عددان عاديّان :

① $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$. ② $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$.

وبيِّن بوجه عام، أنّه إذا كان a عدداً عاديّاً كان العددان الآتيان عددين عاديّين :

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$.

4 حلِّل كلاً من العبارات الآتية إلى جداء ضرب عوامل بسيطة :

① $A=9(4x^2-4x+1)+2(2x-1)$ ② $B=\frac{x^2-9}{5}-\frac{x+3}{2}$

③ $C=(x+1)(8x-4)-(2x-1)^2$ ④ $D=x^3+x^2+x+1$

5 حلَّ في $\mathbb{R}$ كلاً من المعادلات الآتية :

① $9x^2-1=3x+1$ ② $x\left(3x-2\right)=4-9x^2$

③ $\frac{4}{x-1}=x-1$ ④ $\frac{x^2}{x-1}=4$

6 اكتب المقدار الآتي بأبسط صيغة :

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

7 ليكن x عدداً حقيقياً يُحقّق $x+\frac{1}{x}=5$ ، احسبْ بأبسط صيغة المقدار

$$x^3+\frac{1}{x^3}$$

لنتعلّم البحث معاً

8 إثبات متطابقات

① أثبتْ أنّه، مهما كان العدد الحقيقي x كان :

$$3x^4 - 4x^3 + 1 = (x-1)^2(2x^2 + (x+1)^2)$$

② أثبتْ أنّه، مهما كانت الأعداد الحقيقيّة a, b, c, d كان :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

نحو الحلّ

①

فهم السؤال. لنضع $B = 3x^4 - 4x^3 + 1$ و $A = (x-1)^2(2x^2 + (x+1)^2)$. نريد أن نثبت أنّ $A = B$. إحدى الطرائق الممكنة هي نشر المقدار A واختزاله آملين الوصول إلى B.

الحساب. انشر ثُمّ اختصر عبارة A. يجب أن تصل إلى B.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

②

فهم السؤال. لنضع :

$$A = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$
$$B = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

نريد أن نثبت أنّ $A = B$. يمكننا أن نتبع طريقة السؤال السابق.

الحساب. انشر ثُمّ اختصر عبارة A. ستجد $A = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$. ولكن بعكس السؤال السابق لم نحصل هذه المرّة على B، وقد لا نرى كيف نحوّل A أكثر من ذلك لنصل إلى B. ومنه فكرة تحويل B بنشر الجداء.

متابعة الحساب. انشر عبارة B. ماذا تجد ؟

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

9 اختيار الصيغة المناسبة

نعرّف، أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$، المقدار : ❶ $E(x) = (x+3)^2 - 25$.

① ◆ أثبتْ أنّ : ❷ $E(x) = x^2 + 6x - 16$.

◆ أثبتْ أنّ : ❸ $E(x) = (x-2)(x+8)$.

② اخترْ من بين الصيغ الثلاث السابقة الصيغة المناسبة أكثر من غيرها لحل المعادلات الآتية :

(a) $E(x) = 0$. (b) $E(x) = 11$. (c) $E(x) = -16$.

نحو الحلّ

① يمكن اتّباع أسلوب التمرين السابق.

- كي نبرهن أنّ $E(x) = x^2 + 6x - 16$ يكفي أن ننشر ثمَّ نختزل المقدار $(x+3)^2 - 25$. افعل ذلك.
- نريد إثبات $E(x) = (x-2)(x+8)$. بدلاً من محاولة تحليل $x^2 + 6x - 16$ إلى جداء عوامل. نرى من الأسهل أن ننشر ثمَّ نختزل المقدار $(x-2)(x+8)$.

أنجِزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

②

- **فهم السؤال.** المقصود «بالصيغة المُناسبة أكثر من غيرها» ، الصيغة التي تفيدنا بالوصول إلى الحل بأقل جهد من غيرها.
- فمثلاً، الصيغة المُناسبة لحل المعادلة $E(x) = 0$ هي ③ بيِّن لماذا ؟ ثُمّ اكتب الحلّ.
- اختر الصيغة المُناسبة لحل المعادلتين الأخريين، برِّر اختيارك، ثُمّ اكتب الحل.

10 استعمال الرموز في الإثبات

نختار كيفيّاً أربعة أعداد طبيعيّة متتالية. نضرب أكبرها بأصغرها ونطرح من الناتج جداءَ ضرب العددين الآخرَيْن، فنحصل على العدد -2. أثبت صحّة هذه الخاصّة.

نحو الحلّ

- **فهم السؤال.** لنتيقّن من فهم العمليّات الموصوفة في نصِّ المسألة، يمكننا البدء بمثال. نبدأ باختيار أربعة أعداد طبيعيّة متتالية ولتكن $1,2,3,4$. جداء ضرب أكبرها بأصغرها $1 \times 4 = 4$، وجداء ضرب العددين الآخرين $2 \times 3 = 6$. وحاصل طرحهما $4 - 6 = -2$، فهو يساوي فعلاً -2.
- **بحثاً عن طريق.** يطلب التمرين إثبات الحالة العامّة : فقد جرى التأكيد على أنّنا نختار كيفيّاً الأعداد الأربعة المتتالية. يجب إذن أن نرمز إلى هذه الأعداد برموز مثل a,b,c,d ولكن الفرْض الذي يشير إلى كونها متتالية يتيح لنا أن نرمز إليها بالرموز $a, a+1, a+2, a+3$. توثَّق أنّ إثبات المطلوب يؤول إلى إثبات :

$$a(a+3) - (a+1)(a+2) = -2$$

أثبتْ ذلك ثم صُغ الحلّ بلغةٍ سليمة.

11 المتراجحات وإشارة جداء

حُلَّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $(\mathcal{E}) : \quad (2x+3)^2 \leq (x-1)^2$

نحو الحلّ

- **فهم السؤال**. نهدف إلى إيجاد الأعداد x التي تُحقّق $(2x+3)^2 \leq (x-1)^2$. نعرف كيف ندرس المتراجحات من الدرجة الأولى، أي من النّمط $ax+b \leq 0$. تأتينا إذن الفكرة بإرجاع السؤال إلى تلك الحالة.
- **بحثاً عن طريق**. نعلم أنّ المتراجحة $a \leq b$ تكافئ $b-a \geq 0$. وعليه تُكتب المتراجحة المعطاة $(\mathcal{E})$ بالشكل $P(x) \geq 0$ حيث $P(x)=(x-1)^2-(2x+3)^2$.
  - أوّل ما يراودنا هو نشر عبارة $P(x)$، وهذا ما يقودنا إلى حلِّ المتراجحة الآتية: $-3x^2-14x-8 \geq 0$، ولكن لم نتعلّم بعدُ دراسة مثل هذه المتراجحات.
  - نبحث إذن عن صيغة أخرى للمقدار $P(x)$. نلاحظ أنّ $P(x)$ هو فرق مربّعين. حلِّل $P(x)$ مستفيداً من هذه الملاحظة، ثُمّ حُلّ المتراجحة $P(x) \geq 0$.

أثبتْ ذلك ثُم صُغ الحل بلغة سليمة.

12 المتراجحات وإشارة كسر

حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\dfrac{4x+1}{6-x} \leq -1$.

نحو الحلّ

- **فهم السؤال**. ليست هذه المتراجحة معرّفة إلاّ في حالة $x \neq 6$. كما نلاحظ أنّها ليست من الدرجة الأولى، لذلك علينا إرجاع دراستها إلى مثل هذه الحالة.
- **بحثاً عن طريق**.
  - **تنبيه**: لا تكتب أنّ المتراجحة $\dfrac{4x+1}{6-x} \leq -1$ تقتضي $\left(4x+1\right) \leq -1\times\left(6-x\right)$، لأنّ هذا يعود إلى ضرب طرفي المتراجحة بالمقدار $6-x$ الذي قد يكون سالباً.
  - أثبت أنّه في حالة $x \neq 6$، يمكننا كتابة المتراجحة المدروسة بالشكل المُكافئ $\dfrac{4x+1}{6-x}+1 \leq 0$، أو $\dfrac{3x+7}{6-x} \leq 0$.
  - علينا إذن دراسة متراجحة من النمط $\dfrac{A}{B} \leq 0$ في حالة $A=3x+7$ و $B=6-x$. يكفي في مثل هذه الحالة أن ندرس إشارة كلٍّ من A و B. افعل ذلك.
  - نظِّمْ نتائجك في جدول واحد، واستنتج المجموعة S مجموعة حلول المتراجحة المدروسة.

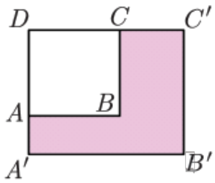
أثبتْ ذلك ثُم صُغ الحل بلغة سليمة.

13 لتكن a و b و c و d أربعة أعداد حقيقيّة تحقِّق $b \neq 0$ و $d \neq 0$ و $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

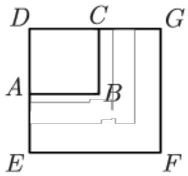
① نفترض أنّ $b + d \neq 0$ أثبت أنّ $\frac{a}{b} = \frac{c+a}{d+b}$.

② نفترض أنّ $d - b \neq 0$ أثبت أنّ $\frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b}$.

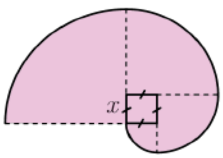
14 نفترض أنّ $ABCD$ مربَّعٌ و $A'B'C'D$ مستطيل. و نفترض أنّ مساحة الجزء الملوَّن تساوي 183 متراً مربّعاً. فإذا علمتَ أنّ AA' يساوي $5\,\mathrm{m}$ وأنّ CC' يساوي $8\,\mathrm{m}$، احسبْ AB.



15 نفترض أنّ $ABCD$ مربّع. ونفترض أنّ مساحة المربّع $EFGD$ تساوي أربع مرات مساحة المربّع $ABCD$. فإذا علمتَ أنّ AE يساوي $5\,\mathrm{m}$، احسبْ AB.



16 يتألّف الشكل المجاور من مربّع طول ضلعه x وأربعة أرباع دوائر تقع مراكزها على رؤوس المربّع. عبِّر بدلالة x عن مساحة السطح الملوَّن. وأعطِ قيمةً تقريبيَّةً لهذه المساحة عندما $x = 2$.



17 انطلاقاً من صفيحة مستطيلة $ABCD$، عرضها $AB = \ell$ وطولها $AD = 2\ell$، نصطنع سطحين أسطوانيَّين بطريقتين:

① نجعل الضلع $[BC]$ ينطبق على $[AD]$.

② نجعل الضلع $[AB]$ ينطبق على $[DC]$.

نرمز بالرمز V_1 إلى حجم الأسطوانة التي نحصل عليها بالطريقة الأولى، وبالرمز V_2 إلى حجم الأسطوانة التي نحصل عليها بالطريقة الثانية. احسب النِّسبة $\frac{V_1}{V_2}$.

18 مُقارنة عددين.

① a و b عددان موجبان تماماً. قارِنْ بين العددين

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{و} \quad B = \frac{2ab}{a+b}$$

② a و b عددان موجبان. قارِنْ بين العددين

$$A = a + b \quad \text{و} \quad B = 2\sqrt{ab}$$

19 ليكن a و b عددين موجبين تماماً. أثبت أنّ $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

20 ليكن a و b عددين موجبين تماماً. أثبت أنّ $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

21 ليكن a و b عددين حقيقيَّين يُحقّقان $0 < b \leq a$. قارن بين الأعداد الآتية :

$$\frac{a}{b+1}, \frac{a+1}{b+1}, \frac{a}{b}$$

22 احصر المقدار A بين عددين، إذا علمتَ أنّ a تُحقّق الشرط المبيَّن في كلٍّ مما يأتي

1. $A = a^2 + 3$, $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$.
2. $A = \frac{1}{a} - 2$, $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.
3. $A = \sqrt{a} + 2$, $5 < a < 9$.
4. $A = (a-1)^2 - 3$, $1 \leq a \leq 2$.
5. $A = \sqrt{a-2}$, $6 < a < 11$.
6. $A = \sqrt{a+1} - 1$, $8 < a < 15$.

23 في كلٍّ من الحالات الآتية، حُلَّ المتراجحة المُعطاة، ثُمّ مثِّل مجموعةَ الحلول على مستقيم مدرَّج، وعبِّر عنها بدلالة مجالات :

1. $3 - 2x \leq 5x - 1$.
2. $\frac{1}{6} - \frac{x}{3} \geq \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$.
3. $\frac{3+x}{4} \leq \frac{x-1}{2}$.
4. $5 + \frac{2}{3}x > \frac{1}{6}x - 1$.
5. $(2x+1)(-5x+2) < 0$.
6. $(7-3x)(x+4) \geq 0$.
7. $x^2 + 3x > 0$.
8. $(2x+3)^2 - 4 \leq 0$.
9. $(5x-7)^2 + 3(7-5x) \leq 0$.
10. $(x-2)^2 - (2x+3)^2 \geq 0$.

24 في كلٍّ من الحالات الآتية، بيِّن قيم x الممنوعة، ثُمّ حلَّ المتراجحة المعطاة، ومثِّل مجموعة الحلول على مستقيم مدرَّج، وعبِّر عنها بدلالة مجالات :

1. $\frac{8-2x}{x+5} \geq 0$.
2. $\frac{2+5x}{x-1} > 0$.
3. $\frac{2-3x}{3-2x} \leq 0$.
4. $\frac{3x+7}{3x+5} \leq 0$.
5. $\frac{4}{x+1} \geq -3$.
6. $\frac{5}{2-6x} < 1$.
7. $\frac{x^2+1}{x^2-4} \leq 0$.
8. $\frac{x^2+1}{x^2-4} \leq 1$.

2

مفهوم التَّابع

1. مقدّمة عامّة
2. مفهوم التّابع العددي
3. الخطّ البياني لتابع
4. التّابع المتزايد والتّابع المتناقص
5. جدول اطّراد تابع

ظهر مفهوم التابع متأخراً، في تاريخ الرياضيات. فقديماً كان الرياضيّاتيُّون الإغريق، وتبعهم الرياضيّاتيُّون العرب في الفترة ما بين القرنين الثامن والثالث عشر، يستعملون جداولَ فلكيةً ومثلثيةً لأهدافٍ عمليةٍ وحسابيةٍ بحتة.

وظهرت، مع بداية القرن الرابع عشر، مفاهيمُ جديدةٌ. حيث بدأ الإنسان ينظر إلى الرياضيّات بصفتها لغة قادرة على وصف حقائق الفيزياء. هذا ما أكّده غاليليو في دراسته عن السقوط الحرِّ عام **1623**.

وما جعل هذا الانتقال سهلاً هو البدء باستعمال الرموز الجبريَّة والحساب الرمزي الذي أطلقه فرانسوا فييت عام **1591**. أتاح هذا التعامل مع عبارات تحوي أعداداً ومجاهيل. ومع هذا، فقد وجب انتظار أعمال ديكارت ونيوتن ولايبنتز في القرن السادس عشر وأويلر في القرن السابع عشر حتى نصل إلى صيغة كتابة قريبة من الحالية للعبارات والمعادلات الجبريَّة. وبوجه خاص، عمل ديكارت على المنحنيات الهندسية حيث ترتبط إحداثيات النقاط x و y بمعادلة جبرية.

وفي القرن الذي تلا عصر ديكارت وضع أويلر وبرنولي الشكل النّهائي لمفهوم التّابع .

2

مفهوم التّابع

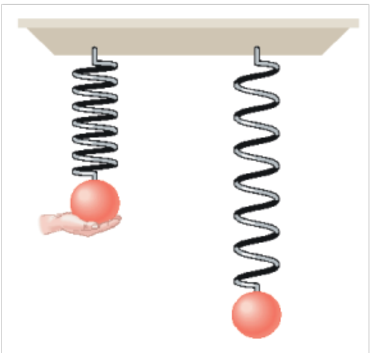
1 مقدّمة عامّة

عندما تعتمد قيمة مقدار ما G على قيمة مقدار آخر x نقول إنّ G **تابعٌ** للمتحوّل x. فمثلاً

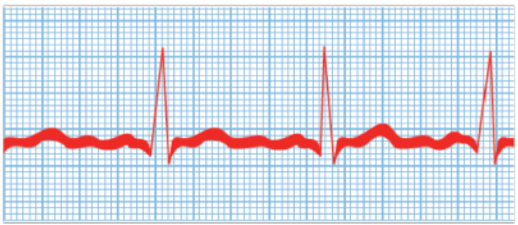
- ما تدفعه لسيّارة الأجرة، تابعٌ للمسافة التي تقطعها راكباً السيارة.
- درجة الحرارة في أحد الأيام في مدينتك **تابعة** لساعات اليوم. مثلاً

الساعة	6	10	14	16	20	22
درجة الحرارة	10	15	27	27	18	13

- الاستهلاك الوسطي للأسرة من مياه الشرب **تابعٌ** لعدد أفراد الأسرة.
- مقدار استطالة نابض معلّق شاقوليّاً **تابعٌ** للثقل المعلّق به. ويسعى الفيزيائيُّون عادة إلى إيجاد علاقة تربط بين قياسات هذه المقادير. فمثلاً : يقرنون بكلّ قيمّة معطاة للثقل مقدارَ استطالة النّابض التي يقيسونها.



- الضغط الجويّ في مكان ما، **تابعٌ** للارتفاع عن سطح البحر. ونقرن عادة بكلّ قيمّة معطاة لارتفاع مكان عن سطح البحر مقدارَ الضغط الجويّ عند ذلك المكان.
- كثيراً ما نرى، عمليّاً وفي العلوم التجريبيّة، التوابعَ مُعرَّفَةً بخطوط بيانيّة. تَذكّر المخطّطات التي ترصد الهزّات الأرضيّة، أو تخطيط القلب الكهربائي المبيَّن في الشكل المجاور، هذه جميعاً تعبّر عن تبعيّة مقدار فيزيائي معيَّن للزمن.



- وفي الهندسة، مساحة الدائرة **تابعٌ** لنصف قطرها.

- في الرياضيّات، نتجرّد عن الطبيعة الفيزيائيَّة للظّواهر المدروسة، ونحتفظ بالفكرة الأساسيّة، وهي أن نقرن عدداً بعددٍ آخر. وعليه :

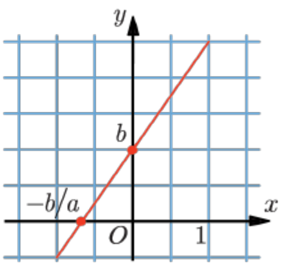
> لاصطناع تابع f يجب أن نقرن بكلِّ عدد x من مجموعة عدديّة، عدداً نرمز إليه بالرمز $f(x)$.

وهكذا وضع علماء الرياضيّات، قالباً عاماً ينطبق على جميع الحالات التي نسعى فيها لدراسة تغيّرات مقدار معيّن يتعلّق بمقدار آخر (أو يتبعه).

لنتذكّر معاً في المثال التالي بعض التّوابع التي مررت بها في دراستك السابقة، والتي سنعود إليها لاحقاً على نحوٍ أكثر تفصيلاً.

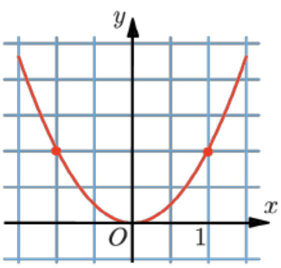
مثال

التوابع التآلفيَّة



ليكن a و b عددين حقيقيّين. يسمّى التّابع الذي يقرن بكلِّ عددٍ حقيقي x العددَ $ax+b$ **تابعاً تآلفيّاً** أو **أفينيّاً** أو **تابعاً من الدرجة الأولى**. يمكننا التعبير عن ذلك بالكتابة الرمزية : $x \mapsto ax+b$. وإذا أسمينا هذا التّابع f كان $f(x)=ax+b$. ونعرف من دراستنا السابقة أنّ الخطَّ البيانيَّ لهذا التّابع هو مستقيم. (الرسم المجاور يوافق حالة $a \neq 0$).

التّابع التّربيعيّ



يسمّى التّابع الذي يقرن بكلِّ عددٍ حقيقي x العددَ x^2 **تابعاً تربيعياً**. يمكننا التعبير عن ذلك بالكتابة : $x \mapsto x^2$. وإذا أسمينا هذا التّابع g كان $g(x)=x^2$. ونعرف من دراستنا السابقة أنّ للخطِّ البيانيِّ لهذا التّابع شكلاً مميّزاً أسميناه قَطعاً مُكافئاً.

2 مفهوم التّابع العددي

تعريف

ليكن D مجالاً أو اجتماع مجالات من $\mathbb{R}$.

- تعريف تابع f من D إلى $\mathbb{R}$، هو أن نقرن بكلِّ عددٍ حقيقي x من D عدداً حقيقيّاً **وحيداً** $y = f(x)$.
- نقول إنّ D **منطلق** التّابع f، أو **مجموعة تعريفه**، أو نقول إنّ f معرّف على D.
- نسمّي العدد x من D **متحوّلاً**، وإذا كان a عدداً من D، أسمينا $b = f(a)$ **صورة** العدد a وفق f.
- ونسمّي العبارة $x \mapsto f(x)$ أو $y = f(x)$ **علاقة ربط** التّابع.
- إذا كان f تابعاً معرّفاً على D كتبناه بالشكل $f : x \mapsto f(x)$ إذا لم يكن هناك مجال للّبس في معرفة D، أو كتبنا $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$، وهذه الصّيغة أكثر دقة.

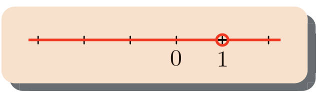
مجموعة التّعريف

غالباً ما يُعطى منطلق تابع ما، فنقول مثلاً إنّ f هو التّابع المعرّف على $[-4,5]$ بالعلاقة $f(x) = x + 1$. أو يكون المنطلق معروفاً من سياق المسألة المطروحة. فمثلاً للتابع f الذي يقرن بنصف قطر دائرة x مساحة هذه الدائرة أي πx^2، علاقة الربط $f(x) = \pi x^2$، وواضح من سياق النصِّ أنّ مُنطلقه D هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً $]0,+\infty[$.

ولكن عندما لا نُعطى مجموعة تعريف تابعٍ معروفةٌ علاقة ربطه، **فنصطلح** أنّها مجموعة الأعداد x التي يكون عندها حساب العبارة $f(x)$ ممكناً، أو يكون عندها للمقدار $f(x)$ معنى.

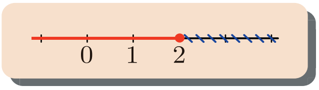
مثال

لنفترض أن عبارة $f(x)$ كسرية، مثل $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. عندئذ لا يكون حساب $f(x)$ ممكناً ما لم يكن $x - 1 \neq 0$ أو $x \neq 1$، لأنّ القسمة على العدد 0 في الأعداد الحقيقيّة غير ممكنة. فمجموعة تعريف f هي $D_f =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$. التي نمثّلها على المستقيم الحقيقيّ بالشكل :



مثال

لنفترض وجود جذرٍ تربيعيٍّ في عبارة $f(x)$ ، مثل $f(x)=\sqrt{2-x}$. عندئذ لا تمثّل الكتابة $\sqrt{2-x}$ عدداً حقيقيّاً، ما لم يكن المقدار $2-x$ موجباً، أو $x \leq 2$. فمجموعة تعريف f هي $D_f = \left]-\infty, 2\right]$. التي نمثّلها على المستقيم الحقيقيِّ بالشكل:

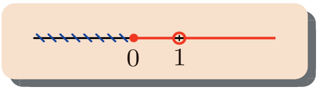


تَدرَّبْ

جِدْ D مجموعة تعريف التّابع $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

الحل

يؤول إيجاد D إلى إيجاد مجموعة الأعداد x التي يمكن عندها حساب $f(x)$. فالكتابة $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ تعني أننا نقسم الجذر التربيعي للعدد x على $x-1$. هذه الكتابة إذن لا تمثّل عدداً حقيقيّاً إلاّ إذا تحقّق الشرطان : $x \geq 0$ و $x \neq 1$. وعليه $D = \left[0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$.



تَدرَّبْ

ليكن f التّابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{5}{x^2+1}$ ، عيّن، في حال وجودها، الأعداد التي صورة كلٍّ منها وفق f تساوي 1.

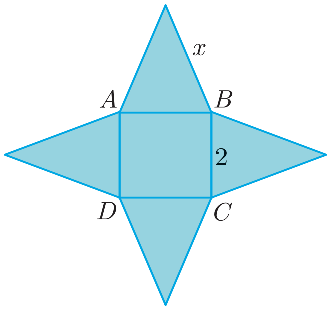
في حالة تابع f معرّف على D ، إيجاد عناصر D التي صورةُ كلٍّ منها عددٌ مُعطى b ، هو حلُّ المعادلة $f(x)=b$ في D .

الحل

إيجاد الأعداد الحقيقيّة التي صورة كلٍّ منها وفق f تساوي 1، هو إيجاد قيم x التي تُحقّق $f(x)=1$ أي $\dfrac{5}{x^2+1}=1$ أو $x^2=4$. لهذه المعادلة جذران $x=2$ و $x=-2$ وكلاهما مقبول لأنَّ f معرّف على كامل $\mathbb{R}$. فالعددان 2 و -2 هما العددان اللّذان صورة كلٍّ منهما وفق f تساوي 1.

تَدرُّبْ

① ليكن $ABCD$ مربّعاً طول ضلعه يساوي 2، نُنشئ على محيط المربّع وخارجه أربعة مثلّثات متساوية الساقين طبوقة فنحصل على نجمة منتظمة، طول كلٍّ من أضلاعها يساوي x كما في الشكل المجاور، ونعرّف التابع f بالقول إنّ $f(x)$ يساوي مساحة سطح النّجمة.



❶ بيّنْ أنّ مُنطلق التّابع f هو $D =]1,+\infty[$.

❷ اكتبْ بأسلوب صحيح عبارة التّابع f.

② بيّنْ مجموعة تعريف كلٍّ من التوابع المعرّفة بالعلاقة :

❶ $f(x) = 2x^2 + 1$ ❷ $f(x) = \dfrac{1}{2x} + 3x$

❸ $f(x) = 2x + \dfrac{7}{2}$ ❹ $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

❺ $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ ❻ $f(x) = x\sqrt{2} + 1$

❼ $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$ ❽ $f(x) = \dfrac{2x}{2x+3}$

❾ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ❿ $f(x) = \dfrac{2}{x(x+1)}$

③ بيّن مجموعة تعريف كلّ من التوابع المعرّفة بالعلاقة :

❶ $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ ❷ $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$

❸ $f(x) = \dfrac{2}{x} + \sqrt{x+1}$ ❹ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

❺ $f(x) = \dfrac{2}{x^2+4x}$ ❻ $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-2x+1}$

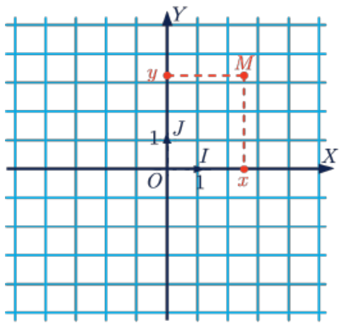
❼ $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$ ❽ $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

❾ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$ ❿ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

3 الخطُّ البيانيُّ لتابع

المَعلَم في المستوي

نتأمّل في المستوي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة (O,I,J). ننظر إلى المستقيم (OI) بصفته مستقيم أعداد مبدؤه النقطة O وتكون فاصلة النقطة I عليه مساوية 1. فنحصل بذلك على ما نسميه **محور الفواصل ونرمّزه OX**. وبالمثل ننظر إلى المستقيم (OJ) بصفته مستقيم أعداد مبدؤه النقطة O وتكون فاصلة النقطة J عليه مساوية 1. نسمي عادة فاصلة نقطة على المستقيم (OJ) ترتيبها، ونسمي مستقيم الأعداد الثاني **محور التّراتيب OY**.



سنقتصر في هذا البحث على الحالة التي يكون فيها المستقيمان متعامدين أي $\angle IOJ = 90°$، و $OI = OJ = 1$. نقول في هذه الحالة إنّ لدينا **مَعْلَماً متجانساً**. وعندها تتعيّن كلُّ نقطة M في المستوي بمعرفة x فاصلة مسقطها على محور الفواصل، و y ترتيب مسقطها على محور التراتيب. فنقول إنّ (x,y) هما إحداثيَّتا النقطة M في المَعْلَم المُعطى. وندلُّ عليها بالكتابة : $M(x,y)$.

الخطُّ البياني

تعريف

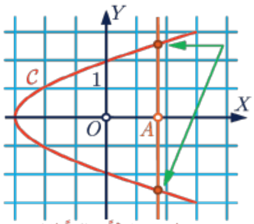
ليكن f تابعاً منطلقه D. إنّ **الخطَّ البيانيَّ** C للتابع f في مَعْلَمٍ، هو مجموعة النقاط التي إحداثيّاتها (x,y) حيث تنتمي x إلى D و $y = f(x)$.

الشرط اللازم والكافي لتنتمي النقطة $M(a,b)$ إلى الخطِّ البيانيِّ C هو أن يكون $b = f(a)$

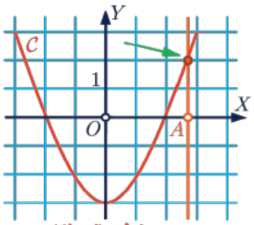
كُنتَ قد رأيتَ في دراستك السابقة أنّ الخطَّ البيانيَّ لتابعٍ تآلفيٍّ f معرّف على $\mathbb{R}$ بصيغة من النمط $f(x) = ax + b$ هو المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$. وبالعكس، كلُّ مستقيم في المستوي لا يوازي محور التراتيب هو الخطُّ البيانيُّ لتابعٍ تآلفيٍّ مُعرَّف على كامل $\mathbb{R}$.

فَكِّرْ

لعددٍ a من D صورةٌ وحيدة فقط وفق تابع f، لذلك يقطع المستقيم المار بالنقطة $A(a,0)$ موازياً محور التراتيب، الخط البياني للتّابع f في **نقطة واحدة** فقط.



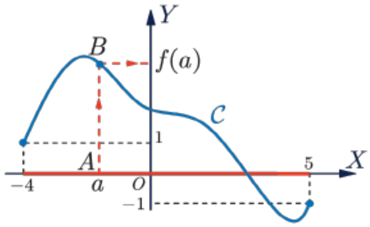
$\mathcal{C}$ ليس خطاً بيانياً لتابع



$\mathcal{C}$ هو خط بياني لتابع

مثال

الخطّ البيانيّ $\mathcal{C}$ في الشكل المجاور، هو التمثيل البياني لتابع f معرّف على المجال $[-4,5]$. لكلٍّ a من $[-4,5]$ صورة واحدة وفق f. فالمستقيمُ المارُّ بالنقطة $A(a,0)$ والموازي لِـ OY لا يقطع الخطَّ البيانيَّ $\mathcal{C}$ إلاّ في نقطة واحدة B هي النقطة التي إحداثيّتاها $(a, f(a))$.



تعريف

إذا كان $\mathcal{C}$ الخطّ البيانيّ لتابع f في معلَمٍ، أسمينا الصيغة $y = f(x)$ **المعادلة الديكارتيَّة للخطّ البياني $\mathcal{C}$**، أو قلنا ببساطة إنّها معادلة $\mathcal{C}$.

ليكن $f : D \to \mathbb{R}$ تابعاً، وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني. لمعرفة إذا كانت النقطة $A(a,b)$ واقعة على $\mathcal{C}_f$، نتبَّع الأسلوب الآتي :

① إذا كان a لا ينتمي إلى D، فإنّ A لا تقع على $\mathcal{C}_f$ أو $A \notin \mathcal{C}_f$.

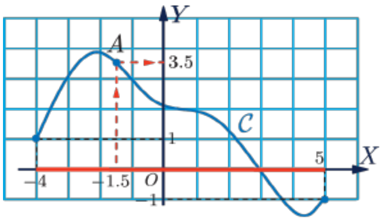
② إذا كان a ينتمي إلى D، نحسب $f(a)$، ونناقش حالتين :

- ❶ إذا كان $b \neq f(a)$ فإنّ A لا تقع على $\mathcal{C}_f$.
- ❷ إذا كان $b = f(a)$ فإنّ A تقع على $\mathcal{C}_f$.

قراءة التمثيل البياني

ليكن $f : D \to \mathbb{R}$ تابعاً، وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البيانيّ، ولتكن a من D. إذا كانت النقطة A هي النقطة من $\mathcal{C}_f$، التي فاصلتها a كان ترتيبها هو $f(a)$.

مثال



الخطُّ البيانيُّ C في الشكل المجاور، هو التّمثيل البياني لتابعٍ f معرّف على المجال $[-4,5]$. لتعيين صورة -1.5 أي $f(-1.5)$ نتّبع الخطوات الآتية :

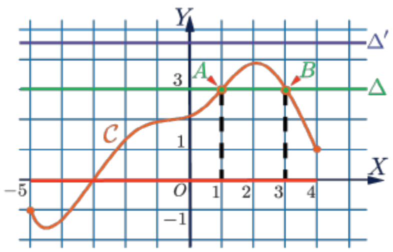
- نعيِّن -1.5 على محور الفواصل ونرسم المستقيم المار بهذه النقطة موازياً محور التّراتيب.
- يقطع هذا المستقيم الخطّ البياني C في A.
- نعيّن ترتيب النقطة A برسم المستقيم المارّ بها موازياً محورَ الفواصل. فنجد $f(-1.5) = 3.5$.

ليكن $f : D \to \mathbb{R}$ تابعاً، وليكن $\mathcal{C}_f$ خطّه البياني. وليكن b عدداً حقيقيّاً. نتأمّل المستقيم Δ_b المار بالنقطة $(0,b)$ موازياً محورَ الفواصل. نلاحظ وجود حالتين :

① المستقيم Δ_b لا يتقاطع مع $\mathcal{C}_f$، فلا يوجد في D أي عنصر صورته وفق f تساوي b. في هذه الحالة نقول إنّ **b لا تنتمي إلى المستقر الفعلي للتابع f**.

② المستقيم Δ_b يتقاطع مع $\mathcal{C}_f$ في نقطة ولتكن $A(a,b)$، ويكون $b = f(a)$ لأن $A(a,b)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}_f$. في هذه الحالة نقول إنّ **b تنتمي إلى المستقر الفعليّ للتّابع f**.

مثال



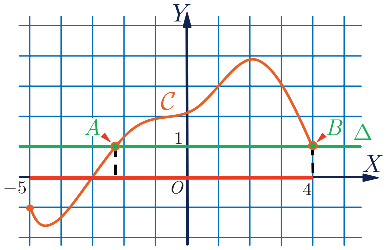
الخطّ البيانيّ C في الشكل المجاور، هو التمثيل البيانيّ لتابع f معرّف على المجال $[-5,4]$. لتعيين الأعداد التي صورة كلّ منها وفق f تساوي 3، نتبع الخطوات الآتية :

- نعيِّن العدد 3 على محور التراتيب، ونرسم المستقيم Δ ذا المعادلة $y = 3$.
- يقطع هذا المستقيم الخطّ البياني C في نقطتين A و B فاصلتاهما 1 و 3 بالترتيب. إنّ صورة كلّ من 1 و 3 وفق f هي 3.

وإذا طُلبَ منّا تعيين الأعداد التي صورة كلّ منها وفق f تساوي 4.5، نتبع الخطوات الآتية :

- نعيِّن العدد 4.5 على محور التراتيب، ونرسم المستقيم Δ' ذا المعادلة $y = 4.5$.
- لا يقطع هذا المستقيم الخطّ البياني C. إذن لا ينتمي العدد 4.5 إلى المستقر الفعليّ للعدد f، ولا يوجد في $[-5,4]$ عددٌ صورته وفق f تساوي 4.5.

فَكِّرْ



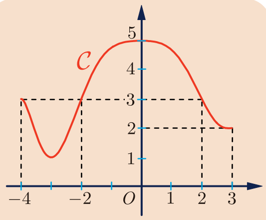
لا يعطي التمثيل البيانيّ إلاّ قيماً تقريبيّة، وذلك ما لم تكن القيم المطلوبة مذكورة على الرسم. فمثلاً إذا أردنا في المثال السابق معرفة الأعداد التي صورة كلٍّ منها وفق f تساوي 1، لاحظنا أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = 1$ يقطع $\mathcal{C}$ في نقطتين A و B فاصلة إحداهما تساوي 4، أمّا فاصلة الثانية فهي « قريبة » من -2.4.

مثال

تأمّل الشكل المجاور. الخطُّ البيانيُّ $\mathcal{C}$، هو التمثيل البياني لتابع f معرّف على $[-4,3]$.

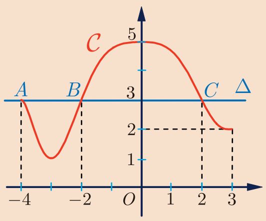
❶ حُلَّ بيانيّاً المعادلة $f(x) = 3$.

❷ حُلَّ بيانيّاً المتراجحة $f(x) < 3$.

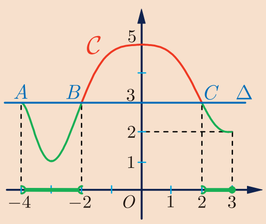


الحل

❶ يؤول حلّ المعادلة $f(x) = 3$ في المجال $[-4,3]$ إلى تعيين الأعداد x من هذا المجال التي صورة كلٍّ منها وفق f هي 3. لذلك نرسم المستقيم Δ ذا المعادلة $y = 3$. فنلاحظ أنّه يلاقي الخطَّ البيانيَّ $\mathcal{C}$ في ثلاث نقاط A و B و C. ومنه نستنتج أنّ حلول المعادلة $f(x) = 3$ هي $x = -4$ و $x = -2$ و $x = 2$.

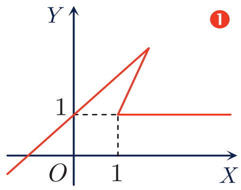


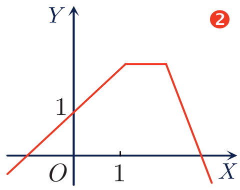
❷ يؤول حلّ المتراجحة $f(x) < 3$ في المجال $[-4,3]$ إلى إيجاد الأعداد من هذا المجال التي صورتها وفق f أصغر تماماً من 3. بعد رسم المستقيم Δ، نعيِّن أجزاء $\mathcal{C}$ التي تقع تحت المستقيم Δ، «لا تصلح النقاط A, B, C لأنّ ترتيبها يساوي 3» بعد ذلك نعيِّن الأجزاء المقابلة من محور الفواصل. فمجموعة حلول المتراجحة $f(x) < 3$ هي $]-4,-2[\cup]2,3]$.

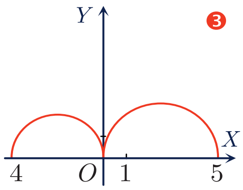


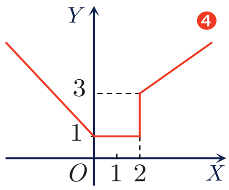
تَدرَّبْ

① بيّن أيُّ المنحنيات التالية هو خطٌّ بيانيٌّ لتابع :









② ليكن $\mathcal{C}$ الخطَّ البيانيَّ الممثّل لتابع f. ترجم العبارات الآتية بعلاقات مساواة تعبّر عنها.

❶ يمرّ $\mathcal{C}$ بنقطة إحداثيّاها $(-2,5)$.

❷ يقطع $\mathcal{C}$ محورَ التراتيب بنقطة ترتيبها -1.

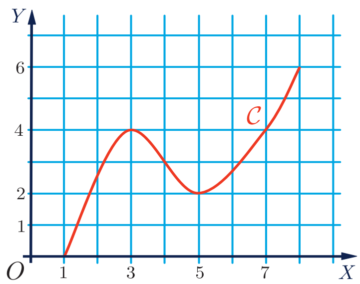
❸ يقطع $\mathcal{C}$ محورَ الفواصل بنقطتين فاصلتاهما على الترتيب -2 و 3.

③ ليكن $\mathcal{C}$ الخطَّ البيانيَّ الممثّل للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x^2 + 5$.

❶ بيّن أيٌّ من النقاط $A(-2,9)$ و $B(3,13)$ و $C(\sqrt{2},7)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

❷ أعطِ إحداثيات أربع نقاط تقع على الخط البياني $\mathcal{C}$.

④ في الشكل المجاور نجد الخطّ البيانيّ لتابع معرّف على المجال $[1,8]$، بقراءة بيانيّة لهذا الشكل، بيّن الصواب من الخطأ في المقولات التالية :



❶ العدد 1 هو صورة 0 وفق f.

❷ العدد 0 هو صورة 1 وفق f.

❸ العدد 4 هو صورة 3 و 7 وفق f.

❹ $f(2) = 5$.

❺ $f(3) > 5$.

❻ للمعادلة $f(x) = 2.5$ ثلاثة حلول.

❼ العدد 0.5 هو صورة عدد وحيد من المجال وفق f.

❽ في حالة $x \in [6,8]$ لدينا $f(x) > 2$.

2

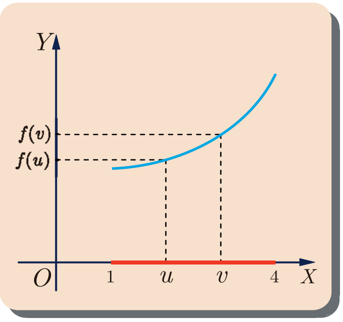
4 التّابع المتزايد والتّابع المتناقص

التزايد

- كلما زاد عدد أفراد الأسرة زاد استهلاكهم من مياه الشرب، فنقول إنّ استهلاك الأسرة من مياه الشرب **تابع متزايد** لعدد أفرادها.
- وكلما زادت سرعة سيارة زادت مقاومة الهواء التي تواجهها. فنقول إنّ مقاومة الهواء المطبقة على سيارة **تابع متزايد** لسرعتها.

يكون تابعٌ $f : x \mapsto f(x)$ متزايداً إذا كَبُرت قيم $f(x)$ أكثر فأكثر كلّما أخذ المتغير x قيماً أكبر فأكبر.

يبيِّن الشكل المجاور تمثيلاً بيانيّاً لتابع متزايدٍ على $[1,4]$.



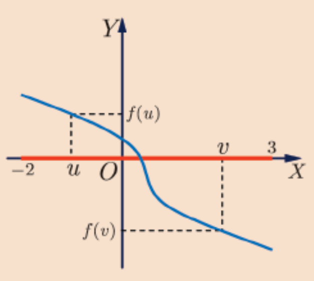
- فأياً كانت قيم u و v من المجال $[1,4]$، إذا كان v أكبر من u، كان $f(v)$ أكبر من $f(u)$.
- لاحظ أنّه لا يكفي التوثّق من صحّة هذه النتيجة فقط عند قيمتين خاصّتين كاللتين اخترناهما في الشكل بل يجب التيقّن من صِحّة ذلك عند جميع قيم u و v التي تحقّق $v > u$.
- لاحظ كيف يبدو الخطُّ البيانيّ للتابع f «صاعداً» عندما نستعرضه من اليسار إلى اليمين.

التناقص

- كلّما زاد الارتفاع عن سطح الأرض انخفض الضغط الجويّ، فنقول إنّ الضغط الجويّ تابعٌ متناقص للارتفاع عن سطح الأرض.

يكون تابعٌ $f : x \mapsto f(x)$ متناقصاً إذا صَغُرتْ قيم $f(x)$ أكثر فأكثر كلّما أخذ المتغيِّر x قيماً أكبر فأكبر.

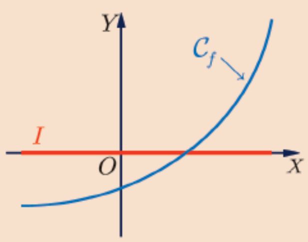
يبيِّن الشكل المجاور تمثيلاً بيانيّاً لتابع متناقصٍ على المجال $[-2,3]$.



- فأيّاً كانت قيم u و v من المجال $[-2,3]$، إذا كان v أكبر من u، كان $f(v)$ أصغر من $f(u)$.
- لا نتوثّق من صحّة هذه النتيجة فقط عند قيمتين خاصّتين كاللتين اخترناهما في الشكل بل عند جميع قيم u و v التي تحقّق $u < v$.
- لاحظ كيف يبدو الخطُّ البيانيُّ الذي يمثّل التّابع f «هابطاً» عندما نستعرضه من اليسار إلى اليمين.

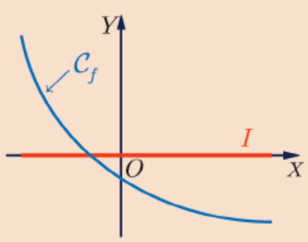
تعريف

ليكن f تابعاً، وليكن I مجالاً محتوى في مجموعة تعريف التّابع f.



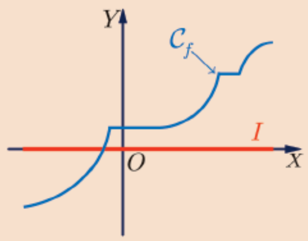
- نقول إنّ f **متزايدٌ تماماً** على I إذا تحقق الشرط : مهما كان العددان الحقيقيّان u و v من I فإنّ المتراجحة $u < v$ تقتضي $f(u) < f(v)$.

  أي إنّ f يُحافظ على جهة المتراجحة بين u و v.

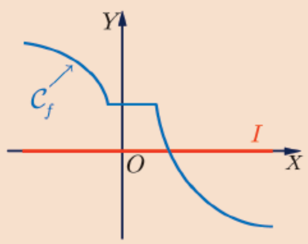


- نقول إنّ f **متناقصٌ تماماً** على I إذا تحقق الشرط : مهما كان العددان الحقيقيّان u و v من I فإنّ المتراجحة $u < v$ تقتضي $f(u) > f(v)$.

  أي إنّ f يقلب جهة المتراجحة بين u و v.



- نقول إنّ f **متزايدٌ** على I إذا تحقق الشرط : مهما كان العددان u و v من I فإنّ المتراجحة $u < v$ تقتضي $f(u) \leq f(v)$. الخطُّ البيانيُّ للتابع f صاعد ولكن قد يحتوي على "مساطب" أفقيّة.



- ويكون f **متناقصاً** على I إذا تحقق الشرط : مهما كان العددان u و v من I فإنّ المتراجحة $u < v$ تقتضي $f(u) \geq f(v)$. الخطُّ البيانيُّ للتابع f هابط ولكن قد يحتوي على "مساطب" أفقيّة.

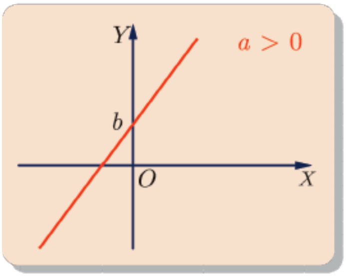
مثال

في حالة تابع تآلفيّ (أفّينيٍّ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ ، لدينا الحالات الآتية :

- إذا كان $a > 0$ كان f متزايداً تماماً.
- وإذا كان $a < 0$ كان f متناقصاً تماماً.
- وإذا كان $a = 0$ كان f ثابتاً، أي يأخذ القيمة نفسها مهما كانت قيمة المتغير.

لإثبات أنّ تابعاً متزايدٌ تماماً، نضع المتراجحة $u < v$ التي نسمّيها فرضاً، ثُمّ بالاستفادة من الفرْض نبرهن صحة النتيجة $f(u) < f(v)$.

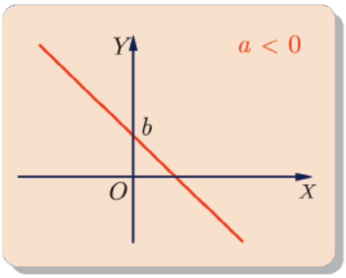
- لنتأمّل حالة $a > 0$. ليكن u و v عددين حقيقيين كيفيين يُحققان $u < v$ ، لمُقارنة المقدارين $f(u)$ و $f(v)$ نحسب الفرق كما تعلّمنا سابقاً :



$$f(v) - f(u) = (av + b) - (au + b)$$
$$= \underbrace{a}_{>0} \underbrace{(v - u)}_{>0} > 0$$

إذن الشرط $u < v$ يقتضي $f(u) < f(v)$ ، والتّابع f متزايدٌ تماماً في هذه الحالة.

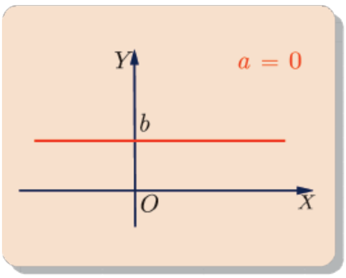
- وبالمثل في حالة $a < 0$. إذا كان u و v عددين حقيقيين كيفيين يُحققان $u < v$ ، كان:



$$f(v) - f(u) = \underbrace{a}_{<0} \underbrace{(v - u)}_{>0} < 0$$

إذن الشرط $u < v$ يقتضي $f(u) > f(v)$ ، والتّابع f متناقصٌ تماماً في هذه الحالة.

- أمّا في حالة $a = 0$. فالتّابع f يأخذ القيمة b أيّاً كانت قيمة المتغيِّر، فهو تابعٌ ثابتٌ.



مثال

تأمّل التّابعَيْن f و g الآتيين :

$$g :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 \quad \text{و} \quad f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

أثبت ما يأتي :

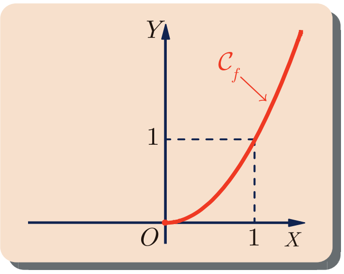
❶ التّابع f تابعٌ متزايدٌ تماماً.

❷ التّابع g تابعٌ متناقصٌ تماماً.

الحل

❶ ليكن u و v عددين يُحقّقان $0 \le u < v$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$ أي بين العددين u^2 و v^2. ولكن لدينا $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ وهنا نلاحظ ما يأتي :

- نستنتج مباشرةً، استناداً إلى الفرْض $u < v$، أنّ $u - v < 0$.
- ولأنّ $0 \le u$ و $0 < v$ استنتجنا أنّ $u + v > 0$.

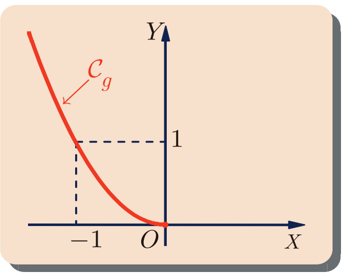


وبناءً على قاعدة الإشارات نجد $(u-v)(u+v) < 0$ أي $u^2 < v^2$.

بذا نكون قد أثبتنا أنّه مهما يكن u و v من $[0, +\infty[$ فالشرط $u < v$ يقتضي $f(u) < f(v)$، وهذا يثبت أنّ التّابع f متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$.

❷ ليكن u و v عددين يُحقّقان $u < v \le 0$، والمطلوب هو المقارنة بين $g(u)$ و $g(v)$ أي بين العددين u^2 و v^2. ولكن لدينا مُجدّداً $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ ونلاحظ ما يأتي :

- نستنتج مباشرةً، استناداً إلى الفرْض $u < v$، أنّ $u - v < 0$.
- ولأنّ $u < 0$ و $v \le 0$ استنتجنا أنّ $u + v < 0$.

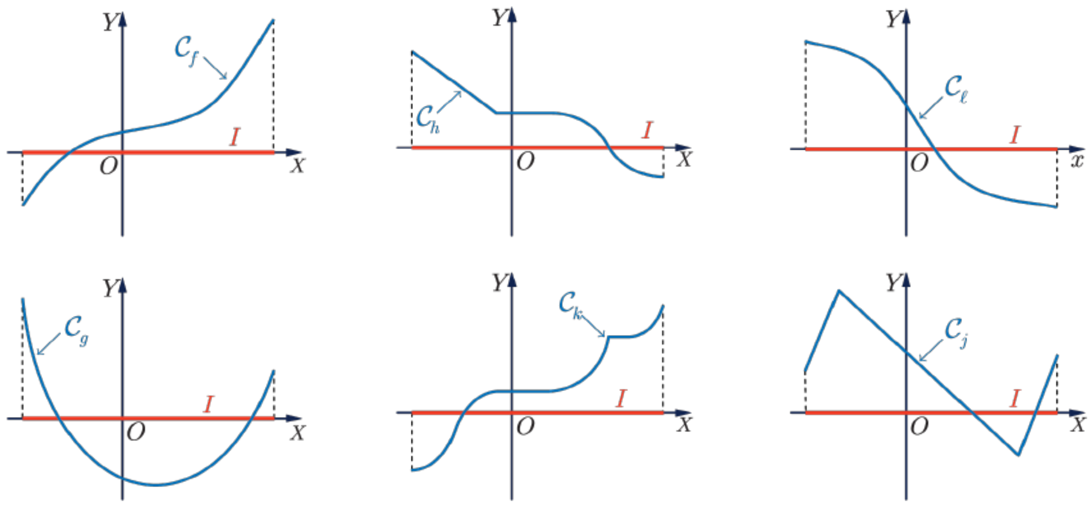


إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v) > 0$ أي $u^2 > v^2$.

فنكون قد أثبتنا أنّه مهما يكن u و v من $]-\infty, 0]$ فالشرط $u < v$ يقتضي $g(u) > g(v)$، وهذا يثبت أنّ التّابع g متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty, 0]$.

تَدرّبْ

① تجد في الشكل التالي، الخطوط البيانية لتوابع f و g و h و j و k و ℓ مُعرَّفة على مجال I.
بيّن أيّها متزايدٌ تماماً، وأيّها متناقص تماماً وأيّها متزايدٌ وأيّها متناقص وأيّها لا متزايدٌ ولا متناقص على المجال I.



② لنتأمّل التّابع $f : x \mapsto x^2 - 4x$.

❶ أثبتْ أنّ f متزايدٌ تماماً على المجال $[2,+\infty[$.

❷ أثبتْ أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty,2]$.

③ لنتأمّل التّابع $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

❶ أثبتْ أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $]0,+\infty[$.

❷ أثبتْ أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty,0[$.

④ لنتأمّل التّابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ المعرّف على $\mathbb{R}$. أثبت أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $[0,+\infty[$.

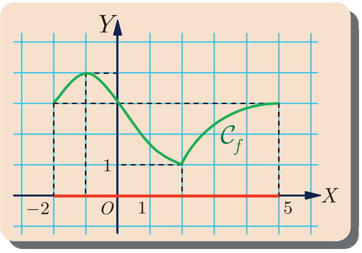
⑤ لنتأمّل التّابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ المعرّف على $[0,+\infty[$. أثبت أنّ f متزايدٌ تماماً.

5 جدول اطّراد تابع

تعريف

التّابع المطّرد على مجال هو تابعٌ متزايدٌ على هذا المجال أو متناقصٌ عليه. أمّا دراسة اطّراد تابع f فهي البحث عن المجالات التي يكون عليها التّابع f متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً أو ثابتاً. نلخّص عادة هذه الخواص في جدول نسمّيه **جدول الاطّراد**.

مثال



نجد في الشكل المجاور الخطَّ البيانيَّ لتابع f معرّف على المجال $[-2,5]$.

نلاحظ من تأمّل الخطِّ البيانيِّ $\mathcal{C}_f$ النقاط التالية :

- إنّ f متزايدٌ تماماً على المجال $[-2,-1]$. ويبدأ التّابع f بالقيمة 3 عند $x=-2$ ليزداد إلى القيمة 4 عند $x=-1$.
- إنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $[-1,2]$. إذ يتناقص التّابع f من القيمة 4 عند $x=-1$ ليصل إلى القيمة 1 عند $x=2$.
- إنّ f متزايدٌ تماماً على المجال $[2,5]$. إذ يتزايد التّابع f من القيمة 1 عند $x=2$، ليصل إلى القيمة 3 عند $x=5$.

في الحقيقة يمكن تلخيص هذا الوصف لاطّراد التّابع f بتنظيم الجدول الآتي الذي يُسمّى جدول اطراد التّابع f :

x	-2		-1		2		5
$f(x)$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

فكِّرْ

تأمّل الخطَّ البيانيَّ للتّابع f في المثال السابق وأجب عن السؤالين الآتيين :

- ما هي أكبر قيمة يأخذها التّابع f على مجال تعريفه ؟
- ما هي أصغر قيمة يأخذها التّابع f على مجال تعريفه ؟

تعريف

نتأمّل تابعاً $f : D \to \mathbb{R}$. ومجالاً I محتوى في D .

- نقول إنّ M هي **أكبر قيم التّابع f على I** إذا تحقّق الشرطان الآتيان :
  1. أيّاً كانت قيمة x من I ، كان $f(x) \leq M$.
  2. يوجد عددٌ a في I يحقّق $f(a) = M$. (أي إنّ f يأخذ فعلاً القيمة M ، أو يبلغها.)
- نقول إنّ m هي **أصغر قيم التّابع f على I** إذا تحقّق الشرطان الآتيان :
  1. أيّاً كانت قيمة x من I ، كان $f(x) \geq m$.
  2. يوجد عددٌ b في I يحقّق $f(b) = m$. (أي إنّ f يأخذ فعلاً القيمة m ، أو يبلغها.)

مثال

أتاحت لنا دراسة تابعٍ f تنظيم جدول اطراده المبيَّن فيما يأتي :

x	-5		-1		3		4
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

1. عيِّن انطلاقاً من جدول الاطّراد ما يأتي :
   ① مجموعة تعريف التّابع f .
   ② نقاط مميَّزة يمر بها الخط البياني للتابع f .
   ③ دراسة اطّراد التّابع f .
   ④ أكبر قيمة وأصغر قيمة للتابع f .
2. انطلاقاً من جدول الاطّراد السابق والمعلومات التي وصلت إليها آنفاً، ارسم خطاً بيانيّاً يصلح أن يمثِّل التّابع f .

الحل

1.
① نقرأ مجموعة تعريف f من السّطر الأوّل في الجدول فنجد أنّ التّابع f مُعرّف على المجال $[-5, 4]$.

② ويفيدنا الجدول مباشرة في تعيين صور الأعداد -5 و -1 و 3 و 4 :

$f(-5) = 3$ و $f(-1) = 0$ و $f(3) = 4$ و $f(4) = 0$.

فالخطّ البيانيّ للتابع f يمر بالنقاط $(-5, 3)$ و $(-1, 0)$ و $(3, 4)$ و $(4, 0)$.

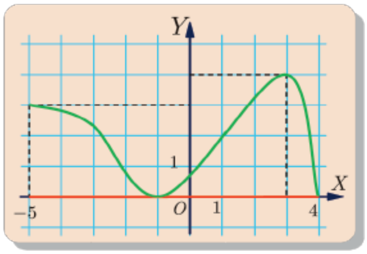
③ ونقرأ من الجدول دراسة الاطّراد التالية :

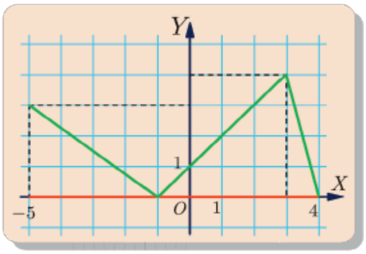
- التّابع f متناقصٌ تماماً على المجال $[-5,-1]$،
- وهو متزايدٌ تماماً على المجال $[-1,3]$،
- ومتناقصٌ تماماً على المجال $[3,4]$.

④

- أصغر قيم التّابع f على $[-5,4]$ هي 0 ويبلغها التّابع عند قيمتين للمتغير x هما -1 و 4،
- أمّا أكبر قيم التّابع f على المجال $[-5,4]$ فهي 4 ويبلغها عند قيمة واحدة للمتغير x هي 3.

❷ يُعطي اتجاه الأسهم في جدول الاطراد فكرة عن هيئة الخط البياني. وتفيدنا القيم المبيَّنة في الجدول في القول إنّ الخط البياني يمر بالنقاط : $A(-5,3)$ و $B(-1,0)$ و $C(3,4)$ و $D(4,0)$.





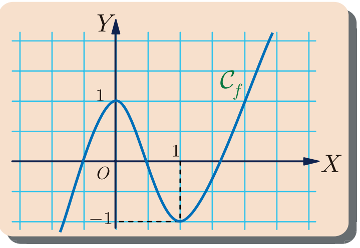
يوافق كل من الخطين البيانيين المبيّنين أعلاه جدول الاطراد المدروس، وهناك بالطبع غيرهما لأننا لا نعرف قيم $f(x)$ عند جميع قيم x في المجال $[-5,4]$.

فَكِّرْ

تأمّل الخطَّ البيانيَّ للتابع f في المثال السابق وأجب عن التساؤلات الآتية :

- أصحيح أنّ $f(x) \leq 5$ أيّاً كانت قيمة x من المجال $[-5,4]$ ؟
- أيكون العدد 5 أكبر قيم f على المجال $[-5,4]$ ؟
- هل $f(x) \geq -1$ أيّاً كانت قيمة x من المجال $[-5,4]$ ؟
- أتكون -1 أصغر قيم f على المجال $[-5,4]$ ؟
- أتكون 3 أكبر قيم f على المجال $[-5,-1]$؟

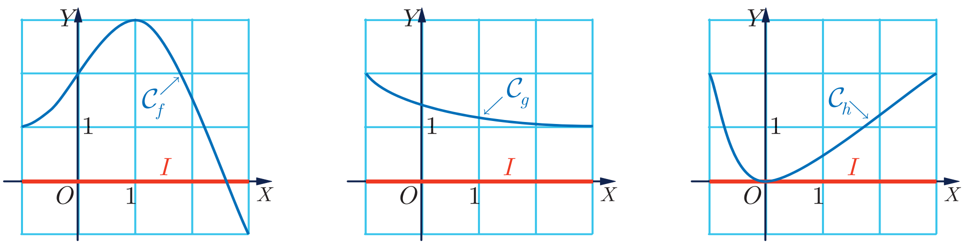
يمثِّل الخطُّ البيانيُّ في الشكل المجاور تابعاً معرّفاً على $\mathbb{R}$. من الواضح أنّنا لا نستطيع رسم الخطّ البيانيّ للتابع كاملاً لأنّ المجال $\mathbb{R}$ غير محدود. في مثل هذه الحالة نصطلح أنّ التّابع يتابع اطِّراده بالأسلوب نفسه خارج الجزء المرسوم. أمّا جدول اطّراد f فهو :



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

تَدرَّب

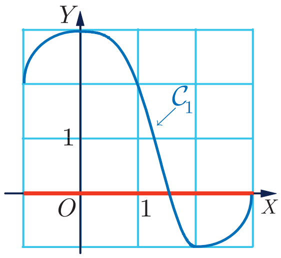
① تجد في الشكل التالي، الخطوط **البيانيّة** لتوابع f و g و h معرفة على المجال $I=[-1,3]$.
بيِّن الصواب من الخطأ معلِّلاً إجابتك في كلٍّ من القضايا الآتية :

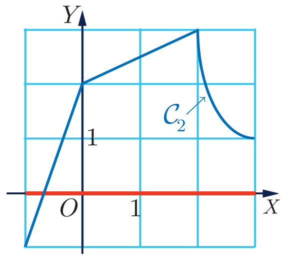


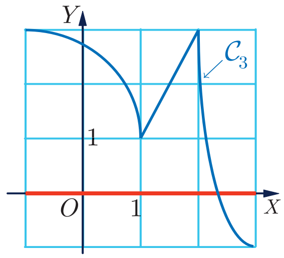
1. التّابع f ليس متزايداً تماماً على I.
2. أصغر قيم التّابع f هي $f(-1)$.
3. أصغر قيم التّابع f هي $f(3)$.
4. أصغر قيم التّابع g هي $g(-1)$ لأنّ -1 هو أصغر الأعداد في I.
5. أصغر قيم التّابع g على I هي $g(3)$ لأنّ g متناقص تماماً على I.
6. أكبر قيم التّابع h على I هي $h(3)$ ويبلغها التّابع f مرّتين.
7. أصغر قيم التّابع h على كلٍّ من المجالات I و $[-1,0]$ و $[0,2]$ هي 0.

تمرينات ومسائل

1 نتأمّل ثلاثة خطوط بيانيّة $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3$:







ونتأمل كذلك جداول اطِّراد ثلاثة توابع f و g و h :

x	-1		$\cdots$		3
$f(x)$	$\cdots$	$\nearrow$	$\cdots$	$\searrow$	$\cdots$

و

x	-1		$\cdots$		$\cdots$		3
$g(x)$	$\cdots$	$\searrow$	$\cdots$	$\nearrow$	$\cdots$	$\searrow$	$\cdots$

و

x	-1		$\cdots$		$\cdots$		3
$h(x)$	$\cdots$	$\nearrow$	$\cdots$	$\searrow$	$\cdots$	$\nearrow$	$\cdots$

① اقرن كل واحد من التوابع f و g و h مع أحد الخطوط البيانيّة $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3$.

② املأ الفراغات في جداول اطّراد كلٍّ من التوابع f و g و h.

2 نتأمّل فيما يلي جدول اطّراد تابع f:

x	-3		-1		0		1		3		7
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

① على كل من المجالات $[-3,7]$ و $[-1,1]$ و $[1,7]$، عيّن أكبر قيم التّابع f، وقيم المتغيّر x التي يبلغ عندها هذه القيم الكبرى.

② على كل من المجالات $[-3,7]$ و $[0,3]$ و $[1,7]$، عيّن أصغر قيم التّابع f، وقيم المتغيّر x التي يبلغ عندها هذه القيم الصغرى.

3 كيف نتصور الخطّ البيانيّ الممثّل لتابع ؟

ليكن f تابعاً معرّفاً على المجال $I = [-10{,}10]$. نفترض أنّه مهما كان العدد الحقيقي x من I كان $-1 \leq f(x) \leq 3$، ونفترض أيضاً أنّ حلول المعادلة $f(x) = 1$ هي الأعداد $x = -3$ و $x = 1$ و $x = 4$. ارسم، في مَعْلَمٍ متجانس، خطّاً بيانيّاً C يُمكن أن يمثِّل التّابع f.

نحو الحل

فهم السؤال

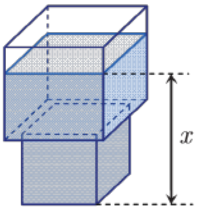
لا تتيح المعلومات المتوفِّرة عن f، رسم خطّه البياني رسماً دقيقاً، لأنّنا لا نعرف قيم $f(x)$ عندما تتحوّل x في المجال I. ولكنّنا نعلم قيم $f(x)$ في حالة $x = -3$ أو $x = 1$ أو $x = 4$. ما عدا ذلك، يمكن أن يأخذ $f(x)$ قيماً عديدة، وعليه فهناك العديد من الخطوط البيانيّة التي تصلح لتمثيل f.

ترجمة الشروط المفترضة على f بيانيّاً

- التّابع f معرّفٌ على $I = [-10{,}10]$، إذن في أيِّ مجالٍ تتحوّل x؟ الخطّ البيانيّ للتابع f محصور بين مستقيمين يوازيان محور التراتيب ويمرّ أولهما بالنقطة $A(a,0)$ ويمرّ ثانيهما بالنقطة $B(b,0)$ عيِّن a و b.
- أيّاً كان x من I كان $-1 \leq f(x) \leq 3$. نستنتج أنّ تراتيب نقاط الخطِّ البيانيِّ للتابع f محصورة بين عددين عيِّنهما. يقع الخطُّ البيانيُّ للتابع f بين مستقيمين يوازيان محور الفواصل. اكتبْ معادلة لكلٍّ من هذين المستقيمين.
- حلول المعادلة $f(x) = 1$ هي $x = -3$ و $x = 1$ و $x = 4$، إذن يمر الخطُّ البياني للتابع بثلاث نقاط، ما هي إحداثيّاتها؟
- هل يقطع المستقيمُ ذو المعادلة $y = 1$ الخطَّ البياني للتابع f في نقاط أخرى غير النقاط الثلاث السابقة؟

ارسم خطاً بيانيّاً يمكن أن يمثّل f، ثمّ ارسم أيضاً بلونٍ مختلفٍ خطّاً بيانيّاً آخر يمكن أن يمثّل f.

4 تابع تآلفي على مجالات



يبيِّن الشكل المجاور وعاءً مؤلّفاً من مكعّبين متّصلين. طول حرف الأوّل 80 سنتيمتراً وطول حرف الثاني 60 سنتيمتراً. نرمز بالرمز x إلى ارتفاع السائل في الوعاء مُقاساً بالسنتيمتر، وبالرمز $V(x)$ إلى حجم ذلك السائل باللّيتر. مثّل بيانيّاً الحجم $V(x)$ بدلالة x. خُذ سنتيمتراً واحداً لكلّ 10 سنتمترات على محور الفواصل، وسنتيمتراً واحداً لكلّ 50 ليتراً على محور التراتيب.

نحو الحل

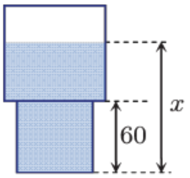
فهم السؤال

لنتخيّل أنّنا نملأ الوعاء اعتباراً من $x=0$. نعلم، بالطبع، أنّ حجم السائل يتعلّق بالإرتفاع x ومن ثَم فإنّ الحجم V تابعٌ للارتفاع x.

- ما هي مجموعة تعريف V؟
- أَنستطيع حساب بعض قيم V ؟ احسب مثلاً $V(0)$ و $V(50)$ و $V(80)$.

بحثاً عن طريق

لتمثيل V بيانيّاً، علينا معرفة $V(x)$ أيّاً كانت قيمة x. نفترض أنّنا نملأ الوعاء بدءاً من $x=0$.



- عندما يكون السائل موجوداً فقط في المكعّب الصغير، في أيِّ مجال تقع قيمة x ؟ احسب في هذه الحالة $V(x)$.
- في أيِّ مجال تقع قيمة x عندما يكون المكعّب الصغير ممتلئاً بالسائل وهناك سائل في المكعّب الكبير؟ احسب $V(x)$ بصفته مجموع حجمين بسيطين. واستنتج عبارة $V(x)$ في هذه الحالة.
- اكتب النتيجة بالشكل التالي :

في حالة $x \in [0,60]$ يساوي $V(x)$ كذا،

في حالة $x \in [60,140]$ يساوي $V(x)$ كذا.

أو املأ الفراغ في الكتابة التالية :

$$\begin{cases} V(x) = \cdots : x \in [0,60] \\ V(x) = \cdots : x \in [60,140] \end{cases}$$

رسم الخط البياني للتابع V

يقودنا تعريف V إلى تمييز حالتين، ومن ثَمّ رسم الجزء الموافق للشرط: x تنتمي إلى المجال $[0,60]$ أوّلاً، ورسم الجزء الموافق للشرط: x تنتمي إلى المجال $[60,140]$ ثانياً. ارسم الخطَّ البيانيَّ للتابع V آخذاً بعين الاعتبار الواحدات المبيّنة في نصّ التمرين.

5 البحث عن أكبر قيمة لتابع

لنتأمّل التّابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

① أثبت أنّ $f(x)$ يُكتبُ أيضاً بالشكل $f(x) = 9 - (x-2)^2$.

② حلَّ المعادلة $f(x) = 9$.

③ أثبت أنّ 9 هي أكبر قيمة للتابع f على $\mathbb{R}$.

نحو الحلّ

☝ يجب أن نبرهن أنّ $-x^2 + 4x + 5 = 9 - (x-2)^2$. الطريقة هي أن نبدأ من أحد طرفي المساواة ونُجري عليه تحويلات لنصل إلى الطرف الآخر. وهنا يُطْرَح السؤال : من أيِّ الطرفين نبدأ ؟ إذا بدأنا من الطرف الأيسر وجب أن نجد طريقة لإظهار مربّع كامل فيه، أمّا إذا انطلقنا من الطرف الأيمن فيكفي أن ننشره. فأيُّ الطرفين تختار لتبدأ به؟

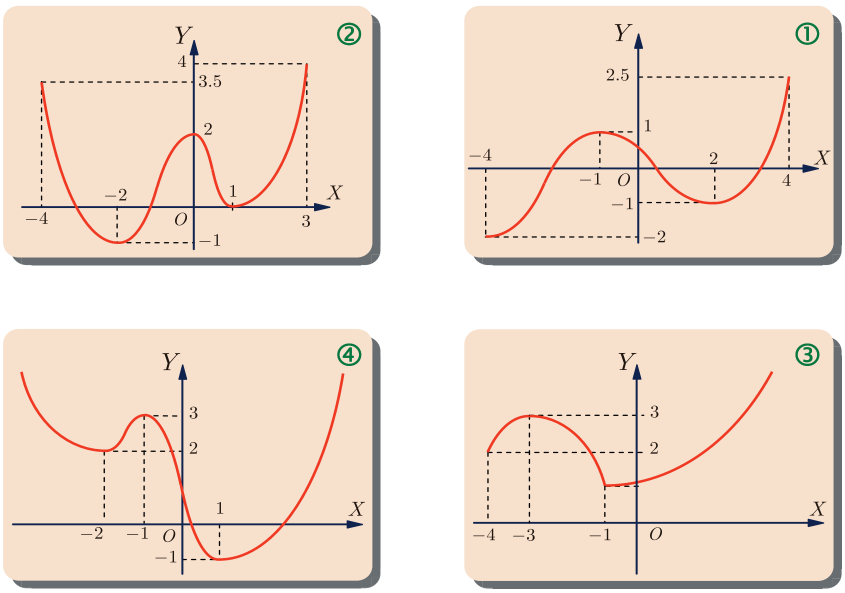
✌ لديك صيغتان للمقدار $f(x)$. اختر المُناسبة منهما لحل السؤال الثاني.

👌 يجب أن نبرهن أنّ f يأخذ القيمة 9 وأنّ $f(x) \leq 9$ أيّاً كان العدد x. اختر الصيغة المناسبة للمقدار $f(x)$ وأثبت المطلوب.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

6

في هذا التمرين نُعطي الخطَّ البيانيَّ للتابع f، ويُطلَبُ في كلِّ حالة كتابة جدول الاطِّراد الموافق.

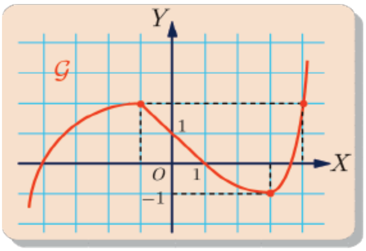


7 ارسم خطاً بيانيّاً لتابع f يُحقق الخواصَّ الآتية :

- مجموعة تعريف f هي $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- $f(-4) = -3$ و $f(1) = 3$ و $f(4) = 2$ وإذا كان $x > 2$ كان $f(x) > 0$.
- جدول اطّراد التّابع f هو

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	

8 الخط البياني $\mathcal{G}$ يمثّل تابعاً f معرّفاً على $\mathbb{R}$، ونعطي أنّ $f(3.6) = 0$.



① اكتب جدول اطّراد f.

② حلَّ بيانيّاً كلاً من المتراجحتين $f(x) > 0$ و $f(x) < 0$، واستنتج إشارة $f(x)$ تِبعاً لقيم x.

③ حُلَّ بيانيّاً المتراجحة $f(x) \geq 2$.

9 ادرس اطّراد التّابع $f : x \mapsto x^2 - 3$ على المجال $I = [0, +\infty[$.

10 ادرس اطّراد التّابع $f : x \mapsto x^2 - 3$ على المجال $I =]-\infty, 0]$.

11 ليكن f التّابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x}{3} + |2x - 6|$.

① اكتب $f(x)$ بدون استعمال القيمة المطلقة.

② استنتج أنّ f متناقص تماماً على $]-\infty, 3]$، وأنّه متزايد تماماً على $[3, +\infty[$.

③ أثبت أنّه إذا كان $x \leq 3$ كان $f(x) \geq 1$.

④ أثبت كذلك أنّه إذا كان $x \geq 3$ كان $f(x) \geq 1$.

⑤ حلّ المعادلة $f(x) = 1$. واستنتج أصغر قيمة للتابع f على $\mathbb{R}$.

⑥ لماذا لا تقبل المعادلة $f(x) = 0$ حلولاً؟

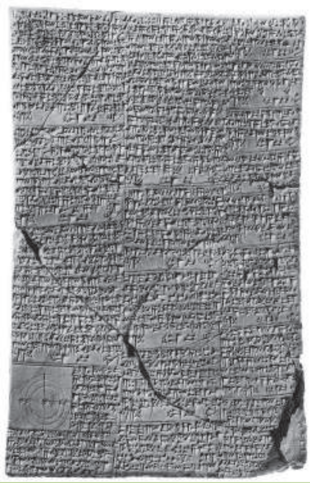
12 ليكن f التّابع المعرّف على المجال $]3, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = x - 8 + \dfrac{4}{x - 3}$. أثبت أنّ القيمة -1 هي أصغر قيمة للتابع f على $]3, +\infty[$.

3

المعادلات والمتراجحات من الدّرجة الثّانية

1. حلُّ معادلة من الدرجة الثانية
2. تحليل ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية وإشارته
3. العلاقة بين أمثال وجذور ثلاثي حدود من الدرجة الثانية
4. تطبيقات ونشاطات

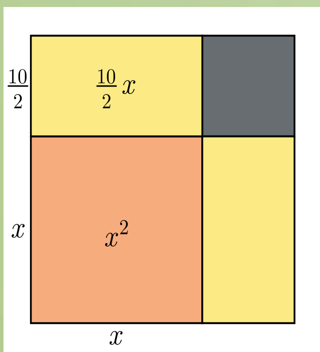
هناك العشرات من الرُّقُم الفخارية التي تشير إلى أنّ البابليين كانوا، قبل الميلاد بألفي سنة، على دراية بدستور حلِّ المعادلة من الدرجة الثانية، هذا ما يؤكده نصٌّ بابليٌّ مكتوب باللغة المسماريَّة القديمة إذْ نجد فيه المسألة التالية :


رقيم بابلي قديم مكتوب بالمسماريّة يحوي ست عشرة مسألة يؤول حلّ كلّ منها إلى معادلة من الدرجة الثانية

"لقد جمعتُ مساحة مربَّعي وثلثي طول ضلعه فوجدتُ $0;35\left(\frac{35}{60}\right)$، فما طول ضلع مربَّعي ؟"

ويصف بعدها خطوات الحل.

أمّا محمّد بن موسى الخوارزمي (780-850) فقد حلَّ المعادلة $x^2+10x=39$ كما يلي : نبدأ بمربّعٍ طولُ ضلعه x (ومساحته x^2) ومستطيلين طول كلٍّ منهما x وعرضه $\frac{10}{2}$.



مساحةُ كلٍّ من هذين المستطيلين $\left(\frac{10}{2}\right)x$، ومساحة كاملِ الشكل تساوي $x^2+2\left(\frac{10}{2}\right)x$. ومن الضروري لإتمام الشكل ليصبح مربّعاً أن نضيف مربعاً جديداً مساحته $\left(\frac{10}{2}\right)^2$. فتكون مساحة المربّع المُتمَّم $\left(x+\frac{10}{2}\right)^2$، ومن ثَمّ

$$\left(x+\frac{10}{2}\right)^2=x^2+2\left(\frac{10}{2}\right)x+\left(\frac{10}{2}\right)^2=64$$

إذن يساوي طول ضلع المربَّع $x+\frac{10}{2}=8$، وقيمة المجهول $x=3$.

3

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

1 حلُّ معادلة من الدرجة الثانية

تعريف

نسمي **ثلاثي حدود من الدرجة الثانية** كل تابع f يُكتب بالصيغة

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$$

حيث a و b و c ثلاثة أعداد حقيقيّة معطاة و $a \neq 0$.

ونسمّي أيّ معادلة يمكن أن تكتب بالشكل $f(x) = 0$، حيث f ثلاثي حدود من الدرجة الثانية. **معادلة من الدرجة الثانية مجهولها x**.

أمّا حلُّ المعادلة $f(x) = 0$ فهو تعيين جميع الأعداد t التي تحقِّق المساواة $f(t) = 0$ في حال وجودها. وعندئذ يُسمّى كلُّ عددٍ من هذه الأعداد **حلاً** أو **جذراً للمعادلة**.

الصيغة القانونيّة لثلاثي حدود من الدرجة الثانية

لنتأمّل ثلاثي حدود من الدرجة الثانية : $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$.

لمّا كان $a \neq 0$، استنتجنا أنّ $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$؛ ولكن

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

تسمى هذه الخطوة
إتماماً إلى مربَّع كامل

وذلك لأنّ $x^2 + \frac{b}{a}x$ هو مجموع الحدّين الأوّل والثاني من منشور $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. إذن:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

تُسمَّى الصيغة الأخيرة لثلاثي الحدود $x \mapsto f(x)$ **صيغته القانونيّة**.

مثال

اكتب ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية $x \mapsto P(x) = 2x^2 + x + 1$، بصيغته القانونيّة واستفدْ من تلك الصيغة لتثبتَ أنّ العدد $\frac{7}{8}$ هو أصغر قيم التّابع P.

الحل

في الحقيقة لدينا

$$\begin{aligned} P(x) &= 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\underbrace{x^2 + 2\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2}_{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2} \underbrace{-\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}}_{\frac{7}{16}}\right) \\ &= 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) \end{aligned}$$

إذن الصيغة القانونيّة لثلاثي الحدود P هي

$$P(x) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

وهنا نتذكّر أنّ مربّعَ عدد حقيقيّ موجبٌ دوماً، ولا يساوي الصفر إلاّ إذا انعدم هذا العدد. إذن مهما كان العدد الحقيقي x كان $2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$، ومن ثَمّ

$$P(x) \geq \frac{7}{8} = P\left(-\frac{1}{4}\right)$$

أي إنّ القيمة $\frac{7}{8}$ هي أصغر قيم التابع P.

تَدرَّبْ

① اكتب بالصيغة القانونيَّة ثلاثيات الحدود من الدرجة الثانية الآتية :

❶ $x^2 - 4x + 1$ ❷ $x^2 + 6x$

❸ $x^2 - x + 1$ ❹ $-3x^2 + x + 4$

❺ $-x^2 + 2x - 1$ ❻ $-x^2 + 5x - 6$

② عيّن أصغر قيم التابع $x \mapsto x^2 + 4x + 8$.

③ عيّن أكبر قيم التابع $x \mapsto -x^2 + 2x + 1$.

حلُّ المعادلة من الدرجة الثانية

تعريف

نتأمّل **ثلاثي حدود من الدرجة الثانية** $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. لقد رأينا أنّ الصيغة القانونيّة لثلاثي الحدود هذا هي :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

يُسمَّى العدد $b^2 - 4ac$ **مميِّز المعادلة من الدرجة الثانية** $ax^2 + bx + c = 0$ أو مميِّز ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$. ونرمز إليه بالرمز Δ (يُقرأ « دِلْتا»). عندئذ يكون لدينا

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) : \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

- في حالة $\Delta < 0$، يكون $\frac{\Delta}{4a^2}$ سالباً تماماً، وأيّاً كانت قيمة x كان ما بين القوسين موجباً تماماً، فلا تقبل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ في هذه الحالة حلولاً.
- في حالة $\Delta = 0$، يكون $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. ولأنّ $a \neq 0$، استنتجنا أنّ للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ جذراً وحيداً، هو $x = -\frac{b}{2a}$.
- وأخيراً، في حالة $\Delta > 0$، يكون $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

تذكّر

$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$

فإذا عرّفنا :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

وجدنا

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ولأنّ $\Delta \neq 0$، استنتجنا أنّ للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ جذرين مختلفين هما x_1 و x_2.

بذلك نكون قد أثبتنا الخاصّة التالية :

مبرهنة

لتكن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$، وليكن مميزها $\Delta=b^2-4ac$.

- في حالة $\Delta<0$، ليس للمعادلة جذور.
- في حالة $\Delta=0$ ، للمعادلة جذرٌ وحيد $-\dfrac{b}{2a}$ (يُسمَّى **جذراً مضاعفاً**).
- في حالة $\Delta>0$ ، للمعادلة جذران مختلفان هما

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

فَكِّرْ

على ماذا تحصل إذا طبّقتَ العلاقتين اللتين تحسبان x_1 و x_2 في حالة $\Delta=0$ ؟ أترى لماذا يُسمَّى العددُ $-\dfrac{b}{2a}$ جذراً مُضاعفاً في حالة $\Delta=0$؟

مثال

حُلّ كلاً من المعادلات الآتية

1. $x^2-3x+4=0$
2. $3x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{49}{48}=0$
3. $3x^2-x-4=0$

الحل

1. هنا $a=1, b=-3, c=4$، و $\Delta=(-3)^2-4\times1\times4=-7$. ولمّا كان $\Delta<0$ استنتجنا أنّه ليس لهذه المعادلة حلول.
2. هنا $a=3, b=-\dfrac{7}{2}, c=\dfrac{49}{48}$، و $\Delta=(-\dfrac{7}{2})^2-4\times3\times\dfrac{49}{48}=0$. ولمّا كان $\Delta=0$ استنتجنا أنّ لهذه المعادلة جذراً مضاعفاً $x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{7}{12}$.
3. هنا $a=3, b=-1, c=-4$، و $\Delta=(-1)^2-4\times3\times(-4)=49$. ولمّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أنّ لهذه المعادلة جذرين مختلفين، هما :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-7}{2\times3}=-1 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+7}{2\times3}=\frac{4}{3}$$

ليس من المفيد دوماً استعمال المميِّز Δ عند حلّ المعادلات من الدرجة الثانية. فعلى سبيل المثال تُكتب المعادلة $4x^2-5=0$ بالشكل $(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5})=0$، إذن مجموعة حلولها هي $\mathcal{S}=\left\{-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

وكذلك تُكتب المعادلة $7x^2+3x=0$ بالشكل $x(7x+3)=0$، إذن مجموعة حلولها هي $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{7},0\right\}$.

فكِّرْ

تأمّل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$، افترض أنّ للعددين a و c إشارتين مختلفتين، ما هي إشارة المميِّز Δ في هذه الحالة ؟ وما هي الخاصّة التي تستنتجها بشأن جذور المعادلة ؟

تَدرَّبْ

① حلَّ المعادلات الآتية دون استعمال المميِّز :

❶ $x^2-5x=0$ ❷ $x^2-9=0$

❸ $x^2+4=0$ ❹ $1-(3x-1)^2=0$

② حلَّ المعادلات الآتية :

❶ $x^2+x-6=0$ ❷ $-x^2+2x-1=0$

❸ $u^2+5u-6=0$ ❹ $3x^2-12x+12=0$

❺ $-m^2+m-20=0$ ❻ $x^2+1.1x+0.1=0$

❼ $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ ❽ $x^2-(2+\sqrt{3})x+1+\sqrt{3}=0$

③ حلَّ أيضاً المعادلات الآتية :

❶ $3x^2-4\sqrt{7}x-12=0$ ❷ $\sqrt{2}t^2-3t+\sqrt{2}=0$

❸ $2x-x^2-2=0$ ❹ $(2x-1)^2-4=0$

❺ $x^3-8x^2+12x=0$ ❻ $(2-t-t^2)^2=0$

④ عيِّنْ قيمة الوسيط الحقيقي m التي يكون عندها للمعادلة : $x^2-4x+m-1=0$ جذرٌ مضاعفٌ ؟ واحسب عندئذ هذا الجذر.

2 تحليل ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية وإشارته

تحليل ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$، ولنفترض أنّ مميِّزه $\Delta = b^2 - 4ac$ موجبٌ تماماً. لقد وجدنا، عند إثبات المبرهنة السابقة، أنَّه في هذه الحالة، يكتب ثلاثي الحدود بالصِّيغة :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

حيث x_1 و x_2 هما جذرا المعادلة $f(x) = 0$. وهذا ما يسمح لنا بتحليل ثلاثي الحدود f إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

أمّا في حالة $\Delta = 0$ فيمكن تحليل f إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى كما يلي :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

وأخيراً، في حالة $\Delta < 0$ لا يمكن تحليل f إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

مثال

حلِّل كثير الحدود $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$ ، ثُمَّ عيِّنْ إشارته تبعاً لقيم المتغيِّر x .

الحل

هنا لدينا $a = 2, b = -5, c = 2$ إذن $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9$ ، فللمعادلة جذران هما

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 3}{4} = 2$$

ويتحلّل P كما يلي : $P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$.

ولتعيين إشارة P نُنشئ جدول الإشارات كما يأتي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن $P(x)$ سالبٌ تماماً على المجال $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$ وموجبٌ تماماً على كلٍّ من المجالين $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ و $]2, +\infty[$.

إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

في الحقيقة يمكن تعميم المثال السابق كما يأتي :

مُبرْهَنة

لنتأمّل ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية : $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$، وليكن Δ مميِّزه.

- في حالة $\Delta < 0$، تكون للمقدار $f(x)$ إشارةُ a نفسها أياً كان x من $\mathbb{R}$.
- في حالة $\Delta = 0$، تكون للمقدار $f(x)$ إشارةُ a نفسها (إلاّ عندما $x = -\dfrac{b}{2a}$ إذ يكون عندئذ $f(x) = 0$).
- في حالة $\Delta > 0$، تكون للمقدار $f(x)$ إشارةُ a إذا لم تقع x بين جذري f، وإذا وقعت x بين الجذرين، خالفت إشارةُ $f(x)$ إشارةَ a.

لنكتب f بالصيغة القانونيّة :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- في حالة $\Delta < 0$، يكون لِما بين القوسين : $[\ ]$ إشارة موجبة تماماً. إذن للمقدار $f(x)$ إشارة a نفسها أياً كان x من $\mathbb{R}$.
- في حالة $\Delta = 0$، يكون للمقدار $f(x)$ إشارة a نفسها أياً كان $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- في حالة $\Delta > 0$، يكون $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ فهو جداء ثلاثة عوامل، أحدها ثابتٌ a، وكلّ واحد من العاملين الآخرين ثنائيُّ حدٍّ من الدرجة الأولى، فمن السهل دراسة إشارتهما تِبعاً لقيم x. فإذا رمزنا بالرمز x_1 إلى أصغر جذري $f(x)$، وبالرمز $\operatorname{sgn}(a)$ إلى إشارة a حصلنا على الجدول الآتي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$\operatorname{sgn}(a)$		$\operatorname{sgn}(a)$		$\operatorname{sgn}(a)$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$	

يُلخّص الجدول الآتي المبرهنة السابقة

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
تفريق $f(x)$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	لا تفريق موجود
$f(x)=0$	حلاّن x_1 و x_2	حل وحيد x_0	لا حلول موجودة
إشارة $f(x)$	إشارة a ، x_1 ، x_2 ، إشارة $-a$	إشارة a ، x_0	إشارة a

مثال

حُلَّ كلاً من المتراجحتين :

❶ $x^2+2x+2>0$

❷ $-x^2+2x+3 \geq 0$

الحل

❶ نحسب مميز ثلاثي الحدود x^2+2x+2 فنجد $\Delta=-4$، أي $\Delta<0$، إذن ليس لكثير الحدود جذور. ولمّا كان $a=1$، أي $a>0$، استنتجنا أنّ $x^2+2x+2>0$، أياً كان العدد الحقيقي x.

❷ هنا مميز ثلاثي الحدود $-x^2+2x+3$ يساوي $\Delta=16$ فللمعادلة $-x^2+2x+3=0$ جذران $x_1=-1$ و $x_2=3$. ولمّا كان $a=-1$، أي $a<0$، استنتجنا أنّ مجموعة حلول المتراجحة هي المجال $[-1,3]$.

تَدرَّبْ

① حلّل كلاً من ثلاثيات الحدود الآتية إلى جداء ضرب عوامل من الدرجة الأولى:

❶ $f(x)=x^2-7x+10$ ❷ $f(x)=2x^2-5x+2$

❸ $f(x)=-3x^2+4x+4$ ❹ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

② فيما يأتي، ادرس تبعاً لقيم x إشارة ثلاثي الحدود المُعطى:

❶ $f(x)=x^2+x-2$ ❷ $f(x)=-x^2+2x-3$

❸ $f(x)=x^2-4x+4$ ❹ $f(x)=-x^2+6x-5$

③ حلَّ كلاً من المتراجحات الآتية:

❶ $x^2-3x+2>0$ ❷ $x^2+x-20 \leq 0$

❸ $x(x-2)<0$ ❹ $x^2+4 \geq 0$

❺ $-x^2-9 \geq 0$ ❻ $2x^2-24x+72<0$

3 العلاقة بين أمثال وجذور ثلاثي حدود من الدرجة الثانية

مُبرْهَنة

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$، ولنفترض أنّ مميزه $\Delta = b^2 - 4ac$ موجبٌ تماماً. عندئذ يُحقّق x_1 و x_2 جذرا المعادلة $f(x) = 0$ الخاصتين الآتيتين:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

في الحقيقة، لقد رأينا أنّه في هذه الحالة تتحقق المساواة $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ أيّاً كانت قيمة x. وبالنشر نستنتج أنّ

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

ولأنّ هذه المساواة صحيحة أيّاً كانت قيمة x، كانت صحيحة في الحالة الخاصة $x = 0$، وهذا يعني أنّ $c = ax_1x_2$، أو $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. إذن أيّاً كانت قيمة x :

$$ax^2 + bx = ax^2 - a(x_1 + x_2)x$$

فإذا عوّضنا مجدّداً $x = 1$ استنتجنا، بعد الاصلاح، أنّ $b = -a(x_1 + x_2)$ أو $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

فَكِّرْ

تأمّل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$، وافترض أنّ مميزها $\Delta = b^2 - 4ac$ موجبٌ تماماً. لقد وجدتَ سابقاً صيغة كل من جذريها x_1 و x_2. احسب باستعمال هذه الصيغ المقدارين $x_1 + x_2$ و x_1x_2 واستنتج برهاناً آخر للمُبرهنة السابقة.

فَكِّرْ

في حالة $\Delta = 0$، تُعطي العلاقات $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. وهذا ما يجعلنا نقول إن للمعادلة جذرين متساويين، أو إنّ لها جذراً مضاعفاً. هل تبقى صيغة مجموع الجذرين وصيغة جداء ضربهما المبيّنتان سابقاً صحيحتين عند تساوي الجذرين ؟

مثال

نتأمّل المعادلة من الدرجة الثانية :

$$x^2 - 2x - \sqrt{2} = 0$$

نلاحظ أنّ $a = 1$ و $c = -\sqrt{2}$ أي إنّ إشارتي العددين a و c مختلفتان، فلهذه المعادلة جذران مختلفان x_1 و x_2. كيف نحسب المقدار $A = x_1^2 + x_2^2$ دون حساب الجذرين ؟

في الحقيقة، لمّا كان كلٌّ من x_1 و x_2 حلاً للمعادلة المُعطاة كان

$$x_1^2 = 2x_1 + \sqrt{2}$$
$$x_2^2 = 2x_2 + \sqrt{2}$$

وبجمع هاتين المساواتين طرفاً إلى طرف نستنتج أنّ

$$A = x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 + x_2) + 2\sqrt{2}$$

ولكن نعلم أنّ $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2$. إذن $A = 2 \times 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$.

تَدرَّبْ

① توثّق أنّ 2 هو حلٌّ للمعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$. ما مجموع جذري هذه المعادلة ؟ وما جداء ضربهما؟ استنتج الحل الآخر.

② توثّق أنّ -1 هو حلٌّ للمعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$. ما مجموع جذري هذه المعادلة؟ وما جداء ضربهما؟ استنتج الحل الآخر.

③ لتكن (E) المعادلة $2x^2 + x - m = 0$.

❶ كيف نختار العدد الحقيقي m كي يكون العدد $x = -1$ جذراً للمعادلة (E)؟

❷ استنتج الجذر الآخر.

④ في حالة كلٍّ من المعادلات الآتية، أوجد أحد الجذرين ذهنياً، واستنتج الجذر الآخر دون حساب المميّز:

❶ $x^2 - 7x + 6 = 0$ ❷ $-3x^2 + 2x + 5 = 0$

❸ $x^2 + 3x - 10 = 0$ ❹ $x^2 + 5x + 4 = 0$

❺ $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$ ❻ $2x^2 + \sqrt{5}x - 15 = 0$

⑤ جِدِ العددين الحقيقيَّين m و n لتكون المعادلتان الآتيتان متكافئتين.

$x^2 - mx + m - n = 0$ و $3x^2 - (m+6)x + 1 - n = 0$

4 تطبيقات ونشاطات

تطبيق : الإرث

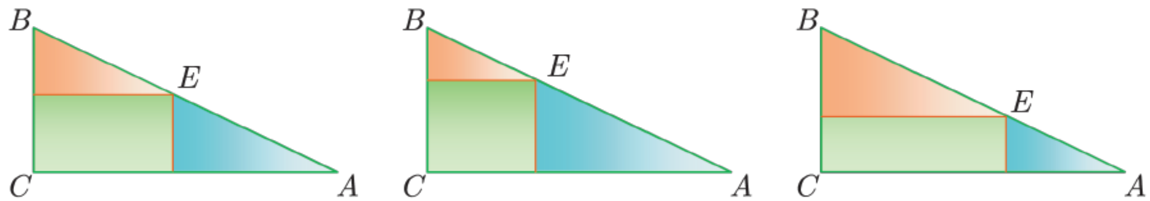
يمتلك رجل قطعة أرض بشكل مثلّث ABC قائم في C، وطولا ضلعيه القائمتين $[AC]$ و$[BC]$ يساويان $80\,\text{m}$ و $40\,\text{m}$ بالترتيب. أوصى الرجل أن يتقاسم أولاده الثلاثة عادل وعدنان وعمار هذه الأرض على الوجه الآتي :

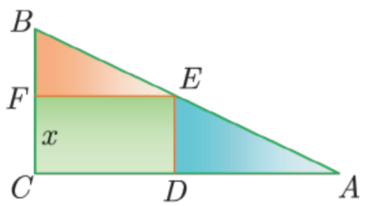
> يأخذ عادل، الابن البكر، جزءاً من قطعة الأرض بشكل مستطيل أحد رؤوسه C، ويقع رأسه المقابل على الوتر $[AB]$ وتكون مساحته أكبر ما يمكن. ثُمّ يختار عدنان إحدى القطعتين المثلثيّ الشكل الباقيتين، ويأخذ عمارٌ القطعة الأخيرة.

طُلب من عادل تنفيذ عملية توزيع الحصص. فكيف نساعده على تحقيق ذلك ؟

الحل

بدايةً نلاحظ أنّ اقتطاع عادل لقطعة أرضه المستطيلة يمكن أن يجري بطرائق عدّة، كما يوضّح الشكل ، فكيف يختار عادل أكبر هذه القطع مساحةً ؟





يتعيّن المستطيل المنشود بمعرفة طول أحد ضلعيه، ولكن قبل توضيح ذلك لنثبّت بعض الرموز الإضافية، سنسمي $CDEF$ المستطيل الذي يرمز إلى أرض عادل، وسنرمز بالرمز x إلى طول القطعة $[CF]$.

لمّا كان المثلثان EBF و ABC متشابهين، لتساوي زوايا الأول مع الزوايا الموافقة من الثاني، استنتجنا أنّ

$$\frac{FE}{CA} = \frac{BF}{BC} \quad \text{أو} \quad \frac{EF}{80} = \frac{40-x}{40}$$

وهذا يعطي طول الضلع الثانية $[EF]$ للمستطيل $CDEF$ بدلالة x، إذ نجد $EF = 2(40-x)$.

وعليه إذا رمزنا بالرمز $A(x)$ إلى مساحة المستطيل $CDEF$ بدلالة المتغيِّر x كان

$$A(x) = CF \cdot EF = 2x\left(40 - x\right) = -2x^2 + 80x$$

ولكنّ هذه معرفة قديمة بالنِّسبة إلينا! فالتابع $x \mapsto A(x)$ هو تابعٌ حدوديٌّ من الدرجة الثانية وهو موضوع بحثنا، فلماذا لا نستثمر هنا ما تعلمناه ؟

لنبدأ بكتابة A بالصيغة القانونيّة عن طريق الإتمام إلى مربع كامل كما يأتي :

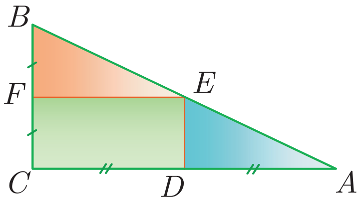
$$A(x) = -2\left(x^2 - 40x + 400 - 400\right) = -2\left(x - 20\right)^2 + 800$$

واضحٌ أنَّ $-2\left(x-20\right)^2 \leq 0$، فيكون المقدار $A(x)$ أكبر ما يمكن عندما $-2\left(x-20\right)^2 = 0$، أي $x = 20$، وعندها $A(20) = 800$ هي أكبر قيمة للتابع A.

إذن يحصل عادل على أكبر المستطيلات مساحةً عندما

$$CF = x = 20\,\text{m} \qquad \text{و} \qquad EF = 2(40 - x) = 40\,\text{m}$$

وتكون مساحة قطعة أرضه $20 \times 40 = 800\,\text{m}^2$، وهي نصف مساحة ABC.



أمّا قطعتا الأرض المتبقِّيتان فهما "طبوقتان" ومساحة كلٍّ منهما تساوي ربع مساحة ABC، (علل).

فَكِّرْ

الخيار الصعب : تخيّل أنّك باحثٌ عن الذهب. تريد شراء قطعة أرض يمكن أن تكون غنيّة بعروق الذهب، شريطة أن تكون على هيئة مستطيل محيطه معطى ولنقل $2p$. يعرضُ البائعُ عليك عدةَ قطع أرضٍ متساوية السعر ومحيطها $2p$. تدرك على الفور أنّ من مصلحتك الإجابة عن السؤال الآتي:

أَبَيْنَ جميع قطع الأرض المعروضة، قطعةٌ مساحتُها أكبرُ ما يمكن ؟ ما أبعادها؟

① نرمز بالرمز x إلى أحد بعدَي المستطيل. تيقَّنْ أنَّ مساحتَه تُعطى بالعلاقة :

$$S(x) = -x^2 + px$$

② اكتبْ $S(x)$ بالصيغة القانونيّة. عند أي قيمة للمتغيِّر x يكون $S(x)$ أكبر ما يمكن. ثُمّ احسبْ بُعديْ المستطيل الموافق.

تدرّب : معادلات ومتراجحات مضاعفة التربيع

لنتأمّل المسألة الآتية: أَوجد عددٌ حقيقي يكون مجموع مربعه ومقلوب مربعه مساوياً 6 ؟

تؤول هذه المسألة إلى حلّ المعادلة : $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$ في $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ، وهي تكافئُ في المجموعة نفسها المعادلةَ (E) الآتية :

$$(E) \qquad x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

المعادلة (E) هي معادلة من الدرجة الرابعة، تُسمَّى **معادلة مضاعفة التربيع**، إذ لا تضمُّ سوى الحدين x^4 و x^2 والحد الثابت.

① حلّ المعادلة (E)

❶ أثبت أنه إذا كان x_0 حلاً للمعادلة (E)، كان $t_0 = x_0^2$ حلاً للمعادلة (E') التالية

$$(E') \qquad t^2 - 6t + 1 = 0$$

❷ بالعكس، أثبت أنّه إذا كان العدد الموجب t_0 حلاً للمعادلة (E')، كان $x_1 = \sqrt{t_0}$ و $x_2 = -\sqrt{t_0}$ حلّيْن للمعادلة (E).

❸ أوجد إذن حلول المعادلة (E).

لحل معادلة مضاعفة التربيع، نستعمل مجهولاً مساعداً، فنضع $t = x^2$.

② حلّ معادلات ومتراجحات مضاعفة التربيع

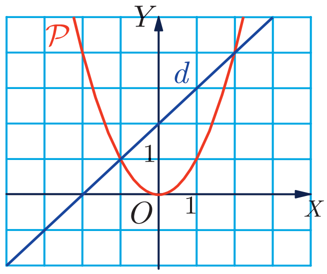
حُلَّ كلاً من المعادلات أو المتراجحات المضاعفة التربيع الآتية:

❶ $x^4 - x^2 + 12 = 0$ ❷ $2x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1 = 0$

❸ $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ ❹ $x^4 - 3x^2 - 4 \geq 0$

❺ $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$ ❻ $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$

تمرينات ومسائل

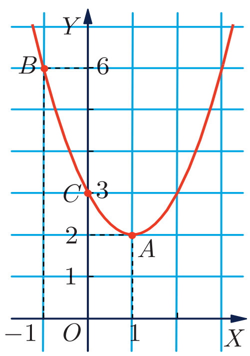


1 نجد في الشكل المجاور: قطعاً مكافئاً $\mathcal{P}$ معادلته في معلمٍ متجانس هي $y = x^2$. وعلى مستقيمٍ d معادلته $y = x + 2$.
أوجد إحداثيات نقطتيْ تقاطعِ الخطَّين $\mathcal{P}$ و d.

2 نتأمّل ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$، $(a \neq 0)$.

① احسبْ بدلالة a و b و c المقادير الآتية :

- $P(0)$
- $\dfrac{P(1) - P(-1)}{2}$
- $\dfrac{P(1) + P(-1) - 2P(0)}{2}$



② المنحني المبيّن في الشكل المجاور هو الخط البياني لتابع ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$ مُعرَّف على $\mathbb{R}$.
عيّنْ a و b و c مستفيداً من المعلومات المتاحة في التمثيل البيانيّ.

3 ادرس إشارة كلٍّ من كثيرات الحدود الآتية تبعاً لقيم x.

① $f(x) = x^2 - x - 6$ ② $f(x) = 3 - 2x + x^2$

③ $f(x) = -2x^2 + x + 1$ ④ $f(x) \; -x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

4 حلّ كلاً من المتراجحات الآتية:

① $x^2 + 4x - 12 < 0$ ② $x^2 - 5x + 7 > 0$

③ $-2x^2 + 12x - 18 \geq 0$ ④ $3x(1 - x) < 0$

⑤ $29x \geq x^2 - 96$ ⑥ $(2x - 3)(x + 5) \leq 0$

5 أوجد الأعداد الحقيقيّة m التي تجعل ثلاثي الحدود $f(x) = -x^2 + 2x - m$ سالباً على $\mathbb{R}$.

لنتعلّم البحث معاً

6 حلُّ متراجحة من النمط $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$

حلّ المتراجحة (I) التالية : $\dfrac{4x+3}{x-2} \geq \dfrac{-2x}{x+1}$.

نحو الحلّ

- من المفيد، قبل حلِّ متراجحة، تحديد قيم x التي لا تكوّن وضوحاً حلولاً لها. لماذا لا يمكن أن يكون العددان $x=-1$ و $x=2$ حلّين للمتراجحة (I) ؟

إذن سنحلّ المتراجحة (I) في المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$.

- لحلّ متراجحة من الشكل $A(x) \geq B(x)$. من المفيد، عموماً، كتابتها : $A(x)-B(x) \geq 0$. ليس من السهل معرفة إشارة فرق. لذلك نختزل الكسر بإرجاعه إلى مقام مشترك.

أثبت أنّه على $\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$، تُكافئ المتراجحةُ (I) المتراجحةَ

$$\frac{-6x^2-3x-3}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

- لنضعْ

$$C(x)=\frac{-6x^2-3x-3}{(x+1)(x-2)}$$

تُعرف إشارة C من معرفة إشارة البسط، وإشارة المقام. ولمّا كان المقام مكتوباً أصلاً على هيئة جداء، فتُعرف إشارته من إشارة الحدّين $(x+1)$ و $(x-2)$.

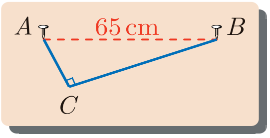
① ادرسْ إشارة بسط $C(x)$ و إشارة مقامه.

② الطريقة لتحديد إشارة $C(x)$ تتمثّل بكتابة جدول إشارات للبسط و المقام. افعل ذلك.

③ أعطِ مجموعة حلول المتراجحة (I).

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 كتابة المعادلة الموافقة لمسألة



نثبّت خيطاً طوله $89\,\text{cm}$ من طرفيه إلى مسمارين A و B المسافة بينهما $65\,\text{cm}$.

يُطلب تبيان إذا كان بالإمكان شدُّ الخيط بطريقة تجعل المثلّث ACB قائماً في C. ثمّ أعد السؤال في الحالة التي يكون فيها طول الخيط مساوياً $91\,\text{cm}$.

نحو الحلّ

- بالنظر إلى الشكل نرى أنّ السؤال المطروح يؤول إلى معرفة إذا كان بالإمكان إنشاء مثلّث قائم الزاوية يُحقّق الشروط المطلوبة. نعرف من المثلّث المطلوب طول الضلع AB، ونجهل طولي الضلعين AC و CB. ولكنّ المثلث ACB قائم، إذن هناك في الحقيقة مجهولٌ واحدٌ.

لنرمز بالرمز x إلى AC. عبِّر عن BC بدلالة x.

- بقي أن نعبِّر، بمعادلة، عن كون المثلّث ACB قائماً في C، وتبيان إذا كان لهذه المعادلة حلول.

① اكتب هذه المعادلة ثُمّ حلّها.

② أيكون الحلاّن اللذان وجدتَهما مقبولين ؟

③ أعد الخطوات السابقة عندما يساوي طول الخيط $91\,\text{cm}$.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8

ليكن m عدداً حقيقيّاً، وليكن f التابعَ من الدرجة الثانية المُعرَّف وفق $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$.

① ما قيم m التي يكون للمعادلة $f(x) = 0$ عند كلٍّ منها جذرٌ وحيدٌ ؟ احسب عندئذٍ هذا الجذر.

② ما قيم m التي لا يكون للمعادلة $f(x) = 0$ عند أيٍّ منها أيَّ حل.

9

حُلَّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $x(x+1) + x^2 - 1 = 0$

② $3x^2 + (x-2)(x+3) = 12$

③ $4(x+3)^2 - (x-5)^2 = 0$

④ $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x+1} = 2x - 1$

⑤ $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{11}{5}$

⑥ $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{2x-5} = \dfrac{9}{4}$

10 حُلَّ كلاً من المتراجحات الآتية:

① $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} > 0$ ② $(2x-1)^2 > (x+1)^2$

③ $(x+3)(x-1) < 2x+6$ ④ $\dfrac{x+3}{1-x} \geq -5$

11 حُلَّ كلاً من المعادلات الآتية :

① $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ ② $2x^4 - x^2 + 1 = 0$

③ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ ④ $4x^2 - 35 - \dfrac{9}{x^2} = 0$

⑤ $-2x^4 + 12x^2 - 16 = 0$ ⑥ $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

12 حُلَّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $\sqrt{4-x} = x-2$ ② $\sqrt{x-4} = x+1$

③ $\sqrt{x^2-12} = 2x-6$ ④ $\sqrt{2x-6} = x-3$

لاحظ أنّ الشرط $\sqrt{a} = b$ يُكافئ تَحقُّقَ الشرطين : $(b \geq 0)$ و $(a = b^2)$ في آنٍ معاً.

13 حُلَّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:

① $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$ ② $\sqrt{3x+3} = \sqrt{x^2+x-8}$

لاحظ أنّ الشرط $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ يُكافئ تَحقُّقَ الشرطين : $(b \geq 0)$ و $(a = b)$ في آن معاً.

14 أيوجد عددان طبيعيان متتاليان جداء ضربهما يساوي 4970 ؟

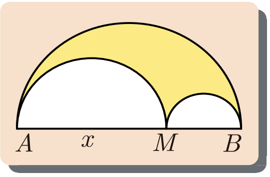
15 في كل من الحالات الآتية، أيوجد عددان حقيقيان x و y يحققان $S = x + y$ و $P = xy$؟ احسب هذين العددين في حال وجودهما.

① $S = 18, \quad P = 65$

② $S = -1, \quad P = -42$

③ $S = 4, \quad P = 5$

16 نتأمّل نصف دائرة قطرها $AB = 5$ ، و M نقطةٌ من القطعة $[AB]$.
نرسم نصفي دائرة قطراهما $[AM]$ و $[MB]$ كما في الشكل المجاور.
ونضع $AM = x$.



① احسب بدلالة x مساحة السطح المحدَّد بالدوائر الثلاث S.

② أثمّةَ تعيينٌ للنقطة M بحيث تكون النسبة بين S ومساحة نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ مساوية للمقدار $\frac{8}{25}$؟

17 أوجدْ جميع ثلاثيّات الأعداد الطبيعيّة المتتالية التي يساوي مجموعُها جداءَ ضربها.

4

التّوابع المألوفة

1. التّوابع الحدوديّة من الدرجة الثانية
2. تابع المقلوب
3. المستقيم الحقيقي والدائرة المثلّثية
4. النّسب المثلثيّة لعدد حقيقيّ

تعود فكرة قياس الزوايا بالدرجات إلى البابليِّين، فَهُم مَنْ قسّم الدائرة إلى °360، وربَّما يعود ذلك إلى العلاقة الوثيقة التي تربط قياس الزوايا بعلم الفلك وإلى كون عدد أيّام السنة قريب من 360 يوماً.

مُعظمُ ما نعرفه عن الرياضيّات التي تطورت في بلاد ما بين النهرين، من قِبَلِ السومريين بداية ثُمّ من قِبَلِ الأكّاديِّين وغيرهم من شعوب المنطقة، حديثٌ نسبياً. يُسمّى هذا الموضوع باسم **الرياضيّات البابليّة**، وكأَنَّه عصارة العمل الفكري لشعبٍ واحدٍ بعينه. لقد بقي العديد من الرُّقُم الفخَّاريَّة المكتوبة باللغة المسماريَّة مجهولَ المحتوى إلى أن تمكَّن العالم «أوتو نيوغِباور» من فكّ شيفرتها في الثلاثينيّات من القرن الماضي. لقد وُجِدَ أنّ هذه الرُّقم تحتوي على نصوص وعلى جداول رياضيّاتيّة، وهذا ما ألقى ضوءاً جديداً على مُساهمة البابليِّين في تطوير الرياضيّات القديمة.

يعود حوالي ثُلُثي الرُّقم المكتشفة إلى الفترة ما بين 1800 و 1600 قبل الميلاد. واستناداً إلى هذا المصدر الغنيِّ من المواد، نعلم أنّ بإمكان البابليِّين الآن ادعاء السبق بشأن مُبرهَنة فيثاغورث مثلاً. احتوى العديد من الرُّقم على جداول تحوي مربَّعات الأعداد من 1 وحتى 50، أليس هذا أول ظهور للتّابع التّربيعيّ ! وهناك جداول تحوي مكعّبات الأعداد، وجذوراً تربيعيّة وجذوراً تكعيبيّة. وكذلك عُثِرَ على جداول تحوي الأعداد ونواتج قسمة 60 عليها، وهذا أوّل ظهور لتابع المقلوب!.

التوابع المألوفة

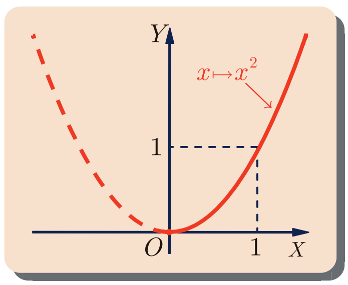
1 التوابع الحدوديّة من الدرجة الثانية

تابع التربيع $x \mapsto x^2$

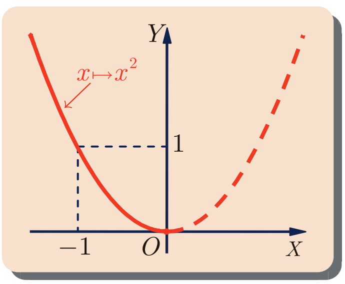
لكلّ عددٍ حقيقيّ مربّع، فالتابع $f : x \mapsto x^2$ الذي يقرن بكلّ عدد حقيقيّ مربّعَه معرّف على كامل $\mathbb{R}$.

ولقد رأينا عند دراسة الاطّراد في الفصل الثاني ما يلي :

- إنّ التّابع $f : x \mapsto x^2$ متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty, 0]$.
- إنّ التّابع $f : x \mapsto x^2$ متزايدٌ تماماً على المجال $[0, +\infty[$.



تابع التربيع متزايدٌ تماماً على المجال $[0, +\infty[$



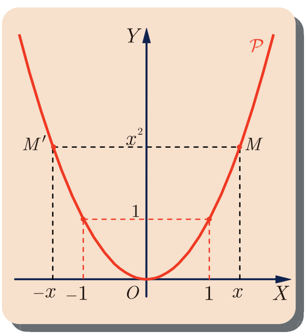
تابع التربيع متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty, 0]$

ومنه نستنتج جدول اطّراد التابع $f : x \mapsto x^2$ حيث نلاحظ أنّ $f(0) = 0$ هي أصغر قيم هذا التابع.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

نسمّي الخطَّ البيانيَّ $\mathcal{P}$ الممثّل للتابع f **قطعاً مكافئاً** كما نسمّي النقطة O **ذروة القطع**.

في مَعْلَم متجانس يكون محور التراتيب **محور تناظر** للقطع المكافئ $\mathcal{P}$، ذلك لأنّه أيّاً كان العدد الحقيقيّ x، انتمت النقطتان $M(x, x^2)$ و $M'(-x, x^2)$، المتناظرتان بالنّسبة إلى محور التراتيب، إلى القطع المكافئ $\mathcal{P}$.



التابع من الدرجة الثانية

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية معطاة و $a\neq 0$. لقد وجدنا في دراستنا السابقة أنّ f يُكتب بالصيغة القانونيّة :

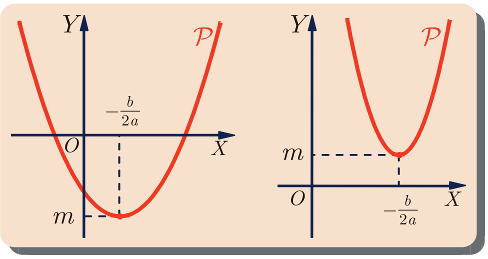
$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

تُعمّم المُبرهَنة التالية خواصَّ اطِّراد التابع التربيعيِّ على التوابع من الدرجة الثانية :

مُبرْهَنة

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

❶ في حالة $a>0$

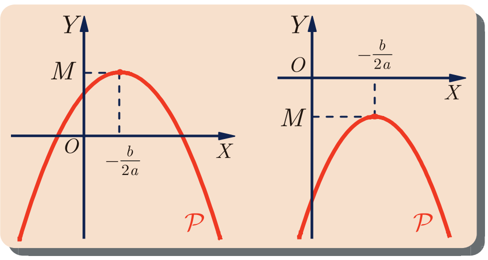


- التابع f متناقصٌ تماماً على المجال $\left]-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$.
- التابع f متزايدٌ تماماً على المجال $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$

حيث $m=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ هي أصغر قيمة يأخذها التابع f.

❷ في حالة $a<0$



- التابع f متزايدٌ تماماً على المجال $\left]-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$.
- التابع f متناقصٌ تماماً على المجال $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

حيث $M=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ هي أكبر قيمة يأخذها التابع f.

لنثبت على سبيل المثال حالة $a>0$، تاركين الحالة الثانية تدريباً للطالب.

- ليكن u و v عددين من المجال $\left]-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ يُحقّقان $u<v$ عندئذ لمقارنة $f(u)$ و $f(v)$ نحسب، كما تعوَّدنا، الفرق بين هذين المقدارين :

$$\begin{aligned}
f(v)-f(u)&=\left(av^2+bv+c\right)-\left(au^2+bu+c\right)\\
&=a(v^2-u^2)+b(v-u)\\
&=a(v-u)\left(u+v+\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

ولكنّ المقدارين a و $(v-u)$ موجبان. إذن إشارة $f(v)-f(u)$ هي نفسها إشارة $(u+v+\frac{b}{a})$ وهنا نتذكّر أنّ u و v ينتميان إلى $\left]-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$، أي $v \le -\frac{b}{2a}$ و $u < -\frac{b}{2a}$ إذن

$$u+v < \left(-\frac{b}{2a}\right)+\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

أو $u+v+\frac{b}{a} < 0$. فنستنتج أنّ $f(v)-f(u) < 0$ أو $f(v) < f(u)$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $\left]-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ في هذه الحالة.

- ليكن u و v عددين من المجال $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$ يُحقّقان $u < v$ وجدنا أنّ :

$$f(v)-f(u) = a(v-u)\left(u+v+\frac{b}{a}\right)$$

ولكنّ المقدارين a و $(v-u)$ موجبان. إذن إشارة $f(v)-f(u)$ هي نفسها إشارة $(u+v+\frac{b}{a})$ ولأنّ u و v ينتميان إلى $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$، استنتجنا أنّ $-\frac{b}{2a} < v$ و $-\frac{b}{2a} \le u$ إذن

$$u+v > \left(-\frac{b}{2a}\right)+\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

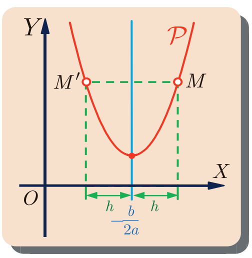
أو $u+v+\frac{b}{a} > 0$. فنستنتج أنّ $f(v)-f(u) > 0$ أو $f(v) > f(u)$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ f متزايدٌ تماماً على المجال $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$ في هذه الحالة.

الخلاصة

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ $(a \ne 0)$.

- نُسمّي الخطَّ البيانيَّ للتابع f قطعاً مُكافئاً ونرمز إليه بالرمز $\mathcal{P}$.
- في حالة $a > 0$، تكون فتحة القطع من الأعلى، ويبلغ f أصغر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$.
- في حالة $a < 0$، تكون فتحة القطع من الأسفل، ويبلغ f أكبر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$.
- في كلا الحالتين تكون $x=-\frac{b}{2a}$ هي فاصلة **ذروة القطع** $\mathcal{P}$.
- ويكون المستقيم المارّ بالذروة موازياً لمحور التراتيب، **محور تناظر للقطع** $\mathcal{P}$.

فكِّر



من أين جاءت هذه الخاصَّة التناظريَّة للقطع المُكافئ ؟ استعمل الصيغة القانونية لثلاثي الحدود f، ثُم احسب $f\left(\frac{-b}{2a}+h\right)$ و $f\left(\frac{-b}{2a}-h\right)$ حيث h هو عددٌ حقيقيٌّ ما. ماذا تستنتج ؟

مثال

نتأمّل التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

❶ اكتب جدول اطّراد f ، وبيّن ما إذا كان يبلغ أكبر قيمه وعيّنها إن وُجدت.

❷ عيّن محور تناظر القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي يمثّل f ، وارسمه.

❸ بيّن أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّين، واحصر كلاً منهما بعددين صحيحين متتاليين.

❹ احسب $f(\frac{1}{2})$ و $f(\frac{3}{5})$. ماذا تستنتج بشأن جذور المعادلة $f(x) = 0$.

الحل

❶ نلاحظ أنّ $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$ هو بالصيغة $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a = -2$ و $b = -4$ و $c = 3$. ونلاحظ أنّ مُعامل الحدّ الذي يحوي x^2 هو $a = -2$. ولأنّ $a < 0$ استنتجنا أنّ فتحة القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الذي يمثّل f من الأسفل.

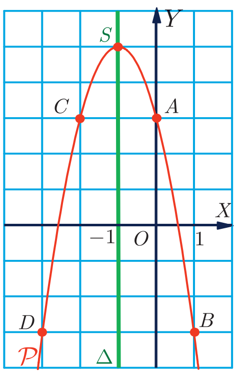
$$f(x) = -2x^2 - 4x + 3 = -2\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 3 = -2(x+1)^2 + 5$$

إذن فاصلة S ، ذروة القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ، هي قيمة x التي تعدم المقدار $(x+1)^2$ ، فهي $x = -1$ ، وترتيبها $y = f(-1) = 0 + 5 = 5$. إذن ذروة القطع $\mathcal{P}$ هي $S(-1,5)$.

ونرى أنّ للتابع f جدول الاطّراد الآتي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$

وأنّ f يبلغ أكبر قيمه وهي 5 عند $x = -1$.



❷ محور التناظر Δ يمرُّ بالذروة ومعادلته $x = -1$.

لرسم $\mathcal{P}$ ، نعيِّن على الشكل النقطة S ومحور التناظر Δ . ثُمّ نعيّن بعض النقاط المُساعدة مثل $A(0,3)$ و $B(1,-3)$ ، ونعيّن نظائرها C و D ، بالترتيب، بالنِّسبة إلى محور التناظر Δ . ثُمّ نصل بينها محترمين الهيئة العامّة للقطع المُكافئ.

❸ لمّا كان مميِّز المعادلة $f(x) = 0$ هو $\Delta = b^2 - 4ac = 40 > 0$ ، فللمعادلة جذران. لنرمز إلى أصغرهما بالرمز x_1 وإلى أكبرهما بالرمز x_2 . قيم التابع f موجبة (عكس إشارة a) بين الجذرين وسالبة خارجهما. ولما كان $f(0) = f(-2) = 3 > 0$ استنتجنا أنّ $0 < x_2$ و $x_1 < -2$.

وكذلك لدينا $f(-3) = f(1) = -3 < 0$ إذن 1 أكبر من أكبر الجذرين أي x_2 و -3 أصغر من أصغرهما أي x_1 . نستنتج أنّ $x_1 \in]-3,-2[$ و $x_2 \in]0,1[$.

بالطّبع كان بالإمكان حساب الجذرين x_1 و x_2 :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2\sqrt{10}}{-4} = -1+\frac{1}{2}\sqrt{10}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2\sqrt{10}}{-4} = -1-\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

والتحقُّق من النتيجة السابقة بملاحظة أنّ $2 < \sqrt{10} < 4$.

❹ نجد بالحساب مباشرة أنّ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$ و $f\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{25} < 0$ إذن $x_2 \in \left]\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right[$، وباستعمال تناظر القطع المكافئ نستنتج أيضاً أنّ $x_1 \in \left]-\frac{5}{2},-\frac{13}{5}\right[$.

تَدرَّبْ

① أكمل جدول الاطّراد الآتي للتابع التربيعيّ $f : x \mapsto x^2$، ثُمّ املأ الفراغ في المتراجحات التالية :

x	$-\infty$		-7		0		$5\sqrt{2}$		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		$\searrow$	......	$\searrow$	0	$\nearrow$	......	$\nearrow$	

❶ إذا كان $x < -7$ كان ...... x^2.

❷ إذا كان $x \geq 5\sqrt{2}$ كان ...... x^2.

❸ إذا كان $-7 \leq x < 5\sqrt{2}$ كان ...... x^2 ....

② علّل لماذا تكون المقولات الآتية خطأ :

❶ إذا كان $x \leq 1$ كان $x^2 \leq 1$.

❷ إذا كان $x > -\sqrt{10}$ كان $x^2 < 10$.

③ بيّن الصواب من الخطأ فيما يأتي :

❶ إذا كان $x < 5$ كان $x^2 < 25$.

❷ إذا كان $x \geq 2\sqrt{7}$ كان $x^2 \geq 28$.

❸ إذا كان $-10^3 < x \leq 10^2$ كان $x^2 < 10^6$.

④ نتأمّل فيما يلي التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة المعطاة. اكتبْ جدولَ اطّراد f، وبيّن ما إذا كان يبلغ أكبر قيمه أو أصغرها وعيّنها إنْ وُجدت. ثُمّ عيّن محور تناظر القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي يمثّل f، وارسمه.

❶ $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$ ❷ $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$

❸ $f(x) = x^2 - 3$ ❹ $f(x) = 3 - x^2$

❺ $f(x) = x^2 - 4x + 6$ ❻ $f(x) = -4x^2 - 4x + 1$

② تابع المقلوب

تابع المقلوب $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

لكلِّ عدد حقيقيٍّ غير معدوم مقلوب، أمّا الصفر فليس له مقلوب. نستنتج أنّ التابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ معرف على اجتماع المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ الذي نرمز إليه بالرمز $\mathbb{R}^*$.

مُبرْهَنة

يحقق تابع المقلوب $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ المعرّف على $\mathbb{R}^*$ الخاصتين التاليتين :

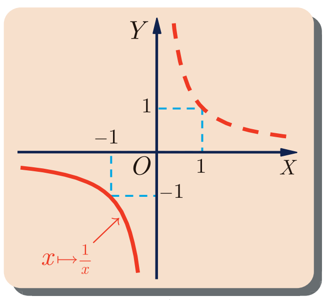
- التابع f متناقصٌ تماماً على المجال $]0, +\infty[$.
- التابع f متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty, 0[$.

أيّاً كان العددان الحقيقيّان غير المعدومين u و v كان

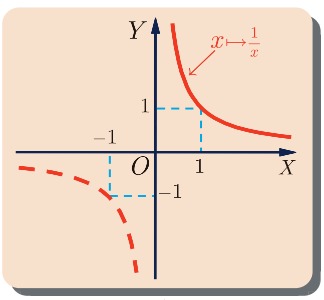
$$f(u) - f(v) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v-u}{uv}$$

لنفترض أن $u < v$ أي $v - u > 0$ ولنميّز حالتين :

- u و v عنصران من المجال $]0, +\infty[$.عندئذ يكون $uv > 0$. وبناءً على قاعدة الإشارات نجد $\dfrac{v-u}{uv} > 0$، أي $f(u) - f(v) > 0$ ومن ثَمّ $f(u) > f(v)$، فالتابع f متناقص تماماً على $]0, +\infty[$.
- u و v عنصران من المجال $]-\infty, 0[$. عندئذ يكون $uv > 0$ أيضاً. وبناءً على قاعدة الإشارات نجد $\dfrac{v-u}{uv} > 0$، أي $f(u) - f(v) > 0$ ومن ثَمّ $f(u) > f(v)$، فالتابع f متناقص تماماً على $]-\infty, 0[$.



تابع المقلوب متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty, 0[$

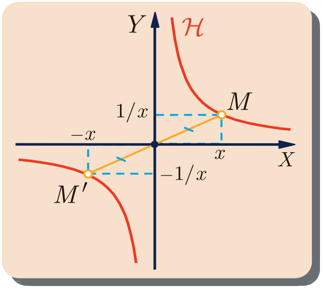


تابع المقلوب متناقصٌ تماماً على المجال $]0, +\infty[$

ومنه نستنتج جدول اطِّراد تابع المقلوب $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

يشير الخطان الشاقوليان في الجدول السابق إلى كون تابع المقلوب غير معرّف عند الصفر. نسمّي الخطَّ البيانيَّ $\mathcal{H}$ الممثّل للتابع f **قطعاً زائداً.**



في مَعْلَم متجانس يكون المبدأ O مركز تناظر للقطع الزائد $\mathcal{H}$ ذلك لأنّه مهما كان العدد الحقيقي غير المعدوم x، كانت النقطتان $M(x,\frac{1}{x})$ و $M'(-x,-\frac{1}{x})$ من $\mathcal{H}$، اللتين فاصلتاهما بالترتيب x و $-x$، متناظرتين بالنِّسبة إلى المبدأ O.

فَكِّر

- عندما يكون x موجباً و«كبيراً» يكون $\dfrac{1}{x}$ قريباً من الصفر وتكون النقطة $M(x,\frac{1}{x})$ قريبة من محور الفواصل.
- عندما يكون x موجباً وقريباً من الصفر يكون $\dfrac{1}{x}$ «كبيراً جداً» وتكون النقطة $M(x,\frac{1}{x})$ «عالية جداً» وقريبة من محور التراتيب.
- الخط البياني لتابع المقلوب لا يتقاطع مع أيٍّ من المحورين الإحداثيّين.

مثال

ادرس اطّراد التابع f المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة غير المعدومة بالعلاقة $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ وارسم خطّه البيانيّ في مَعْلَم متجانس.

الحل

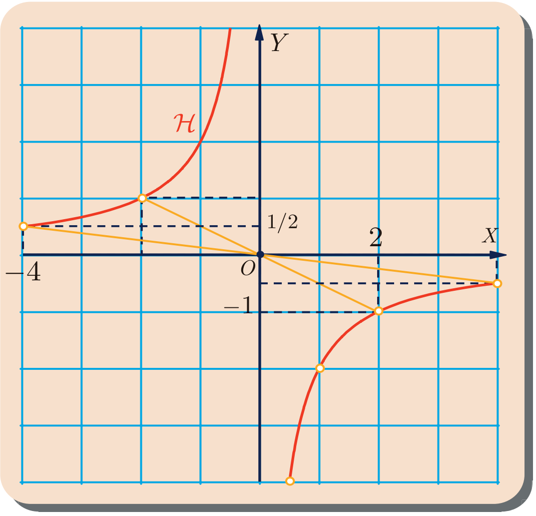
لندرس التابع f على المجال $]0,+\infty[$. نعلم أنّ التابع $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ متناقص تماماً على المجال $]0,+\infty[$. وأياً كان العددان u و v الموجبان تماماً فإنّ $u < v$ تقتضي $\dfrac{1}{u} > \dfrac{1}{v}$ ومن ثَمّ $-\dfrac{2}{u} < -\dfrac{2}{v}$ (ضربنا بعدد سالب). إذن التابع f متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$.

ونجد بالمثل أنّ f تابع متزايدٌ تماماً أيضاً على $]-\infty,0[$.

ومنه جدول الاطّراد التالي للتابع f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

لرسم الخطّ البيانيّ $\mathcal{H}$ للتابع f، نختار عليه بعض النقاط مثل $\left(\frac{1}{2},-4\right)$ و $\left(1,-2\right)$ و $\left(2,-1\right)$ و $\left(4,-\frac{1}{2}\right)$ ونظائرها بالنِّسبة إلى المبدأ ثُم نرسم الخط البياني بما يتفق مع جدول الاطِّراد.



تَدرَّبْ

① حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$، كلاً من المتراجحات الآتية، ثم ارسم الخط البياني للتابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ وتوثّق من صحّة نتائجك.

❶ $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$ ❷ $\frac{1}{x} > -\frac{1}{4}$ ❸ $-2 < \frac{1}{x} < 2$

❹ $\frac{1}{x} < \frac{1}{4}$ ❺ $\frac{1}{x} > \frac{4}{3}$ ❻ $2 \leq \frac{1}{x} \leq 3$

② ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ وفق الصيغة $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

❶ لماذا حُذفتْ القيمة $x = 2$ من مجموعة تعريف f.

❷ ادرسْ اطِّراد f على كلٍّ من المجالين $I_1 =]-\infty,2[$ و $I_2 =]2,+\infty[$.

❸ اكتبْ جدول اطِّراد f.

❹ حُلَّ المتراجحتين $f(x) > 1$ و $f(x) < 1$.

❺ نظِّمْ جدولاً بقيم $f(x)$ الموافقة لقيم x من المجموعة $\{-1,0,1,3,4,5\}$، ثم استفد من هذه الدراسة في رسم الخط البياني $\mathcal{C}_f$ لهذا التابع على $[-1,2[\cup]2,5]$.

③ ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق الصيغة $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

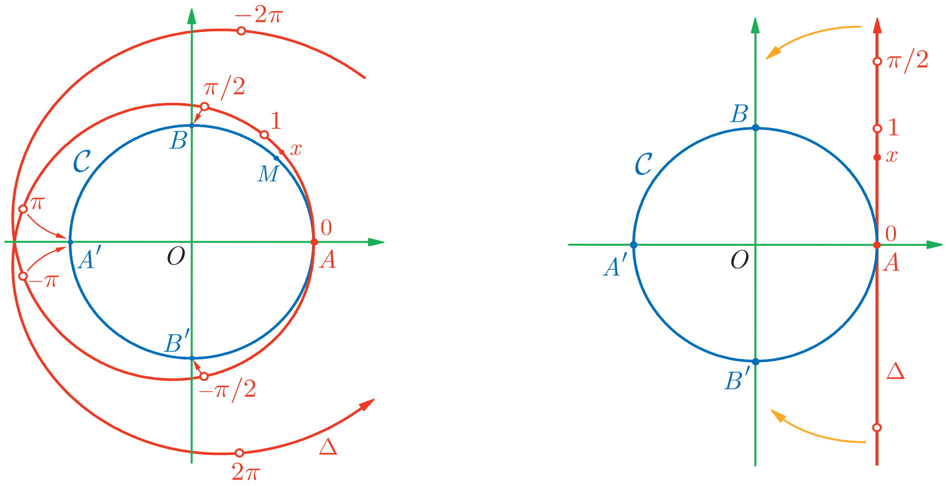
❶ ادرس اطِّراد f على كلٍّ من المجالين $I_1 =]0,1]$ و $I_2 = [1,+\infty[$.

❷ استنتج أصغر قيمة يأخذها التابع f.

المستقيم الحقيقيّ والدائرة المثلّثية

العلاقة بين المستقيم الحقيقيّ والدائرة المثلّثيّة

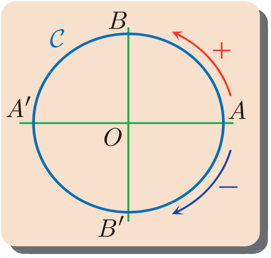
لنتأمّل في معلم متجانس دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O ونصف قطرها r يساوي واحدة الطول أي $r = 1$. ولنتأمّل كذلك محوراً حقيقياً Δ مماثلاً لمحور التراتيب ويوازيه مارّاً بالنقطة $A(1,0)$ كما في الشكل.



ثُم لنفترض أنّ المحور Δ مرنٌ ويمكن لفّه حول الدائرة $\mathcal{C}$ كما يوضح الشكل. فتروح نقاط Δ لتنطبق على نقاط الدائرة $\mathcal{C}$. لمّا كان طول محيط الدائرة $\mathcal{C}$ مساوياً 2π، كان طول ربع الدائرة مساوياً $\frac{\pi}{2}$، فالنقطة التي فاصلتها $\frac{\pi}{2}$ على Δ ستنطبق على النقطة $B(0,1)$ من الدائرة $\mathcal{C}$. والنقطة التي فاصلتها π على Δ ستنطبق على النقطة $A'(-1,0)$ من الدائرة $\mathcal{C}$. وبالأسلوب نفسه نرى أنّ النقطة التي فاصلتها $-\frac{\pi}{2}$ على Δ ستنطبق على النقطة $B'(0,-1)$.

وهكذا نرى النقطة التي فاصلتها x على المحور Δ سوف تنطبق على نقطة محدَّدة تماماً M من الدائرة $\mathcal{C}$، وعندها سوف تنطبق جميع نقاط المحور Δ التي فواصلها من الشكل $x + 2\pi k$ (حيث k هو عدد صحيح ما) على النقطة M نفسها، لأن طول محيط $\mathcal{C}$ يساوي 2π.

لاحظ أنّه عندما تتحرك النقطة التي فاصلتها x على المحور Δ بالاتّجاه الموجب تتحرك صورتها M على الدائرة $\mathcal{C}$ بعكس جهة دوران عقارب الساعة.



تعريف

نسمّي الدائرة، التي نصف قطرها واحدة الطول والمدرّجة كما شرحنا أعلاه حيث تكون جهة الحركة الموجبة عليها هي عكس جهة دوران عقارب الساعة، **الدائرة المثلّثيّة**.

لنثبّتْ إذاً هذه الأفكار : نقرن بكل عدد حقيقيّ x نقطة واحدة M من الدائرة المثلثية $\mathcal{C}$. نبدأ بتعيين النقطة A من هذه الدائرة ثُمّ نميّز حالتين :

- **حالة $x \geq 0$.** ننتقل على الدائرة المثلّثيّة بالاتّجاه الموجب انطلاقاً من النقطة A ونقطع مسافة قدرها x، (قد نضطرّ للدوران حول الدائرة عدّة مرّات) فتكون النقطة M الممثِّلة للعدد الحقيقيّ x هي النقطةُ التي نتوقف عندها بعد قطع المسافة المطلوبة.

فمثلاً نقرن بالعدد $\frac{\pi}{2}$ النقطة B لأنّ القوسَ $\overset{\frown}{AB}$ ربعُ دائرة فطوله يساوي $\frac{2\pi}{4}$ أي $\frac{\pi}{2}$، كما نقرن بالعدد 0 النقطة A وبالعدد π النقطة A' وبالعدد $\frac{3\pi}{2}$ النقطة B'.

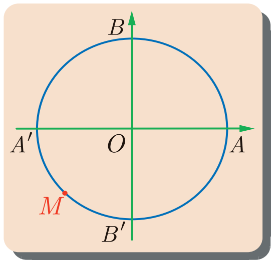
- **حالة $x \leq 0$.** في هذه الحالة ننتقل على الدائرة المثلثيّة بالاتجاه السالب انطلاقاً من النقطة A قاطعين مسافة قدرها $|x|$.

فمثلاً نقرن بالعدد $-\frac{\pi}{2}$ النقطة B' لأنّ $\frac{\pi}{2} = \left|-\frac{\pi}{2}\right|$. وإذا انطلقنا من النقطة A متجهين بالاتجاه السالب وقطعنا مسافة قدرها $\frac{\pi}{2}$ فإنّنا نصل إلى النقطة B'.

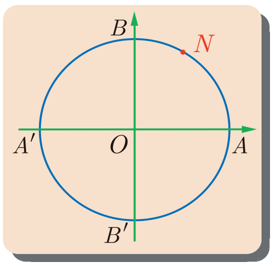
مثال

عيّنْ على الدائرة المثلّثيّة النقطة M الممثِّلة للعدد الحقيقيّ $x = \frac{621\pi}{4}$ وكذلك النقطة N الممثِّلة للعدد الحقيقيّ $y = -\frac{29\pi}{3}$.

الحل



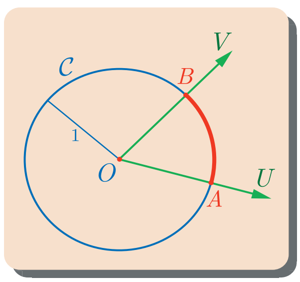
- لتمثيل النقطة M على الدائرة علينا قطع مسافة $\frac{621\pi}{4}$ انطلاقاً من النقطة A، متَّجهين بالاتّجاه الموجب للدوران. ومن الواضح أنّ قوساً من الدائرة طولها $\frac{621\pi}{4}$ تحوي عدّة دورات. نقسم 621 على 4 فنجد: $621 = 155 \times 4 + 1$، ومن ثَمّ فإنّ $\frac{621\pi}{4} = 155\pi + \frac{\pi}{4}$.
ولكنّ المقدار 155π يمثّل 77 دورةً ونصف الدورة. فإذا انطلقنا من النقطة A وقطعنا مسافة تعادل 77 دورة ونصف الدورة، لوصلنا إلى النقطة A'، ثمّ نقطع بعد ذلك مسافة $\frac{\pi}{4}$ بالاتجاه الموجب فنصل إلى النقطة M منتصف القوس $\overset{\frown}{A'B'}$.



- لتمثيل النقطة N على الدائرة علينا قطع مسافة $\frac{29\pi}{3}$ انطلاقاً من النقطة A متَّجهين بالاتّجاه السالب للدوران. وبملاحظة أنّ $\frac{29\pi}{3} = 9\pi + \frac{2\pi}{3}$ وأنّ 9π تمثّل أربع دورات ونصف الدورة، فعلينا الانطلاق من النقطة A وقطع مسافة تعادل أربع دورات ونصف بالاتجاه السالب فنصل إلى A'، ثُمّ نتابع فنقطع بعد ذلك مسافة $\frac{2\pi}{3}$ بالاتِّجاه السالب لنصل إلى النقطة N الممثِّلة للعدد $-\frac{29\pi}{3}$. نلاحظ أنّ النقطة N هي أيضاً النقطة الممثِّلة للعدد $\frac{\pi}{3}$.

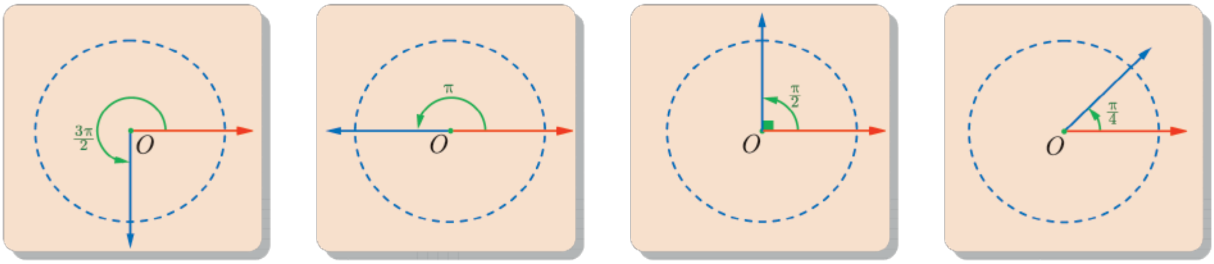
الراديان واحدة جديدة لقياس الزوايا

تعريف

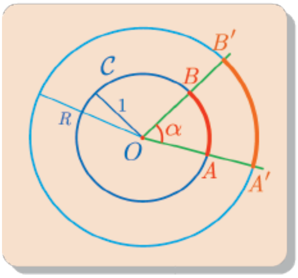


لنتأمّل نصفي مستقيمين $[OU)$ و $[OV)$، لتعيين قياس الزاوية $\angle UOV$ نُنشئ دائرة مثلثية $\mathcal{C}$ مركزها O، فتقطع نصف المستقيم $[OU)$ في نقطة A ونصف المستقيم $[OV)$ في B. وعندها نُسمّي طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة المثلثية قياس الزاوية $\angle UOV$ مقدراً **بالراديان**.

وعلى هذا يكون قياس الزاوية المستقيمة π راديان وقياس الزاوية القائمة $\frac{\pi}{2}$ راديان وهكذا ...



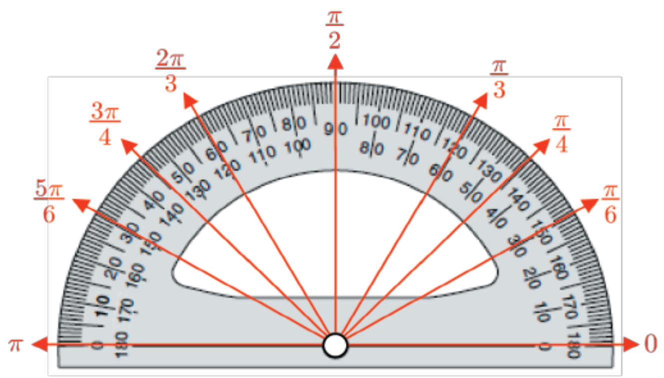
لنتأمّل قوساً $\overset{\frown}{A'B'}$ تُقابل زاوية قياسها α راديان من دائرة $\mathcal{C}'$ مركزها O ونصف قطرها يساوي R. إنّ $\mathcal{C}'$ هي صورة الدائرة المثلثية $\mathcal{C}$ التي مركزها O وفق التحاكي الذي نسبته R. والقوس $\overset{\frown}{A'B'}$ هو صورة القوس $\overset{\frown}{AB}$ من $\mathcal{C}$ الذي يقابل أيضاً زاوية قياسها α راديان لأنّ التحاكي يُحافظ على قياسات الزوايا. وعليه يكون طول القوس $\overset{\frown}{A'B'}$ مُساوياً لطول القوس $\overset{\frown}{AB}$ (أي α) مضروباً بنسبة التحاكي (أي R).



طول قوسٍ تُقابل زاوية قياسها α راديان من دائرة نصف قطرها R يساوي αR.

العلاقة بين قياس زاوية بالراديان وقياسها بالدرجات

هناك تناسب بين قياسات الزوايا بالدرجات وقياساتها بالراديان، وعليه فإنّ زاوية قياسها $180°$ تكافئ زاوية قياسها π راديان وزاوية قياسها $45°$ تكافئ زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ راديان.



زاوية قياسها $A°$ **درجة** هي زاوية قياسها $A \times \frac{\pi}{180}$ **راديان.**

يوضّح جدول التناسب أدناه العلاقة بين قياس الزوايا بالدرجات وقياسها بالراديان :

قياس الزاوية بالدرجات	180	d
قياس الزاوية بالراديان	π	α

الذي يترجم العلاقة $\frac{d}{\alpha} = \frac{180}{\pi}$.

وفي ما يلي جدول ببعض القيم الخاصّة :

قياس الزاوية بالدرجات	30	45	60	120	135	150
قياس الزاوية بالراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

مثال

❶ ما قياس زاوية مقدّراً بالراديان إذا علمت أنّها تساوي $20°$ ؟

❷ ما قياس زاوية مقدّراً بالدرجات إذا علمت أنّها تساوي $\frac{2\pi}{7}$ راديان ؟

الحل

نستفيد من العلاقة $\frac{d}{\alpha} = \frac{180}{\pi}$.

❶ في هذا السؤال، $d = 20°$ والمجهول هو α، ومنه : $\frac{\pi}{9} = \frac{20 \times \pi}{180} = \alpha$.

❷ في هذا السؤال، $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ والمجهول هو d، ومنه : $51°\,26' \approx \frac{360}{7} = \frac{180 \times \frac{2\pi}{7}}{\pi} = d$.

تَدرَّبْ

① احسب طول القوس من دائرة نصف قطرها $10\,\text{cm}$ إذا عُلم أنّها تقابل زاوية مركزيّة قياسها :

❶ بالدرجات : $90°$، $120°$، $180°$.

❷ بالراديان : $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$، 1، 0.2.

② ارسم دائرة مثلّثية، وعيّن عليها النقاط M الممثّلة للأعداد الحقيقيّة الآتية :

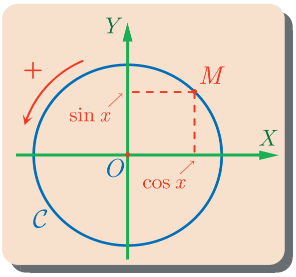
❶ $x = \frac{49\pi}{3}$ ❷ $y = -\frac{29\pi}{4}$ ❸ $z = -\frac{8\pi}{3}$

❹ $t = \frac{7\pi}{6}$ ❺ $u = \frac{15\pi}{4}$ ❻ $v = -\frac{17\pi}{4}$

④ النّسب المثلّثية لعدد حقيقيّ

جيبُ عددٍ حقيقيٍّ و جيبُ تمامِه

تعريف



لنتأمّل في معلم متجانس دائرة مثلّثية $\mathcal{C}$ مركزها O. ليكن x عدداً حقيقياً ولنقرن به النقطة M من الدائرة المثلّثيّة كما في الفقرة السابقة.

- نعرّف **جيب تمام** x، أو **تجيب** x، بأنه فاصلة النقطة M، ونرمز إليه بالرمز $\cos x$.
- ونعرّف **جيب** x بأنه ترتيب النقطة M ونرمز إليه بالرمز $\sin x$.

مُبرْهَنة أساسيَّة

أيّاً كان العدد الحقيقيّ x كان $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

في الحقيقة، نعلم أنّ إحداثيّات النقطة M الموافقة للعدد x هي $(\cos x, \sin x)$. نستنتج من ذلك أنّ

$$OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

ولكن $OM = 1$، إذن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

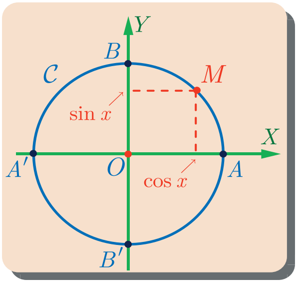
خواص أساسيّة لجيب عدد حقيقي وجيب تمامه

① **أيّاً كان العدد الحقيقي x كان $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ و $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.**

لتكن M النقطة الموافقة للعدد x على الدائرة المثلّثية. فتكون النقطة M' الموافقة للعدد $x + 2\pi$ هي النقطة M نفسها أي $M = M'$. لأنّ قطع مسافة طولها 2π على الدائرة المثلثيّة يعني الدوران عليها دورة كاملة فنرجع إلى النقطة التي انطلقنا منها. ينتج من ذلك أنّ كُلاً من العددين $\cos x$ و $\cos(x + 2\pi)$ يمثّل فاصلة M نفسها وعليه $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

بأسلوب مماثل نجد أنّ كلاً من العددين $\sin x$ و $\sin(x + 2\pi)$ يمثّل ترتيب النقطة M ومن ثمّ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

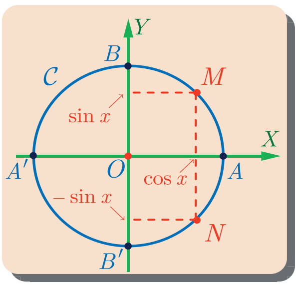
② **أيّاً كان العدد الحقيقي x كان $-1 \leq \cos x \leq 1$ و $-1 \leq \sin x \leq 1$.**



نعلم أنّ نصف قطر الدائرة المثلّثيّة يساوي الواحد وعليه فإنّ فاصلة النقطة A تساوي 1 في حين أنّ فاصلة النقطة A' تساوي -1، وبملاحظة أنّ فاصلة أيّة نقطة من الدائرة المثلّثيّة تقع بين فاصلتي A' و A استنتجنا أنّ فاصلة أيّة نقطة من الدائرة المثلّثيّة محصورة بين -1 و 1 ومنه المتراجحة الأولى $-1 \leq \cos x \leq 1$.

ونلاحظ بالمثل أنّ ترتيب النقطة B يساوي 1 وأنّ ترتيب النقطة B' يساوي -1 ومن ثَمّ فإنّ ترتيب أية نقطة من الدائرة المثلّثيّة يقع بين 1 و -1 وهذا ما يوصلنا إلى المتراجحة الثانية أي $-1 \leq \sin x \leq 1$.

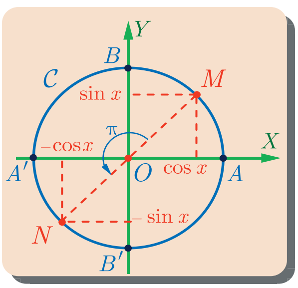
③ **أيّاً كان العدد الحقيقيّ x كان $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$.**



نلاحظ أنّ النقطة N الممثّلة للعدد الحقيقي $-x$ هي نظيرة النقطة M الممثّلة للعدد x بالنسبة إلى محور الفواصل فلهاتين النقطتين الفاصلة نفسها وترتيبان متعاكسان أي :

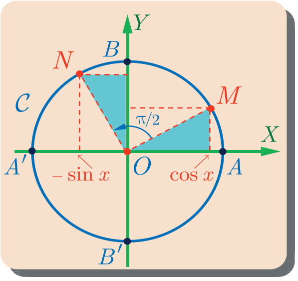
$\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$.

④ **أيّاً كان العدد الحقيقيّ x كان $\cos(x+\pi) = -\cos x$ و $\sin(x+\pi) = -\sin x$.**



لتكن M النقطة الموافقة للعدد x على الدائرة المثلّثيّة. فتكون النقطة N الموافقة للعدد $x+\pi$ هي النقطة المُقابلة قطرياً للنقطة M.
لأنّ قطع مسافة إضافية طولها π على الدائرة المثلّثيّة يعني الدوران عليها مقدار نصف دورة.
وعليه تكون إحداثيتا النقطة N هي $(-\cos x, -\sin x)$. ومنه نستنتج أنّ $\cos(x+\pi) = -\cos x$ و $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

⑤ **أيّاً كان العدد الحقيقيّ x كان $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$ و $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$.**



لتكن M النقطة الموافقة للعدد x على الدائرة المثلّثيّة. فتكون النقطة N الموافقة للعدد $x+\frac{\pi}{2}$ هي النقطة الموافقة لقطع مسافة إضافية طولها $\frac{\pi}{2}$ على الدائرة المثلّثيّة وهذا يعني الدوران عليها مقدار ربع دورة.

المثلّث القائم الذي وتره ON في الشكل المجاور ينتج عن المثلّث القائم الذي وتره OM بدوران ربع دورة حول O. فإذا كان $(\cos x, \sin x)$ هما إحداثيّتي M كان $(-\sin x, \cos x)$ هما إحداثيّتي N. ومنه نستنتج أنّ $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$ و $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$.

⑥ **أيّاً كان العدد الحقيقيّ x كان $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$ و $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$.**

في الحقيقة، يمكن أن نستنتج هاتين الخاصّتين من الخواصّ السابقة كما يأتي : ليكن x عدداً حقيقيّاً. نستنتج من ⑤ مطبّقة على $x-\frac{\pi}{2}$ بدلاً من x أنّ

$$\sin(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \cos(x-\frac{\pi}{2}) \quad \text{و} \quad \cos(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x-\frac{\pi}{2})$$

أو $-\sin(x-\frac{\pi}{2}) = \cos x$ و $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x$. ثُم بالاستفادة من ③ نجد

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x \quad \text{و} \quad \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$$

تَدرَّبْ

① عيّنْ قيمة جيب وجيب تمام الأعداد الحقيقيّة الآتية. يمكنك البدء بتعيين النقاط الموافقة على دائرة مثلّثيّة.

❶ $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ و $\frac{13\pi}{6}$.

❷ $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{81\pi}{4}$ و $-\frac{108\pi}{4}$.

❸ $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{71\pi}{3}$ و $\frac{97\pi}{3}$ و $-\frac{54\pi}{3}$.

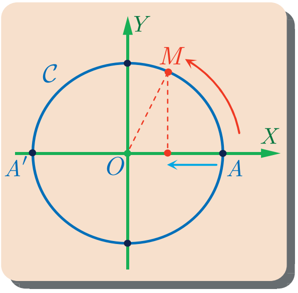
② لتكن M النقطة من الدائرة المثلّثية $\mathcal{C}$ الموافقة لعدد x. عيِّن على $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\pi - x$ و $\pi + x$ و $2\pi - x$، ثُمّ اختزل الصيغة :

$$f(x) = \cos x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x) .$$

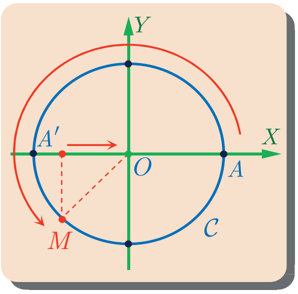
التّابعان sin و cos

لقد عرّفنا سابقاً تابعين حقيقيّين جديدين، معرّفين على كامل مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ هما تابع الجيب $x \mapsto \sin x$ وتابع جيب التمام أو التجيب $x \mapsto \cos x$. سنحاول في هذه الفقرة دراسة هذين التابعين، لقد رأينا آنفاً أنّ هذين التابعين يأخذان قيمهما في المجال $[-1,1]$.

يمكننا بالاستفادة من الدائرة المثلّثيّة أن ندرس بسهولة اطّراد التابعين cos و sin على المجال $[0,2\pi]$.



عندما تتحوّل x في المجال $[0,\pi]$ من 0 إلى π، تتحوّل النقطة M على نصف الدائرة المثلّثيّة العلوي بالاتجاه الموجب من A إلى A'، إذ إنّ طول القوس $\overset{\frown}{AA'}$ يساوي π. فاصلة النقطة M تتناقص من $+1$ إلى -1. إذن تابع التجيب تابعٌ متناقصٌ تماماً على المجال $[0,\pi]$.

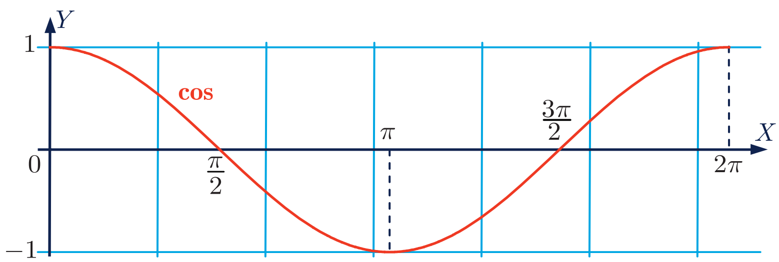


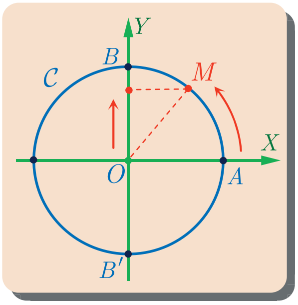
وعندما تتابع x تحوّلها في المجال $[\pi,2\pi]$ من π إلى 2π، تتحوّل النقطة M على نصف الدائرة المثلّثيّة السفلي بالاتّجاه الموجب عائدة من A' إلى A، و تتزايد فاصلة النقطة M من -1 إلى $+1$.

إذن لتابع التجيب جدول الاطّراد التّالي على المجال $[0,2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

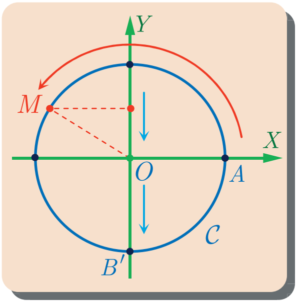
أمّا خطّه البيانيُّ على هذا المجال فهو كما يأتي :



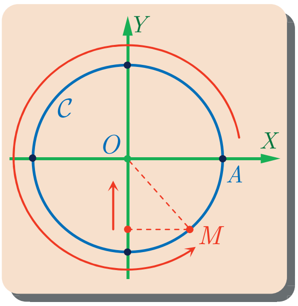


أمّا تابع الجيب فيتبع تغيّرات تراتيب النقاط M.

عندما تتحوّل x من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$، تقطع النقطة M ربع الدائرة المثلّثيّة المحتوى في الربع الأوّل من A إلى B. ويزداد ترتيب M من 0 إلى 1.



وعندما تتحوّل x من $\frac{\pi}{2}$ إلى $\frac{3\pi}{2}$، تقطع النقطة M نصف الدائرة المثلثية اليساري من B إلى B'، و يتناقص ترتيب M من 1 إلى -1.

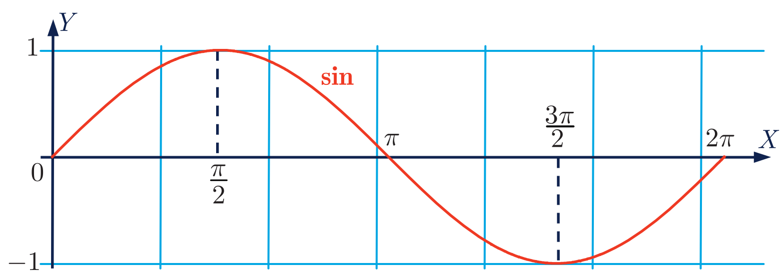


وأخيراً عندما تتحوّل x من $\frac{3\pi}{2}$ إلى 2π، يتزايد ترتيب M من -1 إلى 0. فتابع الجيب متزايدٌ تماماً على كل من المجالين $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$، ومتناقص تماماً على $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

إذن لتابع الجيب جدول الاطّراد التالي على المجال $[0,2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

أمّا خطّه البيانيُّ على هذا المجال فهو كما يأتي :

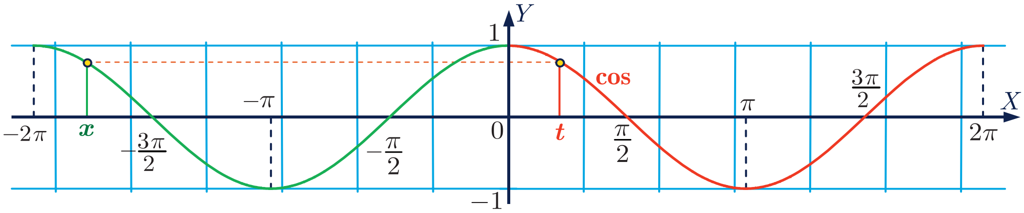


فكّر

لاحظ أنّه عندما يتحوّل x في المجال $[-2\pi, 0]$ متزايداً من -2π إلى 0، يتحوّل المقدار $t = x + 2\pi$ في المجال $[0, 2\pi]$ متزايداً من 0 إلى 2π، ولكن رأينا أنّ

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos t$$

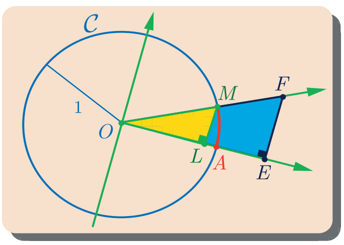
وهكذا نرى أن الخطَّ البيانيَّ لتابع التجيب $\cos$ على $[-2\pi, 0]$ هو نفسه الخط البياني لهذا التابع على $[0, 2\pi]$ بعض إخضاعه لانسحاب كما في الشكل :



والأمر نفسه يسري على تابع الجيب $\sin$ على $[-2\pi, 0]$. نترك لك أن ترسم الخطَّ البيانيَّ لتابع الجيب على المجال $[-2\pi, 0]$.

فكّر

كنّا قد عرّفنا جيب وتجيب زاوية حادة في دراستنا السابقة، فما علاقة هذين التعريفين بتابعَي الجيب والتجيب اللذين درسناهما في هذا البحث ؟



لنتأمّل مثلثاً OEF قائماً في E. ثمّ لنرسم دائرة مثلّثيّة مركزها O وبحيث تقع A على نصف المستقيم $[OE)$. عندئذ يقطع نصف المستقيم $[OF)$ هذه الدائرة في M كما في الشكل المجاور. لتكن L المسقط القائم للنقطة M على (OA). عندئذ إحداثيا النقطة M هما (OL, LM).

أي إذا رمزنا بالرمز x إلى قياس الزاوية $\angle AOM$ بالراديان كان

$$\sin x = LM \quad \text{و} \quad \cos x = OL$$

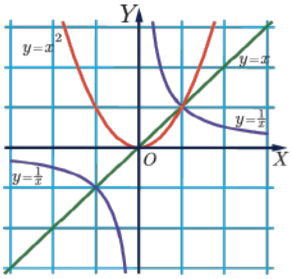
ونستنتج من تشابه المثلثين القائمين OLM و OEF ومن كون $OM = 1$ أنّ

$$\sin x = \frac{LM}{OM} = \frac{EF}{OF} = \sin\angle EOF \quad \text{و} \quad \cos x = \frac{OL}{OM} = \frac{OE}{OF} = \cos\angle EOF$$

حيث يشير $\cos\angle EOF$ و $\sin\angle EOF$ إلى التعريف الذي مررت به في دراستك السابقة لكل من تجيب وجيب زاوية حادة اعتماداً على نسبة طول الضلع المجاورة إلى طول الوتر، ونسبة طول الضلع المقابلة إلى طول الوتر بالترتيب.

تمرينات ومسائل

1 رسمنا في معلم متجانس المنحنيات الثلاثة للتوابع الآتية :



- التابع f المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وفق : $f(x) = x$.
- التابع g المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وفق : $g(x) = x^2$.
- التابع h المعرّف بشرط $x \neq 0$ وفق : $h(x) = \frac{1}{x}$.

بيّن الصواب من الخطأ في المقولات الآتية معلِّلاً إجابتك المستوحاة من الرسم البياني :

① إذا كان $x > 2$ كان $x^2 > 4$.

② إذا كان $x^2 > 4$ كان $x > 2$.

③ إذا كان $0 < x < 1$ كان $x^2 < x$.

④ إذا كان $x < -1$ كان $x < \frac{1}{x}$.

⑤ إذا كان $-1 < x < 2$ كان $1 < x^2 < 4$.

⑥ إذا كان $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$ كان $x < -2$.

2 في كل حالة من الحالات الآتية هناك إجابة واحدة صحيحة فقط، عيّنها

① أياً كان العدد غير المعدوم a، فإنّ $(-2a)^2$ يساوي :

$-4a^2$ $4a^2$ $2a^2$

② إنّ تحليل المقدار $3x^2 + 8x + 4$ هو :

$(3x+2)^2$ $(3x+2)(x+2)$ $3(x+2)^2$

③ إذا كان $-2 < x < 3$ كان :

$x^2 < 9$ $4 < x^2 < 9$ $4 < x^2$

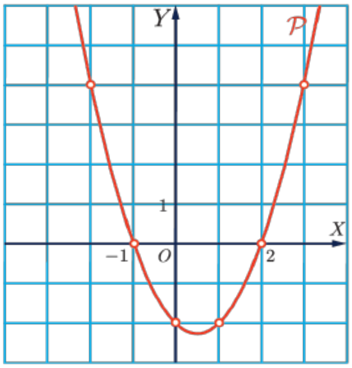
④ التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = -3x^2 + 5$ هو :

متناقص تماماً على $\mathbb{R}$.   متزايدٌ على $[5,+\infty[$.   متزايدٌ على $]-\infty,0]$.

⑤ التابع f المعرّف بالصيغة $f(x) = 4 - (x-3)^2$ يقبل :

3 قيمة صغرى.   4 قيمة صغرى.   4 قيمة كبرى.

3 فيما يلي، عدّة مقولات، عيّن الصحيحة منها مُعلّلاً إجاباتك. يمثل القطع المكافئ $\mathcal{P}$ في الشكل المجاور تابعاً حدودياً من الدرجة الثانية.



① يمكن تعريف f وفق :

❶ $f(x) = (x-2)(x+1)$

❷ $f(x) = (1-x)(2+x)$

❸ $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

❹ $f(x) = x^2 - x - 2$

② يحقّق كثير الحدود ما يأتي :

❶ يبلغ قيمته الصغرى عند $x = 0.6$.

❷ قيمته الصغرى هي $f(0.5)$.

❸ أياً كان العدد x من المجال $[0,1]$ كان $f(x) \leq -2$.

❹ أياً كان العدد x كان $f(x) + 2 > 0$.

4

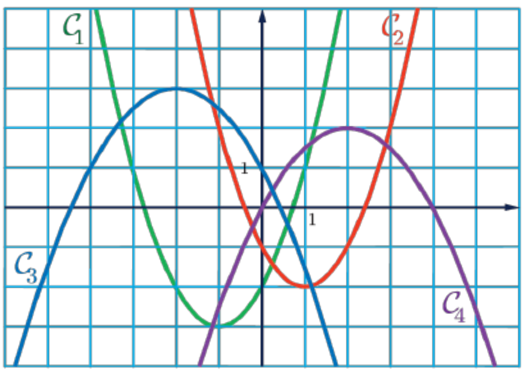
① ادرس اطّراد التابع المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x) = \frac{4}{x}$ وارسم خطّه البيانيّ في مَعْلَمٍ متجانس.

② أعد السؤال في حالة $f(x) = -\frac{3}{x}$.

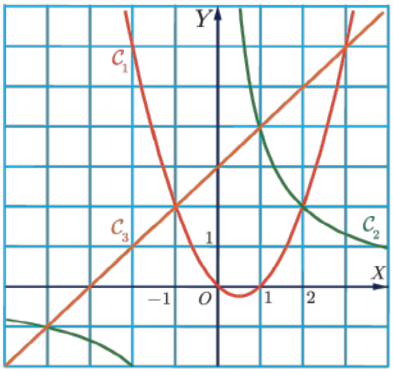
5 التوابع المُشار إليها فيما يأتي معرفة على $\mathbb{R}$. اقرن بكلٍّ منها خطَّه البيانيّ في الشكل الآتي:

① $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$ ② $f_2(x) = -\frac{(x-2)^2}{2} + 2$

③ $f_3(x) = (x-1)^2 - 2$ ④ $f_4(x) = -\frac{x^2}{2} - 2x + 1$



لنتعلّم البحث معاً



6 حلُّ المتراجحات بيانيّاً.

رسمنا في معلم متجانس الخطوط البيانيّة الآتية :

$\mathcal{C}_1$ الممثّل للتابع $f : x \mapsto x^2 - x$.

$\mathcal{C}_2$ الممثّل للتابع $g : x \mapsto \dfrac{4}{x}$.

$\mathcal{C}_3$ الممثّل للتابع $h : x \mapsto x + 3$.

① حلّ بيانياً كلاً من المتراجحات الآتية :

❶ $\dfrac{4}{x} \leq x + 3$ ❷ $\dfrac{4}{x} \geq x^2 - x$ ❸ $x + 3 \geq x^2 - x$

② استنتج مجموعة حلول المتراجحة المضاعفة $x^2 - x \leq \dfrac{4}{x} \leq x + 3$.

نحو الحلّ

فهم السؤال. لا يمكننا في الواقع أن نحدّد بيانياً وبدقّة إحداثيّات نقطة تقاطع منحنيين إلاّ إذا كانت هذه الإحداثيات معطاة على الرسم بأسلوب دقيق لا يترك مجالاً للّبس، كما هو الحال في هذا التمرين. اقرأ نقط تقاطع المنحنيات مثنى مثنى.

البحث عن طريق.

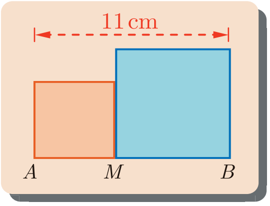
السؤال ①. نهتمّ أوّلاً بالمتراجحة الأولى أي $\dfrac{4}{x} \leq x + 3$. يهمّنا هنا المنحنيين $\mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3$، لنحاول تعيين العددين $\dfrac{4}{x}$ و $x + 3$ على الرسم. نعلم أنّ $\dfrac{4}{x}$ هو ترتيب نقطة M من المنحني $\mathcal{C}_2$ فاصلتها x وأنّ $x + 3$ هو ترتيب نقطة N من المنحني $\mathcal{C}_3$ فاصلتها x. فالمتراجحة $\dfrac{4}{x} \leq x + 3$ تعني أنّ النقطة M واقعة تحت النقطة N. بيّن ذلك على الشكل.

- ارسم باللّون الأحمر جزء المنحني $\mathcal{C}_2$ الذي يجعل النقطة M تقع تحت النقطة N، واستنتج مجموعة حلول المتراجحة الأولى.
- حلّ بأسلوب مماثل المتراجحتين المتبقّيتين واكتب في كلّ مرّة مجموعة الحلول التي حصلت عليها.

السؤال ②. إنّ البحث عن مجموعة حلول متراجحة مضاعفة يعني البحث عن مجموعة الأعداد الحقيقيّة المحقّقة للمتراجحتين معاً. ما هي هذه المجموعة ؟

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 كتابة المعادلة الموافقة لمسألة



لتكن $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $11\,\text{cm}$، ولتكن M نقطة من القطعة $[AB]$. نرسم في جهة واحدة من المستقيم (AB) مربّعين طول ضلع الأوّل AM وطول ضلع الثاني BM.

① أتوجد نقطة، أو عدّة نقاط M، من القطعة $[AB]$ بحيث يساوي مجموع مساحتي سطحي المربّعين المرسومين $65\,\text{cm}^2$ ؟

② أتوجد نقطة، أو عدّة نقاط N، من القطعة $[AB]$ تجعل مجموع مساحتي سطحي المربّعين المرسومين أصغر ما يمكن ؟

نحو الحلّ

فهم السؤال. نهتم هنا بمجموع مساحتي المربّعين المرسومين انطلاقاً من النقطة M، ومن الواضح أنّ هذا المجموع يتعلّق بموضع النقطة M على القطعة $[AB]$. لنضع إذن $AM = x$ و $0 \leq x \leq 11$.

- احسب بدلالة x مساحة سطح كل من المربّعين.
- أثبت أنّ مجموع مساحتي سطحي المربّعين يعطى بالعلاقة : $2x^2 - 22x + 121$.

السؤال ①. يؤول حل هذا السؤال إلى حل معادلة من الدرجة الثانية. اكتبها وحلّها.

السؤال ②. يؤول حل هذا السؤال إلى دراسة اطّراد تابع من الدرجة الثانية، ادرسه واستنتج المطلوب.

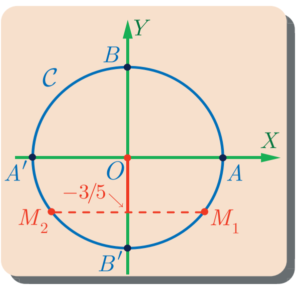
أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 حساب نسب مثلثية

ليكن x عدداً حقيقيّاً من المجال $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$ يحقّق $\sin x = -\dfrac{3}{5}$. احسب $\cos x$.

نحو الحلّ

فهم السؤال



- لتكن C الدائرة المثلّثيّة. إنّ العدد $\sin x = -\dfrac{3}{5}$ هو ترتيب نقطتين من الدائرة C. وضعنا على الرسم النقطتين M_1 و M_2 الموافقتين.

- نعلم أنّ $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$. عند الانتقال على الدائرة $\mathcal{C}$ انطلاقاً من النقطة A متّجهين بالاتّجاه السالب نجد أنّ مجموعة النقط M الموافقة لقيم هذا المجال هي القوس $\overset{\frown}{A'B'}$. فإذا أخذنا بعين الاعتبار الفرضيّتين معاً استنتجنا أنّ النقطة M_2 هي النقطة المناسبة.

البحث عن طريق

- علينا حساب $\cos x$ مع العلم أنّ $\sin x = -\dfrac{3}{5}$ وأنّ $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$. وعلينا إذن وفقاً لنتائج المرحلة السابقة حساب فاصلة النقطة M_2 علماً أنها سالبة، وأنّ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

أنجِز الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

9 حل متراجحة مثلثية

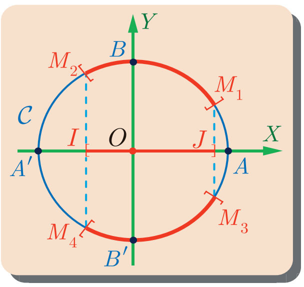
لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المثلثيّة. مثّل على هذه الدائرة مجموعة النقاط $M(\cos x, \sin x)$ المحقّقة للشرط $-\dfrac{1}{2} \leq \cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ما الأعداد الحقيقيّة من المجال $[-\pi, \pi]$ الموافقة لهذه لنقاط M ؟

نحو الحلّ

فهم السؤال

- تعني المتراجحة $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ أنّنا نبحث عن النقاط M من الدائرة $\mathcal{C}$ التي تقع فاصلة كل منها في المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
- ارسم على $[AA']$ القطعة المستقيمة $[IJ]$ الموافق للمجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ على أن تكون I النقطة التي فاصلتها $-\dfrac{1}{2}$ و J النقطة التي فاصلتها $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

البحث عن طريق



- نريد تمثيل النقاط M، من الدائرة $\mathcal{C}$، التي تقع فاصلة كل منها في المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. ضع على الدائرة النقطة M_1 من القوس $\overset{\frown}{AB}$ والنقطة M_3 من القوس $\overset{\frown}{AB'}$ اللتين يكون J مسقطهما القائم على محور الفواصل، ثمّ ضع النقطتين M_2 من القوس $\overset{\frown}{BA'}$ و M_4 من القوس $\overset{\frown}{A'B'}$ اللتين تكون I مسقطهما القائم على محور الفواصل.

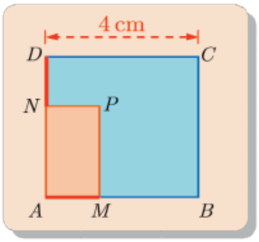
- لماذا تمثّل نقاط القوسين $\overset{\frown}{M_1M_2}$ و $\overset{\frown}{M_4M_3}$ مجموعة النقاط المطلوبة ؟

- علينا الآن تحديد مجموعة الأعداد الحقيقيّة من المجال $[-\pi,\pi]$ الموافقة لنقاط القوسين السابقين. نبدأ بتحديد مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة من المجال $[0,\pi]$ الموافقة لنقاط القوس $\overset{\frown}{M_1M_2}$.
   - ما العدد الحقيقيّ الموافق للنقطة M_1؟ وما العدد الحقيقيّ الموافق للنقطة M_2؟
   - استنتج أنّ مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموافقة لنقاط القوس $\overset{\frown}{M_1M_2}$ هي المجال $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.
- أثبت بأسلوب مماثل انطلاقاً من النقطة A بالاتّجاه السالب أنّ مجموعة الأعداد الحقيقيّة من المجال $[-\pi,0]$ الموافقة لنقاط القوس $\overset{\frown}{M_4M_3}$ هي المجال $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$.

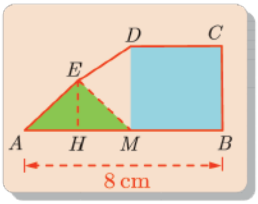
أنجِز الحلّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

10 ليكن $ABCD$ مربعاً طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ولتكن M نقطة من $[AB]$ و N نقطة من $[AD]$ بحيث $AM = DN$. ثُمّ لتكن P نقطة تجعل $AMPN$ مستطيلاً.

يطلب تعيين M تجعل مساحة المستطيل $AMPN$ أكبر ما يمكن.



11 لتكن $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $8\,\text{cm}$، ولتكن M نقطة من $[AB]$. نُنشئ كما في الشكل المربّع $MBCD$ والمثلث القائم المتساوي الساقين AME. نضع $x = AM$، ونرمز بالرمز $f(x)$ إلى مساحة المضلع $ABCDE$.



① احسب بدلالة x مساحة كل من المربع $MBCD$ والمثلث AHE وشبه المنحرف $HMDE$.

② استنتج صيغة $f(x)$.

③ على أيّ مجال I التابع f مُعرّفٌ؟

④ ادرس التابع f على I، وعيّنْ أصغر القيم التي تأخذها مساحة المضلع $ABCDE$.

12 إذا علمت أنّ $\sin x = \frac{4}{5}$ وأنّ $x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ فأوجد $\cos x$.

13 إذا علمت أنّ $\cos x = -\frac{1}{3}$ وأنّ $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ فأوجد $\sin x$.

14 في كل من الحالات الآتية، مثّل على الدائرة المثلّثيّة مجموعة النقاط M الموافقة لمجموعة الأعداد الحقيقيّة x التي تحقّق :

① $0 \le \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{1}{2} \le \cos x \le 1$ ③ $\sin x > \frac{1}{2}$ ④ $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

15 احسب في كلٍّ من الحالات الآتية القيم الدقيقة لجيب وجيب تمام الزاوية :

$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{81\pi}{4}$	$\frac{51\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{97\pi}{3}$	$\frac{82\pi}{3}$	$\frac{71\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$

16 أثبت صحّة العلاقتين الآتيتين وذلك أياً كان العدد الحقيقيّ x :

① $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$.

② $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$.

17 في حالة $\cos x \neq 0$ نعرّف $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

① أثبت أنّه أياً كان العدد x الذي يحقّق $\cos x \neq 0$ كان $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

② إذا علمت أنّ x تنتمي إلى $\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$ وأنّ $\tan x = -2$ فأوجد $\cos x$ و $\sin x$.

18 للإجابة عن الأسئلة الآتية، تمكن الاستفادة من الدائرة المثلّثيّة أو من الخطين البيانيّين لتابعي الجيب وجيب التمام.

① أوجد الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ التي تحقّق $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

② أوجد الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left[-\pi,2\pi\right]$ التي تحقّق $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

③ أوجد الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ التي تحقّق $\cos x \geq 0$.

④ أوجد الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left[-2\pi,3\pi\right]$ التي تحقّق $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

19 عيّن على الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات x و $\dfrac{\pi}{2}+x$ و $\pi+x$ و $\dfrac{\pi}{2}-x$، ثمّ اختزلْ الصيغة : $g(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \sin(\pi+x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

20 عيّن على الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\frac{5\pi}{2}-x$ و $3\pi+x$ و $5\pi-x$ و $x-\dfrac{\pi}{2}$، ثمّ اختزلْ الصيغة : $h(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) + \sin(3\pi+x) + \cos(5\pi-x) + \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

21 عيّن على الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ النقطة M إذا علمتَ أنّ $\cos x = \frac{3}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$. ثُمّ احسبْ كلاً من : $\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ و $\cos(\pi-x)$ و $\sin(\pi-x)$.

5

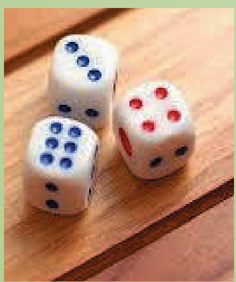
مبادئ في الاحتمالات

1. مقدّمة
2. عناصر الاحتمال
3. قانون الاحتمال

كثيراً ما نسمع أو نقرأ في أيّامنا هذه، عباراتٍ مثل : احتمال هطول المطر في دمشق غداً 80%، أو إنّ احتمال نجاح العمليّة الجراحيّة هو 95%.

انشغل الإنسان منذ القِدَم بتوقّع أحداث تقع في المستقبل، أو بتعبير آخر، بتقدير احتمال وقوع حدث ما في المستقبل وذلك دون أن ترقى هذه الاهتمامات إلى ظهور علم يدرسها.

لقد بدأ الاهتمام بالاحتمال من قبل الرياضيّين في القرن السابع عشر لدراسة بعض ألعاب الحظّ ومعرفة النتائج الأكثر احتمالاً في الظهور في لعبة نرد مثلاً.



ازدادت تطبيقات علم الاحتمال كثيراً في عصرنا الراهن فمن الأرصاد الجويّة إلى علم الوراثة والصيدلة، إلى حسابات الربح والخسارة في المشاريع الاقتصاديّة.

في هذا الفصل نقدّم مبادئ أوّليّة تُعطي فكرة بسيطة عن هذا العلم.

5

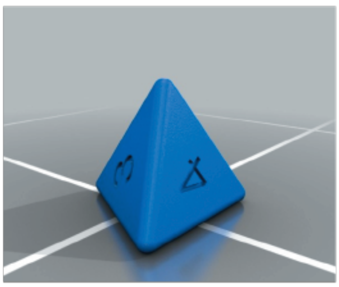
مبادئ في الاحتمالات

1 مقدّمة

عندما نترك كرةً معدنيّة تسقط بتأثير الجاذبيّة الأرضيّة، فإنّنا نستطيع معرفة المكان الذي ستكون فيه هذه الكرة بعد ثانيتين ونصف، مثلاً. كما يمكننا تحديد اتّجاهها وسرعتها في تلك اللحظة. كذلك، يمكننا معرفة نتائج الكثير من التجارب الفيزيائيّة والكيميائيّة معرفة مسبقة، إذا كنّا على علم بجميع عناصر التجربة. نسمّي هذا النوع من التجارب **تجارب أكيدة النتائج.**

ولكن عندما نلقي عفويّاً قطعة نقود على الطاولة، لا يمكننا مسبقاً تحديد الوجه الذي سيظهر عند استقرار قطعة النقود، وكذلك الأمر عندما نلقي نرداً، أو عندما يدور دولاب الحظّ. في جميع هذه التجارب لا نستطيع مسبقاً معرفة النتيجة لذلك نسمّي هذه التجارب **تجارب عشوائيّة.** يهتمّ علم الاحتمالات بدراسة هذه التجارب من حيث حصر النتائج الممكنة وأيّها أكثر حظّاً بالحدوث.

مثال
نردٌ عادي متوازن



لنتأمّل تجربة إلقاء حجر نرد رباعي وجوه متوازن، وجوهه مرقّمة من 1 إلى 4 (، ، ،). ولنفترض أنّه لا يستقرّ إلاّ على أحد وجوهه. نتيجة التجربة هي الوجه السفلي للنرد عند استقراره.

① ما هي النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② هل يمكن معرفة حظوظ كل وجه بالظهور ؟

الحل

① إنّ مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة هي : $\{1,2,3,4\}$ ، نسمي كل نتيجة من هذه النتائج **نتيجة بسيطة** ويسمى الحصول على أيّ منها **حدثاً بسيطاً** لهذه التجربة التي تُسمّى بدورها تجربةً عشوائيّةً (لأنّه لا يمكن معرفة نتيجتها قبل انجاز التجربة).

② لمّا كان النرد متوازناً، أمكننا، بغياب أيّ عوامل مؤثّرة، افتراض أنّ للوجوه المختلفة حظوظاً متساوية في الظهور، وباعتبار أنّ هناك أربع نتائج ممكنة، فيمكننا القول إنّ هناك فرصةً واحدة من أربع لكي نحصل على الوجه "1"، وفرصة واحدةً من أربع للحصول على الوجه "2"، وهكذا …

نستطيع التعبير عن ذلك بالقول إنّ احتمال الحدث $\{1\}$ هو $\frac{1}{4}$، واحتمال الحدث $\{2\}$ هو $\frac{1}{4}$، وهكذا...

مثال نردٌ غير متوازن

لنتأمّل تجربة إلقاء نرد رباعي وجوه، وجوهه مرقّمة من 1 إلى 4، ولكنّه غير متوازن حيث ثقّلنا بعض رؤوسه لنزيد من فرص وقوعه على بعض الوجوه.

① ما النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② هل يمكن توقّع فرص الحصول على أحد الأرقام في هذه التجربة ؟

الحل

① إنّ مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة هي : $\{1, 2, 3, 4\}$.

② لمّا كان النرد غير متوازن توازناً تاماً، فلا يمكننا توقّع فرص الحصول على كلّ نتيجة ممكنة. ولكن لنفترض أنّنا اختبرنا هذا النرد بإلقائه 5000 مرّة، فكانت النتائج كما في الجدول الآتي :

النتيجة	1	2	3	4
عدد مرّات ظهورها	495	505	1010	2990
التكرار النسبي	$\frac{495}{5000} \approx \frac{1}{10}$	$\frac{505}{5000} \approx \frac{1}{10}$	$\frac{1010}{5000} \approx \frac{1}{5}$	$\frac{2990}{5000} \approx \frac{3}{5}$

ونظراً إلى العدد الكبير للتجارب، يمكننا افتراض أنّنا لو أعدنا ثانية إجراء العدد نفسه من التجارب فإنّنا سنحصل على نتائج قريبة من هذه النتائج.

بناءً على ذلك يمكن القول إنّ هناك تقريباً فرصة واحدة من بين كل عشر فرص كي يقع النرد على الوجه $\{1\}$، وفرصة واحدة من بين كل عشر فرص كي يقع النرد على $\{2\}$، وفرصتان من بين كل عشر فرص كي يقع النّرد على الوجه $\{3\}$، وست فرص من بين كل عشر فرص كي يقع النرد على $\{4\}$. يعبّر الجدول الآتي عن هذه النتيجة :

الحدث البسيط	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
احتمالُه	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$

- لو أجرينا تجربةً مماثلةً ولكن باستعمال نرد متوازن تماماً، لحصلنا على نتائج متساوية في فرص حصولها أي حوالي 1250 مرّة لكلّ نتيجة تقريباً.
- في المثال الأوّل، استطعنا، انطلاقاً من تساوي فرص وقوع النتائج المختلفة، تحديد احتمال كل واحدة منها، أمّا في المثال الثاني فوحده الجدول الإحصائي أعطانا فكرة عن احتمال حدوث كلّ نتيجة من نتائج التجربة. وهذا فارق أساسيّ بين التجارب العشوائيّة المختلفة.

لاحظ أنّه في المثالين السابقين كان لدينا الخاصتان التاليتان :

- احتمال أي نتيجة هو عددٌ بين الصفر والواحد.
- مجموع احتمالات النتائج كافّةً يساوي 1 :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=1$$

2 عناصر الاحتمال

التجربة العشوائية، الأحداث البسيطة، فضاء العيّنة.

تعريف

التجربة العشوائيّة هي تجربة تُفضي إلى واحدة من **النتائج** دون أن نستطيع تحديد حدوث أيّ منها مسبقاً. تسمّى النتائج الممكنة في هذه التجربة **أحداثاً بسيطة**. وتسمى مجموعة هذه النتائج **فضاء العينة**.

من المهمّ قبل البدء بأيّ تمرين احتمالات أن نفهم التجربة العشوائيّة، ونتائجها الممكنة.

سنعرض فيما يلي ثلاثة أمثلة مهمّة لتساعدنا في إيضاح أفكار هذا الدرس.

مثال

① في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه مرقّم من 1 إلى 4، نهتمّ برقم الوجه السفلي. فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة : $\{4,3,2,1\}$.

② في تجربة إلقاء حجرَي نرد رباعيَّيْ الوجوه متماثلين مرقَّمين من 1 إلى 4. نهتمّ برقميّ الوجهين السفليّين. فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

$\{(1\,\&\,1),(1\,\&\,2),(1\,\&\,3),(1\,\&\,4),(2\,\&\,2),(2\,\&\,3),(2\,\&\,4),(3\,\&\,3),(3\,\&\,4),(4\,\&\,4)\}$.

③ في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه مرقّم من 1 إلى 4 مرّتين متتاليتين. نهتمّ بمجموع الرقمين الناتجين. فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة : $\{8,7,6,5,4,3,2\}$.

الحدث في تجربة عشوائيّة

مثال

لنَعُد إلى تجربة رمي حجرَي نرد رباعيَّيْ الوجوه، متماثلين حيث نهتم برقميّ الوجهين السفليَّين.
قد نهتمّ بنتائج غير النتائج البسيطة. كأن نسأل : متى نحصل على رقمين فرديَّين ؟

يقع هذا **الحدث** أي نحصل على رقمين فرديين عندما نحصل على إحدى النتائج البسيطة : $(1\,\&\,1)$ أو $(1\,\&\,3)$ أو $(3\,\&\,3)$. في مثل هذه الحالة نقول إنّ المجموعة

$$\{(1\,\&\,1),(1\,\&\,3),(3\,\&\,3)\}$$

هي **حدثٌ** هو "الحصول على رقمين فرديين". ويُمكننا بأسلوب مماثل، تعريف أحداث أخرى مثل : "الحصول على رقمين زوجيّين" أو "الحصول على رقمين متساويين" وهكذا ...

فالمجموعة

$$\{(1\,\&\,1),(2\,\&\,2),(3\,\&\,3),(4\,\&\,4)\}$$

تقابل الحدث : "الحصول على رقمين متساويين". والمجموعة

$$\{(1\,\&\,3),(2\,\&\,2)\}$$

تقابل الحدث : "الحصول على رقمين مجموعهما 4".

تُقابل كلُّ مجموعة جزئيّة من فضاء العيّنة حدثاً يقع عندما يقع أيٌّ من أحداثه البسيطة.

تعريف

نسمّي **حدثاً** في تجربة عشوائيّة كلَّ جزء (أو مجموعة جزئيّة) من فضاء العيّنة.

مثال

في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه مرّتين متتاليتين. نهتمّ بمجموع الرقمين الناتجين. عبّر عن الحدث $\{6,7,8\}$ بجملة. وعيّن كذلك عناصر الحدث "الحصول على رقمين مجموعهما فردي".

الحل

يُمكن التعبير عن الحدث $A=\{6,7,8\}$ بالجملة : "الحصول على مجموع أكبر أو يساوي 6". أمّا المجموعة المقابلة للحدث "الحصول على رقمين مجموعهما فردي" فهي : $B=\{3,5,7\}$.

الخلاصة

لنتأمّل **تجربة عشوائيّة** تعطي إحدى النتائج a_1 أو a_2 أو ... أو a_n، فيكون **فضاء العينة** الموافق لهذه التجربة هو المجموعة $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. ($\Omega$ حرفٌ يوناني يُقرأ أومِغا). نسمّي كل مجموعة جزئية من Ω **حدثاً**. ونسمي كلّ مجموعة جزئية مكونة من عنصر واحد (مثل $\{a_1\}$) **حدثاً بسيطاً**. وكذلك نسمي الحدث المؤلَّف من جميع النتائج الممكنة للتجربة أي $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ **الحدث الأكيد**. وأخيراً نسمّي **الحدثَ المستحيل** الحدث الذي لا يحتوي على أيّ نتيجة ويقابله المجموعة الخالية : $\{\} = \varnothing$.

تَدرَّبْ

① في تجربة إلقاء حجر نرد مكعّب الشكل وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6. نهتمّ برقم الوجه الظاهر في الأعلى.

❶ اكتب فضاء العينة.

❷ عبّر بعبارة نصية عن كلّ من الأحداث الآتية :

- $\{1,2,3\}$
- $\{1,3,5\}$
- $\{2,4,6\}$
- $\{5,6\}$

❸ اكتب بصيغة مجموعة جزئية من فضاء العينة كلاً من الأحداث الآتية :

- "الحصول على عدد أوّلي".
- "الحصول على عدد فردي".
- "الحصول على عدد يقبل القسمة على 2 أو 3".
- "الحصول على مربّع كامل".

② عند إلقاء قطعة نقود متوازنة قد تظهر الكتابة التي نرمز إليها T أو الشعار الذي نرمز إليه H. في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات على التوالي، يمكن التعبير عن النتائج البسيطة لهذه التجربة بكلمات كل منها مكوَّن من ثلاثة حروف من بين H و T. فمثلاً النتيجة HHH تعني أننا حصلنا على الوجه H في الرميات الثلاث.

❶ اكتب فضاء العيّنة.

❷ اكتب بصيغة مجموعة جزئية من فضاء العينة كلاً من الأحداث الآتية :

- "الحصول على الكتابة T مرة واحدة فقط".
- "الحصول على الشعار H مرتين على الأقل".

3 قانون الاحتمال

احتمال حدثٍ بسيط

في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه **متوازن تماماً** مرقّم من 1 إلى 4، نهتمّ برقم الوجه السفلي. فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة : $\{4,3,2,1\}$. من البديهي، في هذه الحالة، القبول بمبدأ تساوي الفرص بمعنى أنّ لكلّ النتائج البسيطة الفرص نفسها في الحدوث وهي فرصة واحدة من أربع. فنقول إنّ احتمال وقوع أي حدث بسيط في هذه الحالة يساوي $\frac{1}{4}$.

أمّا في تجربة إلقاء حجرَي نرد رباعي الوجوه متماثلين و**متوازنين تماماً** مرقّمين من 1 إلى 4. حيث نهتمّ برقميّ الوجهين السفليّين. فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

$$\{(1\,\&\,1),(1\,\&\,2),(1\,\&\,3),(1\,\&\,4),(2\,\&\,2),(2\,\&\,3),(2\,\&\,4),(3\,\&\,3),(3\,\&\,4),(4\,\&\,4)\}$$

ولكن، بعكس المثال الأول، من غير المنطقي القبول بمبدأ تساوي الفرص هنا، لأنّنا نرى بسهولة أنه لدينا فرصتين للحصول على النتيجة $(1\,\&\,2)$ مثلاً، مقابل فرصة واحدة للحصول على النتيجة $(1\,\&\,1)$. فكيف نحسب فرص حدوث كلّ نتيجة من النتائج المختلفة ؟ لنضع نتائج الحجرين في جدول كما يأتي :

النرد الأول / النرد الثاني	1	2	3	4
1	(1 ، 1)	(2 ، 1)	(3 ، 1)	(4 ، 1)
2	(1 ، 2)	(2 ، 2)	(3 ، 2)	(4 ، 2)
3	(1 ، 3)	(2 ، 3)	(3 ، 3)	(4 ، 3)
4	(1 ، 4)	(2 ، 4)	(3 ، 4)	(4 ، 4)

لمّا كان كلّ عمود يقابل نتيجة من نتائج النرد الأوّل، نستطيع الأخذ بمبدأ تساوي فرص الحصول على أي عمود من الأعمدة.

وكذلك، لمّا كان كلّ سطر يقابل نتيجة من نتائج حجر النّرد الثاني، نستطيع الأخذ بمبدأ تساوي فرص الحصول على أي سطر من الأسطر. وهكذا، يمكننا القول إنّ أيّ خانة من خانات الجدول لها الفرصة ذاتها في الحدوث، أي فرصة واحدة من بين 16. ونستطيع بهذه الطريقة حساب احتمالات الأحداث البسيطة المختلفة، فنكتب :

النتيجة $(1\,\&\,1)$ تقابل خانة واحدة، فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{16}$، كذلك الأمر بالنسبة إلى كل من النتائج $(2\,\&\,2)$ و $(3\,\&\,3)$ و $(4\,\&\,4)$. أمّا النتيجة $(1\,\&\,2)$ فتظهر في خانتين من الجدول، واحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{2}{16}$. كذلك الأمر بالنسبة إلى كل من النتائج $(1\,\&\,3)$ و $(1\,\&\,4)$ و $(2\,\&\,3)$ و $(2\,\&\,4)$ و $(3\,\&\,4)$.

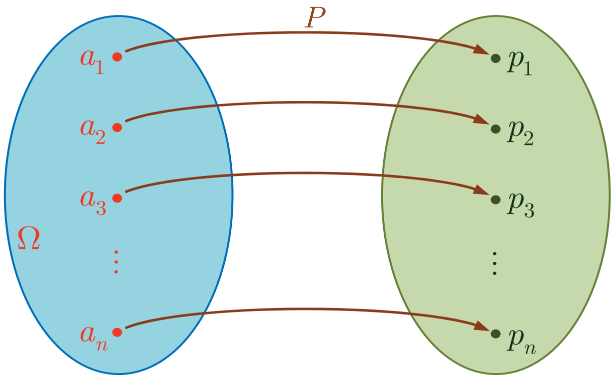
تعريف

لنتأمّل **تجربة عشوائيّة** تعطي إحدى النتائج a_1 أو a_2 أو ... أو a_n، فيكون فضاء العينة الموافق لهذه التجربة هو المجموعة $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. يُمكن أن نقرن بكلّ نتيجة عدداً يمثّل احتمال الحصول على هذه النتيجة. فنعرّف بذلك ما يسمى **قانون احتمال** التجربة العشوائيّة.

نرمز عادةً بالرمز p_1 إلى احتمال النتيجة a_1، و p_2 إلى احتمال a_2، ...، و p_n إلى احتمال a_n. وإذا أردنا أن تكون الرموز أكثر تعبيراً، فإنّنا نكتب

$$P(a_1) = p_1, P(a_2) = p_2, \ldots, P(a_n) = p_n.$$

لاحظنا في الأمثلة التي رأيناها أنّ هذه الأعداد محصورة بين الصفر والواحد، وأنّ مجموعها يساوي الواحد.



خاصّة

في تجربة عشوائيّة تعطي إحدى النتائج a_1 أو a_2 أو ... أو a_n، يكون احتمال كلّ نتيجة (حدث بسيط) محصوراً بين الصفر والواحد. أي تنتمي جميع الأعداد $p_1, p_2, \ldots, p_n$ إلى المجال $[0,1]$. ومن جهة أخرى يكون لدينا :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

فمثلاً إذا عُدنا إلى تجربة إلقاء حجرَي نرد رباعيَّيْ الوجوه متماثلين و**متوازنين تماماً** مرقّمين من 1 إلى 4. وجدنا أنّ

$$P(1\,\&\,1)=P(2\,\&\,2)=P(3\,\&\,3)=P(4\,\&\,4)=\frac{1}{16}$$

و

$$P(1\,\&\,2)=P(1\,\&\,3)=P(1\,\&\,4)=P(2\,\&\,3)=P(2\,\&\,4)=P(3\,\&\,4)=\frac{2}{16}$$

لاحظ أنّ الأعداد السابقة جميعها محصورة بين الصفر والواحد وأنّ مجموعها يساوي الواحد :

$$4\times\frac{1}{16}+6\times\frac{2}{16}=1 .$$

مثال

في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه **متوازن تماماً** مرقّم من 1 إلى 4 مرّتين متتاليتين. نهتمّ بمجموع الرقمين الناتجين. ما هو قانون الاحتمال في هذه التجربة ؟

الحل

لنمثّل نتائج هذه التجربة في جدول كما يأتي :

النرد الأوّل / النرد الثاني	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

وكما ناقشنا سابقاً، لمّا كان كلُّ عمود يقابل نتيجة من نتائج رمي النرد أوّل مرة، نستطيع الأخذ بمبدأ تساوي فرص الحصول على أي عمود من الأعمدة.

وكذلك، لمّا كان كلُّ سطر يقابل نتيجة من نتائج رمي النرد في المرة الثانية، وهذه مستقلة عمّا حصلنا عليه في المرة الأولى، نستطيع الأخذ بمبدأ تساوي فرص الحصول على أي سطر من الأسطر. وهكذا، يمكننا القول إنّ أيّ خانة من خانات الجدول لها الفرصة ذاتها في الحدوث، أي فرصة واحدة من بين 16. ونستطيع بهذه الطريقة حساب احتمالات الأحداث البسيطة المختلفة، فنكتب ما يأتي :

- توافق النتيجة 2 خانة واحدة فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{16}$. وكذلك الأمر بالنسبة إلى النتيجة 8.
- توافق النتيجة 3 خانتين فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$. وكذلك الأمر بالنسبة إلى النتيجة 7.
- توافق النتيجة 4 ثلاث خانات فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{3}{16}$. وكذلك الأمر بالنسبة إلى النتيجة 6.
- توافق النتيجة 5 أربع خانات فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$.

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	2	3	4	5	6	7	8
احتمال وقوعها	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

التجارب العشوائيّة متساوية الاحتمال

إنّ الحالة التي تكون فيها احتمالات النتائج الممكنة لتجربة متساوية شائعة جدّاً، وفي هذه الحالة يصبح قانون الاحتمال بسيطاً للغاية، لذلك يجدر بنا تمييز هذه الحالات عند وجودها، ومنه التعريف الآتي :

تعريف

في تجربة عشوائيّة، إذا كان للنتائج الممكنة المختلفة كلّها الاحتمال ذاته، قلنا إنّ التجربة متساوية الاحتمال. وإذا كان n هو عدد نتائج التجربة كان احتمال كلّ نتيجة مساوياً $p = \frac{1}{n}$.
ذلك لأنّ مجموع هذه الاحتمالات يجب أن يساوي الواحد.

مثال

① في إحدى السنوات الميلاديّة غير الكبيسة، سحبنا عشوائياً ورقة من التقويم، ما احتمال أن تكون تلك الورقة ورقة يوم 25 تشرين الأوّل ؟

② يوفّر أحد المطاعم ثلاثة خيارات للصحن الرئيسي من الوجبة وخيارين للحلوى. أخذ أحد الزبائن المتردّدين عشوائياً صحناً رئيسيّاً ونوعاً من الحلوى. وضّح قانون احتمال هذه التجربة العشوائيّة.

الحل

① لمّا كان لجميع أوراق التقويم الاحتمال نفسه في الظهور، فإنّ التجربة هنا متساوية الاحتمال، واحتمال كلّ نتيجة (بما فيها ورقة يوم 25 تشرين الأوّل) يساوي $\frac{1}{365}$.

② لنمثّل نتائج التجربة في جدول كما يأتي :

الطبق الرئيسي / الحلوى	①	②	③
❶	(❶ , ①)	(❶ , ②)	(❶ , ③)
❷	(❷ , ①)	(❷ , ②)	(❷ , ③)

إنّ الحصول على أيّ عمود له الاحتمال ذاته. كذلك بالنسبة لكلّ سطر. يمكننا، إذن، القول إنّ الاحتمال المقابل لكلّ خانة (كلّ خانة تمثّل نتيجة من نتائج التجربة) هو $\frac{1}{6}$.

قانون احتمال تجربة عشوائيّة غير متساوية الاحتمال

مثال

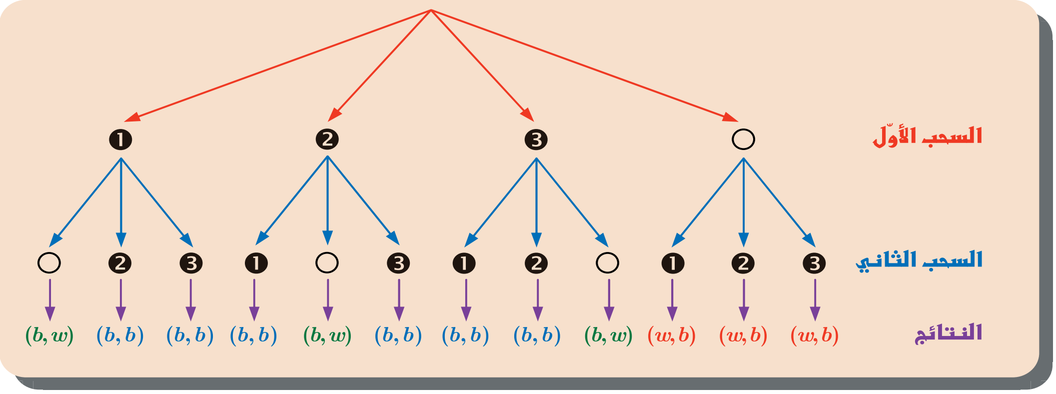
في صندوق ثلاث كرات سوداء اللون وواحدة بيضاء وكلّها متماثلة الملمس. نسحب عشوائياً كرتين على التوالي دون إعادة، ونسجّل زوج الألوان مع أخذ الترتيب في الحسبان. عيّن فضاء العيّنة وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

الحل

إذا رمزنا إلى الكرة السوداء بالرمز b، وإلى الكرة البيضاء بالرمز w، استطعنا تحديد النتائج الممكنة لهذه التجربة بسهولة فهي $(b\&b)$ و$(b\&w)$ و$(w\&b)$. وبالتالي يكون فضاء العيّنة لهذه التجربة

$$\Omega = \{(b\&b),(b\&w),(w\&b)\}$$

من الواضح أنّ هذه التجربة غير متساوية الاحتمال لأنّ احتمال $(b\&b)$ أكبر من احتمال $(b\&w)$. ولكن للاستفادة من الحالات متساوية الاحتمال، سنرقّم الكرات السوداء من 1 إلى 3. وسنعمد إلى تمثيل التجربة المفترضة بمخطّط شجري كما يأتي :



يمكّننا هذا المخطّط من حساب احتمال كلّ حدث بسيط، حيث نقبل بمبدأ تساوي الفرص بالنسبة لكلّ فرع من فروع الشجرة، ونلخّص النتائج على النحو الآتي :

تظهر النتيجة (b,b) ستّ مرّات، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(b,b)\}$ يساوي $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$.

وتظهر النتيجة (b,w) ثلاث مرّات، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(b,w)\}$ يساوي $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$.

وتظهر النتيجة (w,b) ثلاث مرّات، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(w,b)\}$ يساوي $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$.

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	(b,b)	(b,w)	(w,b)
احتمال وقوعها	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

احتمال وقوع حدث في الحالة العامّة

وجدنا في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه متوازن تماماً مرقّم من 1 إلى 4، أنّ مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة هي $\Omega=\{4,3,2,1\}$. ورأينا أنّ احتمال وقوع أيّ من الأحداث البسيطة يساوي $\frac{1}{4}$. أي

$$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=\frac{1}{4}.$$

لنتأمّل الآن الحدث التالي **"الحصول على عدد زوجي"** الموافق للمجموعة الجزئية $\{2,4\}$ من Ω ما احتمال وقوع هذا الحدث ؟

لهذا الحدث فرصتان من أصل أربع للوقوع، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{2}{4}$ وهذا يساوي تحديداً مجموع احتمالَي وقوع الحدثين البسيطين $\{2\}$ و $\{4\}$ أي : $P(\{2,4\})=P(2)+P(4)$.

وكذلك رأينا في تجربة إلقاء حجرَي نرد رباعي الوجوه متوازنين تماماً ومتماثلين مرقّمين من 1 إلى 4. أنّ مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{(1 \& 1),(1 \& 2)(1 \& 3),(1 \& 4),(2 \& 2),(2 \& 3),(2 \& 4),(3 \& 3),(3 \& 4),(4 \& 4)\}$$

لنتأمّل الحدث **"الحصول على رقمين متساويين"** الموافق للمجموعة الجزئية

$$\{(1 \& 1),(2 \& 2),(3 \& 3),(4 \& 4)\}$$

من Ω. نلاحظ أنّ لهذا الحدث أربع فرص للوقوع من أصل 16، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{4}{16}$ وهذا يساوي تحديداً مجموع احتمالات وقوع الأحداث البسيطة $\{(1 \& 1)\}$ و $\{(2 \& 2)\}$ و $\{(3 \& 3)\}$ و $\{(4 \& 4)\}$ أي :

$$P(\{(1 \& 1),(2 \& 2),(3 \& 3),(4 \& 4)\}) = P(1 \& 1) + P(2 \& 2) + P(3 \& 3) + P(4 \& 4)$$

أمّا إذا نظرنا إلى الحدث **"مجموع الرقمين يساوي 4"**، الموافق للمجموعة الجزئية $\{(1 \& 3),(2 \& 2)\}$، فاحتمال وقوعه يساوي

$$P(\{(1 \& 3),(2 \& 2)\}) = P(1 \& 3) + P(2 \& 2) = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

خاصّة أساسيّة

في تجربة عشوائيّة، احتمال وقوع حدث (غير الحدث المستحيل) يساوي مجموع احتمالات وقوع كلّ الأحداث البسيطة التي يتألّف منها. أمّا الحدث المستحيل $\varnothing$ فاحتمال وقوعه يساوي 0.

مثال

لنتأمّل في تجربة إلقاء حجرَي نرد رباعي الوجوه متوازنين تماماً ومتماثلين مرقّمين من 1 إلى 4. الحدث **"الحصول على رقمين متساويين أو مجموعهما 4"**، الموافق للمجموعة الجزئية

$$A = \{(1 \& 1),(2 \& 2),(3 \& 3),(4 \& 4),(1 \& 3)\}$$

إنّ احتمال وقوع هذا الحدث يساوي

$$P(A) = P(1 \& 1) + P(2 \& 2) + P(3 \& 3) + P(4 \& 4) + P(1 \& 3)$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16}$$

ونلاحظ أنّ الحدث A هو اجتماع الحدثين : **"الحصول على رقمين متساويين"** و **"مجموع الرقمين يساوي 4"**، ولكن احتمال وقوعه $\frac{6}{16}$ لا يساوي مجموع احتمالي وقوع هذين الحدثين : $\frac{3}{16} + \frac{4}{16}$.

مثال

في تجربة إلقاء حجر نرد رباعي الوجوه متوازن تماماً مرقّم من 1 إلى 4 مرّتين متتاليتين، حيث نهتمّ بمجموع الرقمين الناتجين. رأينا أنّ فضاء العينة هو $\Omega = \{8,7,6,5,4,3,2\}$. وأنّ قانون الاحتمال يعطى بالجدول الآتي :

النتيجة	2	3	4	5	6	7	8
احتمال وقوعها	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

احتمال وقوع الحدث $S = \{3,5,7\}$ يساوي

$$P(S) = P(3) + P(5) + P(7) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

أمّا احتمال وقوع الحدث $T = \{6,7,8\}$ فيساوي

$$P(T) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}.$$

نتيجة مُهمّة

في تجربة عشوائيّة متساوية الاحتمال، احتمال وقوع حدثٍ A هو خارج قسمة عدد عناصر الحدث على عدد عناصر فضاء العيّنة Ω أي :

$$P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر }}{\Omega \text{ عدد عناصر }}$$

لأنه إذا كان n عدد عناصر Ω كان احتمال أي حدث بسيط $p = \frac{1}{n}$، وإذا كان k عدد الأحداث البسيطة التي تؤلّف A استنتجنا أنّ

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{k \text{ مرّة}} = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

مثال

نسحب ورقة من تقويم ميلادي لسنة غير كبيسة. ما احتمال أن تكون الورقة ليومٍ من شهر شباط ؟

الحل

إنّ التجربة متساوية الاحتمال، وبالتالي يكون احتمال الحدث **"الورقة المسحوبة من أوراق شباط"** يساوي عدد أيّام شهر شباط مقسوماً على عدد أيّام السنة أي $\frac{28}{365}$.

تمرينات ومسائل

1 في حالة قطعة نقود، نرمز إلى الكتابة بالرمز H وإلى الشعار بالرمز T. نتأمّل تجربة إلقاء قطعة نقود متوازنة مرّتين متتاليتين. أيّ المقادير التالية يساوي احتمال ظهور الكتابة مرّتين:

① $\frac{1}{2}$. ② $\frac{1}{3}$. ③ $\frac{1}{4}$. ④ $P(\{TT\})$.

2 يحوي صندوق ثلاث كرات متماثلة الملمس، اثنتان سوداوان وواحدة بيضاء، نسحب كرتين على التتالي مع إعادة الأولى قبل سحب الثانية. أيُّ الأعداد التالية يساوي احتمال سحب كرتين سوداوين ؟

① $\frac{2}{9}$. ② $\frac{4}{9}$. ③ $\frac{4}{6}$. ④ 1.

3 في صندوق ثلاث كرات متماثلة الملمس، اثنتان سوداوان وواحدة بيضاء، نسحب كرتين على التتالي دون إعادة الكرة الأولى. أيّ الأعداد التالية يساوي احتمال سحب كرتين سوداوين ؟

① $\frac{1}{9}$. ② $\frac{3}{9}$. ③ $\frac{1}{6}$. ④ 1.

لنتعلّم البحث معاً

4 الصندوق والكرات (1)

في صندوق كرةٌ بيضاء تحمل الرقم 1، وكرتان زرقاوان تحمل إحداهما الرقم 2 وتحمل الثانية الرقم 3، وكرتان سوداوان تحمل إحداهما الرقم 4 وتحمل الثانية الرقم 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق، وننظر إلى رقمها.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال الحصول على رقم فرديّ ؟

نحو الحلّ

① فهم السؤال. المطلوب هو تحديد النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائيّة وتحديد احتمال حدوث كلّ واحدة منها.

بحثاً عن طريق.

- إنّ نتيجة التجربة هي أحد الأرقام المسجلة على الكرات.
- لاحظ أنّ الألوان ليست ذات أهميّة في التجربة.
- هل التجربة متساوية الاحتمال ؟

صُغ الحلّ بلغةٍ سليمة.

② فهم السؤال. إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث **"الحصول على رقم فرديّ"**، لذلك علينا تعيين مجموعة النتائج الموافقة لهذا الحدث.

بحثاً عن طريق.

- ما هي الأعداد الفرديّة بين 1 و 5 ؟
- استفد من كون التجربة متساوية الاحتمال، واحسب احتمال الحدث المطلوب.

صُغ الحلّ بلغةٍ سليمة.

5 الصندوق والكرات (2)

في صندوق كرةٌ بيضاء تحمل الرقم 1، وكرتان زرقاوان تحمل إحداهما الرقم 2 وتحمل الثانية الرقم 3، وكرتان سوداوان تحمل إحداهما الرقم 4 وتحمل الثانية الرقم 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق، وننظر إلى لونها.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال الحصول على لون غير الأزرق ؟

نحو الحلّ

① فهم السؤال. إنّ المطلوب هو تحديد النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائيّة وتحديد احتمال حدوث كلّ واحدة منها.

بحثاً عن طريق.

- إنّ نتيجة التجربة هي أحد الألوان "أبيض"، "أزرق" و"أسود".
- لاحظ أنّ الأرقام ليست ذات أهميّة في التجربة.
- هل التجربة متساوية الاحتمال ؟

صُغ الحلّ بلغةٍ سليمة.

② فهم السؤال. إنّ المطلوب هو حساب احتمال الحدث "**الحصول على لون غير الأزرق**"، لذلك علينا تعيين مجموعة النتائج الموافقة لهذا الحدث.

بحثاً عن طريق. ماهي الألوان الموافقة للحدث المطلوب؟ وما عدد الكرات من هذه الألوان ؟

أكمل الحلَّ وصُغهُ بلغةٍ سليمة.

6 الصندوق والكرات (3)

في صندوق كرةٌ بيضاء تحمل الرقم 1، وكرتان زرقاوان تحمل إحداهما الرقم 2 وتحمل الثانية الرقم 3، وكرتان سوداوان تحمل إحداهما الرقم 4 وتحمل الثانية الرقم 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق، ثُمّ نعيدها إلى الصندوق، ونسحب عشوائيّاً كرةً ثانيةً. نسجّل رقميّ الكرتين المسحوبتين بالترتيب.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال الحدث D : "الحصول على الرقم نفسه مرّتين" ؟

③ ما احتمال الحدث T : "سحب الرقم 3 في المرحلة الثانية" ؟

④ ما احتمال الحدث S : "الرقم الأوّل أكبر تماماً من الرقم الثاني" ؟

نحو الحلّ

① فهم السؤال. إنّ المطلوب هو تحديد النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائيّة وتحديد احتمال حدوث كلّ واحدة منها.

بحثاً عن طريق.

- مثّل نتائج التجربة بمخطّط شجري. وعبّر عن النتائج بثنائيّات مثل $(2,4)$ بحيث تكون الخانة الأولى للرقم الأوّل والثانية للرقم الثاني.
- لاحظ أنّ الألوان ليست ذات أهميّة في التجربة.
- هل التجربة متساوية الاحتمال ؟

② فهم السؤال. المطلوب هو حساب احتمال الحدث : "الحصول على الرقم نفسه مرّتين".

بحثاً عن طريق. ما هي النتائج البسيطة الموافقة لهذا الحدث ؟ وما عددها ؟

③ النتائج الموافقة للحدث المطلوب هي نتائج من الشكل : $(...,3)$. ما عدد هذه النتائج ؟ أكمل حساب احتمال الحدث المطلوب.

④ بأسلوب مماثل لما سبق احسب احتمال الحدث المطلوب.

صُغ الحلَّ بلغةٍ سليمة.

7 الصندوق والكرات (4)

في صندوق كرةٌ بيضاء تحمل الرقم 1، وكرتان زرقاوان تحمل إحداهما الرقم 2 وتحمل الثانية الرقم 3، وكرتان سوداوان تحمل إحداهما الرقم 4 وتحمل الثانية الرقم 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق، **ولا نعيدها إلى الصندوق**، ثمّ نسحب عشوائيّاً كرةً ثانيةً. نسجّل رقميّ الكرتين المسحوبتين حسب الترتيب.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.
② ما احتمال الحدث D : "الحصول على الرقم نفسه مرّتين" ؟
③ ما احتمال الحدث T : "سحب الرقم 3 في المرحلة الثانية" ؟
④ ما احتمال الحدث S : "الرقم الأوّل أكبر تماماً من الرقم الثاني" ؟

8

نسحب عشوائيّاً ورقة لعب (من لعبة ورق فيها 52 ورقة).

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.
② ما احتمال سحب ورقة عليها رقم فرديّ ؟
③ ما احتمال سحب صورة ؟

9

نسحب عشوائيّاً، ورقة لعب (من لعبة ورق فيها 52 ورقة)، ثمّ نسحب ورقةً أخرى دون إعادة الأولى.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.
② ما احتمال سحب العشرتين الحمراوين ؟
③ ما احتمال سحب عشرتين ؟

10

نلقي حجر نرد مكعب الشكل وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6 **غير متوازن** وهو مصنوع بحيث يكون احتمال ظهور أيّ وجه متناسباً مع رقمه.

① ما هو فضاء العيّنة ؟ هل التجربة متساوية الاحتمال ؟
② عيّن قانون الاحتمال لهذه التجربة.

11 في صندوق ثلاث كرات بيضاء مرقّمة من 1 إلى 3، وأربع كرات حمراء مرقّمة من 1 إلى 4، وخمس كرات سوداء مرقّمة من 1 إلى 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق.

① ما احتمال سحب كرةٍ حمراء ؟

② ما احتمال سحب كرة رقمها أكبر تماماً من 2 ؟

12 لدى عائلة ثلاثة أطفال. نفترض أنّ هناك فرصاً متساوية لأن يكون الطفل صبيّاً أو بنتاً.

① ما احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة صبياناً ؟

② ما احتمال أن يكون لدى العائلة صبيّان وبنت ؟

③ ما احتمال أن يكون لدى العائلة بنت واحدة على الأقلّ ؟

④ ما احتمال أن يكون الطفل الثالث بنتاً ؟

13 نلقي حجر نرد مكعب الشكل متوازن وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6 ثلاث مرات متتالية، ونسجّل الأرقام الظاهرة.

① ما احتمال الحصول على الرقم 6 في المرّات الثلاث ؟

② ما احتمال الحصول على 4 و 2 و 1 ؟

14 في صندوق 15 كرةٍ متماثلة الملمس ومرقّمة من 1 إلى 15. نسحب عشوائياً كرةً ثمّ نسحب كرة ثانية دون إعادة الأولى، ثمّ نسحب ثالثة دون إعادة الكرتين السابقتين. نسجّل الأعداد التي حصلنا عليها حسب ترتيب السحب.

① ما احتمال الحصول على الثلاثيّة المرتّبة $(1,2,3)$ ؟

② ما احتمال الحصول على 1 و 2 و 3 بأيّ ترتيب كان ؟

15 في إحدى مسابقات التوظيف، يتضمّن اختبار ثلاثة أسئلة كلّ منها مزوّد بأربعة إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة فقط. يُقرّر أحد المتقدّمين الإجابة عشوائيّاً عن الأسئلة الثلاثة.

① ما احتمال الحصول على ثلاث إجابات صحيحة ؟

② ما احتمال الحصول على إجابتين صحيحتين فقط ؟

16 في إحدى مسابقات التوظيف، يتضمّن اختبار عشرة أسئلة كلّ منها مزوّد بأربعة إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة فقط. يُقرّر أحد المتقدّمين الإجابة عشوائيّاً عن هذه الأسئلة.

① ما احتمال الحصول على عشرة إجابات صحيحة ؟

② ما احتمال الحصول بالضبط على تسعة إجابات صحيحة ؟

17 نزل في أحد الفنادق عائلةٌ قوامها أبٌ وأمٌ وثلاثة أطفال؛ صبيّان والصغيرة ليلى. وضع صاحب الفندق بطاقات تعريفهم في سلة واحدة. وعندما رغب الأبوان مغادرة الفندق لجلب بعض اللوازم، أرسل الأب ابنته إلى صاحب الفندق كي تأتي ببطاقتيهما. وعندما طلبت ليلى من صاحب الفندق بطاقتين، مدَّ الأخير يده إلى السلة التي تحوي البطاقات الخمس وأعطاها عشوائياً اثنتين منها.

① ما هو عدد النتائج المختلفة التي نحصل عليها عند سحب بطاقتين في آنٍ معاً من السلة ؟

② احسب احتمال كلٍّ من الأحداث الآتية:

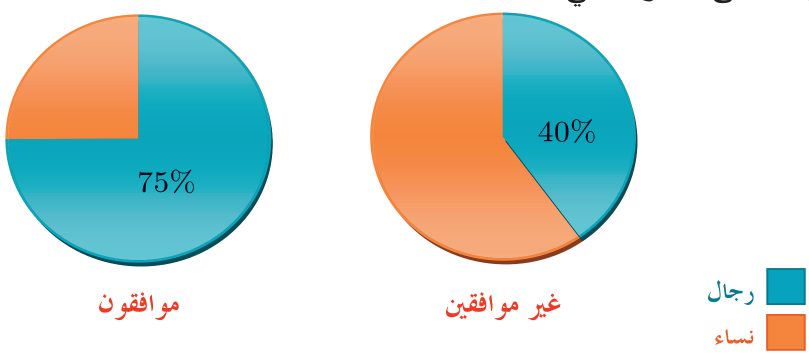
❶ الحدث A : " تعود البطاقتان إلى الزوجين ".

❷ الحدث B : " تعود البطاقتان إلى الصبيين ".

❸ الحدث C : " تعود البطاقتان إلى شخصين من جنس واحد ".

❹ الحدث D : " تعود البطاقتان إلى شخصين من جنسين مختلفين ".

18 أُجريَ بواسطة الهاتف استطلاع للرأي شمل 900 شخصاً، حول أحد القوانين الصادرة حديثاً، فكانت النتيجة على النحو التالي :



① أكمل الجدول الآتي :

الرأي / النوع	موافقون	غير موافقين	رفضوا الإجابة	المجموع
رجال			0	
نساء	90	174		
المجموع				900

أراد صحفيٌّ كتابة تقرير عن الموضوع فأخذ رقم هاتف أحد الأشخاص المستطلَعين واتّصل به.

② ما احتمال أن يكون هذا الشخص موافقاً على القانون ؟

③ ما احتمال أن يكون قد رفض الإجابة ؟

④ ما احتمال أن يكون رجلاً موافقاً على القانون ؟

19 أجرت شركةٌ للاتّصالات تحقيقاً إحصائيّاً في محافظة عدد سكّانها 40 000 نسمة، للوقوف على مدى رضا السكّان عن خدماتها. قُسّمت المحافظة إلى ثلاث مناطق : مركز المحافظة والضواحي والريف.

أظهر التحقيق المعلومات الآتية :

- يقطن 10% من السكّان في مركز المحافظة.
- من أصل نسبة 60% القاطنين في الضواحي هناك 6.25% غير راضين عن الخدمات.
- في الريف، يبلغ عدد السكّان الراضين عن الخدمات خمسة أضعاف عدد غير الراضين عنها.
- تبلغ النِّسبة المئويّة لغير الراضين في مجمل المحافظة 10%.

① أكمل الجدول الآتي :

	المركز	الضواحي	الريف
راض			
غير راض			

سألنا أحد سكّان المحافظة.

② ما احتمال أن يكون هذا الشخص من سكّان الريف ؟

③ ما احتمال أن يكون راضياً عن خدمات الشركة ؟