المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث المتوسط

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

الطبعة المعدلة
١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

يوزع مجانًا ولا يباع

Original Title:

Algebra 1 © 2010

By:
Dr. John A. Carter, Ph.D.
Dr. Gilbert J. Cuevas, Ph.D.
Dr. Roger Day, Ph.D., NBCT
Dr. Carol Malloy, Ph.D.
Dr. Berchie Holliday, Ed.D.
Beatrice Luchin
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Grant A. Fraser
Prof. Arthur K. Wayman

Gifted and Talented
Shelbi K. Cole

College Readiness
Robert Lee Kimball, Jr.

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
ReLeah Cossett Lent
Lynn T. Havens

الرياضيات

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
خلود عبدالحفيظ لوباني
أحمد محمود أبوصهيون
صلاح بن عبد الله الزيد
محمد عبدالوهاب العالم

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

إعداد الصور
د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

أخي المعلم/ أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولًا: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تم توزيع المقرر على فصول، حيث يبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه، تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آلية لتعلُّم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة. ثم يقدم دعمًا للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطةً مقترحةً تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس، وبعد ذلك يعرض الدليل الدرس في خطوات محددة هي:

التركيز: يبيِّن ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، بحيث تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس، كما يقدّم أمثلةً إضافيةً للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة بحسب مستويات الطلاب تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم؛ للتأكد من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم، وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آليةً لمتابعة المطويات.
كما يقدّم الدليل في كل درس إجاباتٍ مفصّلةً لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.
ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلِّمين والمعلمات، لنأمل أن يحوذ اهتمامهم، ويلبِّي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم على أداء رسالتهم.

الفهرس

الفصل ٦ كثيرات الحدود

مخطط الفصل ٦ ..... ٨ أ
التقويم والمعالجة ..... ٨ جـ
تنويع التعليم ..... ٨ د
المحتوى الرياضي ..... ٨ هـ
التهيئة للفصل ٦ ..... ٩
٦-١ ضرب وحيدات الحد ١٠
٦-٢ قسمة وحيدات الحد ١٦
٦-٣ كثيرات الحدود ٢٢
معمل الجبر: جمع كثيرات الحدود وطرحها * ٢٦
٦-٤ جمع كثيرات الحدود وطرحها ٢٨
٦-٥ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود * ٣٢
معمل الجبر: ضرب كثيرات الحدود * ٣٧
٦-٦ ضرب كثيرات الحدود ٣٩
٦-٧ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود ٤٤
اختبار الفصل ٤٩

الفصل ٧ التحليل والمعادلات التربيعية

مخطط الفصل ٧ ..... ٥٠ أ
التقويم والمعالجة ..... ٥٠ جـ
تنويع التعليم ..... ٥٠ د
المحتوى الرياضي ..... ٥٠ هـ
التهيئة للفصل ٧ ..... ٥١
٧-١ تحليل وحيدات الحد * ٥٢
٧-٢ استعمال خاصية التوزيع ٥٦
معمل الجبر: تحليل ثلاثية الحدود * ٦٢
٧-٣ المعادلات التربيعية: $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ٦٤
٧-٤ المعادلات التربيعية: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ٧٠
٧-٥ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين ٧٥
٧-٦ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة ٨٠
اختبار الفصل ٨٧

الفصل ٨ الدوال التربيعية

مخطط الفصل ٨ ..... ٨٨ أ
التقويم والمعالجة ..... ٨٨ جـ
تنويع التعليم ..... ٨٨ د
المحتوى الرياضي ..... ٨٨ هـ
التهيئة للفصل ٨ ..... ٨٩

الفهرس

٨-١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا ٩٠
معمل الجبر: معدل التغير في الدالة التربيعية * ٩٨
٨-٢ حل المعادلات التربيعية بيانيًا * ٩٩
٨-٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع ١٠٤
٨-٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام * ١٠٩
اختبار الفصل ١١٥
اختبار تراكمي (١) ١١٦

الفصل ٩ الدوال الجذرية والمثلثات

مخطط الفصل ٩ ..... ١١٨ أ
التقويم والمعالجة ..... ١١٨ جـ
تنويع التعليم ..... ١١٨ د
المحتوى الرياضي ..... ١١٨ هـ
التهيئة للفصل ٩ ..... ١١٩
٩-١ تبسيط العبارات الجذرية ١٢٠
معمل الحاسبة البيانية: الأسس النسبية * ١٢٥
٩-٢ العمليات على العبارات الجذرية ١٢٦
٩-٣ المعادلات الجذرية * ١٣١
٩-٤ نظرية فيثاغورس ١٣٥
٩-٥ المسافة بين نقطتين ١٤٠
٩-٦ المثلثات المتشابهة ١٤٥
معمل الجبر: استقصاء النسب المثلثية * ١٥٠
٩-٧ النسب المثلثية ١٥١
اختبار الفصل ١٥٧

الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

مخطط الفصل ١٠ ..... ١٥٨ أ
التقويم والمعالجة ..... ١٥٨ جـ
تنويع التعليم ..... ١٥٨ د
المحتوى الرياضي ..... ١٥٨ هـ
التهيئة للفصل ١٠ ..... ١٥٩
١٠-١ تصميم دراسة مسحية ١٦٠
١٠-٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية ١٦٥
١٠-٣ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع ١٧١
١٠-٤ التباديل والتوافيق * ١٧٧
١٠-٥ احتمالات الحوادث المركبة * ١٨٣
اختبار الفصل ١٨٩
اختبار تراكمي (٢) ١٩٠
ملحق الإجابات ١٩٢

* موضوعات غير مقررة على مدارس تحفيظ القرآن الكريم.
في كل فصل لا تخصص حصة لكلٍّ من التهيئة واختبار الفصل.

مخطط الفصل

الفصل ٦

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (٩)

	الدرس ٦-١ حصة واحدة	الدرس ٦-٢ حصتان	الدرس ٦-٣ حصة واحدة	استكشاف ٦-٤ حصة واحدة
العنوان	ضرب وحيدات الحد	قسمة وحيدات الحد	كثيرات الحدود	معمل الجبر: جمع كثيرات الحدود وطرحها
الأهداف	• ضرب وحيدات الحد . • تبسيط عبارات تتضمّن وحيدات حدٍّ .	• إيجاد ناتج قسمة وحيدتَي حدٍّ . • تبسيط عبارات تحوي أسسًا سالبةً أو صفرًا .	• إيجاد درجة كثيرة حدود . • كتابة كثيرة حدود في الصورة القياسية .	• استعمال بطاقات الجبر لجمع كثيرات الحدود وطرحها.
المفردات	وحيدة الحد الثابت	رتبة المقدار	كثيرة حدود ثنائية الحد ثلاثية الحدود درجة وحيدة الحد درجة كثيرة الحدود الصورة القياسية لكثيرة الحدود المعامل الرئيس	
التمثيلات المتعددة	ص (١٥)	ص (٢١)		
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٨) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٩) فوق **كتاب التمارين** • ص (٤) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٢) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٣) فوق **كتاب التمارين** • ص (٥) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٦) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٧) فوق **كتاب التمارين** • ص (٦) دون ضمن فوق	
التقنيات لكل درس	تسجيل شريط فيديو ص (١١)	المدونة ص (١٧)	السبورة التفاعلية ص (٢٣)	
تنويع التعليم	ص (١٢، ١٥)	ص (١٨، ٢١)	ص (٢٤، ٢٥)	

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

كثيرات الحدود

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(١٢) حصة	(٣) حصص	(١٥) حصة

الدرس ٦-٤ حصتان	الدرس ٦-٥ حصة واحدة	استكشاف ٦-٦ حصة واحدة	الدرس ٦-٦ حصتان	الدرس ٦-٧ حصة واحدة
جمع كثيرات الحدود وطرحها	ضرب وحيدة حدٍّ في كثيرة حدود	معمل الجبر: ضرب كثيرات الحدود	ضرب كثيرات الحدود	حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود
• جمع كثيرات حدود . • طرح كثيرات حدود .	• ضرب وحيدة حدٍّ في كثيرة حدود . • حل معادلات تتضمّن حاصل ضرب وحيدات حدٍّ في كثيرات حدود .	• استعمال بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب ثنائيتي حد .	• ضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع. • ضرب ثنائيتي حدٍّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.	• إيجاد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما. • إيجاد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما.
			طريقة التوزيع بالترتيب العبارة التربيعية	
	ص (٣٦)		ص (٤٣)	ص (٤٨)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢١) فوق **كتاب التمارين** • ص (٧) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٢) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٤) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢٥) فوق **كتاب التمارين** • ص (٨) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٦) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٨) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢٩) فوق **كتاب التمارين** • ص (٩) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٣٠) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٣٢) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٣٣) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٠) دون ضمن فوق
السبورة التفاعلية ص (٣٠)	آلة تصوير وثائقية ص(٣٣)		السبورة التفاعلية ص (٤١)	مدونة ص (٤٥)
ص (٣٠، ٣١)	ص (٣٤، ٣٦)		ص (٤٠، ٤٣)	ص (٤٦ ، ٤٨)

التقويم الختامي
• اختبار الفصل ص (٤٩)

الفصل ٦ التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل ٦**	
	التهيئة للفصل ٦ ، ص (٩)	مخطط المعالجة، ص (٨جـ).
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تدريبات المهارات، الفصل ٦
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٦
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة ٤، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (١١، ١٢)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (١٣)	تدريبات المهارات، الفصل ٦
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٦
		www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	اختبار الفصل، ص (٤٩)	تدريبات المهارات، الفصل ٦
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٦
		www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل ٦**	
	اختبار الفصل، النماذج ١، ٢أ، ٢ب، ص (١٥-٢٠)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٦
	اختبار الفصل، النموذج ٣ ، ص (٢١، ٢٢)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (١٤)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (٢٣)	
	اختبار تراكمي ، ص (٢٤-٢٦)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل ١ جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون السمعيون: قد تكون العبارات اللفظية أداة تذكُّر قويةً؛ لذا اقترح على الطلاب استعمال عبارات لفظية سهلة الحفظ، يتم فيها شرح طريقة حساب ناتج ضرب ثنائيتي حد، أو بعض الحالات الخاصة من ضرب كثيرات الحدود، مثل:

(الأول ± الثاني)^{٢} = مربع الأول ± ٢ الأول × الثاني + مربع الثاني

ثم اطلب إليهم عرض عباراتهم أو قراءتها أمام زملائهم.

المتعلمون البصريون: لمساعدة الطلاب على تذكّر الأنماط في العمليات في طرق الضرب الخاصة، اطلب إليهم تظليل العمليات باستعمال لونين مختلفين، ويمكن للطلاب تضمينها في بطاقاتهم الدراسية واللوحات؛ لعرضها في غرفة الصف.

$$(أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب) = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$$
$$(أ - ب)^{٢} = (أ - ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$$
$$(أ + ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$$

البديل ٢ دون المتوسط دون

اعمل مجموعة من بطاقات "المسألة" تُظهر حاصل ضرب وحيدة حدٍّ في كثيرة حدود. مثل −٣س (٥س^{٢}−٢س+ ٣). ومجموعة من بطاقات "التبسيط" تُبيّن تبسيط هذه المسائل. واحرص على إعداد مجموعة بطاقات كافية، بحيث يحصل نصف الطلاب على بطاقة "المسألة". والنصف الآخر على بطاقة "التبسيط". واطلب إلى كل طالب يحمل بطاقة من مجموعة "بطاقات المسألة" إيجاد زميله الذي يحمل بطاقة "التبسيط" المناظرة لمسألته.

البديل ٣ فوق المتوسط فوق

تحدَّ الطلاب، وذلك بأن تطلب إلى مجموعات ثنائية منهم الحضور إلى السبورة. وأن يضرب أحدهما عددين بمنزلتين باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب ، بينما يضرب الطالب الآخر العددين نفسيهما بتطبيق الخوارزميات.

كرّر ذلك مع أعداد أخرى، واسأل: أي الطرق تبدو أسرع؟ ثم وسّع المنافسة لتشتمل على ضرب عددٍ كسريٍّ في عددٍ كسريٍّ آخر.

الفصل ٦

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل ٦

مواضيع سابقة قبل الصف الثالث المتوسط

- إجراء تخمينات باستعمال الأنماط أو مجموعات من الأمثلة.
- مقارنة أعدادٍ نسبيةٍ وترتيبها، تتضمّن أعدادًا صحيحةً.
- اختيار العمليات المناسبة لحل مسائل تتضمّن أعدادًا نسبيةً.

مواضيع ذات علاقة من الصف الثالث المتوسط

- استعمال الرموز للتعبير عن المجاهيل والمتغيّرات.

الفصل ٦

- استعمال الخصائص الإبدالية والتجميعية والتوزيعية؛ لتبسيط عبارات جبرية.
- تبسيط عبارات كثيرة حدود، وتطبيق قوانين الأسس في حل مسائل.

ما بعد الفصل ٦

الإعداد للمرحلة الثانوية

- استعمال المهارات الجبرية الضرورية. لتبسيط العبارات الجبرية والمتباينات في حل المسائل.
- استعمال أدوات تتضمّن تحليلًا للعوامل وخصائص الأسس. لتبسيط عبارات وإجراء التحويل وحل المعادلات.

نظرة عامة على الدروس

٦-١ ضرب وحيدات الحد

وحيدة الحد هي عددٌ، أو متغيرٌ، أو حاصل ضرب عددٍ في متغيّرٍ واحدٍ أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكون من حدٍّ واحدٍ فقط، أمّا العبارات التي تحتوي على أسس صحيحة سالبة، فليست وحيدة حد. وتُسمّى وحيدات الحد التي تُمثّل أعدادًا حقيقية الثوابت.

ولضرب وحيدات الحد، استعمل خواص الإبدال والتجميع لوضع الثوابت معًا، والقوى ذات الأساس نفسه معًا كما يأتي:

- لضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أُسَّيهما.
- لإيجاد قوة القوة، اضرب الأسس.
- لإيجاد قوة حاصل الضرب، أوجد قوة كل عامل ثم اضرب.

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- يظهر كل متغير في صورة أساس مرةً واحدةً فقط.
- لا تتضمّن قوة القوة.
- تكون جميع الكسور في أبسط صورة.

٦-٢ قسمة وحيدات الحد

يمكن قسمة وحيدات الحد كما يأتي:

- لقسمة قوتين لهما الأساس نفسه، اطرح الأسين (أس البسط – أس المقام).
- لإيجاد قوة ناتج القسمة، أوجد كلًّا من قوة البسط وقوة المقام.
- أيُّ عدد غير الصفر، مرفوع للقوة صفر يساوي ١، ويمكن أيضًا أن تكون للعبارات أُسس سالبة.
- أيُّ عدد غير الصفر مرفوع للقوة صحيح سالب، هو مقلوب العدد نفسه بأسٍّ موجب.
- يمكن كتابة الكسر الاعتيادي بأُسّ سالب، في صورة مقلوبة وبأُسٍّ موجب.
- رُتبة المقدار: هي عدد مقرّب إلى أقرب قوى العشرة.

كثيرات الحدود

٦-٣ كثيرات الحدود

كثيرة الحدود: هي وحيدة حد، أو مجموع وحيدات حد. وتسمّى كل وحيدة حد منها حدًّا في كثيرة الحدود، وبعض كثيرات الحدود تحمل أسماءً خاصة، فثنائية الحد هي مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل، وثلاثية الحدود هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل.

- درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيّراتها.
- درجة كثيرة الحدود، هي أكبر درجة لجميع حدودها.
- يمكن كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب. وعندما تكتب في الصورة القياسية، فإن معامل أول حد فيها يُسمى المعامل الرئيس.

تُرتّب حدود كثيرة الحدود عادةً، بحيث تكون قوى أحد المتغيّرات تصاعديةً أو تنازليةً.

٦-٤ جمع كثيرات الحدود وطرحها

لجمع كثيرتَي حدود، اجمع معاملات الحدود المتشابهة باستعمال قوانين جمع الأعداد الحقيقية.

- لطرح كثيرتَي حدود، استبدل أولًا كلَّ حد من كثيرة الحدود المطروح بنظيره الجمعي، ثم جمّع الحدود المتشابهة.
- للمساعدة على جمع كثيرات الحدود وطرحها، يمكن تجميع الحدود المتشابهة بشكل أفقيٍّ أو رأسيٍّ.

٦-٥ ضرب وحيدة حدٍّ في كثيرة حدود

يمكن استعمال خاصية التوزيع؛ لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

- تُضرب وحيدة الحد في كل حد في كثيرة الحدود باستعمال قوانين ضرب وحيدة الحد.
- طبّق قوانين ضرب الأعداد الحقيقية، إذا كانت إشارة وحيدة الحد سالبة.
- بسّط حاصل الضرب بتجميع الحدود المتشابهة.

وبما أن المعادلات غالبًا ما تحتوي على كثيرات حدود؛ لذا يجب جمع كثيرات الحدود، أو طرحها، أو ضربها قبل حل المعادلات.

ولحل مثل هذه المعادلات، بسّط كل طرفٍ أولًا، ثم طبّق قوانين حل المعادلات المتعدّدة الخطوات والمعادلات بمتغيّرات في كلا طرفيها.

٦-٦ ضرب كثيرات الحدود

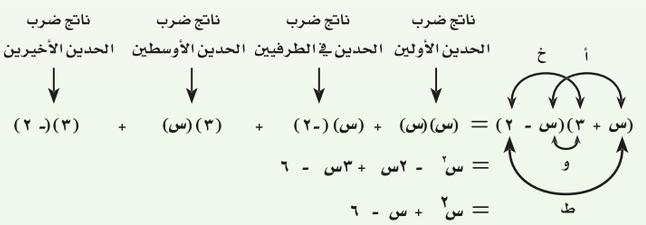
عند ضرب ثنائيتَي حدٍّ، استعمل خاصية التوزيع بالطريقة الأفقية أو الرأسية.

لضرب ثنائيتَي حد:

- اضرب الحد الأول من ثنائية الحد الأولى في حدَّي ثنائية الحد الثانية.
- اضرب الحد الثاني من ثنائية الحد الأولى في حدَّي ثنائية الحد الثانية.
- اجمع الحدود المتشابهة.

وهناك طريقة التوزيع بالترتيب، وهي طريقة مختصرة يمكن استعمالها لضرب ثنائيتَي حد، ولاستعمال هذه الطريقة أوجد ناتج جمع كلٍّ من: حاصل ضرب أول حدين، وضرب الحدين الواقعين على الطرفين، وضرب الحدين الأوسطين، وضرب الحدين الأخيرين بالترتيب.

مثل:



- يمكن استعمال خاصية التوزيع لضرب أي كثيرتَي حدود، ولا يكون الضرب في أبسط صورة إلّا بعد تجميع الحدود المتشابهة جميعها.

٦-٧ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

بعض ثنائيات الحد تتبع أنماطًا معيّنة في حاصل ضربها، ومن هذه الأنماط:

- مربع المجموع أو الفرق بين حدَّين:
  $(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أ ب + ب^2$
  أو $(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أ ب + ب^2$
- ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما
  $(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$

إن قدرتك على تحديد هذه الأنماط واستعمالها، تساعدك على تبسيط هذه الحالات الخاصة من ضرب كثيرات الحدود.

مشروع الفصل

فضاء البيانات

يستعمل الطلاب ما تعلَّموه عن الأساسات والأسس، وخصائص القوى، والصيغة العلمية، وضرب كثيرات الحدود وجمعها؛ للتعامل مع بياناتٍ عن مسابقات الجري وعن الكواكب ومساراتها.

- اطلب إلى كل طالب أن يجمع بيانات عددية عن كوكبه المفضّل، وصورة أو رسمًا له إلى غرفة الصف.
- اطلب إلى الطلاب تحديد كل أساس وأُسّ في بياناتهم، ثم اختيار قوتين لهما الأساس نفسه، ثم إيجاد ناتج ضربهما، وناتج قسمتهما بعد ذلك.

فمثلًا للكواكب:

$$١٠^{٣} \times ١٠^{٥} = ١٠^{٨}$$

$$\frac{١٠^{٣}}{١٠^{٥}} = ١٠^{٣-٥} = ١٠^{-٢}$$

- قسّم الطلاب مجموعتين، واطلب إلى كل مجموعة اختيار كوكبين مختلفين من مجموعاتهم، ثم كتابة بيانات عددية للقياس نفسه لكلا الكوكبين؛ مثل البعد عن الشمس بالصيغتين (العلمية والقياسية)، ثم اطلب إلى المجموعات كتابة نسبة هذا القياس لأحد الكوكبين إلى قياس الكوكب الآخر، وتبسيطها.
- اطلب إلى الطلاب قياس صورة كوكبهم وتصميم إطار خشبي يُحيط بالصورة التي عرضها (س) سم. ثم اطلب إليهم كتابة عبارة للمساحة الكلية "للصورة والإطار". كم سم من الإطار الخشبي تحتاج؟

المفردات: قدِّم مفردات الفصل باستعمال النمط الآتي:

التعريف: وحيدة الحد هي عدد أو متغير أو حاصل ضرب عدد في متغيّر واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة.

مثال: $\frac{١}{٢٠}ن^{٢}$

اسأل: هل يمكنك إعطاء مثال آخر على وحيدة الحد؟ إجابة ممكنة: ٣٢ أ ب، ١٧٥، س، ص

المطويات منظم أفكار

غرضها: يكتب الطلاب أمثلة، ويسجلون ملاحظاتهم وينظّمونها عن كثيرات الحدود أثناء دراستهم هذا الفصل.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب عمل مطوياتهم وعنونتها كما هو مبيّن في تعليمات إعداد المطوية، وأن يفكّروا في سؤال واحد يخطر ببالهم في أثناء تعرّضهم للمفاهيم الرئيسة خلال الدرس. واطلب إليهم كتابة الأسئلة على صفحة الشرائط الخاصة بالدرس في أثناء دراستهم أو عملهم، واطلب إليهم تسجيل إجابات أسئلتهم تحت الأشرطة.

وقت استعمالها: شجِّع الطلاب على أن يضيفوا ملاحظاتهم إلى مطوياتهم في أثناء دراستهم الفصل وأن يستعملوها للمراجعة، استعدادًا لاختبار الفصل.

الفصل ٦ كثيرات الحدود

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أبسّط عبارات تتضمن وحيدات الحد.
- أجد درجة كثيرة حدود، وأكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية، وأجمع، وأطرح، وأضرب كثيرات الحدود.

لماذا؟

سباق الجري: يمكن استعمال كثيرات الحدود لنمذجة العديد من مواقف الحياة الواقعية؛ مثل المسارات المنحنية التي يسلكها المتسابقون في سباق الجري.

المطويات منظم أفكار

كثيرات الحدود: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود، مبتدئًا بثماني أوراق A4.

١ **رتب** الأوراق الثماني بعضها فوق بعض؛ لتكوّن كتيبًا.

٢ **ثبّت** الأوراق من جانبها الأيمن، وقص شريطًا من طرف كل صفحة بحيث يزيد كل شريط بمقدار ٣ سم على سابقه، كما في الشكل.

٣ **سمِّ** غلاف المطوية "كثيرات الحدود"، وضعْ أرقام الدروس على الأشرطة، كما في الشكل.

التهيئة للفصل ٦

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية:

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل بدء الإجابة:

اختبار سريع

اكتب كل عبارة فيما يأتي بالصيغة الأسية:

١) $٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤$ $٤^{٥}$

٢) $ب \times ب \times ب \times ب \times ب \times ب$ $ب^{٦}$

٣) $م \times م \times م \times ب \times ب \times ب \times ب \times ب \times ب$ $م^{٣} ب^{٦}$

٤) $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}$ $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٨} = \frac{١}{٨٣}$

٥) $\frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{ع}{ع} \times \frac{ع}{ع}$ $\frac{س^{٤} ع^{٢}}{ص^{٤} ع^{٢}}$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي:

٦) $٢^{٣}$ ٨ ٧) $(-٥)^{٢}$ ٢٥ ٨) $٣^{٣}$ ٢٧

٩) $(-٤)^{٣}$ -٦٤ ١٠) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$ $\frac{٤}{٩}$ ١١) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$ $\frac{١}{١٦}$

١٢) **مدرسة:** إذا كان احتمال تخمين الإجابة الصحيحة عن ٥ أسئلة من نوع الصواب والخطأ هو $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$، فعبّر عن هذا الاحتمال في صورة كسر اعتيادي دون استعمال الأسس. $\frac{١}{٣٢}$

أوجد مساحة كل من الشكلين الآتيين:

١٣) $٤ط م^{٢}$ (نصف دائرة نصف قطرها ٢ م)

١٤) $٥٤ سم^{٢}$ (مثلث قائم الزاوية: ٩ سم، ١٢ سم، ١٥ سم)

١٥) أوجد حجم الشكل المجاور. $١٠٥ سم^{٣}$ (متوازي مستطيلات: ٧ سم، ٥ سم، ٣ سم)

مراجعة سريعة

مثال ١

اكتب العبارة الآتية بالصيغة الأسية:

$٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ + س \times س \times س$.

العدد ٥ أساس واستعمل كعامل ٤ مرات.

س أساس واستعمل كعامل ٣ مرات.

إذن $٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ + س \times س \times س = ٥^{٤} + س^{٣}$.

مثال ٢

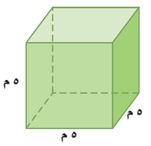
أوجد قيمة $\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢}$.

$\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢} = \frac{٥}{٧} \times \frac{٥}{٧}$ اكتب القوى كحاصل ضرب

$= \frac{٢٥}{٤٩}$ اضرب

مثال ٣

أوجد حجم الشكل المجاور.



ح = ل ض ع حجم متوازي المستطيلات

$= ٥ \times ٥ \times ٥ = ١٢٥$ ل = ٥، ض = ٥، ع = ٥

الحجم $١٢٥ م^{٣}$.

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com .

المعالجة

استعمل نتائج اختبار التهيئة ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، كما تساعدك العبارة «إذا ... فقم» في المخطط أدناه على تحديد المستوى المناسب، وتقترح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لايزيد على ٢٥٪ تقريبًا من التمارين،
فقم	بمراجعة ضرب القوى والأسس.
	وزيارة الموقع: www.obeikaneducation.com
المستوى ٢	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ تقريبًا من التمارين،
فقم	بتحديد أخطائهم، وصمّم أنشطة علاجية لذلك .
	وزيارة الموقع: www.obeikaneducation.com

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٦-١

إجراء عمليات على العبارات الأسية.

الدرس ٦-١

ضرب وحيدات الحد .

تبسيط عبارات تتضمّن وحيدات الحد.

ما بعد الدرس ٦-١

إيجاد ناتج قسمة وحيدتَي حدٍّ.

تبسيط عبارات تحتوي على أسس سالبةٍ أو صفرٍ.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ثمّ اسأل:

- ما القيمتان اللتان تحتاج إلى معرفتهما؛ لتتمكّن من استعمال الصيغة لإيجاد قوة محرّك السيارة بالحصان؟ كتلة السيارة بركابها (ك)؛ سرعة السيارة (ع) في نهاية ربع الميل.
- أيُّ القيم في الصيغة مرفوعة للأس ٣؟ ع، ٢٣٤
- متى ستصبح قوة محرّك السيارة أكبر من أو تساوي كتلة السيارة بالركّاب؟ عندما ع ≤ ٢٣٤

إجابات (تحقق من فهمك) :

١أ) لا؛ تحتوي العبارة على إشارة جمع؛ لذا فهي تحتوي على أكثر من حدٍّ.

١ب) نعم؛ هذا حاصل ضرب عدد ومتغيّرات.

١جـ) نعم؛ هذا حاصل ضرب متغيّرات، في ثابت في المقام.

١د) لا؛ تحتوي هذه العبارة على متغيّر في المقام.

ضرب وحيدات الحد

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أضرب وحيدات الحد.
- أبسّط عبارات تتضمن وحيدات الحد.

المفردات

وحيدة الحد

الثابت

obeikaneducation.com

لماذا ؟

تحتوي كثير من الصيغ على وحيدات حد، فمثلاً صيغة قوة محرك السيارة بالحصان هي ق = ك $\left(\frac{ع}{٢٣٤}\right)^{٣}$ ؛

حيث تمثّل: ق قوة المحرك بالحصان، ك كتلة السيارة بركابها، ع سرعتها بعد مسيرها مسافة ربع ميل.

من الواضح أن قوة المحرك بالحصان تزداد كلما ازدادت السرعة.

وحيدات الحد : تكون **وحيدة الحد** عددًا أو متغيرًا أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكون من حد واحد فقط.

فمثلاً الحد: ك $\left(\frac{ع}{٢٣٤}\right)^{٣}$ في صيغة حساب قوة محرك السيارة، هو وحيدة حد.

أما العبارة التي تتضمن القسمة على متغير مثل : $\frac{أ ب}{جـ}$ ، فليست وحيدة حد.

الثابت: هو وحيدة حد تمثل عددًا حقيقيًّا. ووحيدة الحد ٣ س هي مثال على عبارة خطية؛ لأن أس المتغير س فيها ١، أما وحيدة الحد ٢س^{٢} فليست عبارة خطية؛ لأن الأس عدد موجب أكبر من ١ .

مثال ١ **تمييز وحيدات الحد**

حدِّد إذا كانت العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك:

أ) ١٠ نعم؛ العدد ١٠ ثابت، لذا فهو وحيدة حد.

ب) ف + ٢٤ لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع، لذا فهي تحتوي على أكثر من حد.

جـ) هـ^{٢} نعم؛ تمثل هذه العبارة حاصل ضرب المتغير في نفسه.

د) ل نعم؛ المتغيرات المنفردة وحيدات حد.

تحقق من فهمك أ-د انظر الهامش

١أ) −س + ٥

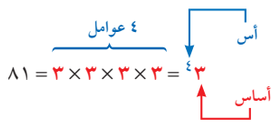
١ب) ٢٣أ ب جـ د^{٢}

١جـ) $\frac{س ص ع^{٢}}{٢}$

١د) $\frac{م ف}{ن}$

تذكَّر أن العبارة التي على الصورة س^{ن} التي تعبر عن نتيجة ضرب س في نفسها ن مرة تُسمى قوة.

ويُطلق على س الأساس، وعلى ن الأس. وقد تستعمل كلمة قوة لتعني الأس أحيانًا.



مصادر الدرس ٦-١

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (١٢ ، ١٥)	• تنويع التعليم ص (١٢ ، ١٥)
كتاب التمارين	ص (٤)	ص (٤)	ص (٤)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) • تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨) • التدريبات الإثرائية، ص (٩)

ويمكنك إيجاد حاصل ضرب القوى في المثالين الآتيين بتطبيق تعريف القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$٢^{٤} \times ٢^{٢} = \underbrace{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}_{\text{٤ عوامل}} \times \underbrace{٢ \times ٢}_{\text{عاملان}} = \underbrace{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}_{\text{٤ + ٢ = ٦ عوامل}}$$

$$٤^{٢} \times ٤^{٣} = \underbrace{٤ \times ٤}_{\text{عاملان}} \times \underbrace{٤ \times ٤ \times ٤}_{\text{٣ عوامل}} = \underbrace{٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤}_{\text{٢ + ٣ = ٥ عوامل}}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية ضرب القوى.

مفهوم أساسي — ضرب القوى

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أُسَّيهما.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ ؛ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن: $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$.

أمثلة: $ب^{٣} \times ب^{٥} = ب^{٣+٥} = ب^{٨}$ $\quad$ $جـ^{٤} \times جـ^{٦} = جـ^{٤+٦} = جـ^{١٠}$

مثال ٢ — ضرب القوى

بسّط كل عبارة مما يأتي:

أ) $(٦ن^{٣})(٢ن^{٧})$

$(٦ن^{٣})(٢ن^{٧}) = (٦ \times ٢)(ن^{٣} \times ن^{٧})$ — جمّع المعاملات والمتغيرات

$= (٦ \times ٢)(ن^{٣+٧})$ — اضرب القوى

$= ١٢ن^{١٠}$ — بسّط

ب) $(٣ب هـ^{٣})(ب^{٣}هـ^{٤})$

$(٣ب هـ^{٣})(ب^{٣}هـ^{٤}) = (٣ \times ١)(ب \times ب^{٣})(هـ^{٣} \times هـ^{٤})$ — جمّع المعاملات والمتغيرات

$= (٣ \times ١)(ب^{١+٣})(هـ^{٣+٤})$ — اضرب القوى

$= ٣ب^{٤}هـ^{٧}$ — بسّط

تحقق من فهمك

٢أ) $(٣ص^{٤})(٧ص^{٥})$ $٢١ص^{٩}$ $\quad$ **٢ب)** $(-٤رس^{٢}ن^{٣})(-٦ر^{٥}س^{٢}ن)$ $٢٤ر^{٦}س^{٤}ن^{٤}$

إرشادات للدراسة

العدد ١ معاملًا وقوة

عندما لا يظهر أس المتغير أو معامله، يمكن افتراض أن كليهما يساوي ١؛ أيْ أن $س = ١س^{١}$

ويمكنك استعمال خاصية ضرب القوى لإيجاد قوة القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$(٣^{٢})^{٤} = \underbrace{(٣^{٢})(٣^{٢})(٣^{٢})(٣^{٢})}_{\text{٤ عوامل}} = ٣^{٢+٢+٢+٢} = ٣^{٨}$$

$$(ر^{٤})^{٣} = \underbrace{(ر^{٤})(ر^{٤})(ر^{٤})}_{\text{٣ عوامل}} = ر^{٤+٤+٤} = ر^{١٢}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية قوة القوة.

مفهوم أساسي — قوة القوة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة القوة، اضرب الأسس.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ ؛ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

أمثلة: $(ب^{٣})^{٥} = ب^{٣ \times ٥} = ب^{١٥}$ $\quad$ $(جـ^{٦})^{٧} = جـ^{٦ \times ٧} = جـ^{٤٢}$

وحيدات الحد

المثال ١ يُبيّن طريقة تحديد ما إذا كانت العبارة وحيدة حدٍّ أم لا.

المثال ٢ يُبيّن طريقة إيجاد حاصل ضرب القوى.

المثال ٣ يُبيّن طريقة إيجاد قوة القوة.

المثال ٤ يُبيّن طريقة إيجاد قوة حاصل الضرب.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

١ حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية وحيدة حد. اكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك:

أ) ١٧ – جـ . لا؛ تتضمّن هذه العبارة عملية الطرح؛ لذا فهي تحتوي على أكثر من حد.

ب) ٨ ف^{٢} جـ . نعم؛ هذه العبارة حاصل ضرب عدد ومتغيّرين.

جـ) $\frac{٣}{٤}$. نعم؛ تمثل هذه العبارة ثابتًا.

د) $\frac{٥}{ن}$. لا؛ تحتوي هذه العبارة على متغيّر في المقام.

٢ بسّط العبارات الآتية:

أ) (ر^{٤}) (–١٢ر^{٧}) $-١٢ر^{١١}$

ب) (٦جـ د^{٥}) (٥جـ^{٥} د^{٢})
$٣٠جـ^{٦}د^{٧}$

المحتوى الرياضي

المتغيّرات التي لا تتضمّن أسسًا

يمكن كتابة المتغيّر الذي لا يظهر الأُسّ عليه بالأس ١، فمثلًا يمكن كتابة (س) في الصورة (س^{١})، وكتابة (أ ب) في الصورة (أ^{١} ب^{١})، اقترح على الطلاب إعادة كتابة المتغيّرات التي لا يظهر الأُسّ عليها؛ بإظهار الأُسّ ١ عليها، وذلك لإيجاد حاصل ضرب القوى بصورة صحيحة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب عبارة مكونة من حاصل ضرب وحيدتَي حدٍّ على السبورة، واطلب إلى أحد الطلاب تبسيطها، وتوضيح الخطوات التي استعملها وتبرير كل خطوة. ثم ناقش الطلاب وتوصَّل معهم إلى الخطوات العامة لتبسيط العبارات التي تتضمن ضرب وحيدات حد، وبيِّن لهم ضرورة أن يظهر كل متغير على صورة أساس مرةً واحدةً فقط، وألا تتضمن العبارة قوة قوة، وأن تكون الكسور جميعها في أبسط صورة.

مثال ٣ قوة القوة

بسّط العبارة: $[(٢^{٣})^{٢}]^{٤}$.

$[(٢^{٣})^{٢}]^{٤} = (٢^{٣\times٢})^{٤}$ — قوة القوة

$= (٢^{٦})^{٤}$ — بسّط

$= ٢^{٦\times٤}$ — قوة القوة

$= ٢^{٢٤} = ١٦٧٧٧٢١٦$ — بسّط

تحقق من فهمك

٣أ) $[(٢^{٢})^{٢}]^{٤}$ $٢^{١٦} = ٦٥٥٣٦$

٣ب) $[(٣^{٣})^{٣}]^{٢}$ $٣^{١٢} = ٥٣١٤٤١$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة

إذا لم تكن متأكدًا متى تضرب الأسس أو تجمعها، فاكتب العبارة كحاصل ضرب.

ويمكنك استعمال خاصيتي ضرب القوى، وقوة القوة لإيجاد قوة حاصل الضرب. انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$(ن\ و)^{٣} = \overbrace{(ن\ و)(ن\ و)(ن\ و)}^{٣\text{ عوامل}}$

$= (ن \times ن \times ن)(و \times و \times و)$

$= ن^{٣}\ و^{٣}$

$(٢ص\ ع^{٢})^{٣} = \overbrace{(٢ص\ ع^{٢})(٢ص\ ع^{٢})(٢ص\ ع^{٢})}^{٣\text{ عوامل}}$

$= (٢ \times ٢ \times ٢)(ص \times ص \times ص)(ع^{٢} \times ع^{٢} \times ع^{٢})$

$= ٢^{٣}ص^{٣}ع^{٦} = ٨ص^{٣}ع^{٦}$

ويبيِّن المثالان السابقان خاصية قوة حاصل الضرب.

مفهوم أساسي قوة حاصل الضرب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة حاصل الضرب، أوجد قوة كل عامل ثم اضرب.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب وأي عدد صحيح ن، فإن: $(أب)^{ن} = أ^{ن}ب^{ن}$.

مثال: $(-٢س\ ص^{٣})^{٥} = (-٢)^{٥}س^{٥}\ ص^{١٥} = -٣٢\ س^{٥}\ ص^{١٥}$.

مثال ٤ قوة حاصل الضرب

هندسة: عبّر عن مساحة الدائرة على صورة وحيدة حد.

المساحة $= ط\ نق^{٢}$ — مساحة الدائرة

$= ط(٢س\ ص^{٢})^{٢}$ — عوّض عن نق بـ $٢س\ ص^{٢}$

$= ط(٢^{٢}س^{٢}\ ص^{٤})$ — قوة حاصل الضرب

$= ٤س^{٢}\ ص^{٤}ط$ — بسّط

إذن، مساحة الدائرة تساوي $٤س^{٢}\ ص^{٤}$ ط وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

٤أ) عبّر عن مساحة المربع الذي طول ضلعه $٣س\ ص^{٢}$ على صورة وحيدة حد. $٩س^{٢}ص^{٤}$

٤ب) عبّر عن مساحة المثلث الذي ارتفاعه ٤أ وطول قاعدته $٥أ\ ب^{٢}$ على صورة وحيدة حد. $١٠\ أ^{٢}\ ب^{٢}$

مثالان إضافيان

٣ بسّط العبارة: $[(٢^{٣})^{٣}]^{٢}$.

$٢^{١٨} = ٢٦٢١٤٤$

٤ هندسة: عبّر عن حجم المكعب الذي طول ضلعه $(٥\ س\ ص\ ع)$ على صورة وحيدة حد.

$(٥س\ ص\ ع)^{٣} = ١٢٥\ س^{٣}\ ص^{٣}\ ع^{٣}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء: عند تبسيط الطلاب العبارة:

$\frac{٤}{٦}(س^{٢}\ ص^{٥})^{٣}[٢(س\ ص)^{٧}]$

إلى الصورة: $\frac{٨}{٦}\ س^{١٣}\ ص^{٢٢}$، قد لا يُدركون أن التبسيط ليس تامًّا؛ إذ إن الكسر ليس في أبسط صورة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: أعطِ الطلاب عبارةً مثل $٢٤٠\ س^{١٢}\ ص^{٨}$، وتحدّهم في أن يكتبوا ١٠ عبارات وحيدة حد مختلفة، تساوي عند تبسيطها هذه العبارة.

تبسيط العبارات: يمكنك دمج الخصائص واستعمالها في تبسيط عبارات تتضمن وحيدات حد.

إرشادات للدراسة

بسّط

عند تبسيط عبارات تتضمن أقواسًا متداخلة، ابدأ أولاً بالعبارات من الداخل ثم انتقل إلى الخارج.

مفهوم أساسي — تبسيط العبارات

أضف إلى مطويتك

لتبسيط وحيدة حد، اكتب عبارة مكافئة لها على أن:

- يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة فقط.
- لا تتضمن العبارة قوة قوة.
- تكون جميع الكسور في أبسط صورة.

مثال ٥ — تبسيط العبارات

بسّط العبارة: $(٣س ص^{٤})^{٢}[-٢ ص)^{٢}]^{٣}$.

$(٣س ص^{٤})^{٢}[-٢ ص)^{٢}]^{٣} = (٣س ص^{٤})^{٢}(-٢ ص)^{٦}$ — قوة القوة

$= (٣)^{٢}س^{٢}(ص^{٤})^{٢}(-٢)^{٦}(ص)^{٦}$ — قوة حاصل الضرب

$= ٩س^{٢} ص^{٨} (٦٤) ص^{٦}$ — قوة القوة

$= ٩ (٦٤) س^{٢} ص^{٨} ص^{٦}$ — خاصية الإبدال

$= ٥٧٦س^{٢} ص^{١٤}$ — ضرب القوى

تحقق من فهمك

٥) بسّط العبارة: $(\frac{١}{٢}أ^{٢}ب^{٢})^{٣}[-٤ب)^{٢}]^{٢}$. $٣٢أ^{٦}ب^{١٠}$

تأكد

مثال ١ حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك: ١-٦ انظر الهامش

١) ١٥ ٢) $٢ - ٣أ$ ٣) $\frac{٥جـ}{د}$

٤) $-١٥جـ^{٢}$ ٥) $\frac{ب}{٢}$ ٦) $٧ب + ٩$

المثالان ٢، ٣ بسّط كل عبارة مما يأتي:

٧) $ك(ك^{٣})$ $ك^{٤}$ ٨) $م^{٤}(م^{٢})$ $م^{٦}$ ٩) $٢ك^{٢}(٩ك^{٤})$ $١٨ك^{٦}$

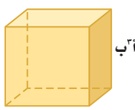
١٠) $(٥م^{٤}ف)(٧م^{٤}ف^{٣})$ $٣٥م^{٨}ف^{٤}$ ١١) $[(٣^{٢})^{٢}]^{٢}$ $٣^{٨} = ٦٥٦١$ ١٢) $(س ص^{٤})^{٦}$ $س^{٦} ص^{٢٤}$

١٣) $(-٢ف^{٢}جـ^{٣}هـ^{٢})^{٣}$ $-٨ف^{٦}جـ^{٩}هـ^{٦}$ ١٤) $(-٣ب^{٥}ن^{٦})^{٤}$ $٨١ب^{٢٠}ن^{٢٤}$ ١٥) $(٤أ^{٤}ب^{٩}جـ)^{٢}$ $١٦أ^{٨}ب^{١٨}جـ^{٢}$

مثال ٤ ١٦) **هندسة:** مساحة سطح المكعب هي م = ٦ ض^{٢}، حيث م مساحة سطحه، ض طول حرفه.

أ) عبّر عن مساحة سطح المكعب المجاور على صورة وحيدة حد. $٦أ^{٢}ب^{٢}$

ب) ما مساحة سطح المكعب إذا كان أ = ٣، ب = ٤ ٦٩٩٨٤ وحدة مربعة



مثال ٥ بسّط كل عبارة مما يأتي:

١٧) $(٥س^{٢}ص)^{٢}(٢س ص^{٣}ع)^{٣}(٤س ص ع)^{٢}$ $٨٠٠س^{٨}ص^{١٢}ع^{٤}$ ١٨) $[-٣د^{٢}ن^{٣}جـ)^{٢}]^{٢}[(-٣د^{٢}ن)^{٣}]^{٢}$ $٦٥٦١د^{١٦}ن^{١٢}جـ^{٢}$

١٩) $(-٢جـ^{٣}هـ)(-٣جـ ل^{٤})^{٢}(-جـ هـ ل)^{٢}$ $-١٨جـ^{٧}هـ^{٣}ل^{١٠}$ ٢٠) $(-٧أ^{٤}ب^{٤}جـ)^{٣}[(٢أ^{٢}جـ)^{٢}]^{٣}$ ٢٠) $-٢١٩٥٢أ^{١٥}ب^{١٢}جـ^{٩}$

تبسيط العبارات

المثال ٥ يُبيّن كيف تبسّط عبارةً تتضمّن وحيدات حد، باستعمال القوة وقواعد حاصل الضرب.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير: ذكّر الطلاب بأنه عادة يوجد أكثر من استراتيجية يمكن استعمالها لتبسيط عبارة ما. فمثلًا قد تكون أول خطوة في المثال ٥، هي تبسيط $(-٢ص)^{٢}$، ثم رفع حاصل الضرب للقوة الثالثة.

مثال إضافي

٥ بسّط العبارة:
$[(٨جـ^{٣}هـ^{٤})^{٢}]^{٢}(٢جـ هـ^{٥})^{٤}$.
$٦٥٥٣٦جـ^{١٦}هـ^{٣٦}$

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ٢٠؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

١) نعم؛ الثوابت وحيدات حدٍّ.
٢) لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية طرح؛ لذا فهي تحتوي على أكثر من حدٍّ.
٣) لا؛ يوجد متغيّر في المقام.
٤) نعم؛ لأنها حاصل ضرب عدد ومتغيّرات.
٥) نعم؛ لأنها حاصل ضرب عدد ومتغيّرات.
٦) لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع؛ لذا فهي تحتوي على أكثر من حدٍّ.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا" ، وفسر إجابتك: **٢١–٢٦** انظر الهامش

٢١) ١٢٢ ٢٢) $٣أ^{٤}$ ٢٣) ٢جـ + ٢

٢٤) $\frac{-٢جـ}{٤هـ}$ ٢٥) $\frac{٥ك}{١٠}$ ٢٦) ٦م + ٣ن

المثالان ٢ ، ٣ بسِّط كل عبارة مما يأتي:

٢٧) $(ك^{٢})(٢ك^{٤})$ $٢ك^{٦}$ ٢٨) $(ص^{٦}ع^{٩})(٦ص^{٤}ع^{٢})$ $٦ص^{١٠}ع^{١١}$

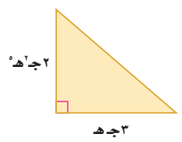
٢٩) $(١٤ن جـ^{٢}هـ^{٢})(-٣ن^{٤}جـ^{٢}هـ^{٢})$ $-٤٢ن^{٥}جـ^{٤}هـ^{٤}$ ٣٠) $[(٢^{٢})^{٢}]^{٢}$ $٢^{٨} = ٢٥٦$

٣١) $[(-٢س ص^{٢})^{٣}]^{٢}$ $٦٤س^{٦}ص^{١٢}$ ٣٢) $(ل^{٥}ك^{٧})^{٤}$ $ل^{٢٠}ك^{٢٨}$

مثال ٤ **هندسة :** عبّر عن مساحة كل من المثلثين الآتيين على صورة وحيدة حد:

٣٣) $٢٠جـ^{٥}د^{٥}$

٣٤) $٣جـ^{٣}هـ^{٦}$



مثال ٥ بسِّط كل عبارة مما يأتي :

٣٥) $(٢أ^{٣})^{٤}(أ^{٣})^{٣}$ $١٦أ^{٢١}$ ٣٦) $(جـ^{٣})^{٢}(-٣جـ^{٥})^{٢}$ $٩جـ^{١٦}$

٣٧) $(٢جـهـ^{٤})^{٣}[(-٢جـ^{٤}هـ)^{٣}]^{٢}$ $٥١٢جـ^{٢٧}هـ^{١٨}$ ٣٨) $(٥ك^{٢}م)^{٣}[(٤ك م^{٤})^{٢}]^{٢}$ $٣٢٠٠٠ك^{١٠}م^{١٩}$

٣٩) $(ب^{٥}ر^{٢})^{٤}(-٧ب^{٣}ر^{٤})^{٢}(٦ب ر^{٣})$ $٢٩٤ب^{٢٧}ر^{١٩}$ ٤٠) $(٥أ^{٢}ب^{٣}جـ^{٤})^{٢}(٦أ^{٣}ب^{٤}جـ^{٢})$ $١٥٠أ^{٧}ب^{١٠}جـ^{١٠}$

٤١) $(٠,٥س^{٣})^{٢}$ $٠,٢٥س^{٦}$ ٤٢) $(-\frac{٣}{٤}جـ)^{٣}$ $-\frac{٢٧}{٦٤}جـ^{٣}$

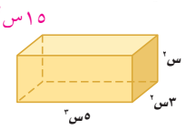
٤٣) $(\frac{٤}{٥}أ^{٢})^{٢}$ $\frac{١٦}{٢٥}أ^{٤}$ ٤٤) $(\frac{٤}{٧}م)^{٢}(٤٩م)(١٧ب)(\frac{١}{٣٤}ب^{٥})$ $٨م^{٣}ب^{٦}$

٤٥) $(٣أ ب^{٢}جـ)^{٢}(-٢أ^{٢}ب^{٤})^{٢}(أ^{٤}جـ^{٢})^{٣}(أ^{٢}ب^{٤}جـ^{٥})^{٢}(٢أ^{٣}ب^{٢}جـ^{٤})^{٣}$ $٢٨٨أ^{٣١}ب^{٢٦}جـ^{٣٠}$

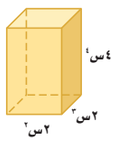
هندسة : عبّر عن حجم كل مجسّم مما يأتي على صورة وحيدة حد:

٤٦) $١٢س^{٤}ط$

٤٧)



٤٨) $١٦س^{٩}$



إجابات:

٢١) نعم؛ الثوابت وحيدات حدٍّ.

٢٢) نعم؛ لأنها حاصل ضرب عدد ومتغيّرات.

٢٣) لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع؛ لذا فهي تحتوي على أكثر من حد واحد.

٢٤) لا؛ يوجد متغير في المقام.

٢٥) نعم؛ لأنها حاصل ضرب عدد ومتغيّر.

٢٦) لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع؛ لذا فهي تحتوي على أكثر من حدٍّ.

تنبيه لحل أسئلة

صيغ: يحتاج الطلاب إلى معرفة صيغ مساحة المثلث وحجوم المجسمات لحلِّ الأسئلة: ٣٣، ٣٤، ٤٦–٤٨.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٢١–٤٥، ٥١–٦١
ضمن ضمن المتوسط	٢١–٤٥ (فردي)، ٤٦، ٤٩، ٥١ – ٦١
فوق فوق المتوسط	٢١–٤٥

٤٩) **طاقة:** يمكن تحويل الكتلة كاملة إلى طاقة باستعمال الصيغة ط = ك ع^{٢}. وتقاس الطاقة بالجول، والكتلة بالكجم، حيث تبلغ سرعة الضوء ٣٠٠ مليون مترٍ لكل ثانيةٍ تقريبًا.

أ) أكمل حسابات تحويل ٣ كيلوجرامات كاملة من البنزين إلى طاقة. ٢٧٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ جول

ب) ماذا يحدث للطاقة إذا أصبحت كمية البنزين مثليْ ما كانت عليه؟ تصبح الطاقة مثليْ ما كانت عليه

٥٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة بعض نواتج القوى.

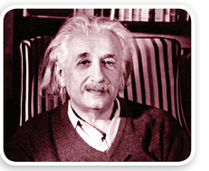
أ) **جدوليًا:** انقل الجدول الآتي واستعمل الآلة الحاسبة لإكماله:

القوة	٣^{٤}	٣^{٣}	٣^{٢}	٣^{١}	٣^{٠}	٣$^{-١}$	٣$^{-٢}$	٣$^{-٣}$	٣$^{-٤}$
القيمة	٨١	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٨١}$

ب) **تحليليًا:** ما قيمتا ٥^{٠}، ٥$^{-١}$؟ تحقق من تخمينك باستعمال الآلة الحاسبة؟ ١، $\frac{١}{٥}$

جـ) **تحليليًا:** أكمل: لأي عدد غير صفري أ، وأي عدد صحيح ن، أ$^{-ن}$ = _____ . $\frac{١}{أ^{ن}}$

د) **لفظيًا:** ما قيمة عدد غير الصفر مرفوع للأس صفر؟ أي عدد غير الصفر مرفوع للأس صفر يساوي ١



تاريخ الرياضيات

يُعد ألبرت أينشتاين من أشهر العلماء في القرن العشرين. وقانونه ط= ك ع^{٢}، المعروف باسمه، حيث تمثل ط الطاقة، ك كتلة المادة، ع سرعة الضوء، يُظهر أن الكتلة قد تتحول إلى طاقة قابلة للاستعمال إذا تسارعت على نحوٍ كافٍ.

٥١) إجابة ممكنة: استعمل قوة القوة أولًا لتبسيط العبارة لتصبح $\frac{أ^{٢ن}\ م}{ب^{٢ن}}$

٥٣) إجابة ممكنة تستعمل صيغة مساحة الدائرة م = ط نق^{٢}، حيث نق نصف القطر لإيجاد مساحة أي دائرة، وتستعمل صيغة مساحة المستطيل م = ل ض، حيث ل الطول، ض العرض لإيجاد مساحة أي مستطيل.

مسائل مهارات التفكير العليا

٥١) **تحدٍّ:** بسّط العبارة $\left(-\frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}\right)^{٢}$ موضحًا كل خطوة، علمًا بأن: أ، ب عددان حقيقيان غير صفريين، م ، ن عددان صحيحان.

٥٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث عبارات مختلفة يمكن تبسيطها إلى س٦. إجابة ممكنة: س^{٤} (س^{٢})، س (س^{٥})، (س^{٣})^{٢}

٥٣) **اكتب:** اكتب صيغتين تحوي كل منهما وحيدة حد. وفسّر كيف تستعمل كلًّا منهما في مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار

٥٤) أي العبارات الآتية ليست وحيدة حد؟ جـ

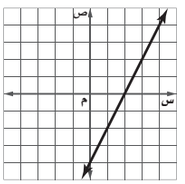
أ) −٦س ص

ب) $\frac{١}{٢}$ أ^{٢}

جـ) $-\frac{١}{٣ب^{٢}}$

د) ٥جـ هـ^{٤}

٥٥) **إجابة قصيرة:** إذا كان ميل المستقيم موجبًا، ومقطعه الصادي سالبًا، فماذا يحدث للمقطع السيني إذا ضوعف كل من المقطع الصادي والميل؟ لا يتغير.



مراجعة تراكمية

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والموازي للمستقيم المعطاة معادلته في كل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع: (الدرس ٣-٤)

٥٦) (−٣، ٢)، ص = س−٦ ص = س + ٥

٥٧) (٢، −١) ص=٢س+٢ ص = ٢س − ٥

٥٨) (−٥، −٤)، ص = $\frac{١}{٢}$ س +١ ص = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{٣}{٢}$

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ١-٢)

٥٩) ٧س = −٢٨ −٤

٦٠) $-\frac{٢}{٥}$ ص = ١٠ −٢٥

٦١) $\frac{٢}{٣}$ س = ٧ $\frac{٢١}{٢}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أن سرعة سيارة السباق على المضمار قد تصل إلى ١٠٠ ميل في الساعة خلال ربع الميل. إذا مثّلت (ع) السرعة بالأميال لكل ساعة، فإن المسافة التي على السائق قطعها قبل التوقّف بالأقدام هي $\frac{١}{٢٠}$ ع^{٢} تقريبًا. فإذا بدأ السائق استعمال المكابح عندما وصلت سرعة السيارة إلى ١٠٠ ميل في الساعة. فاحسب المسافة على مضمار السباق التي ستقطعها السيارة من البدء حتى لحظة التوقّف، علمًا بأن الميل يساوي ٥٢٨٠ قدمًا. ١٨٢٠ قدمًا؛ ربع الميل الأول (١٣٢٠ قدمًا) بالإضافة إلى (٥٠٠) قدم مسافة التوقّف باستعمال المكابح.

تمثيلات متعددة: في السؤال ٥٠ يستعمل الطلاب الآلة الحاسبة، وجدول القيم، والتحليل اللفظي لربط قيم العبارات التي تتضمّن الأسس الموجبة والسالبة.

٤ التقويم

بطاقة المكافأة: اكتب عدة نسخ كلٌّ منها تحتوي على عبارات تحتاج إلى تبسيط. وأعطِ كل طالب نسخة، واطلب إليه تبسيط عبارة واحدة منها، ثم اطلب إليهم إعطاء الصور المبسّطة لهذه العبارات وتسليمها قبل مغادرتك غرفة الفصل.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٦ - ١

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٦) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٦-١ تدريبات إعادة التعليم
ضرب وحيدات الحد

وحيدات الحد، تكون وحيدة الحد عددًا، أو متغيرًا، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر، بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكوّن من حد واحد فقط.

العبارة التي على الصورة $س^{ن}$ والتي تعبّر عن نتيجة ضرب س في نفسها ن مرة تُسمّى **قوة**. ولضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أُسّيهما.

ضرب القوى	لأيّ عدد أ، وأيّ عددين صحيحين م، ن، فإنّ $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

مثال ١ بسّط $(٣س^{٢})(٥س^{٣})$

$(٣س^{٢})(٥س^{٣}) = (٣ \times ٥)(س^{٢} \times س^{٣})$ جمع المعاملات والمتغيرات

$= (٣ \times ٥)(س^{٢+٣})$ اضرب القوى

$= ١٥س^{٥}$ بسّط

حاصل الضرب هو $١٥س^{٥}$

مثال ٢ بسّط $(-٤أ^{٢}ب)(٣أب^{٣})$

$(-٤أ^{٢}ب)(٣أب^{٣}) = (-٤ \times ٣)(أ^{٢} \times أ)(ب \times ب^{٣})$

$= -١٢(أ^{٢+١})(ب^{١+٣})$

$= -١٢أ^{٣}ب^{٤}$

حاصل الضرب هو $-١٢أ^{٣}ب^{٤}$

تمارين

بسّط كلّ عبارة ممّا يأتي:

١) $ص(ص^{٢})$ $ص^{٣}$
٢) $ن^{٢} \times ن^{٥}$ $ن^{٧}$
٣) $(-٧س^{٢})(س^{٣})$ $-٧س^{٥}$
٤) $س(س^{٢})(س^{٣})$ $س^{٦}$
٥) $م \times م^{٣}$ $م^{٤}$
٦) $(-س^{٢})(-س^{٣})$ $س^{٥}$
٧) $(٢^{٢})(٨^{٢})$ $١٦^{٢}$
٨) $(ر س)(ر ن^{٢})(ن^{٢})$ $ر^{٢}س ن^{٤}$
٩) $(س^{٢}ص)(٤س ص^{٣})$ $٤س^{٣}ص^{٤}$
١٠) $\frac{١}{٢}(٢أ^{٢}ب)(أب^{٣})$ $١٤أ^{٣}ب^{٤}$
١١) $(-٤س^{٣})(-٥س^{٣})$ $٢٠س^{٦}$
١٢) $(-٣جـ^{٢}ك^{٢})(٢جـ^{٢}ك^{٣})$ $-٦جـ^{٤}ك^{٥}$
١٣) $(٥أ^{٢}جـ^{٣})(\frac{١}{٥}أ^{٣}جـ)$ $أ^{٥}جـ^{٤}$
١٤) $(-٥س ص)(٤س^{٢})(ص^{٢})$ $-٢٠س^{٣}ص^{٤}$
١٥) $(١٠س^{٢}ص^{٣}ع)(-٢س ص^{٣}ع^{٢})$ $-٢٠س^{٥}ص^{٦}ع^{٣}$

تدريبات حل المسألة (٨) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-١ تدريبات حل المسألة
ضرب وحيدات الحد

١) **الجاذبية**، أُسقطت بيضة من قمة مبنى، وكانت سرعتها بعد ن ثانية تساوي ١٦ن ما دامتا لكل ثانية. فإذا كانت المسافة المقطوعة بعد ن ثانية تساوي حاصل ضرب السرعة في الزمن، فاكتب عبارة في أبسط صورة للمسافة التي تقطعها البيضة بعد ن ثانية.
$١٦ن^{٢}$

٢) **هندسة مدنية**، يخطط مهندس لتطوير ممرّ مشاة مستعملًا مقاطع مستطيلة عرضها ثابت ويساوي ٣ أقدام وطولها متغير. اعرض أن طول كلّ مقطع هو س، ثمّ عبّر عن مساحة ٤ مقاطع على صورة وحيدة حد.
١٢س

٣) **احتمال**، إذا أُلقيت قطعة نقود ٣ مرات، فستحصل على ٢ ناتجًا ممكنًا كما في الجدول الآتي:

النواتج الممكنة		
ش ش ش	ك ك ك	
ش ك ك	ك ش ش	
ش ك ش	ك ش ك	
ش ش ك	ك ك ش	

ثمّ إذا أُلقيت قطعة النقد مرتين زيادة على ٣ مرات، فستحصل على $٢^{٢} \times ٢^{٢}$ ناتجًا ممكنًا. ما عدد النواتج الممكنة التي ستحصل عليها إذا أُلقيت قطعة النقد ٤ مرات زيادة على ٥ مرات؟ اكتب الإجابة على الصورة $٢^{ن}$.
$٢^{٩}$

٤) **رياضة**، يُعطى حجم الكرة بالصيغة ح = $\frac{٤}{٣}$ط نق^{٣}، حيث نق طول نصف قطر الكرة. أوجد حجم الهواء في ثلاث كرات سلّة مختلفة على نحو الجدول الآتي:

استعمل ط = ٣,١٤، وقرّب إجابتك إلى أقرب عدد كلي.

الكرة	طول نصف القطر (بوصة)	الحجم (بوصة^{٣})
للأطفال	٤	٢٦٨
للنساء	٤,٥	٣٨٢
للرجال	٤,٨	٤٦٣

٥) **كهرباء**، يستعمل مهندس كهربائي الصيغة ق = ش^{٢}م، حيث ق القدرة الكهربائية بالواط، ش شدة التيار بالأمبير، م المقاومة بالأوم.

أ) أوجد قدرة دائرة كهربائية لمنزل، إذا كانت شدة التيار ٢٠ أمبير، والمقاومة ٥ أوم.
٢٠٠٠ واط

ب) إذا تضاعفت شدة التيار بمقدار النصف، فماذا يحدث للقدرة الكهربائية؟
تصبح القدرة الكهربائية ربع القدرة الكهربائية السابقة.

التدريبات الإثرائية (٩) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-١ التدريبات الإثرائية
نظام العد الثنائي

تخزّن الحواسيب الإلكترونية الرقمية المعلومات على صورة أعداد. وبما أنّ الدوائر الكهربائية للحاسب توجد بواحدة من حالتين فقط، مفتوحة أو مغلقة، فإنّ الأعداد المخزنة تتكون من رقمين فقط هما صفر أو ١، والأعداد المكتوبة باستعمال صفر أو ١ فقط تسمّى **الأعداد الثنائية**.

لإيجاد القيمة بالنظام العشري للعدد الثنائي، استعمل أرقام العدد لكتابته بالصيغة التحليلية على صورة قوى للعدد ٢.

وفيما يأتي مثال على كيفية إيجاد القيمة العشرية للعدد (١٠٠١١٠١)$_{٢}$. (يشير الرقم ٢ إلى أنّ العدد المعطى بالنظام الثنائي).

$(١٠٠١١٠١)_{٢} = ١ \times ٢^{٦} + ٠ \times ٢^{٥} + ٠ \times ٢^{٤} + ١ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٢} + ٠ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٠}$

$= ١ \times ٦٤ + ٠ \times ٣٢ + ٠ \times ١٦ + ٨ \times ١ + ٤ \times ١ + ٢ \times ٠ + ١ \times ١$

$= ٦٤ + ٠ + ٠ + ٨ + ٤ + ٠ + ١$

$= ٧٧$

ولتحويل عدد من النظام العشري إلى النظام الثنائي يمكن اتباع طريقة القسمة على ٢ بالتسلسل إلى أن يكون ناتج القسمة صفر، وتسجل باقي القسمة في كل مرة، فيكون العدد الثنائي هو باقي القسمة مرتبة من اليمين إلى اليسار من الأول إلى الآخر. ويوضح ذلك المثال الآتي:

مثال اكتب العدد ٧٥ بالنظام الثنائي.

	الباقي
٢ | ٧٥	١
٢ | ٣٧	١
٢ | ١٨	٠
٢ | ٩	١
٢ | ٤	٠
٢ | ٢	٠
٢ | ١	١

إذن ٧٥ = (١٠٠١٠١١)$_{٢}$.

تمارين

أوجد القيمة بالنظام العشري لكل عدد ثنائي فيما يأتي:

١) (١١١١)$_{٢}$، ١٥ ٢) (١٠٠٠٠)$_{٢}$، ١٦ ٣) (١١٠٠٠٠١١)$_{٢}$، ١٩٥ ٤) (١٠١١١٠٠١)$_{٢}$، ١٨٥

اكتب كلّ عدد بالنظام العشري على صورة عدد ثنائي فيما يأتي:

٥) ٨ (١٠٠٠)$_{٢}$، ٦) ١١ (١٠١١)$_{٢}$، ٧) ٢٩ (١١١٠١)$_{٢}$، ٨) ١١٧ (١١١٠١٠١)$_{٢}$،

كتاب التمارين (٤) — دون ضمن فوق

الفصل السادس: كثيرات الحدود

٦ - ١ ضرب وحيدات الحد

حدّد إذا كانت كل من العبارتين الآتيتين وحيدة حدّ، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك.

١) $\frac{٢١أ^{٢}}{ب^{٣}}$ لا؛ تتضمن هذه العبارة متغيرًا في المقام.
٢) $\frac{ب^{٣}جـ^{٢}}{٩}$ نعم؛ حاصل ضرب عدد في متغيرين.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

٣) $(-٥س^{٢}ص)(٣س)$ $-١٥س^{٣}ص$
٤) $(٢أب^{٢})(٤أ^{٣}ب^{٢})$ $٨أ^{٤}ب^{٤}$
٥) $(٣أ^{٢})(-٢أ^{٢})$ $-٦أ^{٤}د^{٢}$
٦) $(٤جـ^{٢}هـ)(-٢جـ^{٣})$ $-٨جـ^{٥}هـ$
٧) $(-١٥ س ص^{٤})(-\frac{١}{٣}س ص^{٣})$ $٥س^{٢}ص^{٧}$
٨) $(-س ص)^{٢}(س ع)$ $-س^{٣}ص^{٢}ع$
٩) $(-١٨ م^{٣}ن^{٥})(-\frac{١}{٣}م ن^{٣})$ $٥٤م^{٤}ن^{٨}$
١٠) $(٢٠,٢أ^{٣}ب^{٣})^{٢}$ $٠,٠٤أ^{٦}ب^{٦}$
١١) $(\frac{٣}{٤}ب^{٢})^{٢}$ $\frac{٩}{١٦}ب^{٤}$
١٢) $(\frac{١}{٢}أد^{٣})^{٢}$ $\frac{١}{٤}أ^{٢}د^{٦}$
١٣) $(٠,٤ ك^{٣})^{٢}$ $٠,١٦ك^{٦}$
١٤) $[(٤^{٢})^{٢}]^{٢}$ $٤^{٨} = ٦٥٥٣٦$

هندسة، عبّر عن مساحة كل شكل فيما يأتي على صورة وحيدة حدّ.

١٥) مستطيل، الطول $٦أب^{٢}$، العرض $٣أ^{٢}ب$ — $١٨أ^{٣}ب^{٣}$
١٦) دائرة، نق = ٥س — $٢٥س^{٢}ط$
١٧) مثلث قائم الزاوية، القاعدة $٤أ^{٢}ب$، الارتفاع $٦أب^{٢}$ — $١٢أ^{٣}ب^{٣}$

هندسة، عبّر عن حجم كل مجسّم فيما يأتي على صورة وحيدة حدّ.

١٨) مكعب، طول الحرف $٣هـ^{٢}$ — $٢٧هـ^{٦}$
١٩) متوازي مستطيلات، الأبعاد $٢م^{٢}$، $٣م^{٢}ن$، $٥ن$ — $م^{٥}ن^{٢}$
٢٠) أسطوانة، نق = ب، الارتفاع $٧ب^{٢}$ — $٧ب^{٥}ط$

٢١) إذا أمكن إعداد لوحة بأربعة مفاتيح كهربائية بطرق عددها ؟. ولوحة بخمسة مفاتيح عدد طرقها يساوي مثلي هذا العدد، فكم طريقة يمكن إعداد لوحة ذات خمسة مفاتيح؟ $٢^{؟} = ٣٢$ طريقة

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٦-٢

ضرب وحيدات حد.

الدرس ٦-٢

إيجاد ناتج قسمة وحيدتَي حد.
تبسيط عبارات تحتوي أسسًا سالبة أو صفر.

ما بعد الدرس ٦-٢

إيجاد درجة كثيرة حدود.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ثم اسأل:

- ما قيمة $١٠^{٦}$ في أبسط صورة؟ ١٠٠٠٠٠٠
- ما قيمة $١٠^{٥}$ في أبسط صورة؟ ١٠٠٠٠٠
- كيف تستطيع استعمال الأسس لكتابة نسبة عدد سكان مدينة الأحساء، إلى عدد سكان مدينة الباحة؟ $\frac{١٠^{٦}}{١٠^{٥}} = ١٠^{١}$

إرشادات للمعلم الجديد

خصائص: وجِّه الطلاب إلى أن تعريف ناتج قسمة قوى، يشترط أن (أ) لا يساوي صفرًا. واسأل: لماذا يجب ألّا تكون (أ) تساوي صفرًا؟ إذا كانت أ= ٠، فستقسم على صفر، وهذا غير معرّف.

قسمة وحيدات الحد

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد.

والآن

- أجد ناتج قسمة وحيدتي حد.
- أبسّط عبارات تحتوي أسسًا سالبة أو صفرًا.

المفردات

رتبة المقدار

obeikaneducation.com

لماذا؟

بلغ عدد سكان محافظة الإحساء في عام ١٤٣١ هـ ١٠٦٣١١٢ نسمة أي مليون نسمة تقريبًا أو $١٠^{٦}$، وبلغ عدد سكان محافظة الباحة في العام نفسه ١٠٣٤١١ نسمة أي ١٠٠ ألف نسمة تقريبًا أو $١٠^{٥}$ فتكون نسبة عدد سكان الإحساء إلى عدد سكان الباحة في تلك السنة هي:

$\frac{١٠^{٦}}{١٠^{٥}} = ١٠^{١}$ وهذا يعني أن عدد سكان الإحساء يساوي ١٠ أمثال عدد سكان الباحة.

قسمة وحيدات الحد: يمكنك استعمال مبادئ اختصار الكسور الاعتيادية؛ لإيجاد ناتج قسمة وحيدتي حد مثل $\frac{١٠^{٦}}{١٠^{٥}}$ انظر إلى نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{٢^{٧}}{٢^{٤}} = \frac{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٣}$$

٧ عوامل — ٤ عوامل

$$\frac{ن^{٤}}{ن^{٣}} = \frac{ن \times ن \times ن \times ن}{ن \times ن \times ن} = ن$$

٤ عوامل — ٣ عوامل

ويبيِّن المثالان السابقان خاصية قسمة القوى.

مفهوم أساسي — قسمة القوى

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه اطرح أُسَّيهما (أس البسط – أس المقام).

الرموز: لأي عدد أ ≠ ٠؛ وأي عددين صحيحين م، ن، فإن: $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$.

أمثلة: $\frac{جـ^{١١}}{جـ^{٨}} = جـ^{١١-٨} = جـ^{٣}$ $\quad \frac{ر^{٥}}{ر^{٢}} = ر^{٥-٢} = ر^{٣}$

مثال ١ — قسمة القوى

بسّط العبارة $\frac{جـ^{٣}هـ^{٥}}{جـهـ^{٢}}$ مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$\frac{جـ^{٣}هـ^{٥}}{جـهـ^{٢}} = \left(\frac{جـ^{٣}}{جـ}\right)\left(\frac{هـ^{٥}}{هـ^{٢}}\right)$ — جمِّع القوى ذات الأساس نفسه

$= (جـ^{٣-١})(هـ^{٥-٢})$ — اقسم القوى

$= جـ^{٢}هـ^{٣}$ — بسّط

تحقق من فهمك

أ) $\frac{س^{٣}ص^{٤}}{س^{٢}ص}$ $\quad س ص^{٣}$

ب) $\frac{ك^{٧}م^{١٠}ب}{ك^{٥}م^{٣}ب}$ $\quad ك^{٢}م^{٧}$

مصادر الدرس ٦-٢

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٨)	• تنويع التعليم ص (١٨ ، ٢١)	• تنويع التعليم ص (١٨ ، ٢١)
كتاب التمارين	ص (٥)	ص (٥)	ص (٥)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) • تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢) • التدريبات الإثرائية، ص (١٣)

يمكنك استعمال تعريف القوى لإيجاد ناتج قوى قسمة وحيدات الحد، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{٣^{٣}}{٤^{٣}}=\frac{\overbrace{٣\times٣\times٣}^{\text{٣ عوامل}}}{\underbrace{٤\times٤\times٤}_{\text{٣ عوامل}}}=\overbrace{\left(\frac{٣}{٤}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)}^{\text{٣ عوامل}}=\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣}$$

$$\frac{جـ^{٢}}{د^{٢}}=\frac{\overbrace{جـ\times جـ}^{\text{عاملان}}}{\underbrace{د\times د}_{\text{عاملان}}}=\overbrace{\left(\frac{جـ}{د}\right)\left(\frac{جـ}{د}\right)}^{\text{عاملان}}=\left(\frac{جـ}{د}\right)^{٢}$$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة للمتغيرات

تطبق قوانين القوة على المتغيرات تمامًا كما تطبق على الأعداد. فمثلاً $\frac{٣^{(أ)}}{٣^{(ب٤)}}=\left(\frac{أ}{ب٤}\right)^{٣}=\frac{٣^{٣}أ^{٣}}{٣^{٣}ب٤^{٣}}=\frac{٢٧أ^{٣}}{٦٤ب^{٣}}$

مفهوم أساسي قوى القسمة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة ناتج قسمة، أوجد كلًّا من قوة البسط وقوة المقام.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب ≠ صفر؛ وأي عدد صحيح م فإن: $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م}=\frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

أمثلة: $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤}=\frac{٣^{٤}}{٥^{٤}}$ $\qquad$ $\left(\frac{ر}{ن}\right)^{٥}=\frac{ر^{٥}}{ن^{٥}}$

مثال ٢ قوى القسمة

بسّط العبارة: $\left(\frac{٣م^{٣}}{٧}\right)^{٢}$.

$\left(\frac{٣م^{٣}}{٧}\right)^{٢}=\frac{(٣م^{٣})^{٢}}{٧^{٢}}$ قوى القسمة

$=\frac{٣^{٢}(م^{٣})^{٢}}{٧^{٢}}$ قوة حاصل الضرب

$=\frac{٩م^{٦}}{٤٩}$ قوة القوة

تحقق من فهمك

٢أ) $\left(\frac{٣س^{٤}}{٤}\right)^{٣}\frac{٢٧س^{١٢}}{٦٤}$ $\qquad$ ٢ب) $\left(\frac{٢ص^{٢}}{٣ع^{٣}}\right)^{٢}\frac{٤ص^{٤}}{٩ع^{٦}}$ $\qquad$ ٢جـ) $\left(\frac{٤س^{٣}}{٥ص^{٤}}\right)^{٣}\frac{٦٤س^{٩}}{١٢٥ص^{١٢}}$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لاستكشاف عبارات مرفوعة للأس صفر. ويوجد طريقتان لتفسير لماذا تعطي الآلة الحاسبة ٣ ^ ٠ = ١

الطريقة ١		الطريقة ٢	
$\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}}=٣^{٥-٥}$	ناتج قسمة القوى	$\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}}=\frac{٣\times٣\times٣\times٣\times٣}{٣\times٣\times٣\times٣\times٣}$	تعريف القوى
$=٣^{٠}$	بسّط	$=١$	بسّط

وبما أن للعبارة $\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن ٣ ^ ٠ = ١

التعليم باستعمال التقنيات

المدونة: اطلب إلى الطلاب أن يضيفوا إلى مدونة الصف، مدونة يفسّرون فيها كيف يجدون ناتج قسمة القوى، وقوة ناتج القسمة.

ناتج قسمة وحيدات الحد

المثال ١ يُبيّن طريقة إيجاد ناتج قسمة القوى.

المثال ٢ يُبيّن طريقة إيجاد قوة ناتج القسمة.

المثال ٣ يُبيّن طريقة تبسيط عبارات تحتوي على أسس صفرية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ بسّط العبارة $\frac{س^{٧}ص^{١٢}}{س^{٦}ص^{٣}}$، مفترضًا أن المقام لايساوي صفرًا. $س\,ص^{٩}$

٢ بسّط العباراة: $\left(\frac{٤جـ^{٣}د^{٢}}{٥}\right)^{٣}$.

$\frac{٦٤جـ^{٩}د^{٦}}{١٢٥}$

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: ذكّر الطلاب بإيجاد قوى الحد الثابت في وحيدات الحد.

المحتوى الرياضي

قوى الأعداد السالبة: قد يفترض الطلاب أن العبارة $-٦^{٣}$ تعني $(-٦)(-٦)(-٦)$. بيّن لهم أن $-٦^{٣}$ تعني $-(٦^{٣})$. وللتعبير عن -٦ للقوة الثالثة، يجب استعمال الأقواس، $(-٦)^{٣}$.

مفهوم أساسي — خاصية الأس الصفري

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة صفر يساوي ١

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي صفرًا فإن: أ^{٠} = ١

أمثلة: ١٥^{٠} = ١ ، $\left(\frac{ب}{جـ}\right)^{٠}$ = ١ ، $\left(\frac{٢}{٧}\right)^{٠}$ = ١

مثال ٣ الأس الصفري

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\left(-\frac{٤ن^{٢}ك^{٥}ر^{٢}}{٩ن^{٣}ك^{٢}ر}\right)^{٠}$ = ١ ، أ^{٠} = ١

ب) $\frac{س^{٥}ص^{٠}}{س^{٣}}$ ، $\frac{س^{٥}(١)}{س^{٣}} = \frac{س^{٥}ص^{٠}}{س^{٣}}$ ، أ^{٠} = ١

اقسم القوى = س^{٢}

تحقق من فهمك

٣أ) $\frac{ب^{٤}جـ^{٢}د^{٠}}{ب^{٢}جـ}$ ، ب^{٢}جـ

٣ب) $\left(\frac{٢ن^{٤}جـ^{٧}هـ^{٣}}{١٥ن^{٣}جـ^{٩}هـ^{٦}}\right)^{٠}$ ، ١

إرشادات للدراسة

الأس الصفري

انتبه للأقواس عند تبسيط أي عبارة.

فالعبارة (٥س)^{٠} تساوي ١ إلا أن العبارة ٥س^{٠} = ٥

الأسس السالبة: لاستقصاء معنى الأسس السالبة، يمكنك تبسيط عبارات مثل $\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة ١

$\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ = س$^{٢-٥}$ ناتج قسمة القوى

= س$^{-٣}$ بسّط

الطريقة ٢

$\frac{س^{٢}}{س^{٥}} = \frac{س \times س}{س \times س \times س \times س \times س}$ تعريف القوى

$= \frac{١}{س^{٣}}$ بسّط

بما أن للعبارة $\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن س$^{-٣}$ = $\frac{١}{س^{٣}}$

مفهوم أساسي — خاصية الأسس السالبة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، ولأي عدد صحيح ن، فإن مقلوب أ^{ن} هو أ$^{-ن}$، ومقلوب أ$^{-ن}$ هو أ^{ن}.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر ، وأي عدد صحيح ن، فإن: أ$^{-ن}$ = $\frac{١}{أ^{ن}}$ ، $\frac{١}{أ^{-ن}}$ = أ^{ن}.

أمثلة: ٢$^{-٤}$ = $\frac{١}{٤^{٢}}$ = $\frac{١}{١٦}$ ، جـ$^{-٤}$ = $\frac{١}{جـ^{-٤}}$

تُعد العبارة في أبسط صورة لها إذا احتوت على أسس موجبة فقط، وظهر كل أساس مرة واحدة فقط، ولا تتضمن قوى القوى، وأن تكون جميع الكسور الاعتيادية فيها بأبسط صورة.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: اسأل الطلاب: لماذا لم تؤثّر الإشارة السالبة في المثال ٣ في النتيجة؟ على الطلاب تفسير لماذا يكون أي عدد غير الصفر مرفوعًا للقوة صفر يساوي ١، وأن العدد السالب ليس صفرًا.

مثال إضافي

٣ بسّط العبارتين الآتيتين مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\left(\frac{١٢م^{٨}ن^{٧}}{٨م^{٥}ن^{-١}}\right)^{٠}$ ١

ب) $\frac{م^{٠}ن^{٣}}{ن^{٢}}$ ن

إرشادات للمعلم الجديد

صفر للقوة صفر: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا عبارة تتضمّن عملية قسمة تكافئ (٠)^{٠} فمثلًا، $\frac{٠^{٦}}{٠^{٦}}$ وبيّن لهم أن $\frac{٠^{٦}}{٠^{٦}} = \frac{٠}{٠}$، وذكّرهم بأن القسمة على الصفر كمية غير معرّفة.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في ربط المفاهيم الأساسية في هذا الدرس بالعبارات،

فقم بتوجيههم لِمعرض كل مفهوم أساسي على بطاقات خاطفة.
واكتب مثالًا لعبارة على مفهوم أساسي على السبورة، واطلب إليهم إظهار بطاقاتهم المرتبطة بالمثال، ثم وصف طريقة تبسيط هذه العبارة.

مثال ٤ الأسس السالبة

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}}$

$\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}} = \left(\frac{١}{ر^{-٢}}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{ن^{-٥}}{١}\right)$ اكتب العبارة على صورة حاصل ضرب كسور اعتيادية

$= \left(\frac{١}{ن^{٥}}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{ر^{٢}}{١}\right)$ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$، $\frac{١}{أ^{-ن}} = أ^{ن}$

$= \frac{ف^{٤}ر^{٢}}{ن^{٥}}$ اضرب

ب) $\frac{٢د^{٢}ب^{٣}جـ^{-٥}}{١٠د^{-٣}ب^{-١}جـ^{-٤}}$

$\frac{٢د^{٢}ب^{٣}جـ^{-٥}}{١٠د^{-٣}ب^{-١}جـ^{-٤}} = \left(\frac{٢}{١٠}\right)\left(\frac{د^{٢}}{د^{-٣}}\right)\left(\frac{ب^{٣}}{ب^{-١}}\right)\left(\frac{جـ^{-٥}}{جـ^{-٤}}\right)$ جمّع القوى للأساس نفسه

$= \left(\frac{١}{٥}\right)\left(د^{٢-(-٣)}\right)\left(ب^{٣-(-١)}\right)\left(جـ^{-٥-(-٤)}\right)$ اقسم القوى، خاصية الأسس السالبة

$= \frac{١}{٥}د^{٥}ب^{٤}جـ^{-١}$ بسّط

$= \frac{١}{٥}(د^{٥})(ب^{٤})\left(\frac{١}{جـ}\right)$ خاصية الأسس السالبة

$= \frac{د^{٥}ب^{٤}}{٥جـ}$ اضرب

تحقق من فهمك

٤أ) $\frac{ف^{-٣}و س^{٢}}{و ص^{-٦}}$ $\frac{س^{٢}ص^{٦}}{ف^{٣}}$ ب) $\frac{٣٢د^{-٨}ب^{٣}جـ^{-٤}}{٤د^{٣}ب^{٥}جـ^{-٢}}$ $\frac{٨}{د^{١١}ب^{٢}جـ^{٢}}$ جـ) $\frac{٥جـ^{-٣}ك^{٢}م^{-٦}}{٢٥ك^{-٤}م^{-٢}}$ $\frac{ك^{٦}}{٥جـ^{٣}م^{٤}}$

تستعمل **رتبة المقدار** لمقارنة المقادير وتقدير الحسابات وإجرائها بسرعة، وتعبر عن العدد مقرّبًا إلى أقرب قوى العشرة. فمثلاً العدد ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠ مقرّبًا إلى أقرب قوى العشرة هو $١٠^{١١}$ أو ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠، لذا فإن رتبة المقدار ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠ هي $١٠^{١١}$.

مثال ٥ من واقع الحياة تطبيق خواص الأسس

طول: افترض أن معدل طول الرجل ١,٧ متر، ومعدل طول النملة هو ٠,٠٠٠٨ متر. فكم مرة تساوي رتبة مقدار طول الرجل رتبة مقدار طول النملة؟

افهم: علينا إيجاد رتبة طول كل من الرجل والنملة، ثم إيجاد النسبة بينهما.

خطّط: قرّب كل طول إلى أقرب قوة للعدد ١٠، ثم أوجد نسبة طول الرجل إلى طول النملة.

حل: بما أن معدل طول الرجل قريب من ١ متر؛ لذا تكون رتبة مقدار طوله هي $١٠^{٠}$ أمتار. وبما أن معدل طول النملة يساوي ٠,٠٠١ متر تقريبًا؛ لذا فرتبة طول النملة هي $١٠^{-٣}$ أمتار.

إرشادات للدراسة

الإشارة السالبة

تأكد من موقع الإشارة السالبة. فمثلاً، $٥^{-١} = \frac{١}{٥}$، في حين أن $-٥^{١} \neq \frac{١}{٥}$

الربط مع الحياة

يوجد أكثر من ١٤٠٠٠ نوع من النمل في الكرة الأرضية.

وبعضها يستطيع حمل أشياء وزنها يعادل ٥٠ مرة من وزن النملة.

الأسس السالبة

المثال ٤ يُبيّن طريقة تبسيط عبارات تتضمّن أسسًا سالبة.

المثال ٥ يُبيّن طريقة تطبيق خصائص الأسس في حالات من واقع الحياة .

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: اطلب إلى الطلاب ملاحظة الخطوة الأولى في حل المثال ٤، وأشر إلى أن إعادة كتابة العبارة في صورة حاصل ضرب كسور، تجعل تطبيق خاصية الأسس السالبة أسهل، ويمكن كتابة الكسور ذات الأسس السالبة في صورة مقلوبها.

إرشادات للمعلم الجديد

وحيدات الحد: وجِّه الطلاب إلى أن المتغيّر بأُسٍّ سالبٍ مثل $س^{-٢}$ ليس وحيدة حد؛ لأن وحيدة الحد لا تحتوي على متغيّرات في المقام، وأن $س^{-٢} = \frac{١}{س^{٢}}$

مثالان إضافيان

٤ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\frac{س^{-٤}ص^{٩}}{ع^{-٦}} \cdot \frac{ص^{٩}ع^{٦}}{س^{٤}}$

ب) $\frac{٧٥ر^{٣}م^{-٥}}{١٥ر^{٥}م^{-٤}ل^{-٨}}$ $\frac{٥ل^{٨}}{ر^{٢}م^{٢}}$

٥ توفير: لدى سيف ١٢٣٤٥٦ ريالًا في حسابه، ولدى طارق ١٥٦ ريالًا في حسابه. كم مرة تساوي رتبة مقدار حساب سيف رتبة مقدار حساب طارق؟

سيف $١٠^{٥}$، طارق $١٠^{٢}$

حساب سيف يزيد بمقدار ثلاث رتب عن حساب طارق.

نسبة طول الرجل إلى طول النملة يساوي تقريبًا $\frac{١٠^{٠}}{١٠^{-٣}}$

$\frac{١٠^{٠}}{١٠^{-٣}} = ١٠^{٠-(-٣)}$ — اقسم القوى

$= ١٠^{٣}$ — $٠ - (-٣) = ٠ + ٣ = ٣$

$= ١٠٠٠$ — بسّط

لذا فطول الرجل يساوي ١٠٠٠ مرة من طول النملة تقريبًا. أو نسبة طول الرجل إلى طول النملة تساوي تقريبًا القوة الثالثة للعشرة.

تحقق: نسبة طول الرجل إلى طول النملة هي $\frac{١,٧}{٠,٠٠٠٨} = ٢١٢٥$ وأقرب قوى العشرة للعدد ٢١٢٥ هي $١٠^{٣}$ ✓

تحقق من فهمك

٥) **علم الفلك:** رتبة مقدار كل من كتلة الأرض ودرب التبانة لأقرب قوى العشرة هي: $١٠^{٢٧}$، $١٠^{٤٤}$ على الترتيب. فكم مرة تساوي رتبة مقدار كتلة درب التبانة رتبة مقدار كتلة الأرض؟ $١٠^{١٧}$

تأكد

الأمثلة ١-٤ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

١) $\frac{هـ^{٥}ل^{٤}}{هـ^{٢}ل}$ $هـ^{٣}ل^{٣}$ ٢) $\frac{م^{٦}ر^{٥}ب^{٣}}{م^{٥}ر^{٢}ب^{٣}}$ $م ر^{٣}$ ٣) $\frac{ب^{٤}جـ^{٦}ن^{٨}}{ب^{٤}جـ^{٣}ن^{٥}}$ ٤) $\frac{جـ^{٨}هـ^{٢}م}{هـ جـ^{٧}}$ $جـ هـ م$

٥) $\frac{ر^{٤}ن^{٧}ف^{٢}}{ن^{٧}ف^{٢}}$ $ر^{٤}$ ٦) $\frac{س^{٣}ص^{٢}ع^{٦}}{ع^{٥}س^{٢}ص}$ ٧) $\frac{ن^{٤}ك^{٤}و^{٦}}{ك^{٢}ن^{٣}و}$ $نك^{٢}و^{٥}$ ٨) $\frac{ر^{٣}ف^{-٢}}{ن^{-٧}}$ $\frac{ر^{٣}ن^{٧}}{ف^{٢}}$

٩) $\left(\frac{٢جـ^{٣}د^{٥}}{٥هـ^{٢}}\right)^{٥}$ ١٠) $-\left(\frac{٣س ص^{٤}ع^{٢}}{س^{٣}ص ع^{٤}}\right)^{٠}$ ١١) ١ ١٢) $\frac{ف^{-٣}جـ^{٢}}{هـ^{-٤}}$ $\frac{٤ر^{٢}ف^{٠}هـ^{٥}}{٢ر هـ^{٣}}$

مثال ٥

١٣) **إنترنت:** ارتفع عدد مستعملي الإنترنت في المملكة من ٢٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٢١ هـ إلى ١١٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣١ هـ. حدّد نسبة عدد مستعملي الإنترنت عام ١٤٣١ هـ إلى مستعمليه عام ١٤٢١ هـ باستعمال رتبة المقدار للعامين. نسبة عدد مستعملي الإنترنت عام ١٤٣١ هـ إلى عددهم عام ١٤٢١ هـ يساوي $١٠^{٢}$ تقريبًا.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٤ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

١٤) $\frac{م^{٤}ن^{٢}}{م^{٢}ن}$ $م^{٢}ن$ ١٥) $\frac{جـ^{٤}د^{٤}هـ^{٣}}{جـ^{٢}د^{٤}هـ^{٣}}$ $جـ^{٢}$ ١٦) $\left(\frac{٣س ص^{٤}}{٥ع^{٢}}\right)^{٢}$ ١٧) $\frac{س^{-٤}ص^{٩}}{ع^{-٢}}$ ١٨) $\frac{أ^{٧}ب^{٨}جـ^{٨}}{أ^{٥}ب جـ^{٧}}$

١٩) $\frac{ل^{١٢}ن^{٧}ر^{٢}}{ل^{٢}ن^{٧}ر}$ $ل^{١٠}ر$ ٢٠) $-\left(\frac{٥ن^{٩}جـ^{٤}هـ^{٢}}{ن جـ^{٢}هـ^{٣}}\right)^{٠}$ ٢١) $-\frac{٥جـ^{٢}د^{٥}}{٨جـ د^{٥}ن^{٠}}$ ٢٢) $\frac{-٢ن^{٣}جـ^{٢}هـ^{٠}}{٨ن^{٢}جـ^{٢}}$

٢٣) $\frac{-ن}{٤}$ ٢٤) $\frac{١٢م^{-٤}ل^{٢}}{-١٥م^{٣}ل^{-٩}}$ ٢٥) $\left(\frac{أ^{-٢}ب٤جـ^{٥}}{أ^{-٤}ب^{-٤}جـ^{٣}}\right)^{٢}$ ٢٥) $\frac{ر^{٣}ن^{-١}س^{-٥}}{ن س^{٥}}$

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ١٣؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٤–٢٥، ٢٨، ٢٩، ٣١–٣٧
ضمن ضمن المتوسط	١٤–٢٢ (زوجي)، ٢٥–٣٠، ٣١–٣٧
فوق فوق المتوسط	٢٧–٣٧

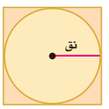
مثال ٥

٢٦) **حواسيب:** وصلت سرعة معالج الحاسوب عام ١٤١٤ هـ إلى $١٠^{٨}$ عملية في الثانية تقريبًا. وازدادت هذه السرعة إلى $(١٠)^{١٠}$ عملية في الثانية عام ١٤٢٥هـ. فكم مرة يكون الحاسوب الجديد أسرع من القديم؟ ١٠٠

الربط مع الحياة

حواسيب: تتعدد أنواع الحواسيب من حيث طريقة عملها وحجمها وسرعتها. وكانت الحواسيب الإلكترونية في حجم غرفة كبيرة، وتستهلك طاقة مماثلة لما يستهلكه مئات الحواسيب الشخصية اليوم. بينما يمكن الآن صنع حواسيب داخل ساعة يد تأخذ طاقاتها من بطارية الساعة.

٢٧) **تمثيلات متعددة:** تستعمل الصيغة م = ط نق^{٢} لإيجاد مساحة الدائرة، وتستعمل الصيغة م = ل^{٢} لإيجاد مساحة المربع الذي طول ضلعه ل. استخدم الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة أ – د.



أ) جبريًا: أوجد نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع. $\frac{ط}{٤}$

ب) جبريًا: إذا ضُرب كل من نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع في العدد ٢، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟ $\frac{ط}{٤}$

جـ) جدوليًا: أكمل الجدول المقابل.

نصف القطر	مساحة الدائرة	مساحة المربع	النسبة
نق	ط نق^{٢}	٤نق^{٢}	$\frac{ط}{٤}$
٢نق	٤ط نق^{٢}	١٦نق^{٢}	$\frac{ط}{٤}$
٣نق	٩ط نق^{٢}	٣٦نق^{٢}	$\frac{ط}{٤}$
٤نق	١٦ط نق^{٢}	٦٤نق^{٢}	$\frac{ط}{٤}$
٥نق	٢٥ط نق^{٢}	١٠٠نق^{٢}	$\frac{ط}{٤}$

د) تحليليًا: ما الاستنتاج الذي توصلت إليه؟
نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع تساوي دائمًا $\frac{ط}{٤}$.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٨) **تبرير:** هل المعادلة "س$_{ص}$ × س$_{ع}$ = س$_{ص ع}$" صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا ؟ فسّر إجابتك. ٢٨–٣١ انظر الهامش

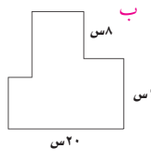
٢٩) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا لوحيدتي حد يكون ناتج قسمتهما ٢٤ أ^{٢} ب^{٣}

٣٠) **تحدٍّ:** استعمل خاصية قسمة القوى لتفسير المساواة س$^{-ن}$ = $\frac{١}{\text{س}^{ن}}$

٣١) **اكتب:** وضِّح كيف تستعمل خاصية قسمة القوى وخاصية قوى القسمة؟

تدريب على اختبار

٣٢) **هندسة:** ما محيط الشكل المجاور؟ ب



أ) ٤٠س جـ) ١٦٠س

ب) ٨٠س د) ٤٠٠س

٣٣) بسّط العبارة: $(٤^{-٢} \times ٠٫٥ \times ٦٤)^{٣}$ ب

أ) $\frac{١}{٦٤}$ جـ) ٣٢٠

ب) ٦٤ د) ١٠٢٤

مراجعة تراكمية

٣٤) **علم الأرض:** موجة زلزال قوته ٦ أكبر من موجة زلزال قوته ٤ بـ $١٠^{٢}$ مرات. وموجة زلزال قوته ٤ تساوي ١٠ أمثال موجة زلزال قوته ٣ فكم مرة تساوي موجة زلزال قوته ٦ موجة زلزال قوته ٣؟ $١٠^{٣}$ (الدرس ٦-١)

حلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وتحقَّق من صحة الحل: (الدرس ٤-٣)

٣٥) ٥(٢هـ – ٦) > ٤هـ هـ > ٥

٣٦) ٢٢ ≤ ٤(ب – ٨) + ١٠ ب ≥ ١١

٣٧) ٥(ب – ٨) ≥ ٣(ب + ١٠) ب ≥ ٣٥

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أنه إذا كان احتمال الحصول على لون أحمر عند رمي مكعب ملوّن هو $\frac{١}{٢}$، فإن احتمال الحصول على لون أحمر عند رمي المكعب (ن) مرة، هو $(\frac{١}{٢})^{ن}$، واطلب إليهم تحديد كم مرة يتم رمي المكعب، إذا كان احتمال الحصول على اللون الأحمر في كل مرة منها هو $\frac{١}{٥١٢}$

$\frac{١}{٥١٢} = (\frac{١}{٢})^{٩}$، ن= ٩؛ لذا يكون عدد المرات هو ٩

تمثيلات متعددة: في السؤال ٢٧ يستعمل الطلاب التمثيل الهندسي، والصيغ الجبرية، وجدول القيم؛ لتحليل العلاقة بين المربع والدائرة المرسومة داخله.

٤ التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة طريقتين يساعدهم فيها ضرب وحيدات الحد على فهم قسمة وحيدات الحد.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين(٦–١ ، ٦–٢) بإعطائهم:

الاختبار القصير (١)، ص (١١)

إجابات:

٢٨) إجابة ممكنة: المعادلة صحيحة أحيانًا. صحيحة عندما: س = ٠، ص = ٢ ، ع = ٣
وخاطئة عندما: س = ١ ، ص = ٢، ع = ٣

٢٩) إجابة ممكنة: ٢٤أ^{٤} ب^{٦} ، أ^{٢} ب^{٣}
حيث: $\frac{٢٤أ^{٤}ب^{٦}}{أ^{٢}ب^{٣}}$ = ٢٤ أ^{٢} ب^{٣}

٣٠) $\frac{١}{\text{س}^{ن}} = \frac{\text{س}^{٠}}{\text{س}^{ن}}$
= س$^{٠-ن}$
= س$^{-ن}$

٣١) تُستعمل خاصية ناتج قسمة القوى عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه، وذلك بطرح الأسّين، وتُستعمل خاصية قوة ناتج القسمة لإيجاد قوة ناتج القسمة، وذلك بتوزيع القوة على كلٍّ من: المقام والبسط.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٦ - ٢

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٠)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٢ تدريبات إعادة التعليم
قسمة وحيدات الحد

قسمة وحيدات الحد: عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه، اطرح الأسّين.

قسمة القوى	لأيّ عدد أ ≠ ٠، وأيّ عددين صحيحين م، ن، فإنّ $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$
قوى القسمة	لأي عددين حقيقيين أ، ب ≠ ٠، وأي عدد صحيح م، فإنّ $(\frac{أ}{ب})^م = \frac{أ^م}{ب^م}$

مثال ١ بسّط $\frac{أ^٣ب^٢}{أب}$، مفترضًا أنّ المقام لا يساوي صفرًا.

$\frac{أ^٣ب^٢}{أب} = (\frac{أ}{١})^{٣-١}(\frac{ب}{ب})^{٢-١}$ جمع القوى ذات الأساس نفسه

$= (أ^{١-٣})(ب^{٢-١})$ قسمة القوى

$= أ^{-٢}ب^{١}$ بسّط

النتاج هو $أ^{-٢}ب$.

مثال ٢ بسّط $(\frac{٢أ^٣ب^٢}{٣ب})^٢$، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$(\frac{٢أ^٣ب^٢}{٣ب})^٢ = \frac{(٢أ^٣ب^٢)^٢}{(٣ب)^٢}$ قوى القسمة

$= \frac{(٢)^٢(أ^٣)^٢(ب^٢)^٢}{(٣)^٢(ب)^٢}$ قوة حاصل الضرب

$= \frac{٤أ^{٦}ب^{٤}}{٩ب^٢}$ قوة القوة

$= \frac{٤أ^{٦}ب^{٤}}{٩ب^٢}$ قسمة القوى

النتاج هو $\frac{٤أ^٦ب^٢}{٩}$

تمارين

بسّط كلّ عبارة ممّا يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

١) $\frac{س^٥}{س^٥}$ ١

٢) $\frac{م^٣}{م^٣}$ ١

٣) $\frac{ب^٢هـ^٣}{ب^٢هـ^٣}$ ١

٤) $\frac{أ^٦}{أ^٦}$ ١

٥) $\frac{س^٢ص^٣}{س^٢ص^٣}$ ١

٦) $\frac{-٢ص^٣}{١٤ص^٣}$ $-\frac{١}{٧}$

٧) $\frac{س^٣ص^٦}{ص^٦س^٣}$ ١

٨) $(\frac{١٢أ^٣ب^٢}{أ})^٢$ $١٤٤ب^٢$

٩) $(\frac{٤ب^٢ر}{٣ب^٢ر})^٣$ $\frac{٦٤}{٢٧}$

١٠) $(\frac{٢ر^٢و^٣}{ر^٣و^٢})^٢$ $٤ر^٢$

١١) $(\frac{٣ر^٢ن^٣}{٢ر^٣ن^٢})^٣$ $\frac{٢٧}{٨}ن^٣$

١٢) $\frac{ر^٣ن^٢ت^٥}{ر^٥ن^٣ت^٣}$ $\frac{ت^٢}{ر^٢ن}$

تدريبات حل المسألة (١٢)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٢ تدريبات حل المسألة
قسمة وحيدات الحد

١) **كيمياء،** طول قطر نواة ذرة $١٠^{-١٣}$ سم، وطول قطر نواة ذرة أخرى مختلفة $١٠^{-١١}$ سم. بكم مرة يكون طول قطر النواة الثانية أكبر من طول قطر الأولى؟
١٠٠ مرة

٢) **فضاء،** يبعد القمر عن الأرض $٢٥^{٣}$ كيلو متر تقريبًا. وترتفع قمة بركان أوليمبس مونز عن سطح كوكب المريخ $٢٥^{٣}$ كم. كم بركانًا من أوليمبس مونز مصطفة فوق بعضها تمامًا المسافة بين سطح الأرض وسطح القمر؟
$٢٥^{٣} = ١٥٦٢٥$

٣) **بريد الكتروني،** يتكون البريد الإلكتروني غير المرغوب فيه من رسائل متشابهة ترسل إلى آلوف مستعملي البريد الإلكتروني. يستعمل الناس برمجية مضادة لهذا البريد للتخلص من هذه الرسائل عادة. افترض أن إحدى هذه البرمجيات تخلصت من $١٠^{٦}$ من الرسائل التي تلقاها أحد الأشخاص في العام الماضي والبالغ عددها $١٠^{٨}$.
ما الكسر الذي يمثّل بريد الرسائل الذي تخلصت منه هذه البرمجية؟ اكتب إجابتك على صورة وحيدة حد.
$١٠^{-٢}$

٤) **القياس المتري،** افترض أن طول حشرة عثّ الغبار $١٠^{-٢}$ ملمتر، وطول يرقة إحدى الفراشات ١٠ سم. كم مرة تكون يرقة هذه الفراشة أطول من حشرة عثّ الغبار؟
$١٠^{٣} = ١٠٠٠$

٥) **حواسيب،** في عام ١٩٩٥ كانت السعة القياسية للقرص الصلب للحاسب الشخصي ٤٠ ميجابايت. وفي عام ٢٠١٠ أصبحت هذه السعة ٥٠٠ جيجابايت. أجب عن الأسئلة الآتية مستعملًا الجدول أدناه:

التحويلات التقريبية لسعة الذاكرة الحاسوبية
٨ بت = ١ بايت
$١٠^{٣}$ بايت = ١ كيلو بايت
$١٠^{٦}$ كيلو بايت = ١ ميجابايت(ميجا)
$١٠^{٩}$ ميجابايت = ١ جيجابايت(جيجا)
$١٠^{١٢}$ جيجابايت = ١ تيرابايت
$١٠^{١٥}$ تيرابايت = ١ بيتابايت

أ) كم مرة تكون سعة القرص الصلب للحاسب الشخصي عام ٢٠١٠ أكبر من سعة القرص الصلب للحاسب الشخصي عام ١٩٩٥؟
١٢٥٠٠

ب) خمّن سعة القرص الصلب للحاسب الشخصي عام ٢٠٢٥، إذا استمر المعدل نفسه في زيادة السعة.
٦,٢٥ بيتابايت

جـ) ما الكسر الذي يمثّله كيلو بايت واحد من الذاكرة الحاسوبية من تيرابايت واحد؟
$\frac{١}{٩٧٦}$ = $١٠^{-٣}$

التدريبات الإثرائية (١٣)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٢ التدريبات الإثرائية
أنماط القوى

أكمل ما يأتي بكتابة قيم القوى في كلّ نمط، مستعملًا آلتك الحاسبة إذا تطلّب ذلك:

أ) $٢^{١٠} =$ ١٠٢٤	ب) $٥^{١٠} =$ ٩٧٦٥٦٢٥	جـ) $٤^{١٠} =$ ١٠٤٨٥٧٦
$٢^{٩} =$ ٥١٢	$٥^{٩} =$ ١٩٥٣١٢٥	$٤^{٩} =$ ٢٦٢١٤٤
$٢^{٨} =$ ٢٥٦	$٥^{٨} =$ ٣٩٠٦٢٥	$٤^{٨} =$ ٦٥٥٣٦
$٢^{٧} =$ ١٢٨	$٥^{٧} =$ ٧٨١٢٥	$٤^{٧} =$ ١٦٣٨٤
$٢^{٦} =$ ٦٤	$٥^{٦} =$ ١٥٦٢٥	$٤^{٦} =$ ٤٠٩٦
$٢^{٥} =$ ٣٢	$٥^{٥} =$ ٣١٢٥	$٤^{٥} =$ ١٠٢٤
$٢^{٤} =$ ١٦	$٥^{٤} =$ ٦٢٥	$٤^{٤} =$ ٢٥٦
$٢^{٣} =$ ٨	$٥^{٣} =$ ١٢٥	$٤^{٣} =$ ٦٤
$٢^{٢} =$ ٤	$٥^{٢} =$ ٢٥	$٤^{٢} =$ ١٦
$٢^{١} =$ ٢	$٥^{١} =$ ٥	$٤^{١} =$ ٤

تفحّص الأنماط في أ، ب، جـ أعلاه، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

١) صِف نمط الأسس من أعلى العمود إلى الأسفل.
ينقص الأس بمقدار ١ بـ كل سطر للوصول للسطر التالي.

٢) صِف نمط القوى من أعلى العمود إلى الأسفل.
للحصول على كل قوة، اقسم قوة السطر العلوي على الأساس (٢، ٥ أو ٤).

٣) ماذا تتوقع أن تكون قيمة القوى الآتية؟
$٢^{٠}$ ١　$٥^{٠}$ ١　$٤^{٠}$ ١

٤) بالرجوع إلى السؤال ٣، اكتب قاعدة، ثم اختبرها على أنماط مستعملًا الأساسات ٢٢، ٢٥، ٢٤.
أي عدد غير صفر مرفوع لقوة صفر يساوي واحدا.

تفحّص النمط أدناه، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:
$٣٠ \cdot = ٢٠ \cdot = ١٠ \cdot = ٠ \cdot = ؟$　$١٠^{٠}$ غير معرّف　$٠^{٠}$ غير معرّف　$٠^{٠}$ غير معرّف

٥) لماذا كلٌّ من $٠^{٠}$، $١٠^{٠}$، $٢٠^{٠}$، $٣٠^{٠}$ غير معرّف؟ **الأسس السالبة معرّفة للأساسات غير الصفرية فقط.**

٦) بناءً على هذا النمط، هل تستطيع تحديد إذا كان $٠^{٠}$ معرّفًا؟ **لا، لأن النمط ٠،٠،٠ لا يتحقق عندما ن < ١**

٧) الرمز $٠^{٠}$ غير محدد، أي أنه ليس له قيمة وحيدة. لذا فهو غير موجود على صورة عدد حقيقي وحيد. لماذا $٠^{٠}$ لا يساوي ١؟
مستوى الإجابات. إحداها: إذا كان $٠^{٠} = ١$ فإن $١ = \frac{١}{٠} = \frac{١}{٠} \cdot ٠ = (\frac{١}{٠}) \cdot ٠$، وهذه نتيجة خطأ، لأن القسمة على صفر غير جائزة. لذا $٠^{٠}$ لا يمكن أن تساوي ١.

كتاب التمارين (٥)　دون ضمن فوق

٦ - ٢ قسمة وحيدات الحد

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا، أن المقام لا يساوي صفرًا.

١) $\frac{٨^{٨}}{٨^{٨}} = ٤٠٩٦^{٨}$

٢) $(\frac{أ^٣ب^٢}{ب^٢})^٢$ $أ^٦ب^٢$

٣) $\frac{س^٣ص^٢}{س^٣ص}$ ص

٤) $\frac{م^{ن}ب}{م^{ن}ب}$ م^ن

٥) $\frac{-٥جـ^٢د^٣}{جـ^٢د^٣}$ -٥

٦) $\frac{٨ص^٤ع^٢}{٤ص^٤ع^٢}$ ٢ص^٠ع^٠

٧) $(\frac{٤أ^٢جـ}{٣هـ^٣})^٣$ $\frac{٦٤أ^٦جـ^٣}{٢٧هـ^٩}$

٨) $(\frac{٦ل^٣ن^٢}{٧ب^٢ر^٣})^٢$ $\frac{٣٦ل^٦ن^٤}{٤٩ب^٤ر^٦}$

٩) $\frac{-٤ب^٢}{٣٤س^٢ص^٢}$ $\frac{-١}{٣٤ص^٢}$

١٠) س^٣ (ص^-٤) $(س^{-٣})$ $\frac{١}{س^٦ص^٤}$

١١) $(ب^{-٤}ك^٢)(ر^{-٣})$ $\frac{ك^٢}{ب^٤ر^٣}$

١٢) $١٢^{-٢}$ $\frac{١}{١٤٤}$

١٣) $(\frac{٣}{٧})^{-٢}$ $\frac{٤٩}{٩}$

١٤) $(\frac{٤}{٩})^{-٢}$ $\frac{٨١}{١٦}$

١٥) $\frac{٢٢ر^٢ن^٣س^٢}{١١ر^٢ن^٣س}$ ٢ر^٠س^٢

١٦) $\frac{-١٥ل^٢ن^٣هـ^٢}{٥هـ^٢}$ $-٣ل^٢ن^٣$

١٧) $\frac{٨جـ^٣د^٢ن^٥}{٤جـ^٤د^٢ن^٣}$ $٢جـ^{-١}ن^٢$

١٨) $(\frac{-٢ص^٣}{٤})^٠$ ١

١٩) $\frac{٤ف^{-٢}جـ^٣هـ^٣}{٥٤ف^{-٤}جـ^{-٣}هـ^٣}$ $\frac{جـ^٦هـ^٣}{٩ف^٢}$

٢٠) $\frac{-١٢ن^{-١}هـ^٢س^{-٣}}{٢٠هـ^٣س^{-٥}}$ $\frac{-٣ن^٢س^٢}{٥هـ}$

٢١) $\frac{ر^٤}{(٣ر)^٣}$ $\frac{ر}{٢٧}$

٢٢) $\frac{م^{-٣}ن^{-٢}}{(م^٢ن^٥)^{-٢}}$ $\frac{م^٤}{ن^٤}$

٢٣) $\frac{(ل^{-٢}ك^٣)^{-٢}}{ل^٤ك^{-٣}}$ $\frac{ل}{ك^{١٠}}$

٢٤) $\frac{(١٢^{-٢}ب)^{-٢}}{١٥أ^٢ب^{-٢}}$ $\frac{أ}{٢٠٠ب^٤}$

٢٥) $(\frac{ك^{-٢}ر^٣}{ك^٣ر^{-٢}})^{-٢}$ $\frac{ك^{١٠}}{ر^{١٠}}$

٢٦) $(\frac{٢جـ^{-٣}د^٢}{جـ^٢د^{-٣}هـ^{-٢}})^{-٢}$ $\frac{جـ^{١٠}}{٨د^{١٠}هـ^{-٨}}$

٢٧) $(\frac{٣س^٢ص^٣ع^٤}{٤ص^٣ع^٢})^{-٢}$ $\frac{٤ص^٢ع^٤}{٩س^٤}$

٢٨) **تحاليل طبية،** سحب فني مختبر عينة دم. فإذا علمت أن ١ ملم^٣ من الدم يحتوي على $٢٢^{٣}$ خلية بيضاء، و$٢٢^{٦}$ خلية حمراء، فما نسبة خلايا الدم البيضاء إلى خلايا الدم الحمراء؟ $\frac{١}{٢٨٤}$

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٦-٣

تمييز وحيدات الحد وخصائصها.

الدرس ٦-٣

إيجاد درجة كثيرة حدود.

كتابة كثيرة الحدود بالصورة القياسية.

ما بعد الدرس ٦-٣

جمع كثيرتَي حدود وطرحهما.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ثمَّ اسأل:

- ما قيمة ن للعام ٢٠٠٧؟ ٢
- ماذا ستكون قيمة ن لعام ٢٠١٠؟ ٥
- باستعمال المعادلة، أوجد قيمة "ع" للعام ٢٠٠٧ ٢١٦,٧
- ما عدد وحيدات الحد التي يتكوّن التعبير (ع) منها؟ ٣
- ما وحيدات الحد هذه؟ $-٢,٧ن^{٢}$، ٤٩,٤ن، ١٢٨,٧

كثيرات الحدود

فيما سبق

درستُ تمييز وحيدات الحد وخصائصها.

والآن

- أجد درجة كثيرة الحدود.
- أكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية.

المفردات

كثيرة حدود
ثنائية الحد
ثلاثية الحدود
درجة وحيدة الحد
درجة كثيرة الحدود
الصورة القياسية لكثيرة الحدود
المعامل الرئيس

obeikaneducation.com

لماذا ؟

سجّلت مبيعات الأجهزة السمعية الرقمية عالميًا أرقامًا قياسية في المبيعات عام ٢٠١١ م. ويمكن تمثيل عدد المبيعات بالمعادلة:

ع= $-٢,٧ن^{٢} + ٤٩,٤ن + ١٢٨,٧$

علمًا بأن ع تمثّل عدد الأجهزة التي يتم بيعها بالملايين، ن تمثّل عدد السنوات منذ عام ٢٠٠٥ م.

تمثّل العبارة $-٢,٧ن^{٢} + ٤٩,٤ن + ١٢٨,٧$ مثالاً على كثيرة حدود. ويمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل بعض المواقف.

درجة كثيرة الحدود: **كثيرة الحدود** هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد. تُسمى كل وحيدة حد منها حدًّا في كثيرة الحدود. وبعض كثيرات الحدود تحمل أسماءً خاصة. **ثنائية الحد** هي مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل، و**ثلاثية الحدود** هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل.

مثال ١ تمييز كثيرات الحدود

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنفها إلى وحيدة حدّ، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟	وحيدة حد / ثنائية حد / ثلاثية حدود
أ) ٤ص – ٥س ع	نعم؛ ٤ص –٥س ع هي مجموع وحيدتي حد هما: ٤ص، –٥س ع.	ثنائية حد
ب) $-٦,٥$	نعم؛ $-٦,٥$ عدد حقيقي.	وحيدة حد
جـ) ٧أ$^{-٣}$ + ٩ب	لا؛ ٧أ$^{-٣} = \frac{٧}{أ^{٣}}$، وهي ليست وحيدة حد.	——
د) ٦س^{٣} + ٤س + س + ٣	نعم؛ ٦س^{٣} + ٤س + س + ٣ = ٦س^{٣} + ٥س + ٣، مجموع ثلاثة حدود.	ثلاثية حدود

تحقق من فهمك

أ) س نعم؛ وحيدة حد

ب) $-٣ص^{٢} - ٢ص + ٤ص - ١$ نعم؛ ثلاثية حدود

جـ) ٥ر س + ٧ ن ف ك نعم؛ ثنائية حد

د) ١٠س$^{-٤} - ٨س^{أ}$ لا؛ ١٠س$^{-٤}$ ليست وحيدة حد، وَ ٨س^{أ} له أس متغير

درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها. ودرجة الثابت غير الصفر تساوي صفرًا. وليس للصفر درجة. أما **درجة كثيرة الحدود** فهي أكبر درجة لأي حدٍّ من حدودها. ولإيجاد درجة كثيرة حدود، يتعين عليك أولاً إيجاد درجة كل حد فيها. ويمكن تسمية بعض كثيرات الحدود اعتمادًا على درجتها، فتسمى ذات الدرجة صفر: ثابتة، وذات الدرجة ١: خطية، وذات الدرجة ٢: تربيعية، وذات الدرجة ٣: تكعيبية.

مصادر الدرس ٦ - ٣

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٢٤)	• تنويع التعليم ص (٢٤،٢٥)	• تنويع التعليم ص (٢٥)
كتاب التمارين	ص (٦)	ص (٦)	ص (٦)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) • تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦) • التدريبات الإثرائية، ص (١٧)

مثال ٢ درجة كثيرة الحدود

أوجد درجة كثيرة الحدود $٢د^{٣} - ٩جـ^{٥} د - ٧$

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

درجة الحد $٢د^{٣} = ٣$، درجة الحد $-٩جـ^{٥} د = ٥ + ١ = ٦$،

درجة الحد -٧ هي صفر.

الخطوة ٢: درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وتساوي ٦

تحقق من فهمك

٢أ) $٧س ص^{٥} ع$ ٧ **٢ب)** $٢م ن - ٣ م ن^{٢} - ٧م^{٢} ن^{٢} - ١٣$ ٤

كثيرات الحدود بالصورة القياسية: يمكنك كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب. ولاستخدام **الصورة القياسية** لكثيرة الحدود بمتغير واحد، اكتب الحدود بترتيب تنازلي بحسب درجتها. وعندما تُكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية، فإن معامل أول حد فيها يُسمى **المعامل الرئيس**.

المعامل الرئيس — أكبر درجة

الصورة القياسية: $٤س^{٣} - ٥س^{٢} + ٢س + ٧$

مثال ٣ الصورة القياسية لكثيرة الحدود

اكتب كثيرة الحدود $٥ص - ٩ - ٢ص^{٤} - ٦ ص^{٣}$ بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

الدرجة: ١ ٠ ٤ ٣

كثيرة الحدود: $٥ص - ٩ - ٢ص^{٤} - ٦ص^{٣}$

الخطوة ٢: اكتب الحدود بترتيب تنازلي لدرجاتها: $-٢ص^{٤} - ٦ص^{٣} + ٥ص - ٩$ فيكون المعامل الرئيس هو -٢

تحقق من فهمك

٣أ) $٨ - ٢س^{٢} + ٤س^{٤} - ٣س$ $-٧ص^{٦} + ٥ص^{٣} - ٢ص^{٢} + ص + ١٠$؛ -٧

٣ب) $ص + ٥ص^{٣} - ٢ص^{٢} - ٧ص^{٦} + ١٠$

ويمكنك استعمال كثيرات الحدود لتقدير القيم بين نقطتين، وللتنبؤ بقيم الحوادث قبل وقوعها أيضًا.

مثال ٤ من واقع الحياة استعمال كثيرات الحدود

مصانع: تمثِّل المعادلة $ع = ٣ن^{٢} - ٢ن + ١٠$ عدد أطنان الأسمنت بمئات الألوف التي أنتجها أحد المصانع من عام ١٤٢٦ هـ إلى ١٤٣١ هـ، حيث ن عدد السنوات منذ عام ١٤٢٦ هـ، فما عدد أطنان الأسمنت المنتجة في عام ١٤٢٨ هـ؟

أوجد قيمة ن وعوض بها في المعادلة لإيجاد عدد أطنان الأسمنت.

بما أن ن تمثِّل عدد السنوات منذ عام ١٤٢٦ هـ، فإن: ن = ١٤٢٨ هـ - ١٤٢٦ هـ = ٢

٤أ) $٤س^{٤} - ٢س^{٢} - ٣س + ٨$؛ ٤

الربط مع الحياة

تعتبر المملكة العربية السعودية أكبر منتج للأسمنت في منطقة الخليج، وصاحبة ثاني أكبر طاقة إنتاجية في الشرق الأوسط، وتُعد صناعة الأسمنت في المملكة من الأنشطة ذات الربحية العالية.

درجة كثيرة الحدود

المثال ١ يُبيّن طريقة تحديد ما إذا كانت العبارة تُمثّل كثيرة حدود أم لا.

المثال ٢ يُبيّن طريقة إيجاد درجة كثير الحدود.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

١ حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حدٍّ، أو ثنائية حدٍّ، أو ثلاثية حدود.

أ) $٦س - ٤$ نعم؛ ثنائية حدود.

ب) $س^{٢} + ٢س ص - ٧$ نعم؛ ثلاثية حدود

جـ) $\frac{١٤د + ١٩و^{٣}}{٥د^{٤}}$ لا

٢ أوجد درجة كثيرتَي الحدود الآتيتين:

أ) $١٢ + ٥ب + ٦ب جـ + ٨ ب جـ^{٢}$ ٣

ب) $٩س^{٢} - ٢س - ٤$ ٢

٣ اكتب كثيرتي الحدود الآتيتين في الصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس في كلٍّ منهما:

أ) $٩ س^{٢} + ٣س^{٦} - ٤س$

$٣س^{٦} + ٩س^{٢} - ٤س$؛ ٣

ب) $١٢ + ٥ص + ٦س ص + ٨س ص^{٢}$

$٨س ص^{٢} + ٦س ص + ٥ص + ١٢$؛ ٨

كثيرات الحدود بالصورة القياسية

المثال ٣ يُبيّن طريقة كتابة كثيرة حدود في الصورة القياسية وتحديد المعامل الرئيس.

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال كثيرات الحدود لتقدير قيم بين نقطتين، والتنبؤ بقيم خارج النقطتين.

المحتوى الرياضي

درجة كثيرة الحدود: يجب عدم الخلط بين درجة كثيرة الحدود وعدد حدودها، فمثلًا $س^{٣} + ١$ ثنائية حد، درجتها ٣ وليست ٢؛ لأن أكبر درجة لأي حد من حدودها هو ٣.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب الأعداد من ١ إلى ١٠ وعدة كثيرات حدود على السبورة التفاعلية. ثم اطلب إلى الطلاب تحديد درجة كل كثيرة حدود منها، ثم حدّد العدد الصحيح الذي يُمثّل درجتها، واسحبه ليكون تحت كثيرة الحدود التي توافقه.

ع = ٣ن^{٢} − ٢ن + ١٠ المعادلة الأصلية

= ٣(٢)^{٢} − ٢(٢) + ١٠ ن = ٢

= ٣(٤) − ٤ + ١٠ بسط

= ١٢ − ٤ + ١٠ = ١٨ اضرب وبسّط

بما أن ع بمئات الألوف، فإن عدد الأطنان المنتجة كان ١٨ مئة ألفٍ، أو ١٨٠٠٠٠٠.

تحقق من فهمك

أ٤) كم طنًّا أُنتج عام ١٤٣١ هـ؟ ٧٥٠٠٠٠٠ طن

ب٤) إذا استمر هذا النمط، فكم طنًّا سيتم إنتاجه عام ١٤٤١ هـ؟ ٦٥٥٠٠٠٠٠ طنًا

تأكد

مثال ١

حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

١) نعم؛ ثلاثية حدود
٢) نعم؛ وحيدة حد

١) ٢ص − ٥ + ٣ص^{٢} ٢) ٣س^{٢} ٣) ٥م^{٢}ن^{٣} + ٦ ٤) ٥ك$^{-٤}$ + ٦ك

مثال ٢

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

٣) نعم ثنائية حد
٤) لا؛ تحتوي على متغير في المقام

٥) −٣ صفر ٦) ٦ن^{٣} − ن^{٤} ٤ ٧) −٧ع ١ ٨) $\frac{٣}{٤}$ صفر

٩) ١٢ − ٧ك^{٢}ن + ٨ن ٣ ١٠) ٢أ^{٢}ب^{٥} + ٥ − أب ٧ ١١) ٦دن^{٣} + ٣د^{٢}ن^{٢} + ٢د + ١ ٤

مثال ٣

اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها:

١٢) −ص^{٣} + ٣ص − ٣ص^{٢} + ٢ ١٣) ٤ع − ٢ع^{٢} − ٥ع^{٤} ١٤) ٢أ + ٤أ^{٣} − ٥أ^{٢} − ١

مثال ٤

١٥) **جامعات:** افترض أنه يمكن تمثيل عدد الطلاب المسجَّلين في جامعة من عام ١٤١٩ هـ إلى ١٤٢٨ هـ بالمئات بالمعادلة ن = س^{٢} + ٥ , ١ س + ٥ , ٠، حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤١٩ هـ.

١٢) −ص^{٣} − ٣ص^{٢} + ٣ص + ٢؛ −١

١٣) −٥ع^{٤} − ٢ع^{٢} + ٤ع؛ −٥

١٤) ٤أ^{٣} − ٥أ^{٢} + ٢أ − ١؛ ٤

أ) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٢٤ هـ؟ ٣٣٠٠ طالب.

ب) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٢٦ هـ؟ ٦٠٠٠ طالب.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

حدِّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

لا. تحتوي على متغير في المقام.

١٦) $\frac{٥ص^{٣}}{س^{٢}}$ + ٤ س ١٧) ٢١ نعم؛ وحيدة حد ١٨) جـ^{٤} − ٢جـ^{٢} + ١ نعم؛ ثلاثية حدود

١٩) د + ٣د$^{-٢}$ لا؛ الأس متغير ٢٠) أ − أ^{٢} نعم؛ ثنائية حد ٢١) ٥ن^{٣} + ن ك^{٣} نعم؛ ثنائية حد

مثال٢

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

٢٢) ١٣ − ٤أب + ٥أ^{٣}ب ٤ ٢٣) ٣س − ٨ ١ ٢٤) −٤ صفر

٢٥) ١٧جـ^{٢}هـ ٣ ٢٦) ١٠ + ٢جـد^{٤} − ٦ د^{٢}جـ ٥ ٢٧) ٢ع^{٢}ص^{٢} − ٧ + ٥ص^{٣}ن^{٤} ٧

مثال إضافي

٤ طب: يمكن تمثيل عدد المرضى (ع) من عام ١٤٢٠هـ إلى ١٤٢٦هـ الذين تمَّت معاينتهم طبيًّا (بالآلاف) في أحد المراكز الصحية بالمعادلة: ع = ن^{٢} + ١ , ٢ ن + ٨ , ٠، علمًا بأن (ن) تُمثّل عدد السنوات منذ عام ١٤٢٠هـ. كم مريضًا تمَّت معاينته في عام ١٤٢٥ هـ؟ ٣٦٣٠٠

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ − ١٥؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٦ − ٣٤، ٣٧ − ٤٦
ضمن ضمن المتوسط	١٧ − ٣٣ (فردي)، ٣٧ − ٤٦
فوق فوق المتوسط	٣٥ − ٤٦

تنويع التعليم: دون ضمن

إذا كان لدى الطلاب صعوبة في تحديد درجة كثيرة الحدود،

فقم بتوزيعهم في مجموعات ثنائية، وأعطِ كل مجموعة قائمة بكثيرات الحدود، واطلب إلى أحد الطلاب في كل مجموعة أن يدقّ عددًا من الدقات تساوي درجة كل وحيدة حد من كثيرة الحدود، واطلب إلى زميله أن يُسجّل عدد الضربات (الدقات) لكل وحيدة حد، وأن يذكر درجة كثيرة الحدود.

مثال ٣ اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها:

٢٨) $٥س^{٢}-٢+٣س$ ٢٩) $٨ص+٧ص^{٣}$ ٣٠) $٤-٣جـ-٥جـ^{٢}$

٣١) $-٤د^{٤}+١-د^{٢}$ ٣٢) $\frac{١}{٢}س-٣س^{٤}+٧$ ٣٣) $-٩ب^{٢}+١٠ب-ب^{٦}$

٣٤) **ألعاب نارية:** أطلق صاروخ ألعاب نارية من ارتفاع ١م من الأرض وبسرعة ١٥٠ م/ث. ويمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ ع بعد ن ثانية بالمعادلة ع = $-٥ن^{٢}+٥٠ن+١$

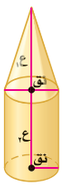
أ) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٣ ثوانٍ؟ ١٠٦ م

ب) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٥ ثوانٍ؟ ١٢٦ م

٣٥) **مشروع:** يصمم طارق وعمر هيكل صاروخ، بحيث يكون الجزء العلوي منه على شكل مخروط، وجسمه على شكل أسطوانة نصف قطرها نق، كما في الشكل المجاور. إذا علمت أن حجم المخروط يساوي $\frac{١}{٣}$ ط × مربع نصف القطر (نق) × الارتفاع ($ع_{١}$)، وحجم الأسطوانة يساوي ط × مربع نصف القطر (نق) × الارتفاع ($ع_{٢}$).

أ) اكتب كثيرة حدود تمثل حجم الصاروخ. $\frac{١}{٣}$ ط نق$^{٢}ع_{١}$ + ط نق$^{٢}ع_{٢}$

ب) إذا كان ارتفاع جسم الصاروخ ٨سم، وارتفاع الجزء العلوي منه ٦سم، ونصف قطر القاعدة ٣سم، فما حجم الصاروخ؟ ٢٨٢,٦سم^{٣} تقريبًا.



الربط مع الحياة

يتكون مكوك الفضاء من ثلاثة أجزاء: عربة مدارية للطاقم، وخزان خارجي للوقود، وجهازي دفع صاروخيين يعملان بالوقود الصلب. ويزن المكوك بالكامل ٤,٤ ملايين رطل عند انطلاقه.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٦) **تحد:** إذا كان س عددًا صحيحًا، فاكتب كثيرة حدود تمثِّل العدد الصحيح الفردي، وفسّر ذلك. ٢س + ١، حيث س عدد صحيح

٣٧) **تبرير:** وضِّح إذا كانت العبارة: "يمكن أن تكون درجة ثنائية الحد صفرًا" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ وفسّر إجابتك. انظر الهامش.

٣٨) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالاً على ثلاثية حدود تكعيبية. إجابة ممكنة: $س^{٣}-س^{٢}+١$

٣٩) **اكتب:** فسّر كيف تكتب كثيرة حدود على الصورة القياسية، وكيف تحدد المعامل الرئيس فيها؟ انظر الهامش.

تدريب على اختبار

٤٠) **إجابة قصيرة:** لديك بطاقة تخفيض بقيمة ٨ ريالات من أحد المتاجر، فإذا اشتريت أرزًا بـ ٥٩,٩٥ ريالًا، وعلبة جبن بـ ١٥,٩٥ ريالًا. فكم تدفع مقابل ذلك؟ ٦٧,٩

٤١) ما قيمة ص التي تحقق نظام المعادلات أدناه؟ أ

٢س + ص = ١٩، ٤س − ٦ص = −٢

أ) ٥ ب) ٨ جـ) ٧ د) ١٠

مراجعة تراكمية

بسِّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا: (الدرس ٦-٢)

٤٢) أ^{٠}(أ^{٤})(أ$^{-٨}$) $\frac{١}{أ^{٤}}$ ٤٣) $\frac{(٤م^{-٣}جـ^{٦})^{٠}}{م جـ}$ $\frac{١}{م جـ}$ ٤٤) $\frac{(٣ن^{٢}جـ^{٦})^{٠}}{(١٨ن^{٦}جـ^{٢})^{٠}}$ ١ ٤٥) $\frac{(نك^{-١})^{٣}}{(ن^{٤}ك^{٨})^{-١}}$ $ن^{٧}ك^{٥}$

٤٦) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٣) والمعامد للمستقيم ص = س بصيغة الميل والمقطع. (الدرس ٣-٤) ص=−س + ٤

٤ التقويم

تعلّم لاحق: اسأل الطلاب أن يتنبؤوا كيف ستساعدهم الإجراءات الرياضية التي استعملوها على تحديد درجة كثيرة الحدود في جمع كثيرات الحدود وطرحها في الدرس القادم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (٦-٣) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٢)، ص (١١)

اختبر تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل بإعطائهم:

اختبار منتصف الفصل، ص (١٣)

إجابات:

٣٧) غير صحيحة أبدًا، يجب أن تحتوي ثنائية الحد على حد تكون درجته ١ على الأقل.

٣٩) أوجد درجة كل حد أولًا، ثم رتّب الحدود تنازليًا بحسب درجاتها. فيكون المعامل الرئيس دائمًا معامل أول حد، وهو الحد الذي له أعلى درجة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أن درجة الدالة كثيرة الحدود تُحدّد أكبر عدد من المرات التي يتقاطع فيها منحنى الدالة مع محور السينات، واطلب إليهم أن يذكروا أكبر عدد من مرات تقاطع الدوال الآتية مع محور السينات:

د (س) = ٥، د (س) = ٣س + ١، د (س) = $س^{٢}$+ س − ٥. صفر، ١، ٢

ثم اطلب إليهم أن يصفوا التمثيل البياني لكل دالة. خط أفقي، خط مستقيم، شكل لـ (قطع مكافئ)

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٦ - ٣

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٤)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٣ تدريبات إعادة التعليم
كثيرات الحدود

درجة كثيرة الحدود، كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد. ثنائية الحد هي مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل. وثلاثية الحدود هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل. أمّا كثيرات الحدود التي تحتوي على حدود تزيد على ثلاثة ، فليس لها اسم خاص. درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كلّ متغيراتها. درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وهي درجة وحيدة الحد ذات أكبر درجة.

مثال حدّد إذا كانت كلّ عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى: وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حد:

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟	وحيدة حد/ ثنائية حد/ ثلاثية حدود	درجة كثيرة الحدود
٣س−٧س ص ع	نعم؛ ٣س−٧س ص ع = ٣س + (−٧س ص ع) وهذا مجموع وحيدتي حد.	ثنائية حد	٣
−٢٥	نعم؛ −٢٥ عدد حقيقي	وحيدة حد	صفر
٥٧ + ٥٣$^{-١}$	لا؛ ٥٣$^{-١}$ = $\frac{٣}{ن}$ ، وهذه ليست وحيدة حد.	———	———
٩س^{٢} + ٤س + س + ٤ + ٢س	نعم؛ تبسيط العبارة: ٩س^{٢} + ٧س + ٤، وهي مجموع ثلاث وحيدات حد.	ثلاثية حدود	٣

تمارين

حدّد إذا كانت كلّ عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى: وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

١) ٣٦　**نعم؛ وحيدة حد**
٢) $\frac{٣}{ن}$ + ٥　**لا**
٣) ٧س − س + ٥　**نعم؛ ثلاثية حد**
٤) ٨ جـ^{٢}هـ − ٧ جـ هـ + ٢　**نعم؛ ثلاثية حدود**
٥) $\frac{١}{٤ص}$ + ٥ص − ٨　**لا**
٦) ٦ن + س^{٢}　**نعم؛ ثنائية حد**

أوجد درجة كلّ كثيرة حدود فيما يأتي:

٧) ٤س^{٢}ص^{٤}ع　٦
٨) −٢أ^{٣} جـ　٣
٩) ١٥م　١
١٠) ر + ٥ت　١
١١) ٢٢　٠
١٢) ١٨س^{٤} + ٤ص ع − ١٠ص　٢
١٣) س^{٤} − ٦س^{٣} − ٢س^{٢} + ١٠　٤
١٤) ٢س^{٣}ص^{٢} − ٤س ص^{٣}　٥
١٥) −٢ر^{٣}س^{٢} + ٧ر^{٢}س − ٨ر^{٣}س　١٣
١٦) ٩س^{٢} + ص ع^{٢}　٩
١٧) ٨ب + ب جـ^{٢}　٦
١٨) ٤س^{٢}ص − ٨ع س^{٣} + ٢س^{٢}　٥
١٩) ٤س$^{-١}$ + ٢　٢
٢٠) ٩أب جـ + ب جـ − ن^{٥}　٥
٢١) هـ^{٣}م + ٦ هـ^{٣}م$^{-١}$ − ٧　٦

تدريبات حل المسألة (١٦)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٣ تدريبات حل المسألة
كثيرات الحدود

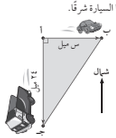
١) **أعداد أولية**، تحاول عائكة وضع قائمة بأكبر عدد ممكن من الأعداد الأولية في مسألة تُعدّ لطالبات فصلها في مبحث الرياضيات. وقد جدت أنه يمكنها استعمال كثيرة الحدود ن^{٢} − ن + ٤١ للحصول على بعض الأعداد الأولية وليس جميعها. فما درجة كثيرة الحدود التي استعملتها عائكة؟
٢

٢) **حديقة ألعاب**، تتقاضى إدارة حديقة ألعاب ٢٥ ريالاً بدل دخول للشخص الواحد، و ١٥ ريالاً إضافية عن كلّ لعبة يستعملها. اكتب كثيرة حدود للتعبير عن المجموع الكلي للمبلغ الذي تتقاضاه إدارة الحديقة عن شخص استعمل س ألعاب. ما درجة كثيرة الحدود هذه؟
١٥س + ٢٥؛ ١

٣) **أزياء**، تخيط أم جهاد أغطية نسائية للمكتفين لرصد ريع بيعها لأعمال خيرية، ويمثّل الشكل أدناه تصميم الغطاء. فإذا كان طول نصف قطر فتحة العنق ٦ بوصات، فما مساحة الغطاء بالأقدام المربعة؟
٢٧٫٥ قدماً مربعة

٤) **هندسة معمارية**، ينتج من رسم منحنى دالة كثيرة الحدود ص = −س^{٢} + ٣ شكل قوس داخل مكتبة تاريخية، حيث س المسافة الأفقية بالأمتار من قاعدة القوس، ص ارتفاع القوس. ما ارتفاع القوس عندما س = ٠؟
٣ م

٥) **قيادة مركبات**، غادرت شاحنة وسيارة موقع تقاطع شارعين، فاتجهت الشاحنة جنوبًا، واتجهت السيارة شرقًا. عندما قطعت الشاحنة ٢٤ ميلًا، أصبحت المسافة بينها وبين السيارة تزيد ٤ أميال على ٣ أمثال المسافة التي قطعتها السيارة شرقًا.



أ) افترض أن الشاحنة توقفت عند نقطة جـ وتوقفت السيارة عند النقطة ب. اكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية تعبر عن مجموع المسافات التي قطعتها الشاحنة والسيارة.
س + ٢٤

ب) اكتب كثيرة حدود في أبسط صورة للتعبير عن محيط المثلث أ ب جـ.
٤س + ٢٨ ميلًا

التدريبات الإثرائية (١٧)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٣ التدريبات الإثرائية
دوال كثيرات الحدود

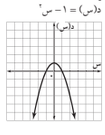
افترض أن المعادلة الخطية −٣س + ص = ٤ قد حُلّت بالنسبة للمتغير ص. المعادلة المكافئة هي ص = ٣س + ٤، حيث ص دالة في س، أو د (س) = ٣س + ٤ لاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة هو ثنائية حد من الدرجة ١

كثيرات الحدود ذات الدرجات الأكبر في س قد تكوّن دوال أيضًا. فمثلًا ص(س) = س^{٢} + ١، دالة كثيرة حدود من الدرجة ٣. يمكنك تمثيل هذه الدالة بيانيًا مستعملًا جدول أزواج مرتّبة، على نحو ما هو مبيّن يسارًا.

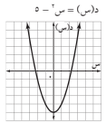
س	ص
−١	١ $\frac{١}{٢}$
٠	−١
١	٠
٢	١
٣	٢ $\frac{٣}{٨}$
٤	١ $\frac{١}{٨}$

كوّن جدولًا لقيم س، وَ ص = د (س) لكل من دوال كثيرة الحدود الآتية، ثم مثّل منحنى كلّ دالّة بيانيًا على ورقة الرسم البياني:

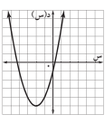
١) د(س) = ١ − س^{٢}



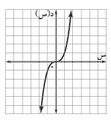
٢) د(س) = س^{٣} − ٥



٣) د(س) = س^{٢} + ٤س − ١



٤) د(س) = س^{٣}



كتاب التمارين (٦)　دون ضمن فوق

٦ - ٣ كثيرات الحدود

حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود.

١) ٧أب + ٣ب^{٢} − أ^{٢}ب　نعم؛ ثنائية حد
٢) $\frac{١}{٢}$ ص^{٣} + ص^{٣} − ٩　نعم؛ ثلاثية حدود
٣) ٦ جـ^{٢} هـ^{٣} ك　نعم؛ وحيدة حد

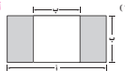
أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

٤) س + ٣س^{٤} − ٢١س^{٣} + س^{٢}　٤
٥) ٣جـ^{٢}هـ^{٣} + جـ^{٣}هـ　٥
٦) −٢س^{٢}ص − ٣س ص^{٣} + س^{٣}　٤
٧) ٥٥م^{٣} − ٢م^{٢} + ن^{٣}م^{٢} + ن^{٢}　٦
٨) أب^{٢}د + ٢أ^{٢}جـ − ب^{٢}جـ^{٢}　٦
٩) ١٠ر^{٣}ن^{٢} + ٤ر^{٣}ن^{٢} − ٥ر^{٣}ن^{٢}　٥

اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصيغة القياسية، وحدّد المعامل الرئيس فيها.

١٠) ٨س^{٣} − ١٥ + ٥س^{٢}
٥س^{٢} + ٨س^{٣} − ٥ + ١٥
١١) ١٠س − ٧ + س^{٣} + ٤س^{٣}
س^{٣} + ٤س^{٣} + ١٠س − ١٧
١٢) ١٣س^{٢} − ٥ + ٦س^{٣} − س
٦س^{٣} + ١٣س^{٢} − س − ٦ + ٥
١٣) ٤س + ٢س^{٣} − ٦س^{٣} + ٢
٢س^{٣} − ٦س^{٣} + ٤س + ٢ + ٢

هندسة، اكتب كثيرة الحدود التي تعبر عن مساحة المنطقة المظللة لكل مما يأتي:

١٤)


أب − ب^{٢}

١٥)

د − $\frac{١}{٤}$ ط د^{٢}

١٦) **نقود**، اكتب كثيرة حدود تمثّل مبلغًا يتكون من: ن ورقة من فئة ١٠ ريالات، م ورقة من فئة ٥٠ ريالاً، هـ ورقة من فئة ١٠٠ ريال. ١٠ن + ٥٠م + ١٠٠هـ

١٧) **الجاذبية**، يُعبّر عن ارتفاع كرة قُذِفَت من ارتفاع ٢م عن الأرض وبسرعة ٣٢ م/ ث بالعبارة: ع = −٢ + ٣٢ن − ٥ ن^{٢} متر، حيث ن الزمن بالثواني. فما ارتفاع الكرة بعد ٧ ثوانٍ باستعمال هذه العبارة؟ فسّر ذلك.
−١٩ م. الارتفاع سالب؛ لأن العبارة لم تأخذ بعين الاعتبار أنه عند الارتفاع صفر ستصطدم الكرة بالأرض وترتد.

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الهدف: استعمال بطاقات الجبر لجمع كثيرات الحدود وطرحها.

المواد اللازمة

بطاقات الجبر

إرشادات للمعلم الجديد

الأزواج الصفرية: ناقش الطلاب في مفهوم (الزوج الصفر) قبل تنفيذ الأنشطة، واطلب إليهم تشكيل أزواج صفرية باستعمال البطاقات الجبرية: ١، س، $س^{٢}$ ومعكوس كلٍّ منها.

٢ التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

- وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية وثلاثية متفاوتة القدرات، واطلب إليهم حل الأنشطة ١-٣ والسؤال ١.
- وضّح للطلاب مفهوم الحدود المتشابهة عند استعمال بطاقات الجبر، وتعني أن البطاقات ذات الشكل والمساحة نفسيهما تُمثّل حدودًا متشابهة.
- أخبر الطلاب أنه من الأسهل نمذجة كثيرات الحدود في النشاط (١)، إذا تم ترتيب بطاقات الجبر بترتيب وحيدات الحدود نفسه ضمن كل كثيرة حدود. وتُرتّب وحيدات الحد في هذه الحالة تنازليًّا بحسب الدرجة؛ لذا على الطلاب ترتيب بطاقات الجبر تنازليًّا من اليمين إلى اليسار.
- وبعد أن تُتم مجموعات الطلاب تنفيذ النشاط (١)، اكتب كثيرتَي الحدود رأسيًّا عند جمعهما؛ ليلاحظ الطلاب جمع معاملات الحدود المتشابهة.
- في النشاط ٢، بيّن للطلاب أن إضافة الزوج الصفري لكثيرة الحدود لا يُغيّر من قيمته؛ لأن الزوج الصفري يساوي صفرًا.

جمع كثيرات الحدود وطرحها

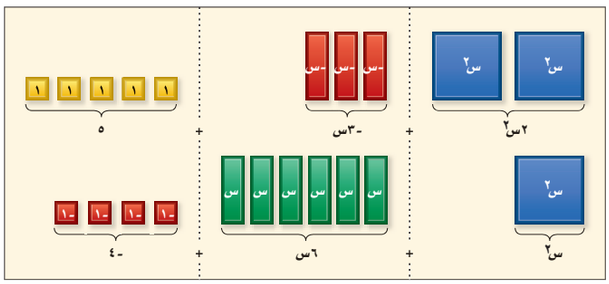
تُسمى وحيدات الحد مثل ٣س، -٢س حدودًا متشابهة؛ لأن لها المتغير والأس نفسيهما. ويمكنك تمييز الحدود المتشابهة عند استعمال بطاقات الجبر؛ لأن البطاقات من النوع الواحد لها الشكل والأبعاد نفسها.

تمثيل كثيرات الحدود	
تمثل الحدود المتشابهة على صورة بطاقات لها نفس المساحة والشكل.	حدود متشابهة
يمكن تكوين الزوج صفر بتجميع قطعة واحدة وَمعكوسها. ويمكنك حذف الزوج صفر أو إضافته دون تغيير كثيرة الحدود.	

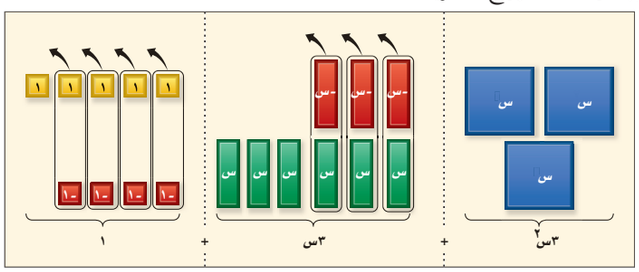
نشاط ١ جمع كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(٢س^{٢} - ٣س + ٥) + (س^{٢} + ٦س - ٤)$.

الخطوة ١: مثّل كلًّا من كثيرتي الحدود.



الخطوة ٢: جمّع الحدود المتشابهة، واحذف الأزواج الصفرية.



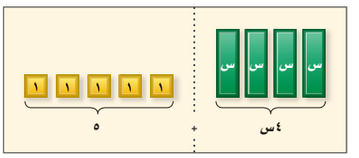
الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

$(٢س^{٢} - ٣س + ٥) + (س^{٢} + ٦س - ٤) = ٣س^{٢} + ٣س + ١$

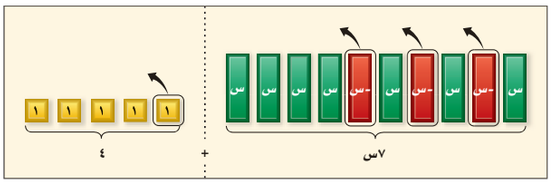
نشاط ٢ طرح كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(٤س + ٥) - (-٣س + ١)$.

الخطوة ١: مثّل كثيرة الحدود: $٤س + ٥$.



الخطوة ٢: لطرح $-٣س + ١$ عليك حذف ٣ بطاقات $-$ س، وبطاقة ١ صفراء. يمكنك حذف بطاقة ١، وَبما أنه لا توجد بطاقات $-$ س. أضف ٣ أزواج صفرية من البطاقات س وَ $-$ س، ثم احذف ٣ بطاقات $-$ س.



الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية. $(٤س + ٥) - (-٣س + ١) = ٧س + ٤$

تذكّر أنه يمكنك طرح عدد بإضافة نظيره الجمعي أو معكوسه. وبالمثل يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة معكوسها.

نشاط ٣ طرح كثيرات الحدود باستعمال النظير الجمعي

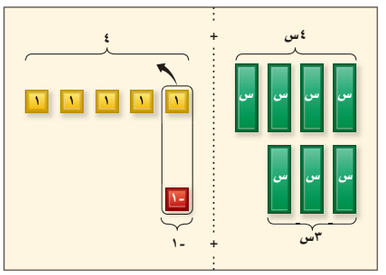
استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج: $(٤س + ٥) - (-٣س + ١)$.

الخطوة ١: لإيجاد الفرق بين $٤س + ٥$، $-٣س + ١$، أضف $٤س + ٥$ إلى معكوس $-٣س + ١$

$٤س + ٥$ ←

معكوس $-٣س + ١$ هو $٣س - ١$. ←

الخطوة ٢: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.
$(٤س + ٥) - (-٣س + ١) = ٧س + ٤$.
لاحظ أن الناتج هذا هو نفسه ناتج النشاط ٢.



التمثيل والتحليل

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد المجموع أو الفرق لكلٍّ مما يأتي:

١) $(س^٢ + ٥س - ٢) + (٣س^٢ - ٢س + ٦)$

٢) $(٢س^٢ + ٨س + ١) - (س^٢ - ٤س - ٢)$

٣) $(-٤س^٢ + س) - (س^٢ + ٥س)$

٤) **اكتب:** أوجد ناتج $(٤س^٢ - س + ٣) - (٢س + ١)$ باستعمال طريقتي النشاطين ٢ و٣. ومثّل ذلك بمخطط، ثم فسّر كيف تستعمل الأزواج الصفرية في كل حالة. انظر ملحق الإجابات.

١) $٤س^٢ + ٣س + ٤$ ٢) $س^٢ + ١٢س + ٣$ ٣) $-٥س^٢ - ٤س$

- بعد أن تُنفّذ المجموعات النشاط (٢)، اكتب كثيرتَي الحدود بصورة رأسية عند طرحهما؛ ليلاحظ الطلاب طرح معاملات الحدود المتشابهة.
- في النشاط (٣)، قد يجد بعض الطلاب أنه من الأسهل لهم إضافة النظير الجمعي باستعمال بطاقات الجبر، وهذا يُمكّنهم من تجنّب إضافة الأزواج الصفرية.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة ٢-٤.

التقويم التكويني

استعمل السؤال ٤، لتقويم قدرة الطلاب على استعمال النماذج، لمقارنة كثيرات الحدود.

من المحسوس إلى المجرد

اكتب مسألة على جمع كثيرتَي حدود أو طرحها على السبورة، ثم اطلب إلى الطلاب إيجاد المجموع أو الفرق دون استعمال بطاقات الجبر. ودعهم يستعملوا بطاقات الجبر إذا كانت إجابتهم خطأً؛ لتساعدهم على تعرّف خطئهم.

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٦ - ٤

كتابة كثيرات الحدود في الصورة القياسية.

الدرس ٦ - ٤

جمع كثيرات الحدود وطرحها.

ما بعد الدرس ٦ - ٤

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ثم اسأل:

- انظر إلى كثيرتي الحدود اللتين تُمثّلان العدد التقريبي لحجاج الداخل ($ع_١$) وحجاج الخارج ($ع_٢$) بمئات الألوف. ما عدد حدود كلٍّ منها؟ ٤
- قارن بين كثيرتَي الحدود، وهل الحدود متشابهة أم لا؟ نعم
- كيف ستجمع كثيرتَي الحدود؟ بتجميع الحدود المتشابهة

جمع كثيرات الحدود وطرحها

فيما سبق

درستُ كتابة كثيرات الحدود بالصورة القياسية.

والآن

- أجمع كثيرات حدود.
- أطرح كثيرات حدود.

obeikaneducation.com

لماذا؟

يمكن تمثيل العدد التقريبي لحجاج الداخل ($ع_١$) وحجاج الخارج ($ع_٢$) بمئات الألوف من عام ١٤٢٨ إلى ١٤٣١ هـ بالمعادلتين:

$ع_١ = ١٩٣١,٠ س^٣ - ٢٨٤١,٠ س^٢ + ١٨٠٨,٠ س + ٦,٧$

$ع_٢ = ٢٦٧٥,٠ س^٣ - ١,٠٢ س^٢ + ٩٧,٠ س + ١٧,٠٨$

حيث س عدد السنوات منذ ١٤٢٨ هـ.

إن إجمالي عدد الحجاج تقريبًا يمثل بـ $ع_١ + ع_٢$

جمع كثيرات الحدود: يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المتشابهة، ويمكن تجميع الحدود المتشابهة باستعمال الطريقة الأفقية أو الرأسية.

مثال ١ جمع كثيرات الحدود

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

أ) $(٢س^٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س^٢ + ٦س)$

الطريقة الأفقية

$(٢س^٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س^٢ + ٦س)$

$= [٢س^٢ + (-٤س^٢)] + [٥س + ٦س] + [-٧ + ٣]$ جمّع الحدود المتشابهة

$= -٢س^٢ + ١١س - ٤$ اجمع الحدود المتشابهة

الطريقة الرأسية

$٢س^٢ + ٥س - ٧$

$(+) \quad -٤س^٢ + ٦س + ٣$ رتّب الحدود المتشابهة عموديًّا واجمع

$-٢س^٢ + ١١س - ٤$

ب) $(٣ص + ص^٣ - ٥) + (٤ص^٢ - ٤ص + ٢ص^٣ + ٨)$

الطريقة الأفقية

$(٣ص + ص^٣ - ٥) + (٤ص^٢ - ٤ص + ٢ص^٣ + ٨)$

$= [ص^٣ + ٢ص^٣] + ٤ص^٢ + [٣ص + (-٤ص)] + [(-٥) + ٨]$ جمّع الحدود المتشابهة

$= ٣ص^٣ + ٤ص^٢ - ص + ٣$ اجمع الحدود المتشابهة

الطريقة الرأسية

$ص^٣ + ٠ص^٢ + ٣ص - ٥$ أضف الحد $٠ص^٢$ للمساعدة على ترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها

$(+) \quad ٢ص^٣ + ٤ص^٢ - ٤ص + ٨$ رتّب الحدود المتشابهة عموديًّا واجمعها

$٣ص^٣ + ٤ص^٢ - ص + ٣$

تحقق من فهمك

أ) $(٥س^٢ - ٣س + ٤) + (٦س - ٣س^٢ - ٣)$ $٢س^٢ + ٣س + ١$

ب) $(ص^٤ - ٣ص + ٧) + (٢ص^٣ + ٢ص - ٢ص^٤ - ١١)$ $-ص^٤ + ٢ص^٣ - ص - ٤$

مصادر الدرس ٦ - ٤

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٣٠)	• تنويع التعليم ص (٣٠، ٣١)	• تنويع التعليم ص (٣٠، ٣١)
كتاب التمارين	ص (٧)	ص (٧)	ص (٧)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) • التدريبات الإثرائية، ص (٢١)

طرح كثيرات الحدود: تذكّر أنه يمكنك طرح عدد حقيقي بإضافة معكوسه أو نظيره الجمعي. وبالمثل، يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة نظيرها الجمعي.

لإيجاد النظير الجمعي لكثيرة حدود، اكتب معكوس كل حد من حدودها.

$-(٣س^{٢} + ٢س - ٦) = \underbrace{-٣س^{٢} - ٢س + ٦}$ نظير جمعي

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي

عند إيجاد النظير الجمعي أو المعكوس لكثيرة حدود، اضرب كل حد فيها في العدد −١.

مثال ٢ طرح كثيرات الحدود

أوجد ناتج: (٧ك + ٤ك^{٣} − ٨) − (٣ك^{٢} + ٢ − ٩ك)

الطريقة الأفقية

اطرح ٣ك^{٢} + ٢ − ٩ك بإضافة نظيرها الجمعي

(٧ك + ٤ك^{٣} − ٨) − (٣ك^{٢} + ٢ − ٩ك)

= (٧ك + ٤ك^{٣} − ٨) + (−٣ك^{٢} − ٢ + ٩ك) النظير الجمعي لـ (٣ك^{٢} + ٢ − ٩ك) هو (−٣ك^{٢} − ٢ + ٩ك)

= [٧ك + ٩ك] + ٤ك^{٣} + (−٣ك^{٢}) + [(−٨) + (−٢)] جمّع الحدود المتشابهة.

= ٤ك^{٣} − ٣ك^{٢} + ١٦ك − ١٠ اجمع الحدود المتشابهة ورتّب.

الطريقة الرأسية

رتّب الحدود المتشابهة عموديًّا واطرح بإضافة النظير الجمعي.

٤ك^{٣} + ٠ك^{٢} + ٧ك − ٨		٤ك^{٣} − ٠ك^{٢} + ٧ك − ٨
(−) ٣ك^{٢} − ٩ك + ٢	جمع النظير	(+) − ٣ك^{٢} + ٩ك − ٢
		٤ك^{٣} − ٣ك^{٢} + ١٦ك − ١٠

إذن: (٧ك + ٤ك^{٣} − ٨) − (٣ك^{٢} + ٢ − ٩ك) = ٤ك^{٣} − ٣ك^{٢} + ١٦ك − ١٠

إرشادات للدراسة

الطريقة الرأسية

لاحظ أن كثيرتي الحدود قد كتبتا بالصورة القياسية، وأن الحدود المتشابهة تُرتَّب عموديًّا بعضها فوق بعض.

تحقق من فهمك

أ١) (٤س^{٣} − ٣س^{٢} + ٦س − ٤) − (−٢س^{٣} + س^{٢} − ٢) ٦س^{٣} − ٤س^{٢} + ٦س − ٢

ب١) (٨ص − ١٠ + ٥ص^{٢}) − (٧ − ص^{٣} + ١٢ص) ص^{٣} + ٥ص^{٢} − ٤ص − ١٧

الربط مع الحياة

ازدادت مبيعات آلات التصوير الرقمية مؤخرًا في عام واحد بنسبة ٤٢٪، ويُتوقع زيادة المبيعات على الأقل ١٥٪ كل عام مع تجديد المستهلكين لآلات التصوير التي لديهم.

مثال ٣ من واقع الحياة جمع كثيرات الحدود وطرحها

متجر إلكترونيات: تمثِّل المعادلتان أدناه عدد الهواتف المحمولة هـ، وعدد آلات التصوير الرقمية ك التي بيعت في ش شهر لمتجر بيع إلكترونيات: هـ = ٧ش + ١٣٧، ك = ٤ش + ٧٨

أ) اكتب معادلة تمثِّل المبيعات الكلية (ن) من الهواتف وآلات التصوير شهريًّا.

اجمع كثيرتي الحدود هـ، ك.

المبيعات الكلية = مبيعات الهواتف المحمولة + مبيعات آلات التصوير الرقمية

ن = ٧ش + ١٣٧ + ٤ش + ٧٨ عوِّض

= ١١ ش + ٢١٥ اجمع الحدود المتشابهة.

المعادلة هي: ن = ١١ ش + ٢١٥

التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقّق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقّق من استيعاب الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

أ) (٧ص^{٢} + ٢ص − ٣) + (٢ − ٤ص + ٥ ص^{٢})

١٢ص^{٢} − ٢ص − ١

ب) (٤س^{٢} − ٢س + ٧) + (٣س − ٧س^{٢} − ٩)

−٣س^{٢} + س − ٢

٢ أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

أ) (٦ص^{٢} + ٨ص^{٤} − ٥ص) − (٩ص^{٤} − ٧ص + ٢ص^{٢})

−ص^{٤} + ٤ص^{٢} + ٢ص

ب) (٦ن^{٢} + ١١ن^{٣} + ٢ن) − (٤ن − ٣ + ٥ن^{٢})

١١ ن^{٣} + ن^{٢} − ٢ن + ٣

جمع كثيرات الحدود وطرحها

المثال ١ يُبيّن طريقة جمع كثيرتي حدود، بجمع الحدود المتشابهة.

المثال ٢ يُبيّن طريقة طرح كثيرة حدود بإضافة نظيرها الجمعي.

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال جمع أو طرح كثيرات الحدود لنمذجة حالةٍ من واقع الحياة.

المحتوى الرياضي

عدد الحدود: قد يساوي عدد حدود ناتج جمع كثيرتَي حدود أو طرحهما (أو لا يساوي) عدد حدود كثيرتي الحدود اللتين تم جمعهما أو طرحهما. قد يفترض بعض الطلاب أن كون عدد حدود الجمع أو الفرق أكثر أو أقل من عدد حدود أيٍّ من كثيرتي الحدود، هو دلالة على وجود خطأ، أو أن الإجابة ليست في أبسط صورة؛ لذا استعمل مثالًا لتوضّح خطأ هذا التفكير.

تنبيه!

تجنُّب الأخطاء: قد يجد بعض الطلاب أن تظليل الحدود المتشابهة ربما ساعدهم على تجميعها ذهنيًّا، ممّا يوفّر الوقت الذي يمضونه في الكتابة لتجميع الحدود المتشابهة.

ب) استعمل المعادلة للتنبؤ بعدد الهواتف المحمولة وآلات التصوير الرقمية التي ستُباع في ١٠ أشهر.

ن = ١١(١٠) + ٢١٥ عوّض عن ش بـ ١٠

= ١١٠ + ٢١٥ = ٣٢٥ بسّط

لذا فإنه سيتم بيع ٣٢٥ هاتفًا محمولاً وآلات تصوير رقمية في ١٠ أشهر.

تحقق من فهمك ف = ٣ش + ٥٩؛ ١٣١

٣) استعمل المعلومات السابقة لكتابة معادلة تمثل الفرق (ف) بين مبيعات الهواتف المحمولة وآلات التصوير شهريًّا ثم استعمل المعادلة للتنبؤ بالفرق في المبيعات الشهرية في ٢٤ شهرًا.

تأكد

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

١) (٦س^{٣} − ٤) + (−٢س^{٣} + ٩) ٤س^{٣} + ٥

٢) (جـ^{٣} − ٢جـ^{٢} + ٥جـ + ٦) − (جـ^{٢} + ٢جـ)

٣) (٨ص − ٤ص^{٢}) + (٣ص − ٩ص^{٢})

٤) (−٤ع^{٣} − ٢ع + ٨) − (٤ع^{٣} + ٣ع^{٢} − ٥)

٥) (−٣د^{٢} − ٨ + ٢د) + (٤د − ١٢ + د^{٢})

٦) (٣ن^{٣} − ٥ن + ن^{٢}) − (−٨ن^{٢} + ٣ن^{٣}) ٩ن^{٢} − ٥ن

٧) **عطلة:** يتوزَّع العدد الكلي للطلاب (ك) الذين يسافرون خلال العطلة المدرسية إلى مجموعتين: مجموعة تسافر إلى المنطقة ف بالطائرة، والمجموعة الأخرى تسافر إلى المنطقة د بالسيارة. ويمكن تمثيل العدد الكلي بالآلاف للطلاب (ك) الذين سافروا خلال العطلة وعدد الطلاب (ع) الذين سافروا للمنطقة ف بالمعادلتين ك = ١٤ن + ٢١، ع = ٨ن + ٧، حيث ن عدد السنوات منذ عام ١٤١٦ هـ.

مثال ٣

أ) اكتب المعادلة التي تمثِّل عدد الطلاب (ل) الذين توجَّهوا إلى المنطقة د في هذه الفترة. ل = ٦ن + ١٤

ب) كم طالبًا يُتوقع أن يتوجهوا إلى المنطقة د في عام ١٤٣٣ هـ؟ ١١٦٠٠٠ طالب

جـ) كم طالبًا يُتوقع أن يسافروا في عام ١٤٣٦ هـ؟ ٣٠١٠٠٠ طالب.

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كل مما يأتي:

٨) (ص + ٥) + (٢ص + ٤ص^{٢} − ٢)

٩) (٣جـ^{٣} − جـ + ١١) − (جـ^{٢} + ٢جـ + ٨)

١٠) (ع^{٢} + ع) + (ع^{٢} − ١١) ٢ع^{٢} + ع − ١١

١١) (٢س − ٢ص + ١) − (٣ص + ٤س)

١٢) (٤أ − ٥ب^{٢} + ٣) + (٦ − ٢أ + ٣ب^{٢})

١٣) (س^{٢}ص − ٣س^{٢} + ص) + (٣ص − ٢س^{٢}ص)

١٤) (٦أب^{٢} + ٢أب) + (٣أ^{٢}ب − ٤أب + أب^{٢})

١٥) (جـد^{٢} + ٢جـد − ٤) + (−٦ + ٤جـد − ٢جـد^{٢})

١٦) (٣ن^{٣} + ٣ن − ١٠) − (٤ن^{٢} − ٥ن) + (٤ن^{٣} − ٣ن^{٢} − ٩ن + ٤) ٧ن^{٣} − ٧ن^{٢} − ن − ٦

مثال إضافي

٣ ألعاب: باعت إحدى الشركات نوعين من الألعاب: ألعاب فيديو وألعاب تعليمية، وكان مجموع دخلها من بيع النوعين معًا (بملايين الريالات) يُمثّل بالمعادلة:

ك = ٤٥,٠ن^{٣} − ١,٨٥ن^{٢} + ٤,٦ن + ٢٢,٠، ودخلها من بيع الألعاب التعليمية يُمثّل بالمعادلة:

ت = ٤٦,٠ن^{٣} − ١,٩ن^{٢} + ٣ن + ١٩,٠، حيث (ن) عدد السنوات منذ عام ١٤٣٠ هـ.

أ) اكتب معادلة تُمثّل دخل الشركة من مبيعات ألعاب الفيديو (ف).

ف = −٠,٠١ن^{٣} + ٠,٠٥ن^{٢} + ١,٤ن + ٣,٦

ب) استعمل المعادلة، لتتوقّع كمية مبيعات ألعاب الفيديو عام ١٤٣٩ هـ. ١٢,٩٦ مليون ريال

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ − ٧؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب عبارة تُمثّل جمع أو طرح كثيرتي حدود على السبورة التفاعلية، واسحب الحدود المتشابهة لتجميعها معًا، ثم اجمع الحدود المتشابهة وبسّط العبارة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٨−١٥، ٢٠−٣٢
ضمن ضمن المتوسط	٩−١٥ (فردي)، ١٨−٣٢
فوق فوق المتوسط	١٧−٢٩

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية؛ لإيجاد ناتج الجمع والفرق في الأسئلة ١−٦، ثم قارن بين إجاباتهم وخطواتهم في التوصل إلى الإجابات. وفي حالة وجود اختلاف، يجب على كل مجموعة التشاور مع مجموعة أخرى من الطلاب، وعليهم تقديم تعزيز بنّاءٍ لبعضهم بعضًا.

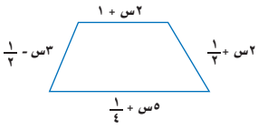
مثال ٣

١٧) **مبيعات:** يُقدّر متجر بيع إلكترونات أن تكلفة س وحدة من أجهزة التلفاز LCD بالريال تُعطى بالعبارة ٠,٤٢س^{٢} + ٢١٢٨س + ١٥٠٠، وأن الربح من بيع س تلفازًا هو ٧٥س، حيث س بين صفر وَ ٨٠٠

أ) اكتب كثيرة حدود تمثل سعر بيع س وحدة. ٠,٤٢س^{٢} + ٢٢٠٣س + ١٥٠٠

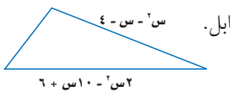
ب) ما سعر بيع ٧٥٠ تلفازًا؟ ٨٥٥٠٠٠ ريال

١٨) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثِّل محيط الشكل المجاور.



١٢س + ١ ١/٤

١٩) **هندسة:** تمثِّل العبارة ٣س^{٢} – ٧س + ٢ محيط الشكل المقابل. اكتب كثيرة حدود تمثِّل قياس الضلع الثالث. ٤س



الربط مع الحياة

معدل العمر الافتراضي لجهاز التلفاز LCD هو ٦٠٠٠٠ ساعة. مما يعني استعماله مدة ٢٠ سنة أو أكثر إذا عمل أقل من ٨ ساعات يوميًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٠) **اكتشف الخطأ:** يجد كل من ثامر وسلطان ناتج: (٢س^{٢} – س) – (٣س +٣س^{٢}– ٢). فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ثامر

(٢س^{٢} – س) – (٣س+٣س^{٢}–٢)

= (٢س^{٢} – س) + (–٣س+٣س^{٢}–٢)

= ٥س^{٢}–٤س – ٢

سلطان

(٢س^{٢} – س) – (٣س+٣س^{٢}–٢)

= (٢س^{٢} – س) + (–٣س–٣س^{٢}–٢)

= – س^{٢}–٤س – ٢

٢٠) كلاهما إجابته خطأ؛ فلم يجد أي منهما النظير الجمعي بشكل صحيح. إذ إن جميع حدود كثيرة الحدود التي تلي عملية الطرح يجب أن تضرب في –١.

٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرتي حدود الفرق بينهما ٢س^{٣} –٧س +٨. إجابة ممكنة: ٣س^{٣} – ٨س + ٩، س^{٣} – س + ١

٢٢) **تبرير:** أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية: «طرح كثيرات الحدود عملية إبدالية».

٢٢) إجابة ممكنة:
(٢س – ٣)–(٤س –٣)
= –٢س ولكن (٤س–٣)
–(٢س–٣) = ٢س

٢٣) **اكتب:** صف كيف تجمع كثيرتي حدود وتطرحهما باستعمال الطريقتين الرأسية والأفقية. وأي الطريقتين هي الأسهل في نظرك؟ ولماذا؟ انظر الهامش

تدريب على اختبار

٢٤) يمكن التعبير عن ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بالرموز: س، س +١، س+٢. ما مجموع هذه الأعداد الثلاثة؟ جـ

أ) س(س+١)(س+٢)

ب) س^{٣}+٣

جـ) ٣س + ٣

د) س + ٣

٢٥) **إجابة قصيرة:** ما محيط مربع طول ضلعه (٢س + ٣) وحدة؟ (٨س + ١٢) وحدة

مراجعة تراكمية

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦ - ٣)

٢٦) ٢٥ ٠ ٢٧) ن^{٣} + ٦ و ٣ ٢٨) ٢ + ٣أب^{٣} – أ^{٢}ب + ٤أ^{٦} ٦ ٢٩) ٦ – ك^{٤} + ك^{٢}ع^{٣} + ٦ك^{٣} ٥

بسِّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦ - ١)

٣٠) ن^{٣} (ن^{٢}) (–٢ن^{٣}) –٢ن^{٨} ٣١) (–٨و^{٤}ع^{٥})(٥وع^{٤}) –٤٠و^{٥}ع^{٩} ٣٢) (٦س ص^{٢})^{٢}(٢س^{٢}ص^{٢}ع^{٢})^{٣} ٢٢٨س^{٨}ص^{١٠}ع^{٦}

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أنه يمكن تمثيل مبيعات إحدى المكتبات من الأقلام (ق)، والدفاتر (د) شهريًّا بالمعادلتين ق = ٧م + ٨٧، د = ٩م + ١٥٢، حيث (م) عدد الأشهر منذ افتتاح المكتبة. وأن المبلغ الكلي للمبيعات من الأقلام (ق) والدفاتر (د) والأدوات الهندسية (س)، يُمثّل بالمعادلة: ك = ١٥م + ٢٤٨، اكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد مبيعات الأدوات الهندسية الشهرية، وما عدد الأدوات الهندسية التي باعتها المكتبة في الشهر السادس عندما م = ٥؟ س = (–١) م + ٩؛ ٤

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال ٢٠ اطلب إلى الطلاب التحقّق من كل خطوة من إجابات الطالبين، وذكّرهم بأن كلا الطالبين يحتاج إلى إضافة النظير الجمعي لكل حد في كثيرة الحدود المطروحة.

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اعمل عدة نسخ كل منها تحتوي على خمس كثيرات حدود، وأعطِ كل طالب مجموعة منها. واطلب إليه أن يُعطي النظائر الجمعية لكثيرات الحدود، وأن يسلّمها لك قبل مغادرتك الفصل.

إجابة:

٢٣) إجابة ممكنة: لجمع كثيرات الحدود بالصورة الأفقية، أجمّع الحدود المتشابهة. وللجمع بالصورة الرأسية، أكتب كثيرات الحدود بالصورة القياسية، وأضع الحدود المتشابهة بعضها تحت بعض، وأجمّع الحدود المتشابهة. أما لطرح كثيرتي حدود أفقيًّا، فأجد النظير الجمعي لكثيرة الحدود المطروحة، ثم أجمّع الحدود المتشابهة. ولطرح كثيرتي حدود رأسيًّا، أكتبهما في الصورة القياسية، وأضع الحدود المتشابهة بعضها أسفل بعض، وأطرح بإضافة النظير الجمعي، والطريقة الأسهل تختلف باختلاف الطلاب.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٦ - ٤

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٨)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٤ تدريبات إعادة التعليم

جمع كثيرات الحدود وطرحها

جمع كثيرات الحدود، يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المتشابهة. ويمكنك تجميع الحدود المتشابهة مستعملًا الطريقة الأفقية أو الرأسية. **الحدود المتشابهة** هي وحيدات حد إما أن تكون متماثلة أو تختلف فقط بمعاملاتها، مثل ٣ب، −٥ب أو ٢س ص، ٨س ص.

مثال ١ أوجد ناتج (٢س² + س − ٨) + (٣س − ٤س + ٢) بالطريقة الأفقية:

(٢س² + س − ٨) + (٣س − ٤س + ٢)

= [٢س² + (−٤س)] + [(س + ٣س) + (−٨ + ٢)]　جمع الحدود المتشابهة

= ٢س² + ٤س − ٦　اجمع الحدود المتشابهة

المجموع هو ٢س² + ٤س − ٦

مثال ١ أوجد ناتج (٣س² + ٥ س ص) + (س ص + ٢س²) بالطريقة الرأسية.

٣س² + ٥ س ص
(+) ٢س² + س ص
٥س² + ٦ س ص

رتّب الحدود المتشابهة عموديًا واجمع

المجموع هو ٥س² + ٦ س ص

تمارين

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

١) (٤أ − ٥) + (٣أ + ٦)　٢) (٦س + ٩) + (٤س² − ٧)

٧أ + ١　**٤س² + ٦س + ٢**

٣) (٦س ص + ٢ص + ٦س) + (٤س ص − ص − س)　٤) (ص² ص) + (−س² + ص²)

١٠س ص + ٥س + ٢ص　**٢ص²**

٥) (٣ب² − ٢ب + ٣) + (ب² − ٧ب + ٧)　٦) (٢س² + ٥ س ص + ٤ص²) + (− س ص − ٦س² + ٢ص²)

٤ب² − ٩ب + ١٠　**−٤س² + ٤ س ص + ٦ص²**

٧) (٥ص + ٤ك) + (٢ب² − ٨ك + ١)　٨) (٤س² − س + ٤) + (٥س + ٣س² + ٢)

٢ب² + ٥ب − ٤ك + ١　**٦س² + ٤س + ٦**

٩) (٦س² + ٣ص) + (س² − ٤س − ٣)　١٠) (س² + ٢س ص + ص²) + (س² − س ص − ٢ص²)

٧س² − س − ٣　**٣س² + ٢س ص − ص²**

١١) (٢أ² − ٤ب − جـ) + (−٢أ² − ب − ٤جـ)　١٢) (٦س ص² + ٤ س ص) + (٢س ص² − ١٠ س ص² + ص²)

−٥ب − ٥ جـ　**−٤س ص² + ٦ س ص + ص²**

١٣) (٢ب − ٥ر) + (٣ب + ٦ر) + (−ب − ر)　١٤) (٢س² − ٦) + (٥س² + ٢) + (−س² − ٧)

٦ب　**٦س² − ١١**

١٥) (٣ع² + ٥ع) + (ع² + ٢ع) + (ع − ٤)　١٦) (٨س² + ٤ س² + ٣ص²) + (٦س² − س + ٤ص)

٤ع² + ٨ع − ٤　**١٤س² + ٣ص² + ٢س ص + ٥ص**

تدريبات حل المسألة (٢٠)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٤ تدريبات حل المسألة

جمع كثيرات الحدود وطرحها

١) **بناء**، أوجد أبسط عبارة لمحيط دعامة السقف المثلثة في الشكل أدناه:

١٥أ² + ١٦ − ٣

٢) **هندسة**، اكتب كثيرة حدود تمثل مساحة المربع الكبير في الشكل أدناه:

أ² + ١٢ ب + ٩ب²

٣) **ألعاب نارية**، أُطلق سهمان إلى أعلى في الهواء. ارتفاع كلّ سهم بالأقدام بعد ن ثانية من إطلاقه يُعطى بمعادلة كثيرة حدود. على النحو المبيّن أدناه. اكتب معادلة تمثل المسافة الرأسية التي تفصلها أزيادة على التي تفصلها السهم ب.

السهم أ: ع = −١٦ن² + ١٢٢ن

السهم ب: ع = −١٦ن² + ٥٨ن

ف = ٣٨

٤) **مغلفات**، تنتج شركة تجهيزات مكتبية، مغلفات وثائق بأحجام مختلفة، طول كلّ منها يزيد ٤ سم على مثلّي عرضه دائمًا. اكتب عبارة كثيرة حدود لإيجاد محيط أي من هذه المغلفات. ٦س ٨٠

٥) **صناعة**، تحتوي أسطوانتان دائريتان قائمتان معدنيتان متماثلتان على زيت معدني، ويُراد تغطيتهما بمادة عازلة مقاومة للنار. ولتحديد كمية المادة العازلة التي يتعين شراؤها، يتعيّن إيجاد المساحة السطحية للأسطوانتين. والمساحة السطحية لكل أسطوانة تساوي (المساحة الجانبية مع مساحة القاعدتين)، ومعطاة بالصيغة الآتية: م = ٢ ط نق ع + ٢ ط نق²

أ) اكتب كثيرة حدود للتعبير عن المساحة السطحية للأسطوانتين معًا.

٤ ط نق ع + ٤ ط نق²

ب) أوجد المساحة السطحية للأسطوانتين إذا كان ارتفاع كلٍّ منهما ٢ م، وطول نصف قطر قاعدة كلٍّ منهما ٠,٥ م، مفترضًا ط = ٣,١٤

١٥,٧ م²

جـ) إذا كانت تغطية الأسطوانات بالمادة العازلة المقاومة للنار تتم على الأسطوانات مرتّبة فوق بعضها رأسيًا في مجموعات ثلاثية كما في الشكل أدناه. إذا كان ارتفاع كلّ أسطوانة ع، وطول نصف قطر قاعدتها نق، فاكتب كثيرة حدود للتعبير عن المساحة السطحية لكل مجموعة.

٦ ط نق ع + ٢ ط نق²

التدريبات الإثرائية (٢١)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٤ التدريبات الإثرائية

حساب المساحة وحساب الحجم لأشكال مرتبطة بالدائرة

مساحة الدائرة	حجم الأسطوانة الدائرية القائمة	حجم المخروط الدائري القائم
م = ط نق²	ح = ط نق ع	$\frac{1}{3}$ ط نق ع

اكتب عبارة جبرية تمثل مساحة المنطقة المظللة فيما يأتي: (تذكر أنّ طول قطر الدائرة = ٢ × طول نصف قطرها)

١)　٢)　٣)

ط س² − ط$\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ ط س²　$\frac{٣}{٤}$(ص² + ٢س ص)　$\frac{١٩}{٢}$ ط س²

اكتب عبارة جبرية تمثل الحجم الكلي لكل مجسم فيما يأتي:

٤)　٥)

$\frac{٢}{٣}$ ط س³　$\frac{٤}{٣}$(١٢س³ + (٤أ + ٩ب) س²]

يحتوي كلّ مجسم فيما يأتي على ثقب أسطواني طول نصف قطره بوصتان، وارتفاعه ٥ بوصات. أوجد كلّ حجم:

٦)　٧)

($\frac{١٧٥}{٤}$ ط س³ − ٢٠ط) بوصة³　(٣ط س³ − ٢٠ط) بوصة³

كتاب التمارين (٧)　دون ضمن فوق

٦ - ٤ جمع كثيرات الحدود وطرحها

أوجد ناتج كل مما يأتي:

١) (٤ص + ٥) + (−٧ص − ١)
−٣ص + ٤

٢) (−س² + ٣س) − (٥س + ٢س²)
−٣س² − ٢س

٣) (٤ك² + ٨ك + ٢) − (٢ك + ٣)
٤ك² + ٦ك − ١

٤) (٢م² + ٦م) + (م² − ٥م + ٧)
٣م² + م + ٧

٥) (٥أ² + ٦أ + ٢) − (٧أ² − ٧أ + ٥)
−٢أ² + ١٣أ − ٣

٦) (−٤ب² − ب + ٩) + (ب² + ٣ب − ١)
−٣ب² + ٢ب + ٨

٧) (س² − ٣س + ١) − (س² + ٧ − ١٢س)
٩س − ٦

٨) (٦س² − س + ١) − (−٤ + ٢س² + ٨س)
٤س² − ٩س + ٥

٩) (٤ص² + ٢ص − ٨) − (٧ص² + ٤ − ص)
−٣ص² + ٣ص − ١٢

١٠) (ل² − ٤ل − ١) + (−٥ + ٥ل − ٣ل)
٦ل² − ٨ل − ٦

١١) (٤هـ² − ٢هـ − ٣) + (٣هـ² − هـ + ٤)
٧هـ² − ٣هـ + ١

١٢) (٥ب² − ٨ + ٢ب) − (ب + ٩ب² + ٥)
−٤ب² + ب − ١٣

١٣) (٤د² + ٢د + ٢) + (٥د² − ٢ − د)
٩د² + د

١٤) (٨س² + ٣س − ٦) − (−س² + ٢س − ٣)
٩س² − س − ٣

١٥) (٣هـ² + ٧هـ − ١) − (٤هـ + ٨هـ² + ١)
−٥هـ² + ٣هـ − ٢

١٦) (٤م² − ٣م + ١٠) + (م² + م − ٢)
٥م² − ٢م + ٨

١٧) (س² + ص² − ٦) − (٥س² − ص² − ٥)
−٤س² + ٢ص² − ١

١٨) (٧ن² + ٢ − ن) + (ن − ٧ − ٢ن)
٨ن² − ٣ن − ٥

١٩) (ك² − ٢ك² + ٤ك + ٦) − (−٤ك + ك² − ٣)
ك² − ٣ك² + ٨ك + ٩

٢٠) (٩جـ² + جـ + جـك) + (−٣جـ² − جـك − ٤جـ)
٦جـ² − ٣جـ

٢١) (٢س + ٦ص − ٣ع) + (٤س + ٤ع − ٨ص) + (س − ٣ص + ع)
٧س − ٥ص + ٤ع

٢٢) **عمل**، تمثّل كثيرة الحدود س² − ٧٠س + ١٥٠٠ س − ١٠٨٠٠ ربح شركة مبيعات لإحدى السلع بدلالة سعر القطعة الواحدة س. وتمثّل كثيرة الحدود س² − ٣٠س + ٤٥٠ س − ٥٠٠٠ ربح الشركة لسلعة أخرى لها السعر نفسه. اكتب كثيرة حدود تمثّل ربح الشركة من السلعتين معًا. ٢س² − ١٠٠س + ١٩٥٠ س − ١٥٨٠٠

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٦ ـ ٥

ضرب وحيدات الحد.

الدرس ٦ ـ ٥

- ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.
- حل معادلات تتضمّن حاصل ضرب وحيدات حد في كثيرات حدود.

ما بعد الدرس ٦ ـ ٥

ضرب كثيرات الحدود.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

ثم اسأل:

- ما صيغة إيجاد مساحة المستطيل؟
  م= ل × ض، ل الطول، ض العرض.
- ما الطول والعرض في الصيغة السابقة؟ ل هو (٣ض+٣)، ض هو ض.
- أيُّ البعدين هو وحيدة حد؟ ض
- صف كيف تجد مساحة غرفة عرضها ٦ م.
  ٦ (٣ × ٦ + ٣) =
  ٦ (١٨ + ٣) = ٦ (٢١)
  = ١٢٦ م^{٢}

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

فيما سبق

درستُ ضرب وحيدات الحد.

والآن

- أضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود.
- أحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدات حد في كثيرات حدود.

obeikaneducation.com

لماذا؟

يريد نادٍ رياضي بناء قاعة خاصة بالتمارين الرياضية، على أن يزيد طولها على ثلاثة أمثال عرضها بـ ٣ أمتار. ولمعرفة مساحة أرض القاعة لتغطيتها بسجاد خاص بالتمارين الرياضية نضرب عرض القاعة في طولها، ض (٣ض + ٣).

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

مثال ١ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

أوجد ناتج: −٣س^{٢}(٧س^{٢} − س + ٤).

الطريقة الأفقية:

−٣س^{٢}(٧س^{٢} − س + ٤)	العبارة الأصلية
= −٣س^{٢}(٧س^{٢}) − (−٣س^{٢})(س) + (−٣س^{٢})(٤)	خاصية التوزيع
= −٢١س^{٤} − (−٣س^{٣}) + (−١٢س^{٢})	اضرب
= −٢١س^{٤} + ٣س^{٣} − ١٢س^{٢}	بسّط

الطريقة الرأسية:

٧س^{٢} − س + ٤	
(×) −٣س^{٢}	خاصية التوزيع
−٢١س^{٤} + ٣س^{٣} − ١٢س^{٢}	اضرب

تحقق من فهمك

أ) ٥أ^{٢}(−٤أ^{٢} + ٢أ − ٧) ١أ)−٢٠أ^{٤} + ١٠أ^{٣} − ٣٥أ^{٢}

ب) −٦د^{٣}(٣د^{٤} − ٢د^{٣} − د + ٩) −١٨د^{٧} + ١٢ د^{٦} + ٦د^{٤} − ٥٤ د^{٣}

ويمكنك استعمال الطريقة نفسها أكثر من مرة لتبسيط عبارات تتكون من عدة حدود .

مثال ٢ تبسيط العبارات

بسِّط ٢ل(−٤ل^{٢} + ٥ل) − ٥(٢ل^{٢} + ٢٠).

٢ل(−٤ل^{٢} + ٥ل) − ٥(٢ل^{٢} + ٢٠)	العبارة الأصلية
= (٢ل)(−٤ل^{٢}) + (٢ل)(٥ل) + (−٥)(٢ل^{٢}) + (−٥)(٢٠)	خاصية التوزيع
= −٨ل^{٣} + ١٠ل^{٢} − ١٠ل^{٢} − ١٠٠	اضرب
= −٨ل^{٣} + (١٠ل^{٢} − ١٠ل^{٢}) − ١٠٠	خاصية التجميع
= −٨ل^{٣} − ١٠٠	اجمع الحدود المتشابهة

مصادر الدرس ٦ ـ ٥

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٣٤)	• تنويع التعليم ص (٣٤)	• تنويع التعليم ص (٣٦)
كتاب التمارين	ص (٨)	ص (٨)	ص (٨)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٢) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٤)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٤)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٤) • التدريبات الإثرائية، ص (٢٥)

تحقق من فهمك

٢أ) $-٧س^{٣} + ١٣س^{٢} + ٩س - ١٢$

٢ب) $١٥٠ص^{٣}ن^{٦} + ٧٣ص^{٢}ن^{٢} - ٨ص^{٣}$

٢أ) $٣(٥س^{٢}+٢س - ٤) - س(٧س^{٢} + ٢س - ٣)$

٢ب) $١٥ن(١٠ص^{٣}ن^{٥} + ٥ص^{٢}ن) - ٢ص(ص ن^{٢} + ٤ص^{٢})$

ويمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود عند حل مسائل من واقع الحياة .

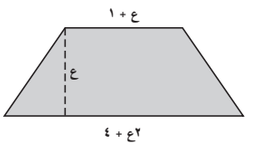
إرشادات للاختبار

الصيغ والقوانين

تزود بعض الاختبارات العالمية الطلاب بورقة تحتوي الصيغ والقوانين الأكثر استعمالاً. ويمكن الرجوع إليها قبل البدء بحل المسألة عند عدم التأكد من الصيغة أو القانون المطلوب.

مثال ٣ من اختبار

غُطيت لوحة جدارية على شكل شبه منحرف بورق ذهبي. فإذا كان ارتفاع اللوحة ٤٤ سم. فكم سنتمترًا مربعًا من الورق الذهبي نحتاج إليه؟ ثم مثل الإجابة على نموذج الإجابة المعطى.



اقرأ الفقرة:

يطلب السؤال إيجاد مساحة شبه منحرف طولا قاعدتيه ع + ١، ٢ع + ٤ وارتفاعه ع.

حل الفقرة:

اكتب معادلة تمثِّل مساحة شبه المنحرف.

لتكن $ق_{١} = ع + ١$، $ق_{٢} = ٢ع + ٤$، ع = ارتفاع شبه المنحرف.

$م = \frac{١}{٢} ع (ق_{١} + ق_{٢})$ — مساحة شبه المنحرف

$= \frac{١}{٢} ع [(ع + ١) + (٢ع + ٤)]$ — $ق_{١} = ع + ١$، $ق_{٢} = ٢ع + ٤$

$= \frac{١}{٢} ع (٣ع + ٥)$ — اجمع ثم بسّط

$= \frac{٣}{٢} ع^{٢} + \frac{٥}{٢} ع$ — خاصية التوزيع

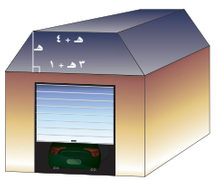
$= \frac{٣}{٢} (٤٤)^{٢} + \frac{٥}{٢} (٤٤)$ — ع = ٤٤

$= ٣٠١٤$ — بسّط

إذن نحتاج إلى ٣٠١٤ سم^{٢} من الورق الذهبي.

تحقق من فهمك

٣) مرآب: يمثل الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب المجاور شكل شبه منحرف.إذا كان ارتفاع شبه المنحرف ١,٧٥ متر، فأوجد مساحة الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب. ١٠,٥ م^{٢}



ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال خاصية التوزيع؛ لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

المثال ٢ يُبيّن طريقة استعمال خاصية التوزيع أكثر من مرة؛ لتبسيط عبارات تتكوّن من عدة حدود.

المثال ٣ يُبيّن طريقة كتابة وحساب كثيرة حدود لمسألة من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

١ أوجد ناتج:

٦ ص (٤ص^{٢} – ٩ص – ٧)

٢٤ ص^{٣} – ٥٤ ص^{٢} – ٤٢ص

٢ بسّط العبارة:

٣ (٢ت^{٢} – ٤ت – ١٥) + ٦ت (٥ت+٢)

٣٦ ت^{٢} – ٤٥

٣ **حديقة:** إذا كانت رسوم دخول حديقة ترفيهية ١٠ ريالاتٍ، بالإضافة إلى ٣ ريالاتٍ لاستعمال اللعبة المميزة، وريالين لاستعمال اللعبة الاعتيادية، وذهب ماجد إلى الحديقة ولعب ١٥ مرةً، فأوجد ما يدفعه ماجد إذا كانت ٩ لعبات منها مميزة. ٤٩ ريالًا

المحتوى الرياضي

ترتيب العمليات: عند تبسيط عبارات تحتوي على ضرب وحيدات حد وكثيرات حدود، يجب اتباع ترتيب العمليات، فالضرب يسبق الجمع عند عدم وجود أقواس تُشير إلى غير ذلك.

التعليم باستعمال التقنيات

آلة تصوير وثائقية: اعرض صورة مربعة، وسمّ كل ضلع منها (س). ناقش كيف تجد مساحة الصورة، ثم أضف جزءًا من الإطار أعلى الصورة. وناقش الطول الجديد للصورة والإطار، وكيف تجد مساحة الصورة الجديدة.

حل معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

المثال ٤ يُبيّن طريقة حل معادلات تحتوي على كثيرات حدود في طرفَيها.

مثال إضافي

٤ حل المعادلة:

ب (١٢+ب) –٧ = ٢ب + ب (–٤ + ب) $\frac{١}{٢}$

حل معادلات تتضمن كثيرة حدود: تستطيع استعمال خاصية التوزيع لحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدة حد بكثيرة حدود.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **جمع الحدود المتشابهة**
> إذا أردت تبسيط عبارة تحوي الكثير من الحدود، فقد يساعدك على ذلك وضع دائرة حول أحد عناصر مجموعات الحدود المتشابهة ومستطيل حول مجموعة أخرى، ومثلث حول عناصر مجموعة ثالثة، وهكذا.

مثال ٤ معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

حل المعادلة: ٢أ(٥أ – ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ – ٤) + ٥٠

٢أ(٥أ – ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ – ٤) + ٥٠	المعادلة الأصلية
١٠أ^{٢} – ٤أ + ٦أ^{٢} + ١٨أ + ٨ = ٤أ^{٢} + أ + ١٢أ^{٢} – ٨أ + ٥٠	خاصية التوزيع
١٦أ^{٢} + ١٤أ + ٨ = ١٦أ^{٢} – ٧أ + ٥٠	اجمع الحدود المتشابهة.
١٤أ + ٨ = –٧أ + ٥٠	اطرح ١٦ أ^{٢} من كلا الطرفين
٢١أ + ٨ = ٥٠	أضف ٧أ إلى كلا الطرفين
٢١أ = ٤٢	اطرح ٨ من كلا الطرفين
أ = ٢	اقسم كلا الطرفين على ٢١

تحقق:

٢أ(٥أ – ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ – ٤) + ٥٠

٢(٢)[٥(٢) – ٢] + ٣(٢)[٢(٢) + ٦] + ٨ $\stackrel{?}{=}$ ٢[٤(٢) + ١] + ٢(٢)[٦(٢) – ٤] + ٥٠

٤(٨) + ٦(١٠) + ٨ $\stackrel{?}{=}$ ٢(٩) + ٤(٨) + ٥٠	بسّط
٣٢ + ٦٠ + ٨ $\stackrel{?}{=}$ ١٨ + ٣٢ + ٥٠	اضرب
١٠٠ $\stackrel{?}{=}$ ١٠٠ ✓	اجمع

✓ تحقق من فهمك

٤أ) ٢س(س + ٤) + ٧ = (س + ٨) + ٢س(س + ١) + ١٢ $٢\frac{٣}{٥}$

٤ب) د(د + ٣) – د(د – ٤) = ٩د – ١٦   ٨

✓ تأكد

مثال ١ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: ١–٧ انظر الهامش

١) ٥ن(–٣ن^{٢} + ٢ن – ٤)

٢) ٦جـ^{٢}(٣جـ^{٣} + ٤جـ^{٢} + ١٠جـ – ١)

٣) –٣ل^{٤}ر^{٣}(٢ل^{٢}ر^{٤} – ٦ل^{٦}ر^{٣} – ٥)

٤) ٢أب(٧أ^{٤}ب^{٢} + أ^{٥}ب – ٢أ)

مثال ٢ بسِّط كل عبارة فيما يأتي:

٥) ن(٤ن^{٢} + ١٥ن + ٤) – ٤(٣ن – ١)

٦) س(٣س^{٢} + ٤) + ٢(٧س – ٣)

٧) –٢د (د^{٣}جـ^{٢} – ٤د جـ^{٢} + ٢د^{٢}جـ) + جـ^{٢}(د جـ^{٢} – ٣د^{٤})

مثال ٣

٨) اشترى أحمد تلفازًا جديدًا. ارتفاع شاشته يساوي نصف عرضها، بالإضافة إلى ٥ بوصات، وعرضها ٣٠ بوصة. أوجد ارتفاع الشاشة بالبوصات. ٢٠ بوصة

مثال ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

٩) –٦(١١ – ٢جـ) = ٧(–٢ – ٢جـ)   ٢

١٠) ن(٢ن + ٣) + ٢٠ = ٢ن(ن – ٣) $\frac{-٢٠}{٩}$

١١) أ(أ + ٣) + أ(أ – ٦) + ٣٥ = أ(أ – ٥) + أ(أ + ٧)   ٧

إرشادات للمعلم الجديد

الضرب في وحيدة حد سالبة: إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في الضرب في وحيدة حد سالبة، فاطلب إليهم التعامل مع الإشارة السالبة أولًا، وذلك بضرب الحدود جميعها في العدد –١، ثم الضرب في الجزء الرمزي من وحيدة الحد.

٣ التدريب

✓ التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١–١١؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

١) –١٥ن^{٣} + ١٠ن^{٢} – ٢٠ن

٢) ١٨جـ^{٥} + ٢٤ جـ^{٤} + ٦٠جـ^{٣} – ٦جـ^{٢}

٣) –٦ل^{٦}ر^{٧} + ١٨ل^{١٠}ر^{٦} + ١٥ل^{٤}ر^{٣}

٤) ١٤أ^{٥}ب^{٣} + ٢أ^{٦}ب^{٢} – ٤أ^{٢}ب

٥) ٤ن^{٣} + ١٥ن^{٢} – ٨ن + ٤

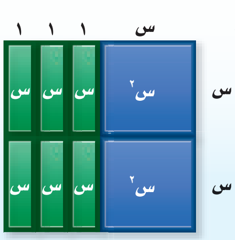
٦) ٣س^{٣} + ١٨س – ٦

٧) –٥د^{٤}جـ^{٢} + ٨ د^{٢}جـ^{٢} – ٤د^{٣}جـ + دجـ^{٤}

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون والمكانيون: اطلب إلى الطلاب تجميع بطاقات الجبر؛ لتكوين مستطيل عرضه ٢س وطوله س + ٣، باستعمال قطعتين زرقاوين من النوع س^{٢} و ٦ قطع خضراء من النوع (س)، ثم اطلب إليهم استعمال نماذجهم؛ لكتابة عبارة لمساحة المستطيل، ثم استعمال صيغة مساحة المستطيل في إيجاد المساحة.
٢س^{٢}+٦س؛ ٢س (س+٣) = ٢س^{٢}+ ٦س.



تدرب وحل المسائل

مثال ١

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي: ١٢–١٥ انظر الهامش

١٢) ب(ب^{٢} – ١٢ب + ١)

١٣) ٢جـ^{٢}(٥جـ^{٣} – ١٥جـ^{٢} + ٢جـ + ٢)

١٤) ٢ب ر^{٢}(٢ب ر + ٥ب^{٢}ر – ١٥ب)

١٥) ٤ن^{٣}ل(٢ن^{٢}ل^{٢} – ١٠ن ل^{٤} + ٢)

مثال ٢

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١٦) –٣(٥س^{٢} + ٢س + ٩) + س(٢س – ٣)

١٧) أ(–٨أ^{٢} + ٢أ + ٤) + ٣(٦أ^{٢} – ٤)

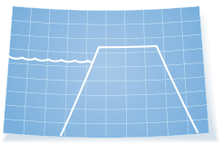
١٨) –٤د(٥د^{٢} – ١٢) + ٧(د + ٥)

١٩) –٩جـ(–٢جـ + جـ^{٢}) + ٣(جـ^{٢} + ٤)

٢٠) ٤ن(٢ن^{٣}ب^{٢} – ٣ن ب^{٢} + ٥ن) + ٤ب(٦ن^{٢}ب – ٢ن ب^{٢} + ٣ب)

مثال ٣

٢١) **سدود:** واجهة سد على شكل شبه منحرف. طول قاعدتها السفلية مِثْلا ارتفاعها. وقاعدتها العليا أقل من $\frac{١}{٥}$ ارتفاعها بـ ١٠ أمتار.



أ) اكتب عبارة لإيجاد مساحة هذه الواجهة. $\frac{١١}{١٠}$ع^{٢} – ٥ع

ب) إذا كان ارتفاع السد ٦٠ مترًا، فأوجد هذه المساحة. ٣٦٦٠ م^{٢}

مثال ٤

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

٢٢) ٧(ن^{٢} + ٥ن – ٩) + ن = ن(٧ن – ٢) + ١٣ ٢

٢٣) ٥(ع + ٦) – ٢(ع – ٤) = ٧ع(ع + ٤) – ع(٧ع – ٢) – ٤٨ $\frac{٤٣}{٦}$

٢٤) ٩جـ(جـ – ١١) + ١٠(٥جـ – ٣) = ٣جـ(جـ + ٥) + جـ(٦جـ – ٣) – ٣٠ ٠

٢٥) ٢ن(٥ن – ٢) – ١٠(ن^{٢} – ٣ن + ٦) = –٨ن(ن + ٤) + ٤(٢ن^{٢} – ٧ن) $\frac{٣٠}{٤٣}$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: ٢٦) ٢٠ن ب^{٤} + ٦ن^{٣}ب^{٣} – ٨ن ب^{٢} ٢٧) ٦ر^{٥}ل + ٣ر^{٣}ل^{٤} + ٩ر^{٢}ل^{٣}

٢٦) $\frac{٢}{٣}$ن ب^{٢}(٣٠ب^{٢} + ٩ن^{٢}ب – ١٢)

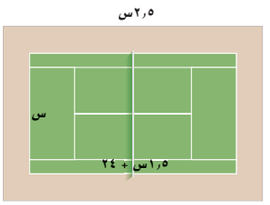
٢٧) $\frac{٣}{٥}$ر^{٢}ل(١٠ر^{٣} + ٥رل^{٣} + ١٥ل^{٢})

٢٨) – س^{٢}ع(٢ع^{٢} + ٤س ع^{٣}) + س ع^{٢}(س ع + ٥س^{٣}ع) + س^{٢}ع^{٣}(٣س^{٢}ع + ٤س ع) –س^{٢}ع^{٣} + ٥س^{٤}ع^{٣} + ٣س^{٤}ع^{٤}

الربط مع الحياة

يستخدم لاعبو التنس الأرضي مضارب لدفع أو صد كرة صغيرة مجوفة، فوق شبكة عرضية تنصّف ملعبًا مستطيلًا. وتعتمد المهارة في هذه الرياضة، على التناسق بين حركات اليدين والعينين، وذكاء اللاعب في توقُّع اتجاه الكرة.

٢٩) **تنس أرضي:** يبني نادي التنس ملعبًا جديدًا يحيط به ممر منتظم.



أ) اكتب عبارة تمثِّل مساحة ملعب التنس. ١,٥س^{٢} + ٢٤س

ب) اكتب عبارة تمثِّل مساحة الممر. س^{٢} – ٩س

إرشادات للمعلم الجديد

حقائق الضرب: قد يُفضّل بعض الطلاب استعمال الطريقة الأفقية لضرب وحيدة حد في كثيرة حدود، بينما يُفضّل البعض الآخر الطريقة الرأسية. ولحل الأسئلة من ١٢ إلى ٢٠، يمكن للطلاب استعمال أيٍّ منهما؛ لأنهما متكافئتان.

تنبيه لحل سؤال

صيغة لحل السؤال ٢١، اقترح على الطلاب، استعمال المثال ٣؛ ليساعدهم على معرفة صيغة إيجاد مساحة شبه المنحرف.

إجابات:

١٢) ب^{٣} – ١٢ب^{٢} + ب

١٣) ١٠جـ^{٥} – ٣٠جـ^{٤} + ٤جـ^{٣} + ٤جـ^{٢}

١٤) ٤ب^{٢}ر^{٣} + ١٠ ب^{٣}ر^{٣} – ٣٠ ب^{٢} ر^{٢}

١٥) ٨ ن^{٥} ل^{٣} – ٤٠ ن^{٤} ل^{٥} + ٨ ن^{٣} ل

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٢ – ٢٥ ، ٣٢ – ٤٥
ضمن ضمن المتوسط	١٣ – ١٩ (فردي) ، ٢٠ ، ٢٩ – ٣٠ ، ٣٢ – ٤٥
فوق فوق المتوسط	٢٦ – ٤٥

٤ التقويم

التعلّم اللاحق: اطلب إلى الطلاب كتابة جملة، يتوقّعون فيها كيف سيساعدهم تعلُّم ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود على تعلّم ضرب كثيرة حدود في كثيرات حدود أخرى في الدرس الآتي.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين (٦-٤ ، ٦-٥) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٣)، ص (١٢)

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ٣٠ يستعمل الطلاب العبارات الجبرية، وجدول القيم؛ للتوصّل إلى درجة حاصل ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

٣٠) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذه المسألة درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

أ) جدوليًا: اكتب ثلاث وحيدات حد مختلفة الدرجات وثلاث كثيرات حدود مختلفة الدرجات، ثم حدد درجة كل وحيدة حد وكثيرة حدود، واضرب وحيدات الحد في كثيرات الحدود، وحدِّد درجة ناتج الضرب. وأخيرًا سجّل نتائجك في الجدول على النحو الآتي:

وحيدة الحد	الدرجة	كثيرة الحدود	الدرجة	ناتج ضرب وحيدة الحد في كثيرة الحدود	الدرجة
٢س	١	$س^{٢}-١$	٢	$٢س^{٣}-٢س$	٣
$٣س^{٢}$	٢	$س^{٥}+١$	٥	$٣س^{٧}+٣س^{٢}$	٧
$٤س^{٣}$	٣	$س^{٦}+١$	٦	$٤س^{٩}+٤س^{٣}$	٩

ب) لفظيًا: خمِّن درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ما درجة ناتج ضرب وحيدة حد من الدرجة أ، في كثيرة حدود من الدرجة ب؟ درجة ناتج الضرب هي مجموع درجتي وحيدة الحد وكثيرة الحدود؛ أ+ ب

٣٢) نعم؛ صفر، عند تعويض صفر بدلاً من س في المعادلة فكلا الطرفين يساوي $٢^{٢}$ أو ٤. وعندها يجعل المعادلة صحيحة.

٣٤) إجابة ممكنة: لضرب وحيدة حد في كثيرة حدود، استعمل خاصية التوزيع. اضرب وحيدة الحد في كل حد في كثيرة الحدود ، ثم بسّط بضرب المعاملات معًا واستعمال خاصية ضرب القوى للمتغيرات.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣١) تحدٍّ: أوجد قيمة ب التي تجعل $٣س(٤س^{٢ب+٣}+٢س^{٣ب-٢})=١٢س^{١٢}+٦س^{١٠}$ ٣

٣٢) تبرير: هل توجد قيمة للمتغير س تجعل العبارة: $(س+٢)^{٢}=س^{٢}+٢^{٢}$ صحيحة؟ وإذا كان كذلك، فأوجد هذه القيمة. وفسِّر إجابتك.

٣٣) مسألة مفتوحة: اكتب وحيدة حد وكثيرة حدود باستعمال المتغير نفسه، وأوجد ناتج ضربهما. إجابة ممكنة: ٣ن، ٤ن + ١؛ $١٢ن^{٢}+٣ن$

٣٤) اكتب: صف خطوات ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

تدريب على اختبار

٣٥) يبيع محل ملابس م بنطالاً، ن قميصًا أسبوعيًّا. فإذا كان ثمن القميص ٨٠ ريالًا، والبنطال ١٢٠ ريالًا. فأي العبارات الآتية تمثِّل المبلغ الذي يحصل عليه المحل ثمنًا لذلك؟ ب

أ) ٨٠م+ ١٢٠ن
ب) ١٢٠م+ ٨٠ن
جـ) ٢٠٠(م+ ن)
د) ٩٦٠٠م ن

٣٦) إذا كانت أ = ٥س+ ٧ص، ب = ٢ص- ٣س، فأوجد أ + ب جـ

أ) ٢س- ٩ص
ب) ٣ص+ ٤س
جـ) ٢س+ ٩ص
د) ٢س- ٥ص

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

٣٧) $(٣ع^{٢}+٢ع-١)+(ع^{٢}-٦)$

٣٨) $(أ^{٣}-٣أ^{٢}+٤)-(٤أ^{٢}+٧)$ $أ^{٣}-٧أ^{٢}-٣$

٣٩) $(٨جـ^{٣}-٣جـ^{٢}+جـ-٢)-(٣جـ^{٣}+٩)$ $٥جـ^{٣}-٣جـ^{٢}+جـ-١١$

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦-٣)

٤٠) ١٢ص ١

٤١) -١٠ ٠

٤٢) $-٣ب^{٤}ر^{٥}ن^{٢}$ ١١

بسِّط كلاً مما يأتي: (الدرس ٦-١)

٤٣) $-ص^{٤}(-٢ص^{٣})$ $٢ص^{٧}$

٤٤) $٢م(-٤م^{٤})-٣(-٥م^{٣})$ $-٨م^{٥}+١٥م^{٣}$

٤٥) $٤ب^{٢}(-٢ب^{٣})+٢ب^{٤}(٥ب^{٦})$ $-٨ب^{٥}+١٠ب^{١٠}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اعرض المسألة الآتية على الطلاب: ضرب نعيم وحيدة حد في كثيرة حدود، فكان الناتج: $٦س^{٨}-٣س^{٤}+٩س^{٢}$، ثم اسأل: إذا كانت كثيرة الحدود هي $٢س^{٦}-س^{٢}+٣$، فما هي وحيدة الحد؟ $٣س^{٢}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٦ - ٥

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٢٢) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٥ تدريبات إعادة التعليم

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود، يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ويمكنك الضرب أفقيًّا أو رأسيًّا. قد يتكون ناتج الضرب من حدود متشابهة أحيانًا. ويمكنك تبسيط الناتج بتجميع الحدود المتشابهة.

مثال ١ — أوجد ناتج

$-٣س^{٢}(٤س^{٢}+٦س-٨)$

الطريقة الأفقية:

$=-٣س^{٢}(٤س^{٢})+(-٣س^{٢})(٦س)-(-٣س^{٢})(٨)$

$=-١٢س^{٤}-١٨س^{٣}-(-٢٤س^{٢})$

$=-١٢س^{٤}-١٨س^{٣}+٢٤س^{٢}$

الطريقة الرأسية:

$٤س^{٢}+٦س-٨$

$(\times)\quad -٣س^{٢}$

$-١٢س^{٤}-١٨س^{٣}+٢٤س^{٢}$

مثال ٢ — بسّط

$-٢(٤س^{٢}+٥س)-س(س+٦س)$

$-٢(٤س^{٢}+٥س)-س(س^{٢}+٦س)$

$=-٢(٤س^{٢})+(-٢)(٥س)+(-س)(س^{٢})+(-س)(٦س)$

$=-٨س^{٢}+(-١٠س)+(-س^{٣})+(-٦س^{٢})$

$=(-س^{٣})+[-٨س^{٢}+(-٦س^{٢})]+(-١٠س)$

$=-س^{٣}-١٤س^{٢}-١٠س$

تمارين

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١) $س(٥س+س^{٢})$ — $٥س^{٢}+س^{٣}$

٢) $س(٤س^{٢}+٣س+٢)$ — $٤س^{٣}+٣س^{٢}+٢س$

٣) $-٢س(٤س-٣)$ — $-٨س^{٢}+٦س$

٤) $-٢جـ(جـ-٢جـ+٢)$ — $-٢جـ^{٣}+٤جـ^{٢}-٤جـ$

٥) $س(س^{٢}+س^{٣}+س)$ — $٣س^{٣}+٣س^{٢}+٣س^{٤}$

٦) $-٤س(٣س^{٢}-٢س+٣)$ — $-١٢س^{٣}+٨س^{٢}-١٢س$

٧) $-٤أس(١٠-٣س)$ — $-٤٠أس+١٢أس^{٢}$

٨) $٣س(-٤س-س^{٢}-٢س)$ — $-١٢س^{٣}-٣س^{٢}-٦س$

٩) $٢س^{٢}ص(٣س ص+٣س+٥ص)$ — $٦س^{٣}ص^{٢}+٤س^{٢}ص^{٢}+١٠س^{٢}ص^{٢}$

بسّط كلّ عبارة فيما يأتي:

١٠) $س(٣س-٤)-٥س$ — $٣س^{٢}-٩س$

١١) $-س(٢س^{٢}-٤س)-٦س^{٢}$ — $-٨س^{٣}$

١٢) $٦(٢أ^{٢}-ب)+٢(-٤أ^{٢}+٥ب)$ — $٤أ^{٢}+٤ب$

١٣) $٤(٢ر^{٢}-٣ر+٥)+٦(٤ر^{٢}+٢ر+٨)$ — $٣٢ر^{٢}+٦٨ر$

١٤) $٤(٥٣-ن-٤)-ن(٣-ن)$ — $٥١٢-٥ن^{٢}-١٩ن$

١٥) $٢ب(ب^{٢}+٤ب+٨)-٣ب(٣ب^{٢}+٩ب-١٨)$ — $-٧ب^{٣}-١٩ب^{٢}+٧٠ب$

١٦) $-٢(٤ع^{٢}-٣ع+١)-ع(٣ع^{٢}+ع-١)$ — $-١١ع^{٣}+٢ع^{٢}-٤ع$

١٧) $٢(٣س^{٣}-٢س)-٣(-٦س^{٣}+٤)+٢س(س-١)$ — $٣٨س^{٣}-٦س-١٢$

تدريبات حل المسألة (٢٤) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٥ تدريبات حل المسألة

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

١) **نظرية الأعداد:** يعطى مجموع أوّل ن من الأعداد الكلّية بالعبارة $\frac{١}{٢}$ ن(ن + ١). أوجد مقكوك العبارة بالضرب، ثم أوجد مجموع أول ١٢ عدد كلي.

$\frac{١}{٢}ن^{٢}+\frac{١}{٢}ن$ ؛ ٧٨

٢) **إدخار:** حصل خالد من والده على ٧٠٠ ريال ليبدأ به ادخاره، ثم بدأ والده يعطيه ٤٠ ريالًا شهريًّا. وبعد ٤ أشهر من ذلك بدأت أمه تعطيه ٥٠ ريالًا شهريًّا. وكان خالد يضيف هذه المبالغ إلى ادخاره. اكتب عبارة في أبسط صورة للمبلغ الكلي الذي ادخره خالد بعد م شهر، حيث م ≤ ٤

٩٠م + ٥٠٠

٣) **ساحات:** يبيّن الشكل أدناه دائرة من خمس رابة تحيط موقفًا سياحيًّا. إذا أنشئ ممر عرضه ٤م حول دائرة الرايات، وكان المحيط الخارجي للممرّ يساوي ١٠١ مرّة من محيط دائرة الرايات، فاكتب معادلة بدلالة نق تعبّر عن العلاقة بين المحيط الخارجي للممرّ ومحيط دائرة الرايات، ثم حلها، وأوجد طول نصف قطر دائرة الرايات. تذكّر أن صيغة محيط الدائرة ٢ نق ط.

دائرة رايات

نق

نق + ٤

١,١(٢ط نق) = ٢ط (نق + ٤)؛ نق = ٤٠ م

٤) **سوق:** ذهبت صفية إلى سوق الخضار، واشترت باذنجان وبطاطا بمبلغ ٤٦ ريالًا. فإذا كان ثمن كيلوجرام الباذنجان ٣,٥ ريال، وثمن كيلوجرام البطاطا ٢,٥ ريال، وكان عدد كيلوجرامات البطاطا يزيد ٤ على عدد كيلوجرامات الباذنجان، فاكتب معادلة، ثم حلها لتجد عدد الكيلوجرامات التي اشترتها صفية من كلّ نوع.

٤٦ = (٢,٥) س + (٢,٥)(س+٤)؛ ٦ باذنجان، ١٠ بطاطا

٥) **هندسة:** تُبنيَ بعض المعالم التذكارية على شكل أهرامات قائمة قاعدتها مستطيلة، ويمكنك إيجاد حجم كلّ هرم ح بضرب ثلث مساحة قاعدته ق في ارتفاعه ع.

مساحة القاعدة المستطيلة لأحد المعالم التذكارية معطاة بالمعادلة ق = س^{٢} − ٤س − ١٢

أ) اكتب معادلة كثيرة حدود للتعبير عن حجم الهرم ح، إذا كان ارتفاعه ٥ أمتار.

ح = $\frac{١}{٣}$ س^{٢} − $\frac{٢٠}{٣}$ س − ٢٠

ب) أوجد حجم الهرم عندما س = ١٢م

١٤٠م^{٣}

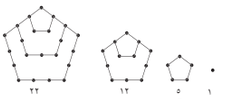
التدريبات الإثرائية (٢٥) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٥ التدريبات الإثرائية

أعداد تشكيلية

تسمى الأعداد أدناه أعدادًا خماسية. وهي أعداد النقاط أو الأقراص التي يمكنك ترتيبها على صورة أشكال خماسية.



١) أوجد ناتج $\frac{١}{٢}$ ن(٥٣-١). $\frac{٥ن^{٢}}{٢}-\frac{ن}{٢}$

٢) أوجد الناتج في سؤال ١ لقيم ن من ١ إلى ٤ ٢٢،١٢،٥،١

٣) ماذا تلاحظ؟ **النواتج هي أول أربعة أعداد خماسية**

٤) أوجد الأعداد الخماسية الستة التالية. ١٤٥،١١٧،٩٢،٧٠،٥١،٣٥

٥) أوجد ناتج $\frac{١}{٢}$ ن(ن + ١). $\frac{٥ن^{٢}}{٢}+\frac{ن}{٢}$

٦) أوجد الناتج في سؤال ٥ لقيم ن من ١ إلى ٥، ثم ارسم على ورقة منفصلة أشكالًا توضّح من خلالها لماذا تُسمّى هذه الأعداد أعدادًا مثلثية. ١٥،١٠،٦،٣،١

٧) أوجد ناتج ن(٥٢-١). ٥٢ن^{٢} − ن

٨) أوجد الناتج في سؤال ٧ لقيم ن من ١ إلى ٥، ثم ارسم هذه الأعداد السداسية. ٤٥،٢٨،١٥،٦،١

٩) أوجد أوّل ٥ أعداد مربعة، ثم اكتب صيغة العبارة العامة لأي عدد مربع. ٢٥،١٦،٩،٤،١ن^{٢}

الأعداد التي استكشفتها أعلاه هي أعداد تشكيلية في المستوى؛ لأنه يمكنك ترتيبها لعمل أشكال هندسية. يمكنك استكشاف أعداد تشكيلية لمجسّمات أيضًا.

١٠) إذا رتّبتَ ١٠ برتقالات على شكل هرم ثلاثي، فستحصل على عدد تشكيلي لمجسّم رباعي السطوح. ما عدد الطبقات في الهرم؟ كم برتقالة توجد في الطبقات السفلى؟ **٣ طبقات؛ ٦**

١١) احسب قيمة العبارة $\frac{١}{٤}$ ن^{٤} + $\frac{١}{٢}$ ن^{٣} + $\frac{١}{٤}$ ن لقيم ن من ١ لإيجاد أوّل خمسة أعداد تشكل مجسمات رباعية السطوح. ٣٥،٢٠،١٠،٤،١

كتاب التمارين (٨) — دون ضمن فوق

٦ - ٥ ضرب وحيدة حد في كثيرة الحدود

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

١) ٢هـ(−٧هـ^{٢} − ٤هـ) — −١٤هـ^{٣} − ٨هـ^{٢}

٢) ٦ل ك (٣ل^{٢} + ٤ك) — ١٨ل^{٢}ك + ٢٤ل ك^{٢}

٣) ٥جـ لك(٣جـ ك + ٢ك) — ١٥جـ^{٢}ك^{٢} + ١٠جـ ك^{٢}

٤) −٣ن (−٢ن^{٢}+٣) — ٦ن^{٣} − ٩ن^{٢}

٥) −$\frac{١}{٤}$ م(٨م^{٢} + م − ٧) — −٢م^{٣} − $\frac{١}{٤}$م^{٢} + $\frac{٧}{٤}$م

٦) −$\frac{٢}{٣}$ن^{٢}(−٥٩ن^{٢} + ٥٣ + ٦) — ٥٦ن^{٤} − ٥٢ن^{٣} − ٤ن^{٢}

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٧) −٢ل (٣ل − ٤) + ٧ل — −٦ل^{٢}+٥ل

٨) ٥هـ(−٧هـ+٣) +٢هـ(−٢هـ^{٢}+١٩هـ+٢) — −٤هـ^{٢}+٣هـ^{٣}+١٩هـ

٩) ٦ن(٥٢ − ٣) − ٥ (٥٢ن^{٢} + ٥٩ − ٣) — ٥٦ن^{٢} − ٥٦٣ن + ١٥

١٠) −٢(٣م^{٢} + ٥م+٦) + ٣م(٢م^{٢} + ٣م + ١) — ٩م^{٣} − ٧م^{٢} − ١٢م

١١) −٣جـ(٧جـ − ٢) + ٣(جـ^{٢} + ٢جـ + ١) − ٣ جـ(− ٥جـ + ٣) — −٣جـ^{٣} + ٣جـ + ٣

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

١٢) ٥(٢ن − ١) + ٣ = ٣(٥ن + ٢) — ٨

١٣) ٣(٣ر+٢) +٥=٢(٢ر−٢) — −٣

١٤) ٤(٥هـ + ٣) − ٥ = ٢(٦هـ + ٨) + ١ — $\frac{١}{٤}$

١٥) ٨(٣ب + ١) = ٤(ب + ٣) − ٩ — −$\frac{١}{٤}$

١٦) ن(ن + ٤) − ١ = ن(ن + ٢) + ٢ — $\frac{٢}{٣}$

١٧) و(و − ٥) + ٨و = و(و + ٢) − ٤ — −٤

١٨) **نظرية الأعداد:** ما ناتج جمع مثلي العدد الصحيح س مع ثلاثة أمثال العدد الصحيح الذي يليه؟ ٥س+٣

١٩) **استثمارات:** خطّط مالك عند تفاعده عن العمل لاستثمار ٥٠٠٠٠ ريال في التجارة. فاستثمر س ريال منها في تجارة أقلام يصل ربحها إلى ٤٪ في السنة، وباقي المبلغ في تجارة أدوات مكتبية أخرى يصل ربحها إلى ٥٪ في السنة.

أ) اكتب عبارة تمثّل المبلغ المستثمر في تجارة الأدوات المكتبية الأخرى. ٥٠٠٠٠ − س

ب) اكتب كثيرة حدود بأبسط صورة للمبلغ الكلي (ك) لاستثمار مالك بعد سنة. (إرشادات القيمة الكلية للمبلغ (أ) بعد سنة واحدة ومعدل ربح (ر) تساوي (أ+ أر) ريال) ك= ٥٢٥٠٠ − ٠,٠١ س

جـ) إذا كان المبلغ الذي وضعه مالك في تجارة الأقلام هو ٥٠٠٠ ريال، فكم سيصبح بعد سنة واحدة؟ ٥٢٤٥٠ ريالًا

ملحوظات المعلم

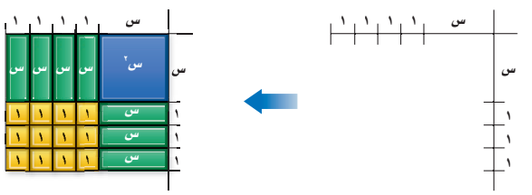
ضرب كثيرات الحدود

يمكنك استعمال بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب ثنائيتي حد.

نشاط ١ ضرب ثنائيتي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س + ٣) (س + ٤).

حدِّد بعدي المستطيل: س + ٣، س + ٤ كما في الشكل الأول أدناه، ثم استعمل بطاقات الجبر، لإكمال المستطيل كما في الشكل الثاني.



يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة س^{٢}، ٧ بطاقات س، ١٢ بطاقة ١

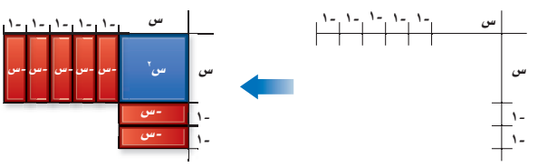
وعليه تكون مساحة المستطيل تساوي س^{٢} + ٧س + ١٢

إذن (س + ٣) (س + ٤) = س^{٢} + ٧س + ١٢

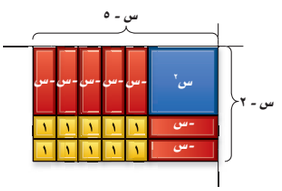
نشاط ٢ ضرب ثنائيتي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س – ٢) (س – ٥).

الخطوة ١: حدِّد بعدي المستطيل س – ٢، س – ٥ ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو مُوضَّح في الشكل المقابل.



الخطوة ٢: حدِّد هل ستستعمل ١٠ بطاقات ١، أو ١٠ بطاقات –١ لتكملة المستطيل.
بما أن مساحة كل بطاقة ١ هو ناتج ضرب –١ في –١، لذا املأ الفراغ بـ ١٠ بطاقات ١ لتكملة المستطيل.



يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة س^{٢}، ٧ بطاقات –س، ١٠ بطاقات ١
فتكون مساحة المستطيل س^{٢} – ٧س + ١٠.
لذا فإن (س – ٢) (س – ٥) = س^{٢} – ٧س + ١٠

١ التركيز

الهدف: استعمال بطاقات الجبر لنمذجة كثيرات الحدود.

المواد اللازمة

- بطاقات الجبر
- لوحة الضرب

إرشادات للمعلم الجديد

يمكن أن يستفيد بعض الطلاب بوضع بطاقات الجبر على طول الضلع العلوي من لوحة الضرب لنمذجة كل عبارة. اطلب إليهم حذف العاملين قبل إيجاد نتيجة الضرب النهائية.

٢ التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلاب مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم حل الأنشطة ١–٣ والسؤال ١

- تأكّد من أن المجموعات في النشاط (١)، قد وضعت الأبعاد على لوحة الضرب بصورة صحيحة. وبما أن البطاقة من النوع (س) مستطيلة الشكل؛ إذن ذكّر الطلاب بأن الضلع الطويل هو الضلع الصحيح الذي عليك استعماله لكتابة قيمة س على اللوحة.
- ذكّر الطلاب بالنظر بدقة إلى البعدين (الأفقي والرأسي) لكل بطاقة على لوحة الضرب عند ملئهم اللوحة بالبطاقات. وإذا كانت قيمة كلا البعدين (س)، فاستعمل البطاقة س^{٢}، وإذا كان أحد البعدين (س) والبعد الآخر (١)، فاستعمل البطاقة (س)، أمّا إذا كان كلا البعدين (١) فاستعمل البطاقة (١)

- في الخطوة ٢ من النشاط ٢ اطلب إلى الطلاب، الانتباه إلى أبعاد كل بطاقة وما إذا كانت موجبة أم سالبة؛ لأن هذا يؤثّر في اختيار البطاقة. فإذا كان كلا البعدين موجبًا، فالبطاقة موجبة. وإذا كان أحدهما موجبًا والآخر سالبًا فاستعمل البطاقة "سالبة"، أمّا إذا كان كلاهما سالبًا فاستعمل البطاقة "موجبة".
- بديلًا لحذف الأزواج الصفرية في النشاط ٣، اطلب إلى الطلاب كتابة عبارة بالاعتماد على البطاقات دون حذف الأزواج الصفرية. ثم يمكنهم تبسيط العبارة بتجميع الحدود المتشابهة.

التدريب اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة ٢-٨

٣ التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال ٨؛ لتقويم إمكانية الطلاب في نمذجة الضرب بصورة صحيحة.

من المحسوس إلى المجرد

ساعد الطلاب بعد حلهم السؤال ٨، على ملاحظة أن كل حد في كثيرة الحدود الأولى، يتمّ ضربه في كل حد من حدود كثيرة الحدود الثانية، عند استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحد.

توسّع المفهوم

اطلب إلى الطلاب نمذجة (س - ٣) (س + ٢) باستعمال بطاقات الجبر، ثم اطلب إليهم كتابة عبارة معتمدًا على البطاقات دون حذف الأزواج الصفرية.

س٢+٢س-٣س-٦

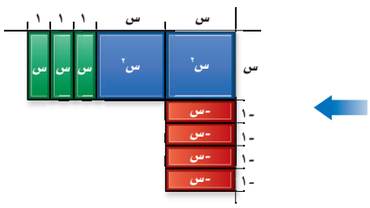
وأخيرًا، اطلب إلى الطلاب إيجاد مجموع: حاصل ضرب الحدين الأولين، والحدين في الطرفين، والحدين الأوسطين، والحدين الأخيرين من (س-٣) (س+٢)، ثم قارن النتائج بالعبارة التي كتبوها.

العبارتان نفساهما.

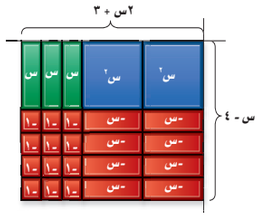
نشاط ٣ **ضرب ثنائيتي حد**

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س - ٤) (٢س + ٣).

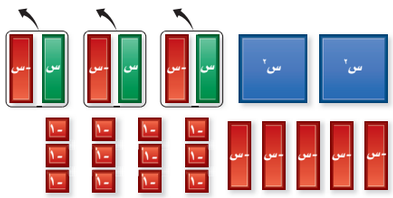
الخطوة ١: حدِّد بُعدي المستطيل س - ٤، ٢س + ٣. ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو موضّح في الشكل المجاور.



الخطوة ٢: حدّد أي بطاقات الجبر س أم - س ستستعمل. وأي البطاقات ١ أم -١ ستستعمل لتكملة المستطيل. البطاقة - س هي حاصل ضرب س في -١. والبطاقة -١ هي حاصل ضرب ١ في -١. استعمل للمستطيل ثماني بطاقات - س، وثلاث بطاقات س و١٢ بطاقة -١.



الخطوة ٣: أعد ترتيب البطاقات لتبسيط كثيرة الحدود التي كونتها، ولاحظ أن ٣ أزواج صفرية تشكّلت من ٣ بطاقات س، و٣ بطاقات - س. وَ يوجد بطاقتان س٢، و٥ بطاقات -س، و ١٢ بطاقة -١، إذن
(س - ٤) (٢س + ٣)= ٢س٢ - ٥س - ١٢.



التمثيل والتحليل: ٧) خطأ

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب كلٍّ مما يأتي: ١) س٢ + ٥س + ٤ ٢) س٢ - ٥س + ٦

١) (س + ١) (س + ٤) ٢) (س - ٣) (س - ٢) ٣) (س + ٥) (س - ١) س٢ + ٤س - ٥

٤) (س + ٢) (٢س + ٣) ٢س٢ + ٧س + ٦ ٥) (س - ١) (٢س - ١) ٢س٢ - ٣س + ١ ٦) (س + ٤) (٢س - ٥) ٢س٢ + ٣س - ٢٠

٧) هل العبارة (س + ٣) (س + ٥) = س٢ + ١٥ صواب أم خطأ؟ تحقَّق من إجابتك باستعمال بطاقات الجبر.

٨) **اكتب:** يبيِّن الشكل المجاور تمثيلاً لِـ (س + ٤) (س + ٥) مقسمًا إلى ٤ أجزاء. فسِّر كيف يظهر هذا التمثيل استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج الضرب.

باستعمال خاصية التوزيع، فإن (س + ٤) (س + ٥) = س (س + ٥) + ٤ (س + ٥).
حيث يمثل القسم العلوي س (س + ٥) = س٢ + ٥س، ويمثل القسم السفلي ٤ (س + ٥) = ٤س + ٢٠.

٦-٦ ضرب كثيرات الحدود

فيما سبق
درستُ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

والآن
- أضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع.
- أضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

المفردات
طريقة التوزيع بالترتيب
العبارة التربيعية

obeikaneducation.com

لماذا؟

لخياطة ثوب نستعمل قطعة من القماش مستطيلة الشكل. ويُحدّد بُعداها بناءً على طول صاحب الثوب وعرضه.

فإذا كان طول قطعة القماش المراد تفصيلها كثوب لأيمن يساوي طول أيمن ع زائد ١٨٠ سم، أو ع + ١٨٠

وعرض القطعة يساوي نصف طول أيمن مضافًا إليه ٢٧ سم، أو $\frac{١}{٢}$ع + ٢٧. ولإيجاد المساحة التقريبية لقطعة القماش، فإنك تحتاج لإيجاد ناتج (ع + ١٨٠) ($\frac{١}{٢}$ع + ٢٧).

ضرب ثنائيتي حد: تستعمل خاصية التوزيع لضرب ثنائيتي حد مثل ع + ١٨٠، $\frac{١}{٢}$ع + ٢٧. ويمكن ضرب ثنائيتي الحد أفقيًّا أو رأسيًّا.

مثال ١ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٢س + ٣) (س + ٥)

الطريقة الرأسية

اضرب في س	اضرب في ٥	اجمع الحدود المتشابهة
٢س + ٣	٢س + ٣	٢س + ٣
(×) س + ٥	(×) س + ٥	(×) س + ٥
٢س^٢ + ٣س	٢س^٢ + ٣س	
	١٠س + ١٥	١٠س + ١٥

س(٢س + ٣) = ٢س^٢ + ٣س ٥(٢س + ٣) = ١٠س + ١٥ ٢س^٢ + ١٣س + ١٥

الطريقة الأفقية:

(٢س + ٣) (س + ٥) = ٢س(س + ٥) + ٣(س + ٥) اكتبها كمجموع ناتجي ضرب

= ٢س^٢ + ١٠س + ٣س + ١٥ خاصية التوزيع

= ٢س^٢ + ١٣س + ١٥ اجمع الحدود المتشابهة.

ب) (س – ٢) (٣س + ٤)

الطريقة الرأسية:

اضرب في ٣س	اضرب في ٤	اجمع الحدود المتشابهة
س – ٢	س – ٢	س – ٢
(×) ٣س + ٤	(×) ٣س + ٤	(×) ٣س + ٤
٣س^٢ – ٦س	٣س^٢ – ٦س	٣س^٢ – ٦س
	٤س – ٨	٤س – ٨

٣س(س – ٢) = ٣س^٢ – ٦س ٤(س – ٢) = ٤س – ٨ ٣س^٢ – ٢س – ٨

مصادر الدرس ٦ - ٦

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٤٠)	• تنويع التعليم ص (٤٠ ، ٤٣)	• تنويع التعليم ص (٤٣)
كتاب التمارين	ص (٩)	ص (٩)	ص (٩)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٦) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٨) • التدريبات الإثرائية، ص (٢٩)

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٦ - ٦

ضرب وحيدات الحد في كثيرات الحدود.

الدرس ٦ - ٦

- ضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع.
- ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

ما بعد الدرس ٦ - ٦

إيجاد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ثم اسأل:

- ما العبارة التي ستحصل عليها، إذا ضربت أول حدٍّ من العبارة (ع + ١٨٠)، في العبارة ($\frac{١}{٢}$ع + ٢٧)؟ $\frac{١}{٢}$ع^٢ + ٢٧ع
- ما العبارة التي ستحصل عليها، إذا ضربت الحد الثاني من العبارة (ع + ١٨٠) في العبارة ($\frac{١}{٢}$ع + ٢٧)؟ ٩٠ع + ٤٨٦٠
- ما العبارة التي ستحصل عليها، عند جمع الناتجين السابقين معًا؟ $\frac{١}{٢}$ع^٢ + ١١٧ع + ٤٨٦٠

الطريقة الأفقية:

(س – ٢)(٣س + ٤) = س(٣س + ٤) – ٢(٣س + ٤) — اكتبها كفرق بين حاصلي ضرب

= ٣س^{٢} + ٤س – ٦س – ٨ — خاصية التوزيع

= ٣س^{٢} – ٢س – ٨ — اجمع الحدود المتشابهة.

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١أ) (٣م + ٤)(م + ٥) ٣م^{٢} + ١٩م + ٢٠ **١ب)** (٥ص – ٢)(ص + ٨) ٥ص^{٢} + ٣٨ص – ١٦

وتُسمى الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائيتي حد **بطريقة التوزيع بالترتيب**.

قراءة الرياضيات

كثيرات الحدود كعوامل:

تُقرأ العبارة (س + ٤) (س – ٢) على الصورة س زائد ٤ مضروبًا في س ناقص ٢.

مفهوم أساسي — **طريقة التوزيع بالترتيب**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لضرب ثنائيتي حد، أوجد ناتج جمع كل من: ضرب الحدين الأولين، وضرب الحدين في الطرفين، وضرب الحدين الأوسطين، وضرب الحدين الأخيرين بالترتيب.

مثال

ناتج ضرب الحدين الأولين — ناتج ضرب الحدين في الطرفين — ناتج ضرب الحدين الأوسطين — ناتج ضرب الحدين الأخيرين

(س + ٤)(س – ٢) = (س)(س) + (س)(–٢) + (٤)(س) + (٤)(–٢)

= س^{٢} – ٢س + ٤س – ٨

= س^{٢} + ٢س – ٨

مثال ٢ — **طريقة التوزيع بالترتيب**

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٢ص – ٧)(٣ص + ٥)

(٢ص – ٧)(٣ص + ٥) = (٢ص)(٣ص) + (٢ص)(٥) + (–٧)(٣ص) + (–٧)(٥) — طريقة التوزيع بالترتيب

= ٦ص^{٢} + ١٠ص – ٢١ص – ٣٥ — اضرب

= ٦ص^{٢} – ١١ص – ٣٥ — اجمع الحدود المتشابهة

ب) (٤أ – ٥)(٢أ – ٩)

(٤أ – ٥)(٢أ – ٩)

= (٤أ)(٢أ) + (٤أ)(–٩) + (–٥)(٢أ) + (–٥)(–٩) — طريقة التوزيع بالترتيب

= ٨أ^{٢} – ٣٦أ – ١٠أ + ٤٥ — اضرب

= ٨أ^{٢} – ٤٦أ + ٤٥ — اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

٢أ) (٤ب – ٥)(٣ب + ٢) ١٢ب^{٢} – ٧ب – ١٠ **٢ب)** (٢ص – ٥)(ص – ٦) ٢ص^{٢} – ١٧ص + ٣٠

لاحظ أنه عند ضرب عبارتين خطيتين، تكون النتيجة عبارة تربيعية. **العبارة التربيعية** هي عبارة ذات متغير واحد من الدرجة الثانية. ونتيجة ضرب ثلاث عبارات خطية، هي عبارة من الدرجة الثالثة. ويمكنك استعمال طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد عبارة تمثل مساحة مستطيل أُعطي بعداه على صورة ثنائيتي حد.

ضرب ثنائيات الحد

المثال ١ يُبيّن طريقة ضرب ثنائيتي حد، باستعمال خاصية التوزيع.

المثال ٢ يُبيّن طريقة ضرب ثنائيتي حد، باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال طريقة التوزيع بالترتيب في حل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) (ص + ٨) (ص – ٤)

ص^{٢} + ٤ص – ٣٢

ب) (٢س + ١) (س + ٦)

٢س^{٢} + ١٣س + ٦

٢ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) (ع – ٦) (ع – ١٢)

ع^{٢} – ١٨ع + ٧٢

ب) (٥س – ٤) (٢س + ٨)

١٠س^{٢} + ٣٢س – ٣٢

المحتوى الرياضي

ضرب كثيرات حدود: تصلح طريقة التوزيع بالترتيب عند ضرب ثنائيتي حد فقط، أمّا لضرب كثيرات حدود أخرى، فيجب استعمال خاصية التوزيع.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا كان الطلاب أقل أُلفةً بخاصية التوزيع،

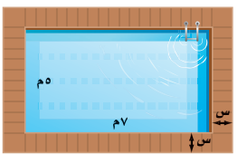
فقم بتوجيههم إلى استعمال الطريقة الرأسية لضرب ثنائيتَي حدٍّ؛ لأنها تُشبه ضرب أعداد ذات منزلتين. واقترح عليهم استعمال الطريقة التي يفضلونها أكثر.

مثال ٣ من واقع الحياة — التوزيع بالترتيب

الربط مع الحياة

تعتمد تكلفة بركة السباحة على عدة عوامل. منها: كون البركة فوق مستوى سطح الأرض، أو دون مستوى سطحها، ونوع المادة المستعملة في تبليطها.

بركة سباحة: يحيط ممر ببركة سباحة مستطيلة الشكل. إذا كان عرض الممر هو س متر. فاكتب عبارة تمثل مساحة البركة والممر معًا.



افهم: المطلوب كتابة عبارة لمساحة البركة والممر حولها.

خطّط: استعمل صيغة مساحة المستطيل بعد تحديد طول البركة وعرضها بالإضافة إلى عرض الممر.

حل: بما أن الممر منتظم من جميع جهات البركة، فإن طول المستطيل الممثل للبركة والممر يزيد على طول البركة بمقدار ٢س، وكذلك العرض؛ لذا يمكن تمثيل الطول بـ ٢س+ ٧ والعرض بـ ٢س+ ٥

المساحة = الطول × العرض — مساحة المستطيل

= (٢س+ ٧) (٢س+ ٥) — بالتعويض

= ٢س(٢س)+ ٢س(٥)+ (٧) (٢س)+ (٧) (٥) — طريقة التوزيع بالترتيب

= ٤س^{٢}+ ١٠س+ ١٤س+ ٣٥ — اضرب

= ٤س^{٢}+ ٢٤س+ ٣٥ — اجمع الحدود المتشابهة

لذا تكون المساحة الكلية للممر والبركة معًا هي ٤س^{٢}+ ٢٤س+ ٣٥

تحقق: اختر قيمة لِـ س وعوّضها في العبارتين (٢س+ ٧) (٢س+ ٥)، ٤س^{٢}+ ٢٤س + ٣٥ ستجد أن النتيجة هي نفسها لكلتا العبارتين.

تحقق من فهمك

٣) إذا كان طول البركة ٩ م وعرضها ٧ م. فأوجد مساحة البركة والممر معًا. ٤س^{٢}+ ٣٢س+ ٦٣

ضرب كثيرات الحدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع أيضًا لإيجاد ناتج ضرب كثيرتي حدود.

مثال ٤ — خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٦س+ ٥) (٢س^{٢}− ٣س− ٥)

(٦س + ٥) (٢س^{٢} − ٣س − ٥)

= ٦س(٢س^{٢} − ٣س − ٥) + ٥(٢س^{٢} − ٣س − ٥) — خاصية التوزيع

= ١٢س^{٣} − ١٨س^{٢} − ٣٠س + ١٠س^{٢} − ١٥س − ٢٥ — اضرب.

= ١٢س^{٣} − ٨س^{٢} − ٤٥س − ٢٥ — اجمع الحدود المتشابهة

ب) (٢ص^{٢} + ٣ص − ١)(٣ص^{٢} − ٥ص + ٢)

(٢ص^{٢} + ٣ص − ١)(٣ص^{٢} − ٥ص + ٢)

= ٢ص^{٢}(٣ص^{٢}−٥ص+٢) +٣ص(٣ص^{٢}−٥ص + ٢) −١(٣ص^{٢}− ٥ص + ٢) — خاصية التوزيع

= ٦ص^{٤} − ١٠ص^{٣} + ٤ص^{٢} + ٩ص^{٣} − ١٥ص^{٢} + ٦ص − ٣ص^{٢} + ٥ص − ٢ — اضرب

= ٦ص^{٤} − ص^{٣} − ١٤ص^{٢} + ١١ص − ٢ — اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

٤أ) (٣س − ٥)(٢س^{٢} + ٧س − ٨) — ٦س^{٣} + ١١س^{٢} − ٥٩س + ٤٠

٤ب) (م^{٢} + ٢م − ٣)(٤م^{٢} − ٧م + ٥) — ٤م^{٤} + م^{٣} − ٢١م^{٢} + ٣١م − ١٥

إرشادات للدراسة

ضرب كثيرات الحدود عند ضرب كثيرة حدود تحوي م حدًّا في أخرى تحوي ن حدًّا، فسيكون ناتج الضرب قبل التبسيط كثيرة حدود تحوي م × ن حدًّا، وفي المثال (٤أ) ناتج الضرب يحوي ٢×٣= ٦ حدود قبل التبسيط.

إرشادات للمعلم الجديد

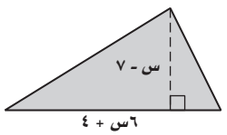
أشر إلى أن طريقة التوزيع بالترتيب هي أداة للتذكّر، وأن الترتيب الذي يتم به ضرب الحدود غير مهمٍّ، مادامت نواتج الضرب الأربعة قد وجدت.

ضرب ثنائيات الحد

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال خاصية التوزيع؛ لإيجاد ناتج ضرب أي كثيرتي حد.

مثالان إضافيان

٣ حديقة: يُبيّن الشكل أدناه حديقة منزل على شكل مثلث أبعاده معطاة بالأقدام. اكتب صيغةً لمساحة هذا المثلث.



(٣س^{٢}− ١٩س − ١٤) قدم^{٢}

٤ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) (٣أ + ٤) (أ^{٢}− ١٢أ + ١)

٣أ^{٣} − ٣٢أ^{٢} − ٤٥أ + ٤

ب) (٢ب^{٢}+ ٧ب +٩)

(ب^{٢}+٣ب − ١)

٢ ب^{٤}+١٣ب^{٣} + ٢٨ب^{٢} + ٢٠ب − ٩

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب مثالًا على السبورة التفاعلية على ضرب ثنائيتي حد، واستعمل لونًا مختلفًا لكل حد من الحدود الأربعة. ثم كوّن جدولًا من أربعة أعمدة؛ واحد لكلٍّ من الأجزاء الأربعة لطريقة التوزيع بالترتيب. واكتب عبارة لكل حدين مضروبين في كل عمود، باستعمال الألوان.

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١–٩؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء شائعة: عندما يضرب الطلاب كثيرتي حدود أفقيًّا، يحاول البعض تجميع الحدود غير المتشابهة على الأغلب؛ لذا اقترح على الطلاب الذين يجدون صعوبة في حل أسئلة الضرب ١٠–١٥ استعمال الطريقة الرأسية في ضرب كثيرات الحدود، ووضع الحدود المتشابهة بعضهما تحت بعض.

تنبيه لحل سؤال

صيغة: السؤال ٢٢ يتطلّب معرفة الطلاب صيغة مساحة الدائرة: م = ط نق^{٢}.

إجابات:

١٧) ٢ص^{٣} – ١٧ص^{٢} + ٣٧ص – ٢٢

١٨) ٣٦أ^{٣} + ٧١أ^{٢} – ١٤أ – ٤٩

١٩) ٥س^{٤} + ١٩س^{٣} – ٣٤س^{٢} + ١١س – ١

٢٠) ١٨ع^{٥} – ١٥ع^{٤} – ١٨ع^{٣} – ١٤ع^{٢} + ٢٤ع + ٨

تأكد

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١) (س + ٥)(س + ٢)

٢) (ص – ٢)(ص + ٤)

٣) (ب – ٧)(ب + ٣)

٤) (٤ن + ٣)(ن + ٩)

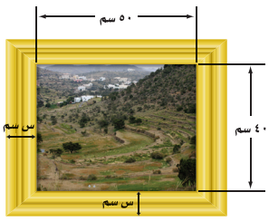
٥) (٨هـ – ١)(٢هـ – ٣)

٦) (٢أ + ٩)(٥أ – ٦)

مثال ٣

٧) **إطار صورة:** صمّم خالد إطارًا لصورة كما في الشكل المجاور. فإذا كان الإطار منتظمًا من جميع جهاته، فاكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للصورة والإطار معًا.

٤س^{٢} + ١٨٠س + ٢٠٠٠



مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

٨) (٤ص^{٢} – ٣)(٤ص^{٢} + ٧ص + ٢)

٩) (س^{٢} – ٤س + ٥)(٥س^{٢} + ٣س – ٤) ٥س^{٤} – ١٧س^{٣} + ٩س^{٢} + ٣١س – ٢٠

٨) ١٦ص^{٤} + ٢٨ص^{٣} – ٤ص^{٢} – ٢١ص – ٦

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

١٠) (٥ص – ٤)(٣ص – ١)

١١) (٦د – ٥)(٤د – ٧)

١٢) (٣م + ٥)(٢م + ٣)

١٣) (١٢ن – ٥)(١٢ن + ٥)

١٤) (٥ر + ٧)(٥ر – ٧)

١٥) (٨ل + ٤س)(٥ل – ٦س)

مثال ٣

١٦) **حديقة:** يحيط ممر عرضه س بحديقة مستطيلة الشكل، طولها ٨ أمتار، وعرضها ٦ أمتار اكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للحديقة والممر. ٤س^{٢} + ٢٨ س + ٤٨

مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي: ١٧–٢٠ انظر الهامش

١٧) (٢ص – ١١)(ص^{٢} – ٣ص + ٢)

١٨) (٤أ + ٧)(٩أ^{٢} + ٢أ – ٧)

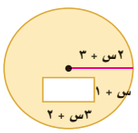
١٩) (س^{٢} + ٥س – ١)(٥س^{٢} – ٦س + ١)

٢٠) (٦ع^{٢} – ٥ع – ٢)(٣ع^{٣} – ٢ع – ٤)

٢١) بسِّط العبارة: (م + ٢)[(م^{٢} + ٣م – ٦) + (م^{٢} – ٢م + ٤)] ٢م^{٣} + ٥م^{٢} – ٤

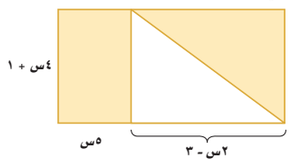
هندسة: اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:

٢٢)



٤ط س^{٢} + ١٢ط س + ٩ط – ٣س^{٢} – ٥س – ٢

٢٣)



$\frac{٣}{٢}$ – ٢٤س^{٢}

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٠ – ٢٠، ٢٨، ٣٠ – ٣٩
ضمن ضمن المتوسط	١٣، ١٤، ١٧، ٢١ – ٢٨، ٣٠ – ٣٩
فوق فوق المتوسط	٢١ – ٣٩

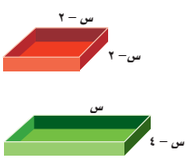
٢٤) **كرة طائرة:** تمثل العبارتان: (٧ص– ٥) متر، (٨ص+ ٢) متر بعدي ملعب كرة طائرة.

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الملعب. ٥٦ ص^{٢}– ٢٦ص– ١٠

ب) إذا كان طول ملعب كرة طائرة ١٨ م، فأوجد مساحته. ١٦٢ م^{٢}

٢٥) **هندسة:** اكتب عبارة تمثل مساحة مثلث طول قاعدته ٢س+ ٣، وارتفاعه ٣س– ١ $٣س^{٢} + \frac{٧}{٢}س - \frac{٣}{٢}$

٢٦) **قوالب:** تسمح القوالب المختلفة بصنع ألواح شوكولاتة مربعة أو مستطيلة الشكل كما هو مبين جانبًا.



أ) ما قيم س الممكنة؟ فسِّر إجابتك. انظر الهامش

ب) أيّ الشكلين مساحته أكبر؟ المربع

جـ) ما الفرق بين مساحتي القالبين؟ ٤ وحدات مربعة

٢٧) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال قاعدة مربع مجموع حدين.

أ) **جدوليًا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

ب) **لفظيًا:** خمّن حدود مربع مجموع حدين. انظر ملحق الإجابات

جـ) **رمزيًا:** اكتب عبارة تمثل مربع مجموع الحدين أ + ب.

العبارة	(العبارة)^{٢}
س + ٥	س^{٢} + ١٠س + ٢٥
٣ص + ١	٩ص^{٢} + ٦ص + ١
ع + ك	ع^{٢} + ٢ع ك + ك^{٢}

الربط مع الحياة

فاز المنتخب السعودي العسكري ببطولة العالم العسكرية في كرة الطائرة التي استضافتها ألمانيا في عام ٢٠٠٨م.

٢٧جـ) أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}

٢٨) دائمًا؛ يمكنك تجميع كل حدين متجاورين في ثلاثية الحدود. ثم تعامل مع ثلاثية الحدود كمجموع عبارتين، وتطبق عليهما طريقة التوزيع بالترتيب. فمثلاً (٢س+ ٣) (س^{٢}+ ٥س+ ٧)
= (٢س+ ٣) [س^{٢}+ (٥س+ ٧)]
= ٢س(س^{٢})+ ٢س (٥س+ ٧)+ ٣(س^{٢})+ ٣(٥س+٧).
ثم استعمل خاصية التوزيع وبسّط.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٨) **تبرير:** وضِّح إذا كانت العبارة "يمكن *استعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائية حد في ثلاثية حدود*" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا، وَفسّر إجابتك.

٢٩) **تحدَّ:** أوجد ناتج : (س^{م} + س^{ن})(س$^{م-١}$ – س$^{١-ن}$ + س^{ن}).
س$^{٢م-١}$ – س$^{م-ن+١}$ + س$^{م+ن}$ + س$^{م+ن-١}$ – س + س^{٢ن}

٣٠) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائية وثلاثية حدود تتضمن كل منهما متغيرًا واحدًا، ثم أوجد ناتج ضربهما.
إجابة ممكنة: س – ١، س^{٢} – س – ١؛ (س – ١)(س^{٢} – س – ١) = س^{٣} – ٢س^{٢} + ١

٣١) **اكتب:** لخِّص الطرق التي يمكن استعمالها لضرب كثيرات الحدود. انظر ملحق الإجابات

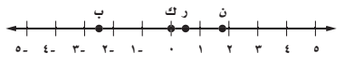
تدريب على اختبار

٣٢) ما ناتج ضرب العبارتين: ٢س– ٥، ٣س+ ٤؟ ب

أ) ٥س – ١ جـ) ٦س^{٢} – ٢٠

ب) ٦س^{٢} – ٧س – ٢٠ د) ٦س^{٢} + ٧س – ٢٠

٣٣) **إجابة قصيرة:** أي نقطة على خط الأعداد تمثِّل عددًا مكعبه أكبر منه؟ ن



مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

٣٤) (٧أ^{٢}– ٥)+ (–٣أ^{٢}+ ١٠) ٤أ^{٢}+ ٥

٣٥) (٨ن – ٢ن^{٢})+ (٤ن – ٦ن^{٢}) ١٢ن – ٨ن^{٢}

٣٦) (٣أ + ٤أب + ٣ب)– (٢ب + ٥أ + ٨أب) –٢أ – ٤أب + ب

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية: (الدرس٦-١)

٣٧) (–٢ن^{٤})^{٣}– ٣(–٢ن^{٣})^{٤} –٥٦ن^{١٢}

٣٨) (–٣هـ^{٢})^{٣}– ٢(–هـ^{٣})^{٢} –٢٩هـ^{٦}

٣٩) ٢(–٥ص^{٣})^{٢}+ (–٣ص^{٣})^{٣} ٥٠ص^{٦}– ٢٧ص^{٩}

٤ التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب ذكر الخطوات الرياضية التي استعملوها عند ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

إجابة:

٢٦) أ) س > ٤؛ إذا كانت س = ٤، فإن عرض الصندوق سيصبح صفرًا، وإذا كانت س < ٤، فإن عرض الصندوق يصبح سالبًا.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ٢٧، يستعمل الطلاب جدول القيم والتحليل؛ ليعبّروا عن نتائج تربيع مجموع وحيدتي حد في الصورة (أ+ب).

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أنه يوجد طريقة واحدة فقط لضرب ٢٥، ١٨ ذهنيًّا وهي ضرب (٢٠+٥) × (٢٠–٢)، واطلب إليهم استعمال طريقة التوزيع بالرتيب لإيجاد نواتج الضرب الآتية:

أ) ٣٥ × ١٩ ٣٥ (١٩) =(٥+٣٠) (١٠+٩) =(٣٠) (١٠) +(٣٠)(٩)+ ٥(١٠) + (٥) (٩)
= ٣٠٠ + ٢٧٠ + ٥٠ + ٤٥ = ٦٦٥

ب) ٦٧ (١٠٢) (٦٧) (١٠٢)=(٦٠+٧) (١٠٠+٢) = (٦٠) (١٠٠) + (٦٠) (٢) + ٧ (١٠٠) + (٧) (٢)
= ٦٠٠٠ + ١٢٠ + ٧٠٠ + ١٤ = ٦٨٣٤

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٦ - ٦

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٢٦)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٦ تدريبات إعادة التعليم
ضرب كثيرات الحدود

ضرب ثنائيتي حد: تُستعملُ خاصية التوزيع لضرب ثنائيتي حد. ويمكنك ضرب ثنائيتي حد أفقيًّا أو رأسيًّا. والطريقة المفيدة لتتبع الحدود في الضرب هي استعمال طريقة التوزيع بالترتيب، المبيّنة في مثال ٢.

مثال ١ أوجد ناتج $(س + ٣)(س - ٤)$

الطريقة الأفقية:
$= (س + ٣)(س - ٤)$
$= س(س - ٤) + ٣(س - ٤)$
$= س^٢ - ٤س + ٣س - ١٢$
$= س^٢ - س - ١٢$

الطريقة الرأسية:

	س	+ ٣
(×)	س	- ٤
	$س^٢$	+ ٣س
	- ٤س	- ١٢
	$س^٢$	- س - ١٢

ناتج الضرب هو $س^٢ - س - ١٢$

مثال ٢ أوجد ناتج $(س - ٢)(س + ٥)$ مستعملًا طريقة التوزيع بالترتيب.

	ناتج ضرب الحدين الأولين	ناتج ضرب الحدين في الطرفين	ناتج ضرب الحدين الأبعدين	ناتج ضرب الحدين الأخيرين
$(س - ٢)(س + ٥)$				
$= (س)(س) + (س)(٥) + (-٢)(س) + (-٢)(٥)$				
$= س^٢ + ٥س - ٢س - ١٠$				
$= س^٢ + ٣س - ١٠$				

ناتج الضرب هو $س^٢ + ٣س - ١٠$

تمارين

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١) $(س + ٢)(س + ٣)$ — $س^٢ + ٥س + ٦$
٢) $(س - ٤)(س + ١)$ — $س^٢ - ٣س - ٤$
٣) $(س - ٦)(س - ٢)$ — $س^٢ - ٨س + ١٢$
٤) $(ل - ٤)(ل + ٢)$ — $ل^٢ - ٢ل - ٨$
٥) $(ص + ٥)(ص + ٢)$ — $ص^٢ + ٧ص + ١٠$
٦) $(٢س - ١)(س + ٥)$ — $٢س^٢ + ٩س - ٥$
٧) $(٥٣ - ٤)(٥٣ + ٤)$ — $٥٩^٢ - ٤٢ك + ١٦$
٨) $(٨م - ٢)(٨م + ٢)$ — $٦٤م^٢ - ٤$
٩) $(ك + ٤)(ك - ١)$ — $ك^٢ - ٣ك - ٤$
١٠) $(٣س + ١)(٤س + ٣)$ — $١٢س^٢ + ١٣س + ٣$
١١) $(س - ٨)(-٣س + ١)$ — $-٣س^٢ + ٢٥س - ٨$
١٢) $(ت + ٤)(٢ت - ٦)$ — $٢ت^٢ - ٢٢ت - ٢٤$
١٣) $(م - ٥٣)(م + ٥٢)$ — $م^٢٥ - ٢٢ م ن + ٥٢ن^٢$
١٤) $(أ - ٣ب)(٢أ - ٥ب)$ — $٢أ^٢ - ١١أب + ١٥ب^٢$
١٥) $(٨س - ٥)(٨س + ٥)$ — $٦٤س^٢ - ٢٥$
١٦) $(٥ن - ٤)(٢ن + ٥)$ — $١٥ن^٢ + ٢ن - ٢٠$
١٧) $(٤م - ٣)(م - ٥)$ — $٤م^٢ - ٢٣م + ١٥$
١٨) $(٧جـ - ٤)(٧جـ + ٤)$ — $٤٩جـ^٢ - ١٦$

تدريبات حل المسألة (٢٨)　دون ضمن فوق

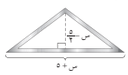
الاسم _____ التاريخ _____

٦-٦ تدريبات حل المسألة
ضرب كثيرات الحدود

١) **مسرح،** يوجد في أحد المسارح قاعة لجلوس المشاهدين، فيها ٣جـ + ٨ صفوف، وفي كل صف ٤جـ - ١ مقعد. اكتب عبارة تمثل العدد الكلي للمقاعد.
$١٢جـ^٢ + ٢٩جـ - ٨$

٢) **حرف يدوية،** افترض أنّ لحافًا مصنوعًا من قطع مربعة، طوله ٥س بوصة، ونسبة طوله إلى عرضه ٥ إلى ٤. يمكن تكبير اللحاف قليلًا بإضافة حاشية إلى جميع جوانبه، تتكون من مربعات طولها بوصة واحدة. اكتب عبارة كثيرة حدود تمثل مساحة اللحاف الأكبر.
$٢٠ س^٢ + ١٨س + ٤$

٣) **فن العمارة،** يمثّل الشكل أدناه نافذة مثلثة الشكل في جدار بناء. فإذا كان طول قاعدة المثلث س + ٥ بوصة، وارتفاعه س، $\frac{٣}{٤}$ بوصة، فاكتب عبارة كثيرة حدود تمثل مساحة الجزء من جدار البناء الذي تحتله هذه النافذة.
$\frac{٣}{٨}س^٢ + \frac{٣}{٢}س - \frac{٢٥}{٨}$



٤) **متعة الرياضيات،** فكّر في عدد كلي مثل س، واطرح منه ٢، واكتب ناتج الطرح. أضف إلى العدد الأصلي ٢، واكتب ناتج الجمع. أوجد حاصل ضرب ناتج الطرح في ناتج الجمع المللذين كتبتهما. اطرح مربع العدد الأصلي من حاصل الضرب. الناتج هو -٤ دائمًا. بيّن خطوات التوصل إلى العدد المطلوب مستعملًا كثيرات الحدود، ثم أوجده.
$(س-٢)(س+٢) - س^٢ = -٤$
$س^٢ - ٢س + ٢س - ٤ - س^٢ = -٤$
$-٤ = -٤$

٥) **فن،** يخطط المتحف الذي يعمل فيه سلطان لعمل جدارية حائط مستعملًا لوحة فنية. أراد سلطان أن يرسم إطارًا من الدهان حول هذه الجدارية. يزيد طول الجدارية ٥ أقدام على عرضها، وسيكون عرض الإطار قدمين على جميع جوانب الجدارية. فإذا كان لديه من الدهان ما يكفي لتغطية ١٠٠ قدم مربعة من الحافة، فما أكبر بُعدين ممكنين للجدارية؟

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الجدارية.
$س(س + ٥)$

ب) اكتب عبارة تمثل مساحة الإطار.
$(س + ٩)(س + ٤) - س(س + ٥)$

جـ) اكتب معادلة لإيجاد أكبر بُعدين ممكنين للجدارية، ثم حُلّها.
$(س + ٩)(س + ٤) - س(س + ٥) = ١٠٠$؛
٨ أقدام × ١٣ قدمًا

التدريبات الإثرائية (٢٩)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٦ التدريبات الإثرائية
مثلث باسكال

يُسمّى ترتيب الأعداد كما في الشكل المجاور، "مثلث باسكال". وقد نُشر هذا المثلث أوّل مرة عام ١٦٦٥، ولكنه كان معروفًا قبل ذلك بمئات السنين قبله.

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

١) يُحسب كلّ عدد في المثلث بجمع عددين. ما العددان اللذان يُجمعا للحصول على ٦ في الصف الخامس؟
٣، ٣

٢) صف كيف تحصل على الصف السادس في مثلث باسكال.
أول عدد ١ وآخر عدد ١. احسب ناتج ١ + ٤، ٤ + ٦، ٦ + ٤، ٤ + ١، لإيجاد الأعداد الأخرى.

٣) اكتب أعداد المثلث في الصفوف من ٦ إلى ١٠.

الصف ٦:	١	٥	١٠	١٠	٥	١			
الصف ٧:	١	٦	١٥	٢٠	١٥	٦	١		
الصف ٨:	١	٧	٢١	٣٥	٣٥	٢١	٧	١	
الصف ٩:	١	٨	٢٨	٥٦	٧٠	٥٦	٢٨	٨	١
الصف ١٠:	١	٩	٣٦	٨٤	١٢٦	١٢٦	٨٤	٣٦	٩	١

اضرب لإيجاد المفكوك في كلّ مما يأتي:
٤) $(أ + ب)^٢$ — $أ^٢ + ٢أب + ب^٢$
٥) $(أ + ب)^٣$ — $أ^٣ + ٣أ^٢ب + ٣أب^٢ + ب^٣$
٦) $(أ + ب)^٤$ — $أ^٤ + ٤أ^٣ب + ٦أ^٢ب^٢ + ٤أب^٣ + ب^٤$

والآن قارن معاملات نواتج الضرب في الأسئلة ٤–٦ مع مثلث باسكال.
٧) أوجد العلاقة بين مفكوك $(أ+ب)^ن$ ومثلث باسكال.
معاملات حدود المفكوك موجودة في الصف ن+١ من مثلث باسكال.

٨) اكتب مفكوك $(أ + ب)^٦$ مستعملًا مثلث باسكال.
$أ^٦ + ٦أ^٥ب + ١٥أ^٤ب^٢ + ٢٠أ^٣ب^٣ + ١٥أ^٢ب^٤ + ٦أب^٥ + ب^٦$

كتاب التمارين (٩)　دون ضمن فوق

٦ - ٦ ضرب كثيرات الحدود

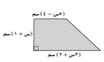
أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

١) $(ك + ٦)(ك + ٥)$ — $ك^٢ + ١١ك + ٣٠$
٢) $(س + ٧)(س + ٤)$ — $س^٢ + ١١س + ٢٨$
٣) $(ن - ٤)(ن - ٦)$ — $ن^٢ - ١٠ن + ٢٤$
٤) $(أ + ٥)(أ - ٦)$ — $آ - أ - ٣٠$
٥) $(٤ب + ٦)(ب - ٤)$ — $٤ب^٢ - ١٠ب - ٢٤$
٦) $(٣س - ٩)(٣س + ٤)$ — $٩س^٢ - ١٠س - ٣٦$
٧) $(٦آ - ٣)(٧آ - ٤)$ — $٤٢آ^٢ - ٤٥آ + ١٢$
٨) $(٣س - ٢)(٥س - ٤)$ — $١٥س^٢ - ١٨س + ٨$
٩) $(٣ - ب)(٢آ - ب)$ — $٦آ^٢ - ٥آب + ب^٢$
١٠) $(٤جـ + ٣هـ)(٢جـ + ٣هـ)$ — $٨جـ^٢ + ١٨هـجـ + ٩هـ^٢$
١١) $(م + ٥)(م^٢ + ٤م - ٨)$ — $م^٣ + ٩م^٢ + ١٢م - ٤٠$
١٢) $(ن + ٣)(ن^٢ + ٤ن + ٧)$ — $ن^٣ + ٧ن^٢ + ١٩ن + ٢١$
١٣) $(٢هـ + ٣)(٢هـ^٢ + ٣هـ + ٤)$ — $٤هـ^٣ + ١٢هـ^٢ + ١٧هـ + ١٢$
١٤) $(٣د + ٣)(٢د^٢ + د٥ - ٢)$ — $٦د^٣ + ٢١د^٢ + ٩د - ٦$
١٥) $(٣ك + ٢)(٩ك^٢ - ١٢ك + ٤)$ — $٢٧ك^٣ - ١٨ك^٢ - ١٢ك + ٨$
١٦) $(٣ر + ٢)(٩ر^٢ + ٦ر + ٤)$ — $٢٧ر^٣ + ٣٦ر^٢ + ٢٤ر + ٨$
١٧) $(٥٣ + ٥ن - ١)(٢ن^٢ + ن + ٩)$ — $٥٦ن^٣ + ٥٢٧ن^٢ + ٨١ن - ٩$
١٨) $(٢ن^٢ + ن + ٣)(٤ن^٢ + ٥ن - ٢)$ — $٨ن^٤ + ٨ن^٣ + ١٠ن^٢ + ٤ن - ٦$
١٩) $(٣س^٢ - ٢س - ٣)(٢س - ٤س + ٣)$ — $٤س^٤ - ١٢س^٣ + ٨س^٢ + ٦س - ٩$
٢٠) $(٣ص^٢ + ٢ص + ٢)(٣ص^٢ - ٤ص - ٥)$ — $٩ص^٤ - ٦ص^٣ - ١٧ص^٢ - ١٨ص - ١٠$

هندسة، اكتب عبارة تمثّل مساحة كل شكل مما يأتي:

٢١)

$(٤س^٢ - ٣س - ٢)$ وحدة مربعة

٢٢)


$(٤س^٢ + ٣س - ١)$ وحدة مربعة

٢٣) **نظرية الأعداد،** ما حاصل ضرب العددين الصحيحين الزوجيين التاليين للعدد الصحيح الزوجي س؟ $س^٢ + ٦س + ٨$

٢٤) **هندسة،** حجم هرم قاعدته مستطيلة الشكل هو ثلث حاصل ضرب مساحة القاعدة في ارتفاعه. اكتب عبارة تمثّل حجم هرم مساحة قاعدته ٣س^٢ + ١٢ س + ٩ أمتار مربعة، وارتفاعه س + ٣ أمتار. $(س^٢ + ٧س^٢ + ١٥س + ٩)$ مترًا مكعبًا

ملحوظات المعلم

٦-٧ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٦-٧

ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

الدرس ٦-٧

- إيجاد مربع مجموع حدين، ومربع الفرق بينهما.
- إيجاد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما.

ما بعد الدرس ٦-٧

تحليل كثيرة حدود باستعمال خاصية التوزيع.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- ما العاملان اللذان حاصل ضربهما $(٢نق+٢٤)^{٢}$؟
  $(٢نق+٢٤)$ ، $(٢نق+٢٤)$
- استعمل طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد $(٢نق+٢٤)^{٢}$. $٤نق^{٢}+٩٦نق+٥٧٦$
- عندما $٢نق=أ$، $٢٤=ب$،
  فهل $(٢نق+٢٤)^{٢}=أ^{٢}+٢أب+ب^{٢}$؟
  فسّر إجابتك. نعم؛
  $(٢نق+٢٤)^{٢}=(٢نق)^{٢}+٢(٢نق)(٢٤)+(٢٤)^{٢}$
  $=أ^{٢}+٢أب+ب^{٢}$

٦-٧ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

فيما سبق

درستُ ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

- أجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما.
- أجد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما.

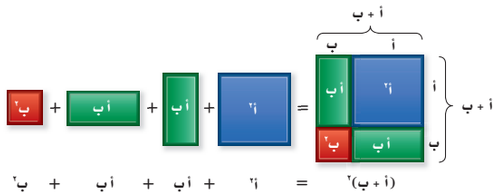
obeikaneducation.com

لماذا؟

يريد محمد تثبيت لوحة الرمي بالسهام إلى لوح خشبي مربع الشكل. فإذا كان نصف قطر لوحة السهام هو (نق + ١٢)، فما مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه؟

يعرف محمد أن قطر لوحة السهام هو ٢ (نق + ١٢) = ٢نق + ٢٤. فيكون طول كل ضلع من أضلاع المربع يساوي ٢نق + ٢٤. ولإيجاد مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه، فإن عليه إيجاد مساحة المربع. م= $(٢نق + ٢٤)^{٢}$

مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما: بعض أزواج ثنائيات الحد، كالمربعات مثل $(٢نق + ٢٤)^{٢}$ لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معينة. واستعمال هذه القاعدة يسهل من عملية إيجاد ناتج الضرب. فمربع المجموع $(أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب)$ هو أحد نواتج الضرب تلك.



مفهوم أساسي مربع مجموع حدين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مربع (أ + ب) هو مربع أ زائد مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافًا إليه مربع ب.

الرموز: $(أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب) = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

مثال: $(س + ٤)^{٢} = (س + ٤)(س + ٤) = س^{٢} + ٨س + ١٦$

مثال ١ مربع مجموع حدين

أوجد ناتج: $(٣س + ٥)^{٢}$.

$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$ مربع المجموع

$(٣س + ٥)^{٢} = (٣س)^{٢} + ٢(٣س)(٥) + ٥^{٢}$ أ = ٣س، ب = ٥

$= ٩س^{٢} + ٣٠س + ٢٥$ بسّط. باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، وتحقق من حلك

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

١أ) $(٨جـ + ٣د)^{٢}$ $٦٤جـ^{٢} + ٤٨جـد + ٩د^{٢}$ **١ب)** $(٣س + ٤ص)^{٢}$ $٩س^{٢} + ٢٤س ص + ١٦ص^{٢}$

مصادر الدرس ٦-٧

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٤٦)	• تنويع التعليم ص (٤٨)	• تنويع التعليم ص (٤٨)
كتاب التمارين	ص (١٠)	ص (١٠)	ص (١٠)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٣٠) • تدريبات حل المسألة، ص (٣٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (٣٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (٣٢) • التدريبات الإثرائية، ص (٣٣)

ولإيجاد قاعدة مربع الفرق بين حدين، اكتب أ– ب على صورة أ + (– ب)، وربّع الناتج باستعمال قاعدة مربع مجموع حدين.

$(أ - ب)^{٢} = [أ + (-ب)]^{٢} = أ^{٢} + ٢(أ)(-ب) + (-ب)^{٢}$ مربع مجموع حدين

$= أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$ بسّط

مفهوم أساسي — مربع الفرق بين حدين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مربع (أ – ب) هو مربع أ ناقص مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافًا إليه مربع ب.

الرموز: $(أ - ب)^{٢} = (أ - ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$

مثال: $(س - ٣)^{٢} = (س - ٣)(س - ٣) = س^{٢} - ٦س + ٩$

تنبيه!

مربع الفرق بين حدين

تذكّر أن ناتج $(س - ٧)^{٢}$ لا يساوي $س^{٢} - ٧^{٢}$ أو $س^{٢} - ٤٩$، وأن $(س - ٧)^{٢} = (س - ٧)(س - ٧) = س^{٢} - ١٤س + ٤٩$

مثال ٢ — مربع الفرق بين حدين

أوجد ناتج: $(٢س - ٥ص)^{٢}$.

$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$ مربع الفرق

$(٢س - ٥ص)^{٢} = (٢س)^{٢} - ٢(٢س)(٥ص) + (٥ص)^{٢}$ أ = ٢س ، ب = ٥ص

$= ٤س^{٢} - ٢٠س ص + ٢٥ص^{٢}$ بسّط

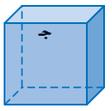
تحقق من فهمك

٢أ) $(٦ب - ١)^{٢}$ $٣٦ب^{٢} - ١٢ب + ١$ **٢ب)** $(أ - ٢ب)^{٢}$ $أ^{٢} - ٤أب + ٤ب^{٢}$

يُسمى ناتج مربع المجموع أو مربع الفرق بين حدين بالمربع الكامل أو ثلاثي الحدود الذي يشكل مربعًا كاملًا. ويمكنك استعمال هذه القواعد لإيجاد أنماط لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من واقع الحياة — مربع الفرق بين حدين

فيزياء: طول ضلع مكعب ألمنيوم أقل من طول ضلع مكعب نحاس بـ ٤ سم. اكتب معادلة تمثل مساحة سطح مكعب الألمنيوم بدلالة طول ضلع مكعب النحاس.



ليكن جـ طول ضلع مكعب النحاس، إذن طول ضلع مكعب الألمنيوم جـ – ٤

مساحة السطح = ٦ل^{٢} مساحة سطح المكعب

مساحة السطح = ٦(جـ – ٤)^{٢} عوّض عن ل بِـ (جـ – ٤)

مساحة السطح = ٦ [جـ^{٢} – ٢(٤)(جـ) + ٤^{٢}] مربع الفرق

مساحة السطح = ٦ (جـ^{٢} – ٨جـ + ١٦) بسّط

تحقق من فهمك

٣) حديقة: لدى عماد حديقة، طولها وعرضها لمترًا، ويريد إضافة ٣ أمتار إلى كل من الطول والعرض.

أ) بيّن كيف يمكن التعبير عن مساحة الحديقة الجديدة بمربع ثنائية حد. (ل + ٣)^{٢}

ب) أوجد مربع ثنائية الحد السابقة. ل^{٢} + ٦ل + ٩

مربعات المجموع والفرق

المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال نمط معيّن لإيجاد مربع مجموع حدين.

المثال ٢ يُبيّن طريقة إيجاد مربع الفرق بين حدين.

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال مربع الفرق بين حدين لكتابة عبارة تُمثّل حالة من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

١ أوجد ناتج: $(٧ع + ٢)^{٢}$

$٤٩ع^{٢} + ٢٨ع + ٤$

٢ أوجد ناتج: $(٣جـ - ٤)^{٢}$

$٩جـ^{٢} - ٢٤جـ + ١٦$

٣ **هندسة:** اكتب عبارة تُمثّل مساحة مربع طول ضلعه ٣س+١٢ وحدة.

$٩س^{٢} + ٧٢س + ١٤٤$ وحدة مربعة

المحتوى الرياضي

مربعات المجموع والفرق: بما أن مربع مجموع ومربع الفرق بين ثنائيتي حد، يختلفان فقط في إشارة الحد الأوسط، فإن الخطورة تكمن في ارتكاب أخطاء كبيرة، بسبب عدم الانتباه إلى ذلك عند إيجاد مربع المجموع أو الفرق؛ لذلك وجِّه الطلاب إلى ملاحظة الإشارات عند إيجاد مربعات مجموع أو الفرق بين حدين.

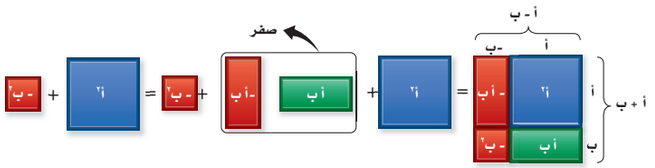
التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب كتابة حالات من واقع الحياة في صفحة محميتهم في المدونة، بحيث يستعملون فيها خياراتهم في تربيع مجموع أو تربيع الفرق بين حدين، كما يمكن استعمال هذه الحالات في مراجعة الفصل للاختبار.

إرشادات للمعلم الجديد

طريقة بديلة: بالرغم من أهمية تعلّم نواتج ضرب خاصة، وجِّه الطلاب إلى أنه يمكن إيجاد ناتج الضرب باستعمال الطرق التي تعلموها في دروس سابقة من هذا الفصل.

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما: سنرى الآن ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، (أ+ ب) (أ– ب). تذكر أنه يمكن كتابة أ – ب على الصورة أ + (– ب).



لاحظ أن كلًّا من الحدين الأوسطين هو معكوسٌ جمعي للآخر، ومجموعهما صفر.
لذا فإن (أ + ب)(أ – ب) = أ² – أب + أب – ب² = أ² – ب².

إرشادات للدراسة

أنماط: عند استعمال أي من هذه القواعد فإن أ، ب قد يكونان عددين، أو متغيرين، أو عبارتين بأعداد ومتغيرات.

مفهوم أساسي — ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: ناتج ضرب (أ + ب)، (أ – ب) هو مربع أ ناقص مربع ب.

الرموز: (أ + ب)(أ – ب) = (أ – ب)(أ + ب) = أ² – ب²

مثال ٤ — ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

أوجد ناتج: (٢س² + ٣)(٢س² – ٣).

(أ + ب)(أ – ب) = أ² – ب² — حاصل ضرب المجموع في الفرق

(٢س² + ٣)(٢س² – ٣) = (٢س²)² – (٣)² — أ = ٢س²، ب = ٣

= ٤س⁴ – ٩ — بسّط

تحقق من فهمك

٤أ) (٣ن + ٢)(٣ن – ٢) ٩ن² – ٤ **٤ب)** (٤جـ – ٧د)(٤جـ + ٧د) ١٦جـ² – ٤٩د²

تأكد

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كل مما يأتي:

١) (س + ٥)² س² + ١٠س + ٢٥

٢) (١١ – أ)² ١٢١ – ٢٢أ + أ²

٣) (٢س + ٧ص)² ٤س² + ٢٨س ص + ٤٩ص²

٤) (٣م – ٤)(٣م – ٤) ٩م² – ٢٤م + ١٦

٥) (جـ – ٤هـ)(جـ – ٤هـ) جـ² – ٨جـهـ + ١٦هـ²

٦) (٣جـ + ٦د)² ٩جـ² + ٣٦جـد + ٣٦د²

مثال ٣

٧) **ألعاب:** تحوي لعبة القرص الطائر قرصًا على شكل دائرة نصف قطرها (س + ٤) سم.

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة القرص الطائر. ط س² + ٨ط س + ١٦ط

ب) إذا كان قطر القرص الطائر ٢٤ سم، فما مساحته؟ (ط ≈ ٣,١٤). ٤٥٢,١٦ سم²

مثال ٤ أوجد ناتج كل مما يأتي:

٨) (أ – ٣)(أ + ٣) أ² – ٩

٩) (س + ٥)(س – ٥) س² – ٢٥

١٠) (٦ص – ٧)(٦ص + ٧) ٣٦ص² – ٤٩

حاصل ضرب المجموع والفرق

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال النمط في إيجاد ناتج ضرب المجموع والفرق للحدين نفسيهما.

مثال إضافي

٤ أوجد ناتج (٩ د +٤) (٩د –٤)

٨١ د² – ١٦

المحتوى الرياضي

الفرق بين مربعين: حاصل ضرب مجموع حدين، والفرق بينهما (أ + ب) (أ – ب) هو أ² – ب²، ويُطلق على حاصل الضرب هذا اسم خاص هو (الفرق بين مربعين).

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ١٠؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع التعليم:

دون

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تذكّر أنماط نواتج الضرب الخاصة في هذا الدرس،

فقم بتوجيههم إلى كتابة كل مفهوم أساسي في هذا الدرس في بطاقات فهرسة منفصلة بالرموز والأمثلة؛ لاستعمالها في التذكّر السريع لكيفية البدء عند إيجاد حواصل ضرب مربعات، أو الفروق، أو حاصل ضرب مجموع وفرق.

تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

١١) (أ + ١٠)(أ + ١٠) $أ^{٢} + ٢٠أ + ١٠٠$

١٢) (ب – ٦)(ب – ٦) $ب^{٢} - ١٢ب + ٣٦$

١٣) $(هـ + ٧)^{٢}$ $هـ^{٢} + ١٤هـ + ٤٩$

١٤) $(س + ٦)^{٢}$ $س^{٢} + ١٢س + ٣٦$

١٥) $(٨ - م)^{٢}$ $٦٤ - ١٦م + م^{٢}$

١٦) $(٩ - ٢ص)^{٢}$ $٨١ - ٣٦ص + ٤ص^{٢}$

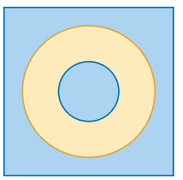
١٧) $(٢ب + ٣)^{٢}$ $٤ب^{٢} + ١٢ب + ٩$

١٨) $(٥ن - ٢)^{٢}$ $٢٥ن^{٢} - ٢٠ن + ٤$

١٩) $(٨هـ - ٤ن)^{٢}$ $٦٤هـ^{٢} - ٦٤هـن + ١٦ن^{٢}$

مثال ٣

٢٠) **مصارعة:** تكون سجادة المصارعة في العادة مربعة الشكل، طول ضلعها ١٢ مترًا تقريبًا، وتحتوي على دائرتين كما في الشكل المجاور. افترض أن نصف قطر الدائرة الداخلية (ر) متر، وأن نصف قطر الدائرة الخارجية يزيد على نصف قطر الدائرة الداخلية بـ ٣ أمتار.



أ) اكتب عبارة تمثِّل مساحة الدائرة الكبرى.

ب) اكتب عبارة تمثِّل مساحة جزء المربع خارج الدائرة الكبرى.

٢٠أ) $ط ر^{٢} + ٦ط ر + ٩ط$

٢٠ب) $١٤٤ - (ط ر^{٢} + ٦ط ر + ٩ط)$

مثال ٤ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

٢١) $(ل + ٣)(ل - ٣)$ $ل^{٢} - ٩$

٢٢) $(٤ - س)(٤ + س)$ $١٦ - س^{٢}$

٢٣) $(٢ك + ٥ر)(٢ك - ٥ر)$

٢٤) $(٣أ^{٢} + ٧ب)(٣أ^{٢} - ٧ب)$

٢٥) $(٥ص + ٧)^{٢}$ $٢٥ص^{٢} + ٧٠ص + ٤٩$

٢٦) $(٨ - ١٠أ)^{٢}$ $٦٤ - ١٦٠أ + ١٠٠أ^{٢}$

٢٧) $(٣ن + ١٢)(٣ن - ١٢)$ $٩ن^{٢} - ١٤٤$

٢٨) $(أ + ٤ب)^{٢}$ $أ^{٢} + ٨أب + ١٦ب^{٢}$

٢٩) $(٣ك - ٥ر)^{٢}$ $٩ك^{٢} - ٣٠ك ر + ٢٥ ر^{٢}$

٣٠) $(٢جـ - ٩د)^{٢}$ $٤جـ^{٢} - ٣٦جـ د + ٨١د^{٢}$

٣١) $(٣أ^{٤} - ب)(٣أ^{٤} + ب)$ $٩أ^{٨} - ب^{٢}$

٣٢) $(٥س^{٢} - ص^{٢})^{٢}$ $٢٥س^{٤} - ١٠س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤}$

٣٣) $(٨أ^{٢} - ٩ب^{٣})(٨أ^{٢} + ٩ب^{٣})$ $٦٤أ^{٤} - ٨١ب^{٦}$

٣٤) $\left(\frac{٣}{٤}ك + ٨\right)^{٢}$ $\frac{٩}{١٦}ك^{٢} + ١٢ك + ٦٤$

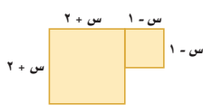
٣٥) $\left(\frac{٢}{٥}ص - ٤\right)^{٢}$ $\frac{٤}{٢٥}ص^{٢} - \frac{١٦}{٥}ص + ١٦$

٣٦) $(٧ع^{٢} + ٥ص^{٢})(٧ع^{٢} - ٥ص^{٢})$ $٤٩ع^{٤} - ٢٥ص^{٤}$

٣٧) $(٢م + ٣)(٢م - ٣)(م + ٤)$ $٤م^{٣} + ١٦م^{٢} - ٩م - ٣٦$

٣٨) $(ر + ٢)(ر - ٥)(ر + ٥)$ $ر^{٤} - ٢٩ر^{٢} + ١٠٠$

٣٩) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثِّل مساحة الشكل المجاور.



$٢س^{٢} + ٢س + ٥$

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي: ٤٠–٤٥ انظر الهامش

٤٠) $(جـ + د)(جـ + د)(جـ + د)$

٤١) $(٢أ - ب)^{٣}$

٤٢) $(ف + جـ)(ف - جـ)(ف + جـ)$

٤٣) $(ك - م)(ك + م)(ك - م)$

٤٤) $(ن - ب)^{٢}(ن + ب)$

٤٥) $(ك + ر)^{٢}(ك - ر)$

تنبيه لحل سؤال

صيغة: حل السؤال (٢٠) يتطلّب معرفة صيغة مساحة الدائرة (م= ط نق٢).

إجابات:

٤٠) $جـ^{٣} + ٣جـ^{٢}د + ٣جـ د^{٢} + د^{٣}$

٤١) $٨أ^{٣} - ١٢أ^{٢}ب + ٦أب^{٢} - ب^{٣}$

٤٢) $ف^{٣} + ف^{٢}جـ - ف جـ^{٢} - جـ^{٣}$

٤٣) $ك^{٣} - ك^{٢}م - ك م^{٢} + م^{٣}$

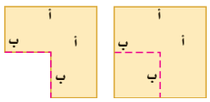
٤٤) $ن^{٣} - ن^{٢}ب - ن ب^{٢} + ب^{٣}$

٤٥) $ك^{٣} + ك^{٢}ر - ك ر^{٢} - ر^{٣}$

تنويع الواجبات المنزلية

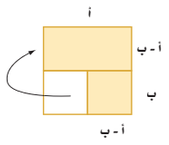
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١١ – ٣٨، ٤٧، ٤٩–٥٥
ضمن ضمن المتوسط	١٢–٢٦ (زوجي)، ٣٧–٣٩ (فردي)، ٤٠، ٤٤ – ٤٧، ٤٩ – ٥٥
فوق فوق المتوسط	٣٩ – ٥٥

٤٦) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة قاعدة تمثل حاصل ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، ابدأ بورقة مربعات. وارمز إلى طول كل ضلع في المربع بالرمز أ، ثم ارسم مربعًا صغيرًا في إحدى زواياه، وارمز إلى طول ضلعه بالرمز ب.

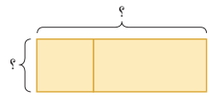


أ) عدديًا: أوجد مساحة كل مربع. انظر الهامش

ب) حسيًا: قص المربع الصغير من الزاوية. ما مساحة الشكل المتبقية؟ $أ^٢ - ب^٢$



جـ) تحليليًا: افصل المستطيل الصغير السفلي، ثم دوّره واسحبه إلى جوار المستطيل العلوي. ما طول المستطيل في التمثيل الجديد؟ وما عرضه؟ وما مساحته؟ أ + ب، أ – ب، (أ + ب)(أ – ب)



د) تحليليًا: ما القاعدة التي توصلت إليها من الفقرتين ب، جـ؟ $(أ + ب)(أ - ب) = أ^٢ - ب^٢$

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٧) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى فيما يأتي: انظر الهامش

(٢جـ – د)(٢جـ – د)	(٢جـ + د)(٢جـ – د)	(٢جـ + د)(٢جـ + د)	(جـ + د)(جـ + د)

٤٨) **تحدَّ:** هل يوجد قاعدة لمكعب المجموع (أ+ ب)^٣؟

أ) استقصِ إجابة هذا السؤال بإيجاد ناتج: (أ+ ب) (أ+ ب) (أ+ ب). $أ^٣ + ٣أ^٢ب + ٣أب^٢ + ب^٣$

ب) استعمل القاعدة التي وجدتها في الفرع أ لإيجاد ناتج: (س+ ٢)^٣. $س^٣ + ٦س^٢ + ١٢س + ٨$

٤٩) **تبرير:** أوجد قيمة جـ التي تجعل من العبارة ٢٥س^٢ – ٩٠س+ جـ مربعًا كاملاً. ٨١

٥٠) **اكتب:** صف كيف تجد مربع مجموع مقدارين ومربع الفرق بين مقدارين، وكيف تجد ناتج ضرب مجموع مقدارين في الفرق بينهما. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٥١) ما ناتج ضرب (٢أ– ٣) (٢أ– ٣)؟ د

أ) ٤أ^٢ + ١٢أ + ٩ **جـ)** ٤أ^٢ – ١٢أ – ٩

ب) ٤أ^٢ + ٩ **د)** ٤أ^٢ – ١٢أ + ٩

٥٢) يقطع مروان مسافة ٦كلم في م دقيقة بسيارته. كم دقيقة سيحتاج إليها لقطع ٣٠ كلم بهذا المعدل؟ جـ

أ) $\frac{٣}{١٥}$ م **جـ)** ٥م

ب) ١٨٠م **د)** $\frac{م}{٥}$

مراجعة تراكمية

٥٣) أوجد ناتج (٤هـ – ٣)(٢هـ – ٧): (الدرس ٦-٦) ٨هـ^٢ – ٣٤هـ + ٢١

٥٤) بسِّط العبارة ٣ب(٦ب – ٤) + ٢$\left(\frac{١}{٢}ب^٢ - ٣ب\right)$: (الدرس ٦-٥) ١٩ب^٢ – ١٨ب

٥٥) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، ١)، (٤، ٧). (الدرس ٣-٢) ص = ٢س – ١

تنبيه لحل سؤال

ورقة مربعة: يحتاج الطلاب إلى ورقة مربعة الشكل لحل السؤال ٤٦.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ٤٦، يستعمل الطلاب النماذج الجبرية والحسية؛ لتمثيل الفرق بين مربعين.

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اعمل عدة نسخ كلٌّ منها تحتوي على ٥ مربعات لمجموع أحاديتي حدود. أعطِ نسخة لكل طالب، واطلب إليهم ذكر طريقة ضرب العبارات، وتسليمك نسخهم قبل مغادرتك الفصل.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين (٦–٦ ، ٦–٧) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٤)، ص (١٢)

إجابات:

٤٦ أ) مساحة المربع الكبير تساوي أ^٢ ومساحة المربع الصغير تساوي ب^٢.

٤٧) إجابة ممكنة: (٢جـ+د)(٢جـ–د)؛ ناتج الضرب لا يحتوي على حد أوسط، بينما الحدود الثلاثة الأخرى تحتوي على حد أوسط.

٥٠) إجابة ممكنة: لإيجاد مربع المجموع، طبّق طريقة التوزيع بالترتيب أو طبّق النمط. مربع مجموع أحاديتي حدود هو مربع الحد الأول، زائد مثلَي حاصل ضرب الحدين، زائد مربع الحد الثاني. ومربع الفرق بين أحاديتي حدود، هو مربع الحد الأول، ناقص مثلَي حاصل ضرب الحدين، زائد مربع الحد الثاني.
وحاصل ضرب المجموع والفرق للكميتين نفسيهما، هو مربع الحد الأول ناقص مربع الحد الثاني.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: يُبيّن الشكل المجاور لعبة السهام التي تتكوّن من دوائر، البعد بين كل دائرتين منها ٥ سم. ونصف قطر الدائرة الأول (س) سم.

أ) أوجد ثنائيتي حدٍّ تُمثّلان نصف قطر كلٍّ من الدائرة الثانية والثالثة. س+٥، س+١٠

ب) أوجد مساحة المنطقة المظلّلة في الدائرة الرابعة. (حيث ط ≈ ٣,١٤).
(٤,٣١س+٥,٣٩٢) سم٢

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٦ - ٧

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٣٠) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٧ تدريبات إعادة التعليم

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما: بعض أزواج ثنائيات الحد لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معيّنة، إحداها قاعدة مربع مجموع حدين، والثانية قاعدة مربع الفرق بين حدين.

مربع مجموع حدين	$(أ + ب)^٢ = (أ + ب)(أ + ب) = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$
مربع الفرق بين حدين	$(أ - ب)^٢ = (أ - ب)(أ - ب) = أ^٢ - ٢أب + ب^٢$

مثال ١ أوجد ناتج $(٣هـ + ٤)^٢$

استعمل قاعدة مربع مجموع حدين؛ أ = ٣هـ ، ب = ٤

$(٣هـ + ٤)^٢ = (٣هـ)^٢ + ٢(٣هـ)(٤) + (٤)^٢$

$= ٩هـ^٢ + ٢٤هـ + ١٦$

ناتج الضرب هو $٩هـ^٢ + ٢٤هـ + ١٦$

مثال ٢ أوجد ناتج $(٤ع - ٩)(٤ع - ٩)$

استعمل قاعدة مربع الفرق بين حدين؛ أ = ٤ع، ب = ٩

$(٤ع - ٩)(٤ع - ٩) = (٤ع)^٢ - ٢(٤ع)(٩) + (٩)^٢$

$= ١٦ع^٢ - ٧٢ع + ٨١$

ناتج الضرب هو $١٦ع^٢ - ٧٢ع + ٨١$

تمارين

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

١) $(س - ٦)^٢$ — $س^٢ - ١٢س + ٣٦$

٢) $(٣ل + ٤)^٢$ — $٩ل^٢ + ٢٤ل + ١٦$

٣) $(٤س - ٥)^٢$ — $١٦س^٢ - ٤٠س + ٢٥$

٤) $(٢س - ١)^٢$ — $٤س^٢ - ٤س + ١$

٥) $(٢هـ + ٣)^٢$ — $٤هـ^٢ + ١٢هـ + ٩$

٦) $(م + ٥)^٢$ — $م^٢ + ١٠م + ٢٥$

٧) $(أ + ٣)^٢$ — $أ^٢ + ٦أ + ٩$

٨) $(٣ - ل)^٢$ — $٩ - ٦ل + ل^٢$

٩) $(س - ٥ص)^٢$ — $س^٢ - ١٠س ص + ٢٥ص^٢$

١٠) $(٨ص + ٤)^٢$ — $٦٤ص^٢ + ٦٤ص + ١٦$

١١) $(٨ - ٤س)^٢$ — $٦٤ - ٦٤س + ١٦س^٢$

١٢) $(٣أ - ٤ب)^٢$ — $٩أ^٢ - ٢٤أب + ١٦ب^٢$

١٣) $(٨هـ - ٣)^٢$ — $٦٤هـ^٢ - ٤٨هـ + ٩$

١٤) $(س^٢ + ١)^٢$ — $س^٤ + ٢س^٢ + ١$

١٥) $(م^٢ - ٢)^٢$ — $م^٤ - ٤م^٢ + ٤$

١٦) $(س^٢ - ١)^٢$ — $س^٤ - ٢س^٢ + ١$

١٧) $(٦هـ^٢ - ك^٣)^٢$ — $٣٦هـ^٤ - ١٢هـ^٢ك^٣ + ك^٦$

١٨) $(\frac{١}{٢}س + ٣)^٢$ — $\frac{١}{٤}س^٢ + ٣س + ٩$

١٩) $(س - ٤ص^٢)^٢$ — $س^٢ - ٨ص^٢س + ١٦ص^٤$

٢٠) $(٢ل + ٤ر)^٢$ — $٤ل^٢ + ١٦ل ر + ١٦ر^٢$

٢١) $(\frac{٢}{٣}س - ٢)^٢$ — $\frac{٤}{٩}س^٢ - \frac{٨}{٣}س + ٤$

تدريبات حل المسألة (٣٢) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٧ تدريبات حل المسألة

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

١) **احتمال:** القرص الدوار أدناه مُقسّم إلى قسمين متساويين. إذا أدرتَ المؤشر مرتين متتاليتين، فإنّ النتائج الممكنة مبيّنة في الجدول أدناه.

أزرق	أحمر
أحمر	أحمر
أزرق	أزرق
أحمر	أزرق

ما احتمال الحصول على أزرق وأحمر عند تدوير المؤشر مرتين؟ ٥٠٪

٢) **الجاذبية:** ارتفاع قطعة نقود معدنية بعد ن ثانية من إسقاطها في بئر، مُعطًى بعبارة ناتج الضرب:

$(١٠ - ٤ن)(١٠ + ٤ن)$.

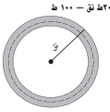
أوجد مفكوك هذه العبارة، ثم بسّطه. ما الحالة الخاصة التي يمثلها هذا الناتج؟

$١٠٠ - ١٦ن^٢$ ؛

ناتج ضرب مجموع حدين بـ الفرق بينهما

٣) **تخطيط الطرق:** يمثّل الشكل أدناه طريقًا دائريًا تحدّه دائرتان هما المركز نفسه. إذا كان طول نصف قطر الدائرة الصغرى ينقص ١٠ أمتار عن طول نصف قطر الدائرة الكبرى، فاكتب معادلة كثيرة حدود لتمثل مساحة الطريق.

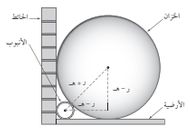
$ط = ٢٠ط ف - ١٠٠ ط$



٤) **أعمال:** وجدتْ إحدى الشركات أنّ ربحها منذ عام ٢٠٠٥م وحتى العام الحالي يمكن التعبير عنه بالدالة: $ص = ٤ن^٢ + ٤٤ن + ١٢١$ ، حيث ص الربح، ن عدد الأعوام منذ عام ٢٠٠٥. ما الحالة الخاصة التي تمثلها كثيرة الحدود هذه؟ فسّر إجابتك.

مربع مجموع حدين؛ ويمكن كتابته على الصورة $(٢ن + ١١)^٢$

٥) **تخزين:** وُضع خزان أسطواني بجانب حائط، وأُخفيَ أنبوب أسطواني صغير في الزاوية خلف الخزان كما هو مبيّن في المنظر الجانبي أدناه، حيث طول نصف قطر الخزان ر بوصة، وطول نصف قطر الأنبوب هـ بوصة.



أ) اكتب معادلة للعلاقة بين طولي نصفي القطرين، مستعملًا نظرية فيثاغورس. بسّط معادلتك بحيث يكون أحد طرفي المعادلة صفرًا.

صفر = $ر^٢ - ٦هـ ر + هـ^٢$

ب) إذا كان طول نصف قطر الخزان ٢٠ بوصة، فاكتب معادلة كثيرة حدود يمكنك عند حلّها أن تجد طول نصف قطر الأنبوب.

صفر= $هـ^٢ - ١٢٠هـ + ٤٠٠$

التدريبات الإثرائية (٣٣) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٦-٧ التدريبات الإثرائية

مكعب مجموع حدين، ومكعب الفرق بينهما

تذكّر قواعد إيجاد حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود:

ثلاثية حدود؛ مربع كامل: $(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$ (أو)

$(أ - ب)^٢ = أ^٢ - ٢أب + ب^٢$

الفرق بين مربعين: $(أ + ب)(أ - ب) = أ^٢ - ب^٢$

توجد قاعدة لإيجاد مكعب مجموع حدين $(أ+ب)^٣$ أيضًا.

١) أوجد ناتج $(أ + ب)(أ + ب)(أ + ب)$.

$أ^٣ + ٣أ^٢ب + ٣أب^٢ + ب^٣$

٢) أوجد ناتج $(س + ٢)^٣$ مستعملًا القاعدة في سؤال ١.

$س^٣ + ٦س^٢ + ١٢س + ٨$

٣) بناءً على إجابتك عن سؤال ١، خمّن قاعدة لإيجاد ناتج مكعب الفرق بين حدين $(أ - ب)^٣$.

$أ^٣ - ٣أ^٢ب + ٣أب^٢ - ب^٣$

٤) أوجد ناتج $(أ - ب)(أ - ب)(أ - ب)$، ثم قارنه بإجابتك عن السؤال ٣

$أ^٣ - ٣أ^٢ب + ٣أب^٢ - ب^٣$؛ متساويان

٥) أوجد ناتج $(س - ٤)^٣$ مستعملًا القاعدة في سؤال ٤.

$س^٣ - ١٢س^٢ + ٤٨س - ٦٤$

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

٦) $(س + ٦)^٣$ — $س^٣ + ١٨س^٢ + ١٠٨س + ٢١٦$

٧) $(س - ١٠)^٣$ — $س^٣ - ٣٠س^٢ + ٣٠٠س - ١٠٠٠$

٨) $(٣س - ص)^٣$ — $٢٧س^٣ - ٢٧س^٢ص + ٩س ص^٢ - ص^٣$

٩) $(٢س - ص)^٣$ — $٨س^٣ - ١٢س^٢ص + ٦س ص^٢ - ص^٣$

١٠) $(٤س + ٣ص)^٣$ — $٦٤س^٣ + ١٤٤س^٢ص + ١٠٨ س ص^٢ + ٢٧ص^٣$

١١) $(٥س + ٢)^٣$ — $١٢٥س^٣ + ١٥٠س^٢ + ٦٠س + ٨$

كتاب التمارين (١٠) — دون ضمن فوق

٦ - ٧ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج كل مما يأتي:

١) $(ن + ٩)^٢$ — $ن^٢ + ١٨ن + ٨١$

٢) $(ل + ٨)^٢$ — $ل^٢ + ١٦ل + ٦٤$

٣) $(س - ١٠)^٢$ — $س^٢ - ٢٠س + ١٠٠$

٤) $(ر - ١١)^٢$ — $ر^٢ - ٢٢ر + ١٢١$

٥) $(ل + ٧)^٢$ — $ل^٢ + ١٤ل + ٤٩$

٦) $(ب + ٦)(ب - ٦)$ — $ب^٢ - ٣٦$

٧) $(٦هـ - ١)^٢$ — $٣٦هـ^٢ - ١٢هـ + ١$

٨) $(٣م + ٤)^٢$ — $٩م^٢ + ٢٤م + ١٦$

٩) $(٧ر - ٢)^٢$ — $٤٩ر^٢ - ٢٨ر + ٤$

١٠) $(٧ك + ٣)(٧ك - ٣)$ — $٤٩ك^٢ - ٩$

١١) $(٤د - ٧)(٤د + ٧)$ — $١٦د^٢ - ٤٩$

١٢) $(٣جـ + ٩هـ)(٣جـ - ٩هـ)$ — $٩جـ^٢ - ٨١هـ^٢$

١٣) $(٤ل + ٥ن)(٤ل - ٥ن)$ — $١٦ل^٢ - ٢٥ن^٢$

١٤) $(أ + ٦ل)^٢$ — $أ^٢ + ١٢أل + ٣٦ل^٢$

١٥) $(٥ر + س)^٢$ — $٢٥ر^٢ + ١٠رس + س^٢$

١٦) $(٦هـ - م)^٢$ — $٣٦هـ^٢ - ١٢هـم + م^٢$

١٧) $(ك - ٦ص)^٢$ — $ك^٢ - ١٢ك ص + ٣٦ص^٢$

١٨) $(و - ٧ل)^٢$ — $و^٢ - ١٤و ل + ٤٩ل^٢$

١٩) $(٤ب - ٧ل)^٢$ — $١٦ب^٢ - ٥٦ب ل + ٤٩ل^٢$

٢٠) $(٦ن + ٤ل)^٢$ — $٣٦ن^٢ + ٤٨ن ل + ١٦ل^٢$

٢١) $(٥ك + ٦ن)^٢$ — $٢٥ك^٢ + ٦٠ك ن + ٣٦ن^٢$

٢٢) $(٦ - ٧ب)(٦ + ٧ب)$ — $٣٦ - ٤٩ب^٢$

٢٣) $(٨هـ + ٥٣)(٨هـ - ٥٣)$ — $٦٤هـ^٢ - ٩$

٢٤) $(٩س + ٢ص)^٢$ — $٨١س^٢ + ٣٦س ص + ٤ص^٢$

٢٥) $(٣ل^٢ + ٢م)^٢$ — $٩ل^٤ + ١٢ل^٢م + ٤م^٢$

٢٦) $(٥أ^٢ - ٢ب)^٢$ — $٢٥أ^٤ - ٢٠أ^٢ب + ٤ب^٢$

٢٧) $(٤م^٢ - ٥)^٢$ — $١٦م^٤ - ١٦م^٢ن + ٢٥ن^٢$

٢٨) $(٦ب^٢ - جـ)^٢$ — $٣٦ب^٤ - ١٢ب^٢جـ + جـ^٢$

٢٩) $(٢ب^٢ - جـ)(٢ب^٢ + جـ)$ — $٤ب^٤ - جـ^٢$

٣٠) $(٢ل^٢ + ٣س^٢)(٢ل^٢ + ٣س^٢)$ — $٤ل^٤ + ١٢ل^٢س^٢ + ٩س^٤$

٣١) **هندسة:** يريد جمال تكبير مربع بحيث يصبح طول ضلع المربع الجديد أكبر من مثلي طول ضلع المربع الأصلي ل بمقدار ١. فما ثلاثية الحدود التي تمثّل مساحة المربع الجديد؟ $٤ل^٢ + ٤ل + ١$

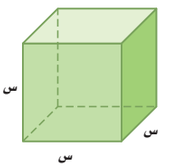
ملحوظات المعلم

بسِّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $(س^{٢})(٧ س^{٨})$ $٧ س^{١٠}$

٢) $(٥ أ^{٧} ب جـ^{٢})(-٦ أ^{٢} ب جـ^{٥})$ $-٣٠ أ^{٩} ب^{٢} جـ^{٧}$

٣) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسّم أدناه كوحيدة حد: أ



أ) $س^{٣}$ ب) $٦ س$

جـ) $٦ س^{٣}$ د) $س^{٦}$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

٤) $(س + ٥) + (س^{٢} - ٣ س + ٧)$ $س^{٢} - ٢س + ١٢$

٥) $(٧ م - ٨ ن^{٢} + ٣ ن) - (-٢ن^{٢} + ٤ م - ٣ ن)$ $٣م - ٦ن^{٢} + ٦ن$

٦) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في شراء سجاد لغرفتين في منزلها أبعادهما مبينة أدناه. فما المساحة الكلية للمنطقة التي ستُغطى بالسجاد؟ جـ

أ) $س^{٢} + ٣س$

ب) $س^{٢} + ٣ س - ٥$

جـ) $٢ س^{٢} + ٦ س - ١٠$

د) $٨ س + ١٢$

بسِّط كل عبارة فيما يأتي، مفترضًا أن أي مقام لا يساوي صفرًا:

٧) $\frac{س^{٦} ص^{٨}}{س^{٢}}$ $س^{٤} ص^{٨}$

٨) $\left(\frac{٢ أ^{٤} ب^{٣}}{جـ^{٦}}\right)^{٠}$ ١

٩) $\frac{٢ س ص^{-٧}}{٨ س}$ $\frac{١}{٤ ص^{٧}}$

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١٠) $أ(أ^{٢} + ٢ أ - ١٠)$ $أ^{٣} + ٢ أ^{٢} - ١٠ أ$

١١) $(٢ أ - ٥)(٣ أ + ٥)$ $٦ أ^{٢} - ٥ أ - ٢٥$

١٢) $(س - ٣)(س^{٢} + ٥ س - ٦)$ $س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٢١ س + ١٨$

١٣) $(س + ٣)^{٢}$ $س^{٢} + ٦ س + ٩$

١٤) $(٢ب - ٥)(٢ب + ٥)$ $٤ ب^{٢} - ٢٥$

١٥) **هندسة:** منشور رباعي قاعدته مستطيلة وأبعاده هي: س، س + ٣، ٢ س + ٥

أ) أوجد حجم المنشور بدلالة س. $٢ س^{٣} + ١١ س^{٢} + ١٥ س$

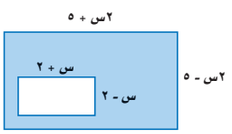
ب) أوجد حجم المنشور بتعويض قيمتين لِـ س، وكيف تقارن بين الحجمين؟ انظر أعمال الطلبة.

حل كل معادلة فيما يأتي:

١٦) $٥(ن^{٢} - ٣ ن + ٢) = ن(٥ ن - ٢)$ $\frac{١٠}{١٣}$

١٧) $٣ س (س + ٢) = ٣(س^{٢} - ٢)$ -١

١٨) **هندسة:** اكتب عبارة مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي: $٣س^{٢} - ٢١$



المعالجة

بناء على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًّا للطلاب.

مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط	المستوى ٢	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على ٢٥٪ تقريبًا من التمارين،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس ٦-١، ٦-٢، ٦-٣، ٦-٤، ٦-٥، ٦-٦، ٦-٧	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل ص (٨)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

الفصل ٧

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (٥١)

	الدرس ٧-١ حصتان	الدرس ٧-٢ حصتان	استكشاف ٧-٣ حصتان
العنوان	تحليل وحيدات الحد	استعمال خاصية التوزيع	معمل الجبر: تحليل ثلاثية الحدود.
الأهداف	• تحليل وحيدة الحد إلى عواملها. • إيجاد القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحد .	• استعمال خاصية التوزيع لتحليل كثيرة الحدود. • حل معادلات تربيعية على الصورة: $أس^{٢} + ب س = ٠$	• استعمال بطاقات الجبر لتمثيل تحليل ثلاثية حدود.
المفردات	الصيغة التحليلية القاسم المشترك الأكبر (ق . م . أ)	تحليل كثيرة حدود التحليل بتجميع الحدود خاصية الضرب الصفرية	
التمثيلات المتعددة	ص (٥٤)	ص (٦٠)	
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٨) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٩) فوق **كتاب التمارين** • ص (١١) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٢) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٣) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٢) دون ضمن فوق	
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية ص (٥٥)	تسجيل فيديو ص (٥٧)	
تنويع التعليم	ص (٥٤)	ص (٥٨، ٦١)	

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التحليل والمعادلات التربيعية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(١٣) حصة	(٣) حصص	(١٦) حصة

الدرس ٧-٣ حصتان	الدرس ٧-٤ حصتان	الدرس ٧-٥ حصة واحدة	الدرس ٧-٦ حصتان
المعادلات التربيعية: $س^2 + ب س + جـ = ٠$	المعادلات التربيعية: $أ س^2 + ب س + جـ = ٠$	المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين	المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة
• تحليل ثلاثية حدود على الصورة: $س^2 + ب س + جـ$. • حل معادلات على الصورة: $س^2 + ب س + جـ = ٠$	• تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: $أ س^2 + ب س + جـ$. • حل معادلات على الصورة: $أ س^2 + ب س + جـ = ٠$	• تحليل ثنائية حد على صورة فرق بين مربعين. • حل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين.	• تحليل ثلاثية الحدود التي في صورة مربع كامل. • حل معادلات تتضمن مربعات كاملة.
المعادلة التربيعية	كثيرة الحدود الأولية	الفرق بين مربعين	المربع الكامل لثلاثية حدود
ص (٦٩)	ص (٧٤)	ص (٧٨)	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٦) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٧) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٣) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢١) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٤) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٢) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٤) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢٥) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٥) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٦) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٨) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢٩) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٦) دون ضمن فوق
مدونة ص (٦٦)	السبورة التفاعلية ص (٧٢)	السبورة التفاعلية ص (٧٥)	مدونة ص (٨١)
ص (٦٥، ٦٧)	ص (٧١، ٧٤)	ص (٧٧، ٧٩)	ص (٨٦)

التقويم الختامي
• اختبار الفصل ص (٨٧)

الفصل ٧ التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل ٧**	
	التهيئة للفصل ٧ ، ص (٥١)	مخطط المعالجة، ص (٥٠جـ).
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تدريبات المهارات، الفصل ٧
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٧
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة ٤، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (٣٠،٣١)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (٣٢)	تدريبات المهارات، الفصل ٧
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٧
		www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	اختبار الفصل، ص (٨٧)	تدريبات المهارات، الفصل ٧
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٧
		www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل ٧**	
	اختبار الفصل، النماذج ١، ٢أ، ٢ب، ص (٣٤-٣٩)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٧
	اختبار الفصل، النموذج ٣ ، ص (٤٠،٤١)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (٣٣)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (٤٢)	
	اختبار تراكمي ، ص (٤٣-٤٥)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

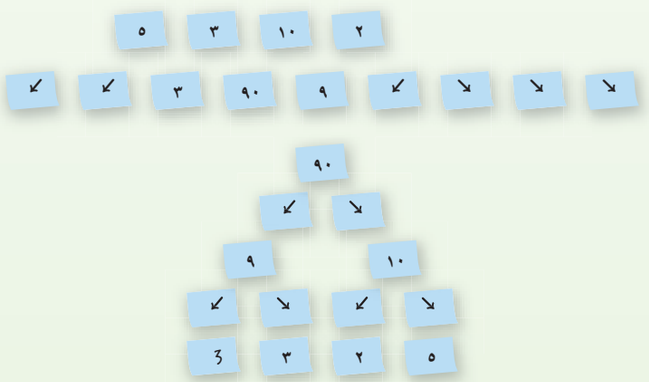
تنويع التعليم

البديل ١ جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون والمكانيون: المتعلمون البصريون والمكانيون شجّع الطلاب في أثناء تعلُّمهم قواعد تحليل ثلاثيات الحدود إلى عواملها، على استعمال بطاقات الجبر؛ للتأكّد من قواعدهم. وسيتوصّل الطلاب من خلال ذلك إلى أن القيم الكبرى لِـ ب وَ جـ في ثلاثيات الحدود، تجعل بطاقات الجبر أكثر إرباكًا؛ ممَّا يُعزّز أهمية تعلّم طرق التحليل الواردة في الكتاب.

البديل ٢ دون المتوسط دون

اكتب في قصاصات ورقية لاصقة عددًا، والأعداد التي تستخدم أثناء تحليله إلى عوامله الأولية بالتمثيل الشجري، وارسم بعض الأسهم في أوراق لاصقة أخرى. ألصق البطاقات على السبورة عشوائيًّا، واطلب إلى بعض الطلاب ترتيب العوامل والأسهم؛ لتُظهِر تحليل العدد إلى عوامله الأولية بصورة صحيحة.



البديل ٣ فوق المتوسط فوق

أخبر الطلاب أن بعض كثيرات الحدود تكون أولية في مجموعة الأعداد الصحيحة، إلّا أنه يمكن تحليلها في مجموعة الأعداد الحقيقية. فمثلًا س^{٢} – ٧ كثيرة حدود أولية، إلاّ أنه يمكن تحليلها في مجموعة الأعداد الحقيقية، كما يأتي: س^{٢} – ٧ = (س + $\sqrt{٧}$) (س – $\sqrt{٧}$)

اطلب إلى الطلاب تحليل كثيرات حدود أولية أخرى مثل ٣س^{٢} – ٢ في مجموعة الأعداد الحقيقية. ($\sqrt{٣}$ س – $\sqrt{٢}$) ($\sqrt{٣}$ س + $\sqrt{٢}$)

الفصل ٧

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل ٧

مواضيع سابقة قبل الصف الثالث المتوسط

- تعيين النقاط في المستوى الإحداثي وكتابتها باستعمال الأزواج المرتبة.
- استعمال الأسس في كتابة العوامل الأولية.
- تعيين القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة.

مواضيع سابقة من الصف الثالث المتوسط

- استعمال خاصية التوزيع لتبسيط عبارات جبرية.

الفصل ٧

مواضيع ذات علاقة من الصف الثالث المتوسط

- استعمال التحليل في مسائل لفظية، عندما يكون ذلك ضروريًّا.
- حل معادلات تربيعية باستعمال النماذج المحسوسة والجداول والتمثيلات البيانية والطرق الجبرية.

ما بعد الفصل ٧

الإعداد للمرحلة الثانوية

- استعمال طرق تتضمّن التحليل إلى العوامل، لتبسيط عبارات بصيغ جديدة وتحويلها إلى معادلات وحلها.
- تحديد قيم المجال والمدى الممكنة لدوالَّ تربيعية.
- تحليل مواقف تتضمّن دوالَّ تربيعية، وإعادة صياغة المعادلات التربيعية لحل المسائل.
- حل معادلات تربيعية باستعمال التمثيل البياني والجداول والطرق الجبرية.

ملخص الدروس

٧-١ تحليل وحيدات الحد

العدد الأولي هو عدد كلي أكبر من ١ وله عاملان فقط هما: ١، والعدد نفسه، ويُعبّر عن تحليل العدد الكلي إلى عوامله الأولية على صورة حاصل ضرب عوامل أولية. ويمكن كتابة وحيدات الحد على صورة حاصل ضرب عواملها الأولية.

- لتحليل وحيدة الحد تحليلًا تامًّا، عبّر عنها في صورة حاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات، على ألَّا يكون أي متغيّر أو عدد بأُسّ أكبر من ١. فمثلًا تحليل $س^{٤}$ تحليلًا تامًّا هو: س× س× س× س.
- يمكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر (ق . م . أ) لعددين أو أكثر باستعمال التحليل إلى العوامل الأولية.(ق . م . أ) لوحيدتي حد، أو أكثر هو حاصل ضرب جميع العوامل المشتركة لها عند تحليل كلٍّ منهما إلى عواملها الأولية.
- إذا كان (ق . م . أ) لوحيدتي حد أو أكثر هو ١، فإن وحيدتي الحد أوليتان فيما بينهما.

٧-٢ استعمال خاصية التوزيع

تُستعمل خاصية التوزيع؛ لإيجاد ناتج ضرب وحيدتي حد وكثيرة حدود. كما تستخدم لتحليل كثيرة حدود وفقًا للخطوات الآتية:

- أولًا: أوجد (ق.م.أ) لجميع الحدود.
- ثم أعد كتابة كل حد كحاصل ضرب (ق.م.أ) وعوامله الأخرى.
- أخيرًا: استعمل خاصية التوزيع لإخراج (ق.م.أ).

أو استعمل التحليل للعوامل بتجميع الحدود، إذا احتوت كثيرة الحدود على أربعة حدود أو أكثر.

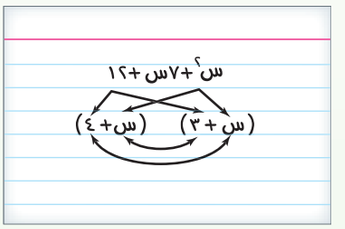
يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود بالتحليل، ومن ثم استخدام خاصية حاصل الضرب الصفري التي تنصُّ على أنه:

إذا كان أ ب = ٠، فإن أ = ٠، أو ب = ٠ أو كلاهما يساوي الصفر، وذلك بتحليل كثيرة الحدود التي تساوي الصفر إلى ثنائية حد، ثم جعل كل عامل يساوي صفرًا وحل المعادلتين.

التحليل والمعادلات التربيعية

٣-٧ المعادلات التربيعية على الصورة: س^{٢} + ب س + جـ = ٠

يمكن ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، ويستعمل عكس الإجراء في تحليل بعض ثلاثيات الحدود في الصورة س^{٢}+ ب س+ جـ إلى ثنائيتي حد.



- لتحليل ثلاثية حدود على الصورة س^{٢}+ ب س+ جـ ، أوجد عددين صحيحين م وَ ن، بحيث يساوي مجموعهما ب، وحاصل ضربهما جـ . فيكون عاملا ثلاثية الحدود هما ثنائيتي الحد (س+ م)، (س+ ن)، حيث: ب = م + ن، جـ = م ن.
- يعتمد تحديد ما إذا كان م وَ ن موجبين أو سالبين على إشارة كلٍّ من ب وَ جـ. فإذا كان ب وَ جـ سالبين، فإن م وَ ن يجب أن يكون لهما إشارتان مختلفتان.
- لحل المعادلة التربيعية حلّل ثلاثية الحدود أولًا، ثم ساوِ كل عامل بالصفر، وحُلّ المعادلتين الناتجتين، وتحقّق من حلّك بالتعويض في المعادلة الأصلية.

٤-٧ المعادلات التربيعية: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة: أ س^{٢}+ ب س+ جـ ، أ ≠ ١،

- أولًا حلّل بإخراج القاسم المشترك الأكبر للحدود.
- ثم إذا كانت أ = ١ في كثيرة الحدود الناتجة، فاستعمل الطريقة التي تعلمتها في الدرس (٧ – ٣) لإكمال التحليل إلى العوامل.
- أما إذا كانت أ ≠ ١ في ثلاثية الحدود الناتجة، فأوجد العاملين م وَ ن، بحيث يكون: أ جـ = م ن، ب = م + ن، ثم أعد كتابة كثيرة الحدود، وعوِّض عن: ب س بـ م س+ ن س ؛ للتوصل إلى كثيرة الحدود: أس^{٢}+ م س+ ن س+ جـ. ويمكن بهذه الصورة استعمال طريقة تجميع الحدود لتحليل كثيرة الحدود إلى ثنائيتي حد.
- أيّ كثيرة حدود لا يمكن تحليلها تكون كثيرة حدود أولية.
- يمكن حل المعادلات على الصورة: أس^{٢}+ ب س+ جـ = ٠، باستعمال طريقة تحليل ثلاثية الحدود، ثم تطبيق خاصية الضرب الصفري.

٥-٧ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

الفرق بين مربعَي حدين يساوي مجموع الحدين مضروبًا في الفرق بينهما؛ أي أن: أ^{٢} – ب^{٢} = (أ + ب) (أ – ب).
إذا كان لحدود العبارة الأصلية (ق . م . أ)، فأخرجه قبل تطبيق أي طريقة تحليل أخرى.

٦-٧ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

ثلاثية الحدود التي تشكِّل مربعًا كاملًا تكون على إحدى الصورتين: أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} أو أ^{٢} – ٢ أ ب + ب^{٢}؛ أي تتوافر فيها الشروط الآتية:

- أن يكون الحد الأول مربعًا كاملًا.
- أن يكون الحد الأخير مربعًا كاملًا.
- أن يساوي الحد الأوسط مثلَيْ حاصل ضرب الجذرين التربيعيين للحدين الأول والأخير.

لتحليل ثلاثية حدود تُشكّل مربعًا كاملًا بإشارة موجبة للحد الأوسط، استعمل القاعدة: أ^{٢}+ ٢أب+ ب^{٢}= (أ + ب)^{٢}.

ولتحليل ثلاثية حدود تُشكّل مربعًا كاملًا بإشارة سالبة للحد الأوسط، استعمل القاعدة: أ^{٢}– ٢أ ب + ب^{٢}= (أ – ب)^{٢} ، ثم استعمل خاصية الجذر التربيعي لحل المعادلة على الصورة س^{٢}= ن، ن > ٠، أو أي معادلة يمكن كتابتها على تلك الصورة، وهذه الخاصية تمكنك من أخذ الجذر التربيعي لطرفَي المعادلة، مع أخذ كلا الجذرين √ن، –√ن في الاعتبار.

مشروع الفصل

تصميم مناظر طبيعية

يستعمل الطلاب ما تعلموه حول إيجاد (ق . م . أ)، وكتابة معادلات وحلها في تصميم مناظر طبيعية عامة، في الساحات الخلفية للمنازل.

- أخبر الطلاب بأنهم سيقومون بتصميم منظر عام على ورق مربعات يُمثّل منزل أحد الأشخاص، واطلب إليهم استعمال مقياس الرسم، بحيث يُمثّل المربع الواحد في أوراقهم وحدة مربعة واحدة.
- اطلب إلى الطلاب رسم منزل مستطيل في الزاوية العليا من ورقة المربعات، بحيث يكون عرضه أقل من طوله بـ ٨ وحدات ومساحته ٢٤٠ وحدة مربعة.
- اذكر للطلاب أنه يوجد فناء ملحق بالمنزل بُعداه ١٠ وحدات × ٨ وحدات، ويريد المالك زيادة بعديه بالمقدار نفسه؛ لتصبح مساحة الفناء الجديد ٢٢٤ وحدة مربعة. فما بعدا الفناء الجديد؟

- أخبر الطلاب أن المالك يريد عمل بركة على شكل مثلث مساحته ٣٦ وحدة مربعة أيضًا بحيث تكون كلٌّ من قاعدة المثلث وارتفاعه أعدادًا كلية ليست أولية.
- أخبر الطلاب أن المالك يريد تخصيص منطقة مستطيلة أيضًا؛ لتكون حديقة مساحتها ٣٦ وحدة مربعة، ويحيط بها سياج طوله ٢٦ وحدة لمنع دخول الحيوانات.
- اطلب إليهم أن يكون الفناء الذي ينشئونه جميلًا ومفيدًا، وذلك بتصميم أحواض ورود، وممرات للمشي، وتفاصيل أخرى.

المفردات: قدِّم مفردات الفصل باستعمال النمط الآتي:

التعريف: العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) لعددين صحيحين أو أكثر: هو حاصل ضرب قوى العوامل المشتركة الأولية لهذه الأعداد.

مثال: ٢ × ٢ × ٣ = ١٢ هو العامل المشترك الأكبر للعددين ٤٨، ٦٠.

اسأل: ما ناتج قسمة ٤٨ على ١٢؟ ٤
ما ناتج قسمة ٦٠ على ١٢؟ ٥

المطويات منظم أفكار

غرضها: يكتب الطلاب ملاحظاتهم وأمثلة عن التحليل إلى العوامل الأولية والمعادلات التربيعية، في أثناء دراستهم هذا الفصل.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو مُبيّن في تعليمات إعداد المطوية. وكتابة ملاحظاتهم، وتسجيل المفاهيم، وتعريف المصطلحات. كما يمكنهم استعمالها أيضًا لتسجيل تقدّم التعلم واتجاهه؛ لوصف التجارب الإيجابية والسلبية خلال التعلّم. وفي الكتابة عن التجارب الاجتماعية والشخصية، وكتابة قائمة أمثلة للطرق التي يمكنهم من خلالها استعمال المعرفة الجديدة في حياتهم اليومية.

وقت استعمالها: شجّع الطلاب على أن يضيفوا ملاحظاتهم إلى مطوياتهم في أثناء دراستهم الفصل، ويستعملونها للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

الفصل ٧ التحليل والمعادلات التربيعية

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحدّ وكثيرات الحدود.

والآن

- أحلّل وحيدات الحدّ.
- أحلّل ثلاثيات الحدود.
- أحلّل الفرق بين مربعين.
- أحلّ معادلات تربيعية.

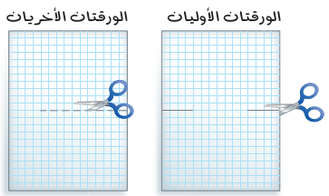
لماذا؟

هندسة عمارة: يمكن استعمال المعادلات التربيعية لنماذج إنشاءات هندسية كأقواس مداخل بعض المباني الضخمة مثل مدخل مطار الملك خالد الدولي في الرياض.

المطويات منظم أفكار

التحليل والمعادلات التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول التحليل والمعادلات التربيعية، مبتدئًا بأربع أوراق مربعات.

١ **اطوِ** الأوراق الأربعة من المنتصف عرضيًّا، وقصّ ٥ سم بدءًا من طرفي خط الطي لأول ورقتين، وقصّ الورقتين الأخريين من المركز، وتوقّف على بعد ٥ سم من طرفيها.



٢ **أدْخل** الورقتين الأوليين خلال الورقتين الأخريين، وسمِّ الورَقة الأولى "التحليل والمعادلات التربيعية"، وسمِّ الصفحات الأخرى بأرقام الدروس، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

التهيئة للفصل ٧

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية:

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي:

١) أ(أ + ٥) أ² + ٥أ

٢) ٢(٣ + س) ٦ + ٢س

٣) ن(ن – ٣ن² + ٢) ن² – ٣ن³ + ٢ن

٤) –٦(س² – ٥س + ٦) –٦س² + ٣٠س – ٣٦

٥) **مال:** ذهب خمسة أصدقاء إلى متنزه ترفيهي، فاشترى كل منهم بطاقة دخول بِـ ٩ ريالات، وعلبة عصير بـ ٣ ريالات، وشطيرة بـ ٦ ريالات. فاكتب عبارة تمثّل المبلغ الإجمالي الذي دفعوه جميعًا.
٥ (٩ + ٣ + ٦) ؛ ٩٠ ريالاً

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممّا يأتي:

٦) (س + ٢)(س – ٥) س² – ٣س – ١٠

٧) (س + ٤)(س – ١) س² + ٣س – ٤

٨) (٢أ – ٣)(٥أ + ٤) ١٠أ² – ٧أ – ١٢

٩) (٣س – ٤)(س + ٥) ٣س² + ١١س – ٢٠

١٠) (س + ٤)(س + ٧) س² + ١١س + ٢٨

١١) (٦أ – ٢ب)(٩أ + ب) ٥٤أ² – ١٢أب – ٢ب²

١٢) **مِفْرش مائدة:** مِفْرش مائدة مستطيل الشكل إذا كان طوله (٢س + ٣)، وعرضه (س + ١)، فاكتب عبارة تُمثلُ مساحته. ٢س² + ٥س + ٣

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

١٣) (٣ – أ)² ٩ – ٦أ + أ²

١٤) (س + ٥)² س² + ١٠س + ٢٥

١٥) (٣س – ٢ص)² ٩س² – ١٢س ص + ٤ص²

١٦) (٢س + ٥ص)(٢س – ٥ص) ٤س² – ٢٥ص²

١٧) **تصوير:** صورة بُعداها: (س + ٦) سم، (س – ٦) سم. فما مساحتها؟ (س² – ٣٦) سم²

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة:
٦س(–٣س – ٥س – ٥س² + س³)، ثم بسّطها.

٦س(–٣س – ٥س – ٥س² + س³)

= ٦س(–٣س) + ٦س(–٥س) + ٦س(–٥س²) + ٦س(س³)

= –١٨س² – ٣٠س³ – ٣٠س⁴ + ٦س⁴

= –٤٨س² – ٣٠س³ + ٦س⁴

مثال ٢

أوجد ناتج الضرب: (س + ٣)(٢س – ١).

(س + ٣)(٢س – ١) العبارة الأصلية

= س(٢س) + س(–١) + ٣(٢س) + ٣(–١) طريقة التوزيع بالترتيب

= ٢س² – س + ٦س – ٣ اضرب

= ٢س² + ٥س – ٣ اجمع الحدود المتشابهة

مثال ٣

أوجد ناتج: (ص + ٨)².

(أ + ب)² = أ² + ٢أب + ب² مربّع مجموع حدّين

(ص + ٨)² = (ص)² + ٢(ص)(٨) + ٨² أ = ص، ب = ٨

= ص² + ١٦ص + ٦٤ بسّط

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com .

المعالجة

استعمل نتائج اختبار التهيئة ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك في تحديد مستوى المعالجة المناسب.
كما تساعد العبارة «إذا ... فقم» في المخطط على تحديد المستوى المناسب، وتقترح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لايزيد عن ٢٥٪ تقريبًا من التمارين،
فقم	بمراجعة خاصية التوزيع وضرب ثنائيتي حد.
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com
المستوى ٢	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ تقريبًا من التمارين،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك .
	زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com

١-٧ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٧ - ١

ضرب وحيدات الحد، وقسمة كثيرة حدود على وحيدة حد.

الدرس ٧ - ١

تحليل وحيدات حد إلى عواملها.
إيجاد القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحد.

ما بعد الدرس ٧ - ١

تحليل كثيرات الحدود .

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- ما العدد الأولي؟ العدد الأولي هو عدد كلي أكبر من ١، وعاملاه هما: ١ والعدد نفسه فقط.
- حلّل كلًّا من العددين ٦٠ وَ ١٥ إلى عواملهما الأولية.
  ٦٠ = ٢² × ٣ × ٥ ؛ ١٥ = ٣ × ٥
- ما العوامل الأولية المشتركة للعددين: ٦٠ وَ ١٥؟ ٣، ٥
- أوجد (ق.م.أ) للعددين ٦٠ وَ ١٥. ١٥
- ما نوع وعدد القلائد التي يمكن أن تعملها هند؟ ٥ قلائد: ٤ من الخرز الفضي اللون، وواحدة من الخرز الذهبي اللون.

١-٧ تحليل وحيدات الحد

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحدّ وقسمة كثيرة حدود على وحيدة حدّ.

والآن

- أحلّل وحيدة الحدّ إلى عواملها.
- أجد القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحدّ.

المفردات

الصيغة التحليلية
القاسم المشترك الأكبر (ق. م. أ)

obeikaneducation.com

لماذا؟

تعمل هند قلائد خرز، فإذا كان لديها ٦٠ خرزة فضية اللون، و١٥ خرزة ذهبية اللون، وترغب في أن تحتوي القلادة الواحدة على نوع واحد من الخرز، وفي كلٍّ منها العدد نفسه، وتحوي كلٌّ منها أكبر عدد من الخرز، فستحتاج هند إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين ٦٠ وَ ١٥

تحليل وحيدات الحدّ: تحليل وحيدات الحدّ يشبه تحليل الأعداد الكلية. وتكون وحيدة الحدّ **بالصيغة التحليلية** إذا عُبّر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأُسّ ١

عند كتابة وحيدة الحد بالصيغة التحليلية نقول: إننا حللنا وحيدة الحد تحليلاً تامًّا.

مثال ١ تحليل وحيدة الحدّ

حلّل: $-٢٠س^{٣}ص^{٢}$ تحليلًا تامًّا.

$-٢٠س^{٣}ص^{٢} = -١ \times ٢٠ س^{٣}ص^{٢}$ ← $-٢٠ = -١ \times ٢٠$

$= -١ \times ٢ \times ١٠ \times س \times س \times س \times ص \times ص$ ← $٢٠ = ٢ \times ١٠$، $س^{٣} = س \times س \times س$، $ص^{٢} = ص \times ص$

$= -١ \times ٢ \times ٢ \times ٥ \times س \times س \times س \times ص \times ص$ ← $١٠ = ٢ \times ٥$

لذا، فإن التحليل للعوامل لوحيدة الحد $-٢٠ س^{٣}ص^{٢}$ هو: $-١ \times ٢ \times ٢ \times ٥ \times س \times س \times س \times ص \times ص$.

تحقق من فهمك

حلّل كل وحيدة حدّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

أ) $٣٤ س^{٤}ص^{٣}$ **ب)** $-٥٢أ^{٢}ب$

القاسم المشترك الأكبر: قد يكون لعددين كليين أو أكثر بعضُ العوامل الأولية المشتركة. ويُسمّى حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة القاسمَ (العامل) المشتركَ الأكبرَ لها.

القاسم المشترك الأكبر (ق. م. أ) لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملاً لكلٍّ من هذه الأعداد، ويمكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر لوحيدتي حدٍّ أو أكثر بطريقة مشابهة.

مثال ٢ القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من وحيدات الحدّ

أوجد (ق.م.أ) لوحيدتي الحدّ $١٢أ^{٢}ب^{٢}جـ$، $١٨أ^{٣}ب$.

$١٢أ^{٢}ب^{٢}جـ = ٢ \times ٢ \times ٣ \times أ \times أ \times ب \times ب \times جـ$ ← حلّل كلّ وحيدة حد تحليلًا تامًّا

$١٨أ^{٣}ب = ٢ \times ٣ \times ٣ \times أ \times أ \times أ \times ب \times ب$ ← ضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة

إذن، (ق.م.أ) لوحيدتي الحد $١٢أ^{٢}ب^{٢}جـ$، $١٨أ^{٣}ب$ هو $٢ \times ٣ \times أ \times ب \times ب = ٦أ^{٢}ب$.

أ) $٢ \times ١٧ \times س \times س \times س \times ص \times ص \times ص$
ب) $-١ \times ٢ \times ٢ \times ١٣ \times أ \times أ \times ب$

مصادر الدرس ٧- ١

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٥٤)		
كتاب التمارين	ص (١١)	ص (١١)	ص (١١)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) • تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨) • التدريبات الإثرائية، ص (٩)

تحقق من فهمك

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحدّ الآتية:

أ) ٦س ص^{٣}، ١٨ص ع ٦ص ع **ب)** ١١أ^{٢}ب، ٢١أب^{٢} أب **جـ)** ٣٠ك^{٣}ر^{٢}ن، ٥٠ك^{٢}ر^{٢}ن ١٠ك^{٢}ر^{٢}ن

مثال ٣ من واقع الحياة **إيجاد (ق.م.أ)**

زهور: لدى نورة ٢٠ وردة و٣٠ زنبقةً لعمل باقات زهور. فما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن عملها دون ترك أي زهرة؟ وكم عدد زهور كل نوع في كل باقة؟

أوجد (ق .م. أ) للعددين ٢٠ وَ٣٠

٢٠ = ٢^{٢} × ٥ اكتب تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية

٣٠ = ٢ × ٣ × ٥ العاملان الأوليان المشتركان هما: ٢، ٥

(ق .م. أ) للعددين ٢٠ وَ ٣٠ هو ٢ × ٥ = ١٠؛ لذا يمكن لنورة عمل ١٠ باقات.

بما أن ٢ × ١٠ = ٢٠، ٣ × ١٠ = ٣٠؛ لذا فستحتوي كل باقة على وردتين و٣ زنابق.

تحقق من فهمك

٣) ما أكبر قيمة يمكن أن تمثّل الطول المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتاهما ٨٤سم^{٢}، ٧٠سم^{٢}، علمًا بأن بُعديْ كل منهما عددان كليان؟ ١٤ سم

تأكد

مثال ١ حلّل كلَّ وحيدة حد فيما يأتي تحليلاً تامًّا:

١) ١٢جـ^{٢}هـ^{٤} ٢ × ٢ × ٣ × جـ × جـ × هـ × هـ × هـ × هـ

٢) −٣٨ر ب^{٢}ن^{٢} −١ × ٢ × ١٩ × ر × ر × ب × ب × ن × ن

٣) −١٧س^{٣}ص^{٢}ع −١ × ١٧ × س × س × س × ص × ص × ع

٤) ٢٣أ ب^{٣} ٢٣ × أ × ب × ب × ب

المثالان ٢، ٣ أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحدّ الآتية:

٥) ٢٤جـ د^{٣}، ٤٨جـ^{٢}د ٢٤جـ د

٦) ٧جـ هـ، ١١م ب ١

٧) ٨س^{٢}ص^{٥}، ٣١س ص^{٣} س ص^{٣}

٨) ١٠أ ب، ٢٥أ ٥أ

٩) **هندسة:** ما أكبر قيمة يمكن أن تمثّل العرض المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتاهما ١٥سم^{٢}، ١٦سم^{٢}، علمًا بأن بُعديْ كلٍّ منهما عددان كليان. ١ سم

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حلِّل كل وحيدة حدّ فيما يأتي تحليلاً تامًّا: ١٠ – ١٥ انظر الهامش

١٠) ٩٥س ص^{٢} ١١) −٣٥أ^{٣}جـ^{٢} ١٢) ٤٢جـ^{٣}هـ^{٣}

١٣) ٨١ن^{٥}ب ١٤) −١٠٠ك^{٤}ر ١٥) ١٢١أ ب جـ^{٣}

تحليل وحيدات الحد

المثال ١ يُبيّن طريقة تحليل وحيدة حد تحليلًا تامًّا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

١ حلّل ١٨ س^{٢}ص^{٣} تحليلًا تامًّا.

٢ × ٣ × ٣ × س × س × ص × ص × ص

القاسم المشترك الأكبر (ق . م . أ)

المثال ٢ يُبيّن طريقة إيجاد (ق . م .أ) لزوج من وحيدات الحد.

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال (ق. م .أ) لحل مسألة من واقع الحياة.

مثالان إضافيان

٢ أوجد (ق . م . أ) لوحيدتي الحد:
٢٧ أ^{٢} ب جـ، ١٥ أ ب^{٢}. ٣ أ ب

٣ **هندسة:** إذا كانت: ١٢ ل ع^{٢}، ٨ ل ع، ١٦ ل^{٢} ع تُمثّل أطوال أضلاع مثلث. فأوجد (ق. م. أ) للأطوال الثلاثة. ٤ ل ع

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ٩؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٠–٢٢ ، ٣٠ ، ٣١، ٣٣ –٤٩
ضمن ضمن المتوسط	١١–٢١ (فردي) ، ٢٣–٢٨ ، ٣٠ ، ٣١، ٣٣–٤٩
فوق فوق المتوسط	٢٣–٤٩

المثالان ٢ ، ٣ أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد مما يأتي:

١٦) ٢٥س^{٣}، ٤٥س^{٤}، ٦٥س^{٢} ١٧) ٢٦ع^{٢}، ٣٢ع، ٤٤ع^{٤} ٢ع ١٨) ٣٠جـ هـ^{٢}، ٤٢جـ^{٢}هـ، ٦٦جـ ٦جـ

١٩) ١٢ك ر، ٨ر^{٢}، ١٦ر ن ٤ر ٢٠) ٤٢أ^{٢}ب، ٦أ^{٢}، ١٨أ^{٣} ٦أ^{٢} ٢١) ١٥ر^{٢}ن، ٣٥ن^{٢}، ٧٠ر ن ٥ن

٢٢) **كعك:** يريد حامد وضع العدد نفسه من كل نوع من الكعك في كلّ كيس، بحيث يحتوي الكيس على أنواع الكعك جميعها. ما أكبر عدد ممكن من الأكياس يلزمه؟

٢٣) **هندسة:** مساحة مثلث ٢٨ سم^{٢}، كم يمكن أن يكون طول كلّ من قاعدته وارتفاعه بالأعداد الكلية؟

٢٤) **كتب:** بكم طريقة تستطيع أسماء تنظيم ٣٦ كتابًا على رفين على الأقل، بحيث يوضع على كلّ رفّ العدد نفسه من الكتب، ولا يقل عن ٤؟

٢٥) **معلبات:** بكم طريقة يستطيع سعيد ترتيب ٨٠ علبة على أربعة رفوف على الأقل، بحيث يكون عدد العلب متساويًا على كل رفٍّ ولا يقل عن ٥؟

٢٦) **تبرّع:** اشترى صقر مجموعة اللوازم المدرسية التالية: ٢٠ قلم رصاص، ١٥٠ ورقة ملونة، ١٢٠ ملف أوراق، ويريد وضعها في حزم متماثلة؛ ليتبرع بها لأكبر عدد ممكن من الطلاب. كم حزمة يمكنه عملها؟ وكم قطعة من كل نوع ستكونُ في كل حزمة؟

٢٧) **نظرية الأعداد:** العددان الأوليان التوأمان هما عددان أوليان فرديّان متتاليان. أول زوجين منهما هما: ٣ و٥، ٥ و٧. اكتب الأزواج الخمسة التالية لهما.

٢٨) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال طريقة تحليل عدد إلى عوامله الأولية.

أ) تحليليًا: انسخ مخطط السلم المُبيِّن جانبًا ٦ مرات، وسجِّل في الجزء العلوي الأيمن من كل شكل عددًا كليًّا، بحيث يكون اثنان منها أوليين.

العدد ١٢ يكتب على الشكل ٢×٢×٣ عند تحليله لعوامله الأولية

ب) تحليليًا: اختر عاملاً أوليًّا لأحد الأعداد. وسجّل العامل إلى يسار هذا العدد في الشكل، ثم قسّم العددين واكتب الناتج تحت العدد، كرر الخطوات السابقة حتى يصبح ناتج القسمة ١. وأضف أو احذف أجزاءً من الشكل إذا تطلّب الأمر ذلك، ثم كرّر هذه العملية مع جميع الأعداد. انظر أعمال الطلبة.

جـ) لفظيًا: ما التحليل للعوامل الأولية لكل عدد من الأعداد الستة؟ انظر أعمال الطلبة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٩) **تحدّ:** أوجد أصغر زوج من الأعداد يحقّق الشروط الآتية:(ق. م .أ) للعددين يساوي ١١، أحدهما زوجي والآخر فردي، وأحدهما ليس من مضاعفات الآخر. ٢٢، ٣٣

٣٠) **تبرير:** المضاعف المشترك الأصغر (م. م. أ) لعددين أو أكثر هو أصغر عدد يكون مضاعفًا لكل عدد منها. اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين(ق .م .أ) وَ (م. م. أ) لعددين أو أكثر.

تنويع التعليم

فوق

توسع: اطلب إلى الطلاب إيجاد القاسم المشترك الأكبر لـ:
٥س^{٨}(س+ ١)^{٧}، ٩س^{٣} (س−١). س^{٣}

تمثيلات متعددة: في السؤال ٢٨، يستعمل الطلاب الشكل ونظرية الأعداد؛ لتحليل عدد إلى عوامله الأولية.

إجابات:

١٠) ٥ × ١٩ × س × ص × ص

١١) −١ × ٧ × ٥ × أ × أ × جـ × جـ

١٢) ٢ × ٣ × ٧ × جـ × جـ × جـ × هـ × هـ

١٣) ٣ × ٣ × ٣ × ن × ن × ن × ن × ب

١٤) −١ × ٢ × ٢ × ٥ × ٥ × ك × ك × ك × ك × ر

١٥) ١١ × ١١ × أ × ب × جـ × جـ × جـ

تنويع التعليم:

دون

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في إيجاد العوامل الأولية،

فاطلب إليهم تجهيز شبكة مربعات ١٠ × ١٠، وترقيم مربعاتها ١ – ١٠٠، ثم اطلب إليهم شطب العدد ١، ووضع دائرة حول العدد ٢، وشطب جميع مضاعفات العدد ٢ في الشبكة، ثم الانتقال للعدد ٣ ووضع دائرة حوله، وشطب جميع مضاعفات العدد ٣ في الشبكة، وهكذا، بحيث ينتقل الطالب إلى المربع الذي لم يُشطب حتى ينهي الشبكة، وبذلك تكون الأعداد الأولية في الشبكة هي الأعداد المحاطة بدائرة.

٣١) **تبرير:** هل العبارة "القاسم المشترك الأكبر لأي وحيدتي حد لا يساوي ١ أبدًا" صحيحة أم خاطئة؟ ادعم إجابتك بمثال أو مثال مضاد.
انظر ملحق الإجابات.

٣٢) **تحدّ:** يُسمّى العددان الصحيحان أو وحيدتا الحدّ أوليين فيما بينهما، إذا كان (ق. م .أ) لهما هو العدد ١ . انقل الجدول المجاور، ثم أكمله لتحدّد أزواج وحيدات الحدّ التي تكون أولية فيما بينها. ١٥أ^{٢}ب جـ^{٣}، ٢٢د^{٣}ف ل^{٢}

وحيدة الحد	التحليل إلى العوامل الأولية
١١٥أ^{٢}ب جـ^{٣}	٣ × ٥ × أ^{٢}ب جـ^{٣}
٦ب جـ^{٣}د	٢ × ٣ × ب جـ^{٣}د
١٢جـ د^{٢}ف	٢^{٢} × ٣ × جـ د^{٢}ف
٢٢د^{٣}ف ل^{٢}	٢ × ١١ × د^{٣}ف ل^{٢}
٣٠ف^{٢}ل هـ^{٢}	٢ × ٣ × ٥ × ف^{٢}ل هـ^{٢}

٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث وحيدات حد على أن يكون (ق. م. أ) لها ٦ص^{٣}. فسّر إجابتك.
انظر ملحق الإجابات.

٣٤) **اكتب:** عرّف التحليل إلى العوامل الأولية بكلماتك الخاصة، وفسّر كيف تحلّل وحيدة الحدّ إلى عواملها الأوليّة، وكيف يساعدك هذا التحليل على تحديد (ق. م .أ) لوحيدتي حدّ أو أكثر.
انظر ملحق الإجابات.

تدريب على اختبار

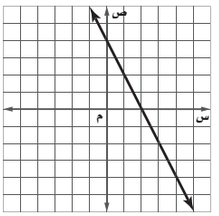
٣٥) ما قيمة هـ في المعادلة ٤هـ−٢٧= ١٩+ ٢هـ ؟ جـ

أ) −٤ جـ) ٢٣

ب) ٤ د) ٤٦

٣٦) **إجابة قصيرة:** أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢،−١) ، (−٥،١). $\frac{-٢}{٧}$

٣٧) ما المعادلة الأفضل تمثيلًا للمستقيم الذي يوازي المستقيم المُبيَّن في الشكل؟ ب



أ) ص = ٢س + ٤

ب) ص = −٢س − ٥

جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٦

د) ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ٣

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٧)

٣٨) (أ − ٤)^{٢} أ^{٢} − ٨أ + ١٦

٣٩) (جـ + ٦)^{٢} جـ^{٢} + ١٢جـ + ٣٦

٤٠) (ع − ٥)^{٢} ع^{٢} − ١٠ع + ٢٥

٤١) (ن − ٣)(ن + ٣) ن^{٢} − ٩

٤٢) (ص + ٢)^{٢} ص^{٢} + ٤ص + ٤

٤٣) (د − ٧)(د + ٧) د^{٢} − ٤٩

أوجد ناتج الضرب في كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٦)

٤٤) (٢م − ٣)(م + ٤) ٢م^{٢} + ٥م − ١٢

٤٥) (هـ − ٢)(٣هـ − ٥) ٣هـ^{٢} − ١١هـ + ١٠

٤٦) (ن + ٢)(ن + ٩) ن^{٢} + ١١ن + ١٨

٤٧) (٨ر − ١)(ر − ٦) ٨ر^{٢} − ٤٩ر + ٦

٤٨) (ف + ٣ك)(ف + ٣ك) ف^{٢} + ٦ف ك + ٩ك^{٢}

٤٩) (ن − ٤)(ن + ٢)(ن + ١) ن^{٣} − ن^{٢} − ١٠ن − ٨

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اعمل نسخًا متعدّدة لخمس مجموعات مختلفة من وحيدات الحد. وأعطِ كل طالب مجموعة منها. واطلب إليهم كتابة (ق . م . أ) لوحيدات الحد هذه، وتسليمها لك قبل مغادرتك غرفة الفصل.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اطلب إلى الطلاب إعطاء أي وحيدتي حد، ثم بيّن لهم طريقة إيجاد (ق.م.أ) لوحيدات الحد تلك بعد تحليل كلٍّ منهما تحليلًا تامًّا، وظلّل العوامل المشتركة، ثم اسحب هذه العوامل لتكوين (ق.م.أ) على صورة حاصل ضرب عوامل أولية.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٧ - ١

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٦)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٧-١ تدريبات إعادة التعليم
تحليل وحيدات الحد

تحليل وحيدات الحد: تكون وحيدة الحد بالصيغة التحليلية إذا مُثِّر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأس ١.

مثال حلّل كلّ وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًّا.

أ) ٤٢أ٢

$|x|x|x2x1x2 = 42أ^2$　$|x|x|x7x3 = 21أ^2$

لذا فإنّ التحليل إلى العوامل لوحيدة الحد ٤٢أ٢ هو: ٢×٣×٧×أ×أ.

ب) −٤٠س٢ص٣

−٤٠س٢ص٣ = −١×٤٠×س٢×ص٣　اكتب −٤٠ في الصورة −١×٤٠

= −١×٢×٢٠×س×س×ص×ص×ص　٤٠ = ٢×٢٠، س٢ = س×س، ص٣ = ص×ص×ص

= −١×٢×٢×١٠×س×س×ص×ص×ص　٢٠ = ٢×١٠

= −١×٢×٢×٥×٢×س×س×ص×ص×ص　١٠ = ٢×٥

لذا فإنّ التحليل إلى العوامل لوحيدة الحد −٤٠س٢ص٣ هو: −١×٢×٢×٢×٥×س×س×ص×ص×ص

تمارين

حلّل كلّ وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

١) ٣٢س٢　٢) ١٨م٢ن　٣) ٤٩آب٢

٤) ١٨ص٣　٥) −٩هـ٢ل ك　٦) −٨د٣

٧) ٦٦ك٢ر٢　٨) ١٤٠س٢ص٢ع　٩) −آب٢ف

١٠) −١٧ت　١١) ٦٢٥ل ك٢　١٢) ٤٧ب س٢ص٢ع٢

١٣) ١٢ر٤　١٤) −٣٨آب　١٥) ٤أل

تدريبات حل المسألة (٨)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-١ تدريبات حل المسألة
تحليل وحيدات الحد

١) **ألعاب رياضيات،** يلعب طلاب الصف الثالث المتوسط لعبة "تخمين وحيدة الحد". يعرض أحد الطلاب عوامل وحيدة الحد المخبأة، ويحاول طلاب الصف تخمينها. عندما وصل دور التخمين إلى عادل وجد أنّ وحيدة الحد المخبأة هي ١٠٥س٢ص٣. فأيّ البطاقات الآتية يتعيّن على عادل عرضها كي يجعل فريقه يخمّن وحيدة الحد الصحيحة؟

		س	س	٤	٤	٤	٤
٣	٥	٧	١١	١٣	١٧	١٩	

قد يتنوع ترتيب البطاقات.

٣ × ٥ × ٧ × س × س × ص × ص × ص

٢) **زينة حفلة،** تختبي الزرمة الواحدة من بالونات الأطفال على ١٨ بالونًا، والزرمة الواحدة من قبعات الأطفال على ٨ قبعات. تريد هند الحصول على العدد نفسه من البالونات والقبعات لحفلة أطفال، فما أقل عدد من رزم البالونات ورزم القبعات يجب عليها أن تشتري؟

٤ رزم بالونات، ٩ رزم قبعات

٣) **تغليف،** ترغب إحدى شركات إنتاج أحبار الطابعات في تصميم صناديق من الكرتون المقوى، لحفظ علب الحبر التي تُنتجها. أوجد أطوال أصغر بُعدين ممكنين لقاعدة مربعة الشكل للصندوق الكرتوني، إذا كان طول علبة الحبر الواحدة ٧سم، وعرضها ٣سم.

٢١ بوصة × ٢١ بوصة

٤) **علماء الرياضيات،** أوجد عالِم الرياضيات والفلك الإغريقي إيراتوثينس طريقة لتفصل الأعداد الأولية عن الأعداد المؤلفة، عُرفت بـ"غربال إيراتوثينس" وخطواتها كما يأتي:

اكتب الأعداد من ١ إلى ٥٠
بما أنّ العدد ١ ليس أوليًا أو مؤلفًا، فاحذفه.
ضع دائرة حول العدد ٢، واحذف كل عدد يقبل القسمة عليه.
ضع دائرة حول العدد الأوّلي التالي غير المحذوف وهو ٣، واحذف جميع مضاعفاته، ثم ضع دائرة حول العدد الأوّلي التالي غير المحذوف وهو ٥، واحذف جميع مضاعفاته،... وهكذا.

أوجد أول ١١ عددًا أوّليًا مستعملًا "غربال إيراتوثينس".

٣١، ٢٩، ٢٣، ١٩، ١٧، ١٣، ١١، ٧، ٥، ٣، ٢

٥) **ترميم وصيانة،** يريد سلطان إعادة تبليط أرضية قاعة اجتماعات مستطيلة الشكل بعدادها ١٨ قدمًا، ١٦ قدمًا ببلاطات مربعة كاملة. ودون وجود فراغات بينها.

أ) إذا كانت لدى شركة البلاط مقاسات مختلفة من البلاط، فما أكبر بلاطة مربعة يمكن أن يستعملها سلطان لتجديد تبليط أرضية القاعة؟

٢قدم × ٢قدم

ب) إذا أراد سلطان تجديد تبليط باحة يُعدادها ٢٤قدمًا، ١٨قدمًا، فما أكبر بلاطة مربعة يمكن أن يستعملها سلطان لتجديد تبليط أرضية الباحة؟

٦ أقدام × ٦ أقدام

التدريبات الإثرائية (٩)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-١ التدريبات الإثرائية
إيجاد (ق. م. أ) باستعمال خوارزمية إقليدس

قد يستغرق إيجاد العامل المشترك الأكبر لعددين كبيرين باستعمال التحليل إلى العوامل الأولية زمنًا طويلًا. يمكنك استعمال طريقة بديلة في هذه الحالة، وهي خوارزمية إقليدس، كما في المثال الآتي:

مثال أوجد (ق. م. أ) للعددين ٥٣٢، ٢٠٩.

اقسم العدد الأكبر ٥٣٢ على العدد الأصغر ٢٠٩،

فيكون الباقي الأخير غير الصفري هو (ق. م. أ)

	العدد المقسوم عليه في الخطوة السابقة على الباقي		المقسوم عليه على الباقي حتى يصبح الباقي صفرًا	كرر العملية السابقة بقسمة
٥٣٢ ÷ ٢٠٩ = ٢	٢	٢٠٩	١	٢٠٩ ÷ ١١٤ = ١
١١٤ ÷ ٩٥ = ١	١	١١٤	١	١١٤ ÷ ٩٥ = ١
٩٥ ÷ ١٩ = ٥	٥	٩٥		

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين ٥٣٢، ٢٠٩ هو الباقي غير الصفري الأخير (١٩).

إذا كان (ق. م. أ) لعددين هو ١، فإنّ العددين أوّليان فيما بينهما.

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة من أعداد أو وحيدات الحد مما يأتي مستعملًا خوارزمية إقليدس:

١) ١٨٧، ٥٧　٢) ١٨٠٢، ١٠٦
١٧　١٠٦

٣) ١٦٦١، ٩٤٣　٤) ٢١٥، ١٨٤
٢٣　٤٣

٥) ١٣٢٥، ٣٤٩٨　٦) ٣٤٨٤، ٥٩٦٣
٥٢　٦٧

٧) ٥٣٣٥٨٣، ٤٢٥٧　٨) ٤٥٣، ٤٨٤
٤٧٣　١؛ (العددان أوّليان فيما بينهما)

٩) ٢٠٩٥، ٥٨٩　١٠) ٥١٨، ٤٠٧٥١٨
١٩　٣٧

١١) ١٦٦١٥ أس٤ع، ١٧أ　١٢) ٧٥٢أف٣، ٨٩٣أ٢ف٢
١٧أس ع　٤٧أف٢

١٣) ٤٩٥ر٢ت٢، ٤٩٥ر٤ت٢، ١٥٤ر٢ت٢　١٤) ٣٦٠س٢ص٧، ٣٢٨٠س ص٤، ٥٦٨س٢ص٣
١١رت٢　٨ س ص

كتاب التمارين (١١)　دون ضمن فوق

الفصل السابع: التحليل والمعادلات التربيعية

٧ - ١ تحليل وحيدات الحد

حلّل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

١) ٣٠د٢
٢ × ٣ × ٥ × د × د

٢) −٧٢م ل
−١ × ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٣ × م × ل

٣) ٨١ب٢ جـ٢
٣ × ٣ × ٣ × ب × ب × جـ × جـ × جـ

٤) ١٤٥آب جـ٢
٥ × ٢٩ × آ × ب × جـ × جـ × جـ

٥) ١٦٨ ن ك٢ ر
٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٧ × ن × ك × ك × ر

٦) −١٢١ س٢ ص٤ ع
−١ × ١١ × ١١ × س × س × ص × ع × ع

٧) −١٤ف جـ٢
−١ × ٢ × ٧ × ف × ف × جـ × جـ

٨) −٧٧ و٢
−١ × ٧ × ١١ × و × و × و × و

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد مما يأتي:

٩) ٢٤ ف جـ٢، ٥٦ ف٢ جـ　٨ ف جـ

١٠) ٧٢ ر٢ ن٢، ٣٦ ر ن٣　٣٦ ر ن٢

١١) ١٥ آ٢ ب، ٣٥ آب٢　٥ آب

١٢) ٢٨ ك٢ ن٢، ٤٥ ل ر٢　١

١٣) ٤٠ س ص٢، ٥٦ س٢ ص٣، ١٢٤ س٣ ص٢　٤ س ص٢

١٤) ٨٨ أ٣ د، ٤٠ أ٢ د٢، ٣٢ أ٢ د　٨ أ٢ د

١٥) **هندسة،** مستطيل بعداه عددان كليّان ومساحته ٨٤ سم٢.

أ) ما أقل قيمة لمحيطه؟　٣٨ سم

ب) ما أكبر قيمة لمحيطه؟　١٧٠ سم

١٦) **زخرفة،** يريد حاتم زخرفة حائط باستعمال بلاطات مربعة الشكل ومتساوية الأبعاد؛ لتغطية مقطة مستطيلة بعداها: ٩٦ سم، ٧٢ سم.

أ) ما أطول ضلع بلاطة يمكن استعمالها دون قص أي بلاطة؟　٢٤ سم

ب) كم بلاطة سيحتاج من هذا النوع؟　١٢ بلاطة

ملحوظات المعلم

٧-٢ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٧ - ٢

إيجاد (ق.م.أ) لمجموعة من وحيدات الحد .

الدرس ٧ - ٢

- استعمال خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود .
- حل معادلات تربيعية على الصورة أس^{٢} + ب س = ٠ .

ما بعد الدرس ٧ - ٢

حل معادلات على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثم اسأل:

- ما صيغة مساحة المستطيل م = ل × ض
- بماذا تضرب ض لتحصل على ٦ , ١ ض^{٢} + ٦ ض؟ ٦ , ١ ض + ٦
- ما مساحة المتجر على صورة حاصل ضرب وحيدة حد على كثيرة حدود؟ ض (٦ , ١ ض + ٦).
- ماذا تساوي مساحته عندما ض = ٥٠ مترًا؟ ٤٣٠٠ متر مربع

٧-٢

استعمال خاصية التوزيع

لماذا ؟

تُحدَّد أجرة متجر حسب مساحته. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة م = ٦ , ١ ض^{٢} + ٦ ض، حيث تمثِّل ض عرض المتجر بالأمتار، ويمكننا استعمال التحليل إلى العوامل وخاصية الضّرب الصفري لإيجاد أبعاد المتجر الممكنة.

استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل: استعملت خاصية التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود كما في المثال الآتي:

٥ع (٤ع + ٧) = ٥ع (٤ع) + ٥ع (٧)

= ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع

ويمكنك الإفادة من ذلك في العمل عكسيًّا للتعبير عن كثيرة الحدود بصورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد، وكثيرة الحدود.

٦ , ١ ض^{٢} + ٦ ض = ٦ , ١ ض (ض) + ٦ (ض) = ض (٦ , ١ ض + ٦)

كذلك ٥ع (٤ع + ٧) يمثِّل تحليل ثنائية الحدّ ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع. ويشتمل **تحليل كثيرة الحدود** تحليلها إلى عواملها الأوليّة.

فيما سبق

درست إيجاد (ق.م.أ) لمجموعة من وحيدات الحدّ.

والآن

- أستعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كثيرة حدود.
- أحلّ معادلات تربيعيّة على الصورة: أس^{٢} + ب س = ٠

المفردات

تحليل كثيرة حدود
التحليل بتجميع الحدود
خاصية الضرب الصفري

obeikaneducation.com

مثال ١ استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل

استعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

أ) ٢٧ص^{٢} + ١٨ص

أوجد (ق.م.أ) لجميع الحدود.

٢٧ص^{٢} = ٣ × ٣ × ص × ص — حلّل كل حد.

١٨ص = ٢ × ٣ × ص — ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

(ق.م.أ) = ٣ × ٣ × ص = ٩ص

اكتب كل حدّ على صورة حاصل ضرب (ق.م.أ) في باقي العوامل. واستعمل خاصيّة التوزيع لإخراج (ق.م.أ).

٢٧ص^{٢} + ١٨ص = ٩ص(٣ص) + ٩ص(٢) — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق.م.أ).

= ٩ص(٣ص + ٢) — خاصية التوزيع.

ب) −٤أ^{٢}ب − ٨أب^{٢} + ٢أب

−٤أ^{٢}ب = −١ × ٢ × ٢ × أ × أ × ب — حلّل كلّ حدّ.

−٨أب^{٢} = −١ × ٢ × ٢ × ٢ × أ × ب × ب — ضع دائرة حول العوامل المشتركة .

٢أب = ٢ × أ × ب

(ق.م.أ) = ٢ × أ × ب = ٢أب

−٤أ^{٢}ب − ٨أب^{٢} + ٢أب = ٢أب(−٢أ) − ٢أب(٤ب) + ٢أب(١) — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق.م.أ).

= ٢أب(−٢أ − ٤ب + ١) — خاصيّة التوزيع

مصادر الدرس ٧- ٢

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٥٨)	• تنويع التعليم ص (٥٨)	• تنويع التعليم ص (٦١)
كتاب التمارين	ص (١٢)	ص (١٢)	ص (١٢)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) • تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢) • التدريبات الإثرائية، ص (١٣)

تحقق من فهمك

أ١) ١٥و – ٣ف ٣ (٥ و – ف)

ب١) ٧ل^{٢}ن^{٢} + ٢١ل ن^{٢} – ل ن ل ن(٧ل ن + ٢١ن – ١)

تُسمّى الطريقة التي تُستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكوّن من أربعة حدود أو أكثر **التحليل بتجميع الحدود**؛ لأن الحدود تُجمع بطريقة معينة، ثم يحلَّل كل تجميع، ثم تطبق خاصية التوزيع لإخراج عامل مشترك.

مفهوم أساسي التحليل بتجميع الحدود

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود ، إذا توافرت جميع الشروط الآتية:

- تتكوّن كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر.
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معًا عوامل مشتركة.
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعيّ للآخر.

الرموز: أس + ب س + أص + ب ص = (أس + ب س) + (أص + ب ص)

= س(أ + ب) + ص(أ + ب)

= (س + ص)(أ + ب)

مثال ٢ التحليل بتجميع الحدود

حلّل: ٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦

٤ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦ العبارة الأصلية

= (٤ك ر + ٨ ر) + (٣ ك + ٦) جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= ٤ ر(ك + ٢) + ٣(ك + ٢) حلّل كل تجميع بإخراج (ق.م.أ)

لاحظ أنّ (ك+ ٢) عامل مشترك لِـ ٤ ر (ك+٢) وَ ٣ (ك+٢).

= (٤ر + ٣) (ك + ٢) خاصية التوزيع

تحقق من فهمك

حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية :

٢أ) رن + ٥ن – ر – ٥ (ر + ٥)(ن – ١)

٢ب) ٣ن ك + ١٥ك – ٤ن – ٢٠ (ن + ٥)(٣ك – ٤)

من المفيد معرفة متى تكون إحدى ثنائيتي الحد نظيرًا جمعيًّا للأخرى. فمثلاً ٦ – أ = –١ (أ – ٦)

مثال ٣ التحليل بتجميع الحدود (العوامل نظائر جمعية)

حلّل: ٢م ك – ١٢ م + ٤٢ – ٧ ك

٢م ك – ١٢م + ٤٢ – ٧ ك العبارة الأصلية

= (٢م ك – ١٢م) + (٤٢ – ٧ ك) جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.

= ٢م(ك – ٦) + ٧(٦ – ك) حلّل كلّ تجميع بإخراج (ق. م. أ).

= ٢م(ك – ٦) + ٧[(–١)(ك – ٦)] ٦ – ك = –١ (ك – ٦)

= ٢م(ك – ٦) – ٧(ك – ٦) خاصيّة التجميع

= (٢م – ٧)(ك – ٦) خاصيّة التوزيع

إرشادات للدراسة

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.

استعمال خاصية التوزيع في التحليل

المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود.

المثال ٢ يُبيّن طريقة التحليل بتجميع الحدود .

المثال ٣ يُبيّن طريقة التحليل بتجميع الحدود، عندما تكون العوامل نظائر جمعية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

١ استعمل خاصية التوزيع لتحليل كلٍّ من كثيرتي الحدود الآتيتين:

أ) ١٥س + ٢٥س^{٢}

٥س (٣ + ٥س)

ب) ١٢ س ص+ ٢٤س ص^{٢}

–٣٠س^{٢} ص^{٤}

٦س ص(٢ + ٤ص– ٥س ص^{٣})

٢ حلّل:

٢س ص+ ٧س–٢ص– ٧

(س–١) (٢ص+٧)

٣ حلّل:

١٥ أ – ٣أ ب + ٤ ب – ٢٠

(–٣أ+٤) (ب – ٥)

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل فيديو: وزّع طلاب الصف مجموعات، واطلب إلى كل مجموعة تصوير شريط فيديو يوضّح التحليل للعوامل بتجميع الحدود. عيّن كثيرة حدود مختلفة لكل مجموعة، واطلب إلى كل مجموعة مشاركة الصف في شريط التسجيل.

المحتوى الرياضي

القاسم المشترك الأكبر(ق.م.أ)

التحليل باستعمال خاصية التوزيع يعني كتابة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عاملين أحدهما القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحد.

ولإيجاد العامل الآخر يُقسم كل حد في كثيرة الحدود على القاسم المشترك الأكبر.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير: أحيانًا يجد الطلاب وحيدة الحد التي تُشكّل (ق.م.أ) لحدود كثيرة الحدود، ولكن لا يعرفون كيفية الحصول على عامل كثيرة الحدود الآخر. إحدى طرق إيجاد هذا العامل هي قسمة كل حد على (ق.م.أ). ذكّر الطلاب بأنه يمكنهم التحقّق من إجاباتهم بضرب تلك العوامل باستعمال خاصية التوزيع.

حل المعادلات بالتحليل

المثال ٤ يُبيّن طريقة حل معادلتين تربيعيتين مختلفتين، إحداهما محلّلة إلى العوامل، والأخرى تحتاج إلى تحليل.

المثال ٥ يُبيّن طريقة حل مسألة من واقع الحياة باستعمال خاصية الضرب الصفري.

مثال إضافي

٤ حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقّق من صحة الحل:

أ) $(س-٢)(٤س-١)=٠$

٢ ، $\frac{١}{٤}$

ب) $٤ص=١٢ص^{٢}$ ، ٠ ، $\frac{١}{٣}$

المحتوى الرياضي

خاصية الضرب الصفري:

يمكن حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الضرب الصفري "إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا، فإن أحدهما على الأقل يساوي صفرًا". ولحل معادلات باستعمال هذه الخاصية، اكتب أحد طرفَي المعادلة في الصورة المحلّلة، وصفرًا في الطرف الآخر. ثم ساوِ كل عامل بالصفر، وحُلّ المعادلات الناتجة.

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية :

i٣) جـ^{٢} − ٢جـد + ٨د − ٤

ب٣) ٣ف − ٢ف^{٢} − ١٨ف + ٢٧

أ٣) (−جـ + ٤)(٢د − ١) أو (جـ − ٤)(١ − ٢د)

ب٣) (ف + ٩)(٣ − ٢ف) أو (−ف − ٩)(٢ف − ٣)

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكنك حلّ بعض المعادلات بالتحليل .

انظر إلى الجمل الآتية: $٣(٠)=٠$ $٠(٢-٢)=٠$ $-٣١٢(٠)=٠$ $٠(٠,٢٥)=٠$

لاحظ أن أحد العاملين على الأقل في كلّ حالة يساوي صفرًا. وتبيّن هذه الأمثلة **خاصيّة الضّرب الصفري**.

مفهوم أساسي — **خاصية الضرب الصفري** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا، فيجب أن يكون أحدهما على الأقل صفرًا.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان أ ب = ٠، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو أن كليهما يساوي صفرًا.

سبق أن تعلمت أن حلّ المعادلة أو جذرها هو أيّ قيمة للمتغير تجعلها صحيحة.

تنبيه !

قيمة غير معروفة

قد تجد أنه من الأسهل حلّ معادلة بقسمة كلّ طرف منها على متغير. وبما أن قيمة المتغير غير معروفة، لذا قد تقسم في هذه الحالة على صفر، والقسمة على صفر غير معرّفة.

مثال ٤ — **حل المعادلات**

حلّ كلاً من المعادلات الآتية وتحقق من صحة الحل:

أ) $(٢د+٦)(٣د-١٥)=٠$

$(٢د+٦)(٣د-١٥)=٠$ — المعادلة الأصلية

$٢د+٦=٠$ أو $٣د-١٥=٠$ — خاصية الضرب الصفري

$٢د=-٦$ ، $٣د=١٥$ — حلّ كل معادلة

$د=-٣$ ، $د=٥$ — اقسم

الجذران هما -٣ ، ٥

تحقّق: عوّض عن د بكلٍّ من -٣، ٥ في المعادلة الأصلية.

$(٢د+٦)(٣د-١٥)=٠$ ✓ $٠=٠$

$[٢(-٣)+٦][٣(-٣)-١٥]\stackrel{؟}{=}٠$ ، $(-٦+٦)(-٩-١٥)\stackrel{؟}{=}٠$ ، $(٠)(-٢٤)\stackrel{؟}{=}٠$

$[٢(٥)+٦][٣(٥)-١٥]\stackrel{؟}{=}٠$ ، $(١٠+٦)(١٥-١٥)\stackrel{؟}{=}٠$ ، $١٦(٠)\stackrel{؟}{=}٠$

$(٢د+٦)(٣د-١٥)=٠$ ✓ $٠=٠$

ب) جـ^{٢} = ٣جـ

جـ^{٢} = ٣جـ — المعادلة الأصلية

جـ^{٢} − ٣جـ = ٠ — اطرح ٣ جـ من كل طرف للحصول على صفر في أحد طرفي المعادلة.

جـ(جـ − ٣) = ٠ — حلّل باستعمال (ق.م.أ) للحصول على الصورة أ ب = ٠

جـ = ٠ أو جـ − ٣ = ٠ — خاصيّة الضرب الصفري

جـ = ٣ — حلّ كلّ معادلة

الجذران هما ٠ ، ٣ — تحقّق بتعويض كل من صفر، ٣ بدلاً من جـ

تنويع التعليم:

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في حل المعادلات التربيعية كما في المثال ٤ ب،

فقم بتوجيههم لاستعمال بطاقات الجبر؛ لحل المعادلة التربيعية بالتحليل.

تحقق من فهمك

أ) ٣ن(ن + ٢) = ٠ ٠، -٢ **ب)** ٨ب^{٢} - ٤٠ب = ٠ ٠، ٥ **جـ)** س^{٢} = -١٠س ٠، -١٠

مثال ٥ من واقع الحياة **استعمال التحليل**

رمي السهم: يمكن تمثيل ارتفاع سهم بالمعادلة ع = -٥ ن^{٢} + ٢٠ ن، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني. إذا أهمل ارتفاع رامي السهام، بعد كم ثانية يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه؟

عندما يصل السهم إلى الأرض ع = ٠

ع= -٥ن^{٢} + ٢٠ ن	المعادلة الأصلية
٠ = -٥ن^{٢} + ٢٠ ن	عوّض عن ع بـ ٠
٠ = ٥ ن (- ن+ ٤)	حلّل بإخراج (ق .م.أ)
٥ ن= ٠ أو - ن + ٤ = ٠	خاصيّة الضرب الصفري
ن= ٠ أو -ن = -٤	حلّ كلّ معادلة
ن = ٤	اقسم كل حد على -١

يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه بِـ ٤ ثوانٍ.

الربط مع الحياة

يتطلب رمي السهم أو الرمي بالقوس تركيزًا عاليًا ومهارة ودقة في التصويب؛ لضمان إصابة الهدف.

تحقق من فهمك

٥) قفز الأرنب: يمكن تمثيل قفزة الأرنب بالمعادلة ع= ٥ ,٢ن- ٥ن^{٢}؛ حيث تمثل (ع) ارتفاع القفزة بالمتر، و(ن) الزمن بالثواني. أوجد قيمة ن عندما ع= صفرًا. ٠، ٠، ٥

تأكد

مثال ١

١)٣(٧ب - ٥أ)

٢)٢جـ(٧جـ + ١)

المثالان٢ ، ٣

٣)٢ل ك (٦ك + ٣ل + ل ك)

٤)(ن + ٨)(م + ٢)

مثال ٤

٥)(س + ٧)(ص - ٧)

٦)(ب + ٥)(٣جـ - ٢)

مثال ٥

٧) ٠، -١٠

٨) -$\frac{١}{٢}$ ، ٣

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

١) ٢١ب - ١٥أ ٢) ١٤جـ^{٢} + ٢جـ ٣) ١٢ل ك ^{٢} + ٦ل^{٢}ك + ٢ل^{٢}ك ^{٢}

حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

٤) ن م + ٢ن + ٨م + ١٦ ٥) س ص - ٧س + ٧ص - ٤٩ ٦) ٣ب جـ - ٢ب - ١٠ + ١٥جـ

حُلّ كلاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٧) ٣ك(ك + ١٠) = ٠ ٨) (٤م + ٢)(٣م - ٩) = ٠ ٩) ر^{٢} = ١٤ر ٠، ١٤

١٠) **صواريخ:** أُطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ ثانية. وتمثّل المعادلة ع = ٤٢ ن - ٥ن^{٢} ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟ صفر

ب) حلّ المعادلة ٤٢ ن - ٥ ن^{٢} = ٠ ٠، ٨,٤

جـ) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟ ٨,٤ ثانية

مثال إضافي

٥ كرة القدم: يمكن تمثيل ارتفاع كرة قُذفت في الهواء بالمعادلة ع = -٥ن^{٢} + ٥ن، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار،(ن) الزمن بالثانية، أوجد قيمة ن عندما ع = ٠. صفر ثانية، ١ ثانية

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ - ١٠؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

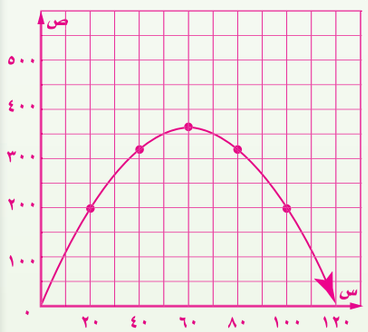
تمثيلات متعدّدة في السؤال ٣٩، سيستعمل الطلاب الرسم وتفسيره؛ لتحليل عبارة جبرية إلى عواملها.

إجابات:

٣٨أ)

س	ص
٠	٠
٢٠	٢٠٠
٤٠	٣٢٠
٦٠	٣٦٠
٨٠	٣٢٠
١٠٠	٢٠٠

٣٨ب)



٣٧جـ) −٣٠ م؛ لا، لا يمكن أن يكون الارتفاع عن الأرض عددًا سالبًا

تدرب وحل المسائل

مثال ١ استعمل خاصية التوزيع لتحليل كلّ من كثيرات الحدود الآتية:

١١) ٨(٢ن − ٥ص)
١٢) ١٠(٣ف + ٥س)
١٣) ٢ك(ك + ٢)
١٤) ٥ع(ع + ٢)
١٥) ٢أب(٢أب + أ − ٥ب)

١١) ١٦ن − ٤٠ص
١٢) ٣٠ف + ٥٠س
١٣) ٢ك^{٢} + ٤ك
١٤) ٥ع^{٢} + ١٠ع
١٥) ٤أ^{٢}ب^{٢} + ٢أ^{٢}ب − ١٠أب^{٢}
١٦) ٥جـ^{٢}ف − ١٥جـ^{٢}ف^{٢} + ٥جـ^{٢}ف^{٣}

المثالان ٢، ٣ حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

١٩) (س + ١)(ص − ٢)
٢٣) (٣ن − ٥)(٧هـ − ١)
٢٥) (ر − ٥)(٥ب + ٢)
٢٧) جـف(٥ف + جـ + ١٥)
٢٩) ٦ر^{٢}ن(٣رن + ٢ن − ١)

١٧) أ^{٢} − ٤أ − ٢٤ + ٦أ (أ − ٤)(أ + ٦)
١٩) س ص − ٢س − ٢ + ص
٢١) ٣دن − ٢١د + ٣٥ − ٥ن (٣د − ٥)(ن − ٧)
٢٣) ٢١ن هـ − ٣ن − ٣٥هـ + ٥
٢٥) ٥ب ر − ٢٥ب + ٢ر − ١٠
٢٧) ٥جـف^{٢} + جـ^{٢}ف + ١٥جـف
٢٩) ١٨ر^{٣}ن^{٢} + ١٢ر^{٢}ن^{٢} − ٦ر^{٢}ن

١٨) هـل − ٢هـ + ٥ل − ١٠ (هـ + ٥)(ل − ٢)
٢٠) ٢٤ن ص − ١٨ن + ٤ص − ٣ (٦ن + ١)(٤ص − ٣)
٢٢) ٨ر^{٢} + ١٢ر ٤ر(٢ر + ٣)
٢٤) ل ف + ١٢ل + ٨ف + ٩٦ (ل + ٨)(ف + ١٢)
٢٦) ٢ن و − ٨و + ٣ن − ١٢ (٢و + ٣)(ن − ٤)
٢٨) رف − ٩ر + ٩ف − ٨١ (ر + ٩)(ف − ٩)
٣٠) ١٦جـهـ + ٢٤جـ − ٢هـ − ٣ (٨جـ − ١)(٢هـ + ٣)

مثال ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٣١) ٣ب(٩ب − ٢٧) = ٠
٣٢) ٢ن(٣ن + ٣) = ٠
٣٣) (٨ع + ٤)(٥ع + ١٠) = ٠
٣٤) (٧س + ٣)(٢س − ٦) = ٠
٣٥) ب^{٢} = −٣ب
٣٦) أ^{٢} = ٤أ

٣٢) ٠، ٣
٣٣) ٠، −١
٣٥) ٠، −٣
٣٦) ٠، ٤

مثال ٥

٣٧) **فروسية:** يمكن تمثيل ارتفاع قفزة فرس في سباق الحواجز بالمعادلة ع = −٥ن^{٢} + ٥ن؛ حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني.

أ) اكتب عبارة تمثّل الارتفاع على صورة حاصل ضرب عوامل. ٥ن(− ن + ١)

ب) أوجد قيم ن عندما ع = ٠؟ ١، ٠

جـ) ما الارتفاع الذي يكون عليه الفارس بعد ٣ ثوانٍ من بداية القفز؟ وهل هذا ممكن؟ فسّر إجابتك.

٣٨) **هندسة عمارة:** يمكن تمثيل إطار قوس بوابة بالمعادلة ص = −١، ٠س^{٢} + ١٢س؛ حيث س، ص بالسنتمتر. ومحور السينات يمر بطرفي القوس على الأرض. أ– ب انظر الهامش

أ) كوّن جدولًا لارتفاع القوس إذا كان س = ٠، ٢٠، ٤٠، ٦٠، ٨٠، ١٠٠ سم.

ب) مثّل نقاط الجدول في المستوى الإحداثي، وصِل بين النقاط لتكوّن منحنى يمثّل القوس.

جـ) ما ارتفاع قوس الباب؟ ٣٦٠ سم

الربط مع الحياة

حقق فريق الفروسية في المملكة المركز الثاني في بطولة العالم للفروسية للفردي قفز الحواجز عام ٢٠١٠م.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١١ – ٣٧، ٤٠ – ٥٣
ضمن ضمن المتوسط	١١ – ٣٧، ٤١ – ٥٣
فوق فوق المتوسط	٣٨ – ٥٣

٣٩د) إجابة ممكنة: ضع $س^{٢}$ في الزاوية العليا اليمنى، و-٤٠ في الزاوية السفلى اليسرى، وحدّد أي عاملين ناتج ضربهما -٤٠ ومجموعهما -٣، ثم ضع العوامل في الصندوق مع المتغير، وأوجد العوامل لكل صف وعمود. وستكتب العوامل في أعلى الصندوق وعن يمينه.

٣٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة طريقة الصندوق للتحليل، ممثلاً لتحليل $س^{٢}+س-٦$، اكتب أول حد في الزاوية اليمنى العليا من الصندوق، ثم اكتب آخر حد في الزاوية السفلى اليسرى.

؟	؟	
$س^{٢}$	؟	؟
؟	-٦	؟

أ) تحليليًا: حدّد أي عاملين ناتج ضربهما -٦، وناتج جمعهما ١. $٣، -٢$

ب) رمزيًا: اكتب كل عامل منهما في المربع الفارغ، متضمنًا المتغير وإشارته الموجبة أو السالبة. انظر الهامش

جـ) تحليليًا: أوجد عوامل كل صف وعمود في الصندوق، ثم أوجد عوامل $س^{٢}+س-٦$. انظر الهامش

د) لفظيًا: صف كيف تستعمل طريقة الصندوق لتحليل $س^{٢}-٣س-٤٠$.

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة $٢م^{٢}=٤م$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

راشد

$٢م^{٢}=٤م$

$٢م^{٢}-٤م=٠$

$٢م(م-٢)=٠$

$٢م=٠$ أو $م-٢=٠$

$م=٠$ أو $م=٢$

حمد

$٢م^{٢}=٤م$

$\frac{٢م^{٢}}{٢م}=\frac{٤م}{٢م}$

$م=٢$

راشد؛ يجب جعل أحد طرفي المعادلة صفرًا. ولا يصح القسمة على متغير، لأنه قد تكون قيمة المتغير صفرًا

٤١) إجابة ممكنة: $س^{٢}+٢س ص+٣س+٦ ص$، $(س+٣)(س+٢ص)$

٤٢) إجابة ممكنة: أ = صفرًا، أو أ = ب لأي عدد حقيقي أ.

٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرة حدود بأربعة حدود، يمكن تحليلها بتجميع الحدود، ثم حلّلها.

٤٢) **تبرير:** في المعادلة جـ$=أ^{٢}-$ أ ب، ما قيم أ، ب التي تجعل جـ$=٠$؟

٤٣) **اكتب:** وضّح كيف تحل معادلة تربيعية باستعمال خاصيّة الضرب الصفري. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٤٤) أي مما يأتي يمثّل عاملاً لكثيرة الحدود: $٦ع^{٢}-٣ع-٢+٤ع$؟ د

أ) $٢ع+١$ جـ) $ع+٢$

ب) $٣ع-٢$ د) $٢ع-١$

٤٥) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث القائم الزاوية المبين أدناه ٥ س سم^{٢}، فما ارتفاعه؟ د

أ) ٢ سم جـ) ٨ سم

ب) ٥ سم د) ١٠ سم

مراجعة تراكمية

أوجد (ق .م. أ) لكل مجموعة وحيدات حدود مما يأتي: (الدرس ٧-١)

٤٦) $٣٠أ^{٢}، ٥٠أب^{٢}$ ١٠أ

٤٧) $٨جـ^{٢}د^{٣}، ١٦جـ^{٣}د$ $٨جـ^{٢}د$

٤٨) $٤ص، ١٨ص^{٢}، ٦ص^{٣}$ $٢ص$

بسّط كلّ عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-١)

٤٩) $(أب^{٤})(أب^{٢})$ $أ^{٢}ب^{٦}$

٥٠) $(-٧جـ^{٣}د^{٤})(٤جـ د^{٣})$ $-٢٨جـ^{٤}د^{٧}$

٥١) $(٩س ص^{٧})^{٢}$ $٨١س^{٢}ص^{١٤}$

٥٢) $[٣(٢٤)]^{٢}$ ١٦٧٧٧٢١٦

٥٣) حلّ المتباينة $٣ص-٤>-٣٧$، وتحقق من صحة الحل. (الدرس ٤-٣) $ص>-١١$

تنويع التعليم

فوق

توسع: اكتب كثيرة الحدود: جـ$س^{٢}$ ص $-$ جـ$^{٣}-س^{٢}$ ص + جـ س على السبورة، واطلب من الطلاب تحليلها بطريقة تجميع الحدود. (جـ$^{٢}-$ س) (س ص $-$ جـ) أو (س $-$ جـ^{٢}) (جـ $-$ س ص)

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال ٤٠، ذكّر الطلاب بأن أسرع طريقة للتحقّق من الحل، هي تعويض القيمة في المعادلة الأصلية.

٤ التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا كيف ساعدهم الدرس السابق على تعلم المادة الجديدة في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين (٧-١ ، ٧-٢) بإعطائهم:

الاختبار القصير (١)، ص (٣٠)

إجابات:

٣٩ب)

$س^{٢}$	$+٣س$
$-٢س$	-٦

٣٩جـ)

	س	$+٣$
س	$س^{٢}$	$+٣س$
-٢	$-٢س$	-٦

$(س+٣)(س-٢)$

٤٣) أعيد كتابة المعادلة، وأجعل أحد طرفي المعادلة صفرًا، ثم أحلل الطرف الآخر إلى عوامله. وأساوي كل عامل بالصفر، ثم أحلُّ كل معادلة من المعادلتين الناتجتين عن ذلك.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٧ - ٢

دون المتوسط　ضمن المتوسط　فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٠)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٢ تدريبات إعادة التعليم
استعمال خاصية التوزيع

استعمال خاصية التوزيع في التحليل، استُعملتْ خاصية التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ويمكنك الإفادة من ذلك عكسيًّا للتعبير عن كثيرة الحدود في صورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد وكثيرة حدود. قارن بين العمودين في الجدول الآتي:

الضرب	التحليل
٣(أ + ب) = ٣أ + ٣ب	٣أ + ٣ب = ٣(أ + ب)
س(ص − ع) = س ص − س ع	س ص − س ع = س(ص − ع)
٦ص(٢ س + ١) = ٦ص(٢س) + ٦ص(١) = ١٢ص ص + ٦ص	١٢ س ص + ٦ص = ٦ص(٢س) + ٦ص(١) = ٦ص(٢س + ١)

مثال ١ استعمل خاصية التوزيع لتحليل ١٢م ل + ٨٠ م²

أوجد (ق. م. أ) لـ ١٢م ل، ٨٠م².

١٢م ل = ٢ × ٢ × ٣ × م × ل

٨٠م² = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٥ × م × م

(ق. م. أ) = ٢ × ٢ × م = ٤م

اكتب كلّ حد في صورة حاصل ضرب (ق. م. أ) في باقي العوامل.

١٢م ل + ٨٠م² = ٤م(٣ل) + ٤م(٢ × ٥ × م)
= ٤م(٣ل) + ٤م(٢٠م)
= ٤م(٣ل + ٢٠م)

مثال ٢ حلِّل ٦أس+٣أص+أب س+ب ص بتجميع الحدود.

٦أس + ٣أص + ٢ب س + ب ص
= (٦أس + ٣أص) + (٢ب س + ب ص)
= ٣أ(٢س + ص) + ب (٢س + ص)
= (٣أ + ب)(٢س + ص)

تحقّق باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

(٣أ + ب)(٢س + ص)
= ٣أ(٢س) + ٣أ(ص) + ب(٢س) + ب(ص)
= ٦أس + ٣أص + ٢ب س + ب ص

تمارين

حلِّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

١) ٤٢س + ٤٨ص　٢) ٣٠م ل² م + ٢ل − ٦ل　٣) ك³ − ١٨ك²ت + ٢٢ك
٢٤(٢س + ٣ص)　**ل(٣٠م ل² م + ٢ − ٦)**　**ك(ك² − ١٨كت + ٢٢)**
٤) ٩ص² − ٣س　٥) ٤م + ٢ل − ٨ م ل　٦) ٤٥ر² − ١٥ر
٣س(٣ص − ١)　**٢(٢م + ٣ل − ٤م ل)**　**١٥ر(٣ر − ١)**
٧) ١٤ت² − ٤٢ت² − ٤٩ت³　٨) ١٤ص² − ٢٨ص² م + ص　٩) ٤أ²ب + ٢٨أب² + ٧أب
٧ت²(٢ − ٦ت − ٧ت)　**ص(١٤ص² م − ٢٨م + ١)**　**أب (٤أ + ٢٨ب + ٧)**
١٠) ص² + ٢س + ص + ٢　١١) ٦ص² − ٤ص + ٣ص − ٢　١٢) ٤م² + ٤م ل + ٣م ل + ٣ل²
(ص + ١)(س + ٢)　**(٣ص + ١)(٢ص − ٢)**　**(٤م + ٣ل)(م + ل)**
١٣) ١٢أس + ٣س ع + ٤أص + ص ع　١٤) ١٢أ²ا² + ٣أ − ١٨ − ٢　١٥) س أ + ص أ + س + ص
(٣س + ص)(٤أ + ع)　**(٤أ + ١)(٣ا − ٢)**　**(س + ص)(أ + ١)**

تدريبات حل المسألة (١٢)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٢ تدريبات حل المسألة
استعمال خاصية التوزيع

١) **فيزياء،** يُقال: إنّ العالم جاليليو أسقط أجسامًا مختلفة الأوزان من برج بيزا المائل. عندما كان يعمل على تطوير معادلته للسقوط الحر للأجسام، والعلاقة التي اكتشفها بين مسافة سقوط الجسم (ف)، بعد زمن قدره (ن) ثانية، وصيغتها هي ف = ١٦ن² ٣٥ (مع إهمال مقاومة الهواء)، والتي يمكن إيجادها في المعادلة ص = ٥٤ − ١٦ن² ، حيث ص ارتفاع جسم مقذوف من سطح الأرض إلى أعلى بالأقدام بعد ن ثانية، ومعدل تغير سرعته ٣٢ قدمًا/ثانية. حلّ هذه المعادلة عندما ص = صفر.
ن = ٠,٢٥ ، صفر

٢) **بركة سباحة،** بركة سباحة مستطيلة الشكل إذا كانت مساحتها (م)، حيث م = ١٢ س − س²، س عرض البركة. اكتب عبارة تمثّل طول البركة.
١٢ − س

٣) **إنشاءات،** قامت شركة بناء بإنشاء سقف على شكل مثلث لغرفة على سطح بناية. مثّل المقاول السطح بالأبعاد المبينة أدناه (بالأمتار). أوجد أطوال أضلاع المثلث مستعملًا نظرية فيثاغورس.
٣م، ٤م، ٥م

٤) **قفزة رأسية،** يُقاس ارتفاع قفزتك الرأسية بطرح طولك وأنت واقف، من أعلى ارتفاع يمكنك أن تصل إليه، وذلك عندما تقفز دون جري. يصل الارتفاع النموذجي للقفزة الرأسية للاعبين المحترفين إلى ٣٤ بوصة. فإذا قفز لاعب محترف قفزة رأسية، وكانت معادلة ارتفاعه ع بوصة بعد ن ثانية هي:
ع = ١٦٢ن − ١٩٢ن²، فحلّ المعادلة عندما ع = ٠، مفسّرًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، ثم فسّرها.
ن = صفر، ن = ٠,٨٤
يصل اللاعب إلى الأرض بعد ٠,٨٤ ثانية تقريبا من بدء القفز.

ألعاب القوى، يتدرّب باسم على رمي القرص. وقد رمى القرص إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها ١٣,٧ مترًا/ثانية، استخدم المعادلة: ف = ١٣,٧ن − ٩,٤ن²، حيث ف تعبّر عن ارتفاع القرص عن سطح الأرض بعد ن ثانية من رمي القرص. (أجب عن السؤالين ٥، ٦):

٥) ما الزمن الذي يستغرقه القرص حتى يسقط على الأرض؟
٢,٧٩٥ ثانية

٦) إذا وصل القرص إلى أقصى ارتفاع له عند النقطة الواقعة بين صعوده وهبوطه، فما أقصى ارتفاع له؟
٩,٦ م

التدريبات الإثرائية (١٣)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٢ التدريبات الإثرائية
التركيبات الخطية

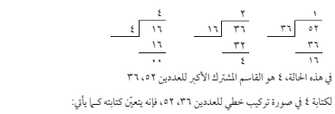
يمكنك كتابة (ق. م. أ) لعددين في صورة تركيب خطي لهما. فالتركيب الخطي للعددين أ، ب هو عبارة عن صورة أس + ب ص، حيث س، ص عددان صحيحان.

مثال اكتب القاسم المشترك الأكبر للعددين ٥٢، ٣٦ على صورة تركيب خطي.

أوّلًا: أوجد (ق. م. أ) للعددين مستعملًا خوارزمية إقليدس.

اقسم العدد الأكبر ٥٢ على العدد الأصغر ٣٦، ثم اقسم المقسوم عليه على الباقي في كلّ مرّة حتى يصبح الباقي صفرًا.

فيكون الباقي الأخير غير الصفري ٤ هو (ق. م. أ) للعددين ٥٢، ٣٦ . وبيان ذلك أدناه:



في هذه الحالة، ٤ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين ٥٢، ٣٦

لكتابة ٤ في صورة تركيب خطي للعددين ٥٢، ٣٦، فإنه يتعيّن كتابته كما يأتي:

٤ = ٣٦س + ٥٢ص، حيث س، ص عددان صحيحان.

أوجد هذين العددين الصحيحين مستعملًا المحاولة والخطأ.

العددان الصحيحان هما: س = ٣، ص = −٢

لذا فالتركيب الخطي للقاسم المشترك الأكبر للعددين ٥٢، ٣٦ هو:

٤ = ٣٦(٣) + ٥٢(−٢)

اكتب القاسم المشترك الأكبر لكلّ عددين فيما يأتي في صورة تركيب خطي:

١) ١٦، ٦٤
١٦ = ١٦(١) + ٦٤(٠)

٢) ٢١، ٢٨
٧ = ٢١(١−) + ٢٨(١)

٣) ٢، ١٨
٢ = ٢(١) + ١٨(٠)

٤) ١٥، ٣٦
٣ = ١٥(٥) + ٣٦(٢)

٥) ٦، ٨
٢ = ٦(١−) + ٨(١)

٦) ١٨، ٤٢
٦ = ١٨(٢−) + ٤٢(١)

كتاب التمارين (١٢)　دون ضمن فوق

٧ - ٢ استعمال خاصية التوزيع

حلِّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

١) ٦٤ − ٤٠أب
٨(٨ − ٥أب)

٢) ٤ر² + ١٦
٤(ر² + ٤)

٣) ٦ ر ن − ٣ ر ن²
٣ ر ن(٢ − ن)

٤) ١٥أد + ٣٠أ²د
١٥أد(١ + ٢أ)

٥) ٣٢أ² + ٢٤أ²ب
٨أ²(٤أ + ٣ب)

٦) ٣٦ س ص² − ٤٨ س² ص
١٢ س ص(٣ ص − ٤ س)

٧) ٣٠ ص³ ص + ٣٥ س² ص²
٥ س² ص(٦ س + ٧ ص)

٨) ٩ أ²د² − ٦ أد
٣أد(٣أ² − ٢ د)

٩) ٧٥ ب² جـ² + ٦٠ ب جـ²
١٥ ب جـ²(٥ ب + ٤)

١٠) ٨ ل² ر² − ٢٤ ل ر² + ١٦ ل ر
٨ ل ر (ل ر − ٣ ر² + ٢)

١١) ٥ س² ص² + ١٠ س² ص + ٢٥ س
٥ س (س² ص² + ٢ س ص + ٥)

١٢) ٩ أس² + ١٨ ب س² + ٢٤ ب س
٣ س(٣أس² + ٦ ب س + ٨ جـ)

١٣) س² + ٤ س + ٢ س + ٨
(س + ٢)(س + ٤)

١٤) ٢أ² + ١٣أ ٦ أ + ٩
(أ + ٣)(٢أ + ٣)

١٥) ٤ ب² − ١٢ ب + ٢ ب − ٦
(٤ ب + ٢)(ب − ٣)

١٦) ٦ س ص − ٨ س + ١٥ ص − ٢٠
(٢ س + ٥)(٣ ص − ٤)

١٧) − ٦ م ل + ٤ م + ١٨ ل − ١٢
(− ٢ م + ٦)(٣ ل − ٢)

١٨) ١٢أ² − ١٥أب − ١٦أ + ٢٠ ب
(٣أ − ٤)(٤أ − ٥ ب)

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقّق من صحة الحل.

١٩) س(س − ٣٢) = ٠
٠، ٣٢

٢٠) ٤ ب(ب + ٤) = ٠
٠، −٤

٢١) (ص − ٣)(ص + ٢) = ٠
٣، −٢

٢٢) (أ + ٦)(٣أ − ٧) = ٠
−٦، $\frac{٧}{٣}$

٢٣) (٢ ص + ٥)(ص − ٤) = ٠
$-\frac{٥}{٢}$، ٤

٢٤) (٤ ص + ٨)(٣ ص − ٤) = ٠
−٢، $\frac{٤}{٣}$

٢٥) ٢ ع² + ٢٠ ع = ٠
٠، −١٠

٢٦) ٨ ل² − ٤ ل = ٠
٠، $\frac{١}{٢}$

٢٧) ٩ س² = ٢٧ س
٠، ٣

٢٨) ١٨ س² = ١٥ س
٠، $\frac{٥}{٦}$

٢٩) ١٤ س² = ٢١ س
٠، $\frac{٣}{٢}$

٣٠) ٨ س² = − ٢٦ س
٠، $-\frac{١٣}{٤}$

٣١) **علوم فيزيائية،** أطلق الطلاب في حصة العلوم لعبة على شكل صاروخ من مستوى الأرض إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ مترًا/ثانية. والمعادلة ع = ٢٠ ن − ٥ ن² تُمثّل ارتفاع الصاروخ (ع) فوق الأرض بعد (ن) ثانية. ما الزمن الذي استغرقه الصاروخ في الهواء قبل العودة إلى الأرض؟ ٤ ثانية

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الهدف: استعمال بطاقات الجبر لتمثيل تحليل ثلاثية حدود.

المواد اللازمة

- بطاقات الجبر
- لوحة الضرب

إرشادات للمعلم الجديد

ذكّر الطلاب بأن مساحة المستطيل تُمثّل كثيرة الحدود، وأن كلًّا من طول المستطيل وعرضه يُمثّلان عاملَي كثيرة الحدود.

٢ التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلاب مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم تنفيذ الأنشطة.

- اطلب إلى الطلاب تسمية الشكل الذي يجب تكوينه ببطاقات الجبر، والذي نستعمله في تحليل كثيرة الحدود. مستطيل
- في النشاط (١) ذكّر الطلاب بأبعاد القطع. فالقطعة $س^2$ لها العرض (س) والقطعة (س) لها العرض ١
- في النشاط (٢) شجّع الطلاب على تجربة عدة ترتيبات مختلفة حتى يكوّنوا مستطيلًا، مع التأكيد على أنه مع وجود البطاقة $س^2$ في الركن، توجد أكثر من طريقة صحيحة لترتيب البطاقات على شكل مستطيل.

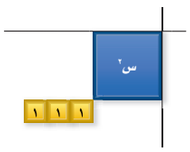
تحليل ثلاثية الحدود

يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحليل ثلاثية الحدود. فإذا مثّلت كثيرة الحدود مساحة مستطيل مُكوّن من بطاقات الجبر، فإن بعديه يمثّلان عاملين لكثيرة الحدود، أما إذا لم يكن بالإمكان تكوين مستطيل يمثّل ثلاثية الحدود، فإن ثلاثية الحدود تكون غير قابلة للتحليل.

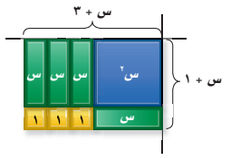
نشاط ١ تحليل العبارة: $س^2 + ب س + جـ$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^2 + ٤س + ٣$

الخطوة ١: مثّل $س^2 + ٤س + ٣$ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع البطاقة $س^2$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ كما في الشكل المجاور، لتكوّن مستطيلاً. بما أن ٣ عدد أولي، فإنه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمستطيل بطريقة واحدة، هي ١ في ٣.

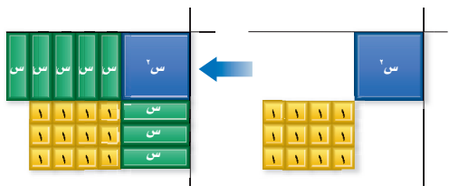


الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات س، فيكون بذلك عرض المستطيل س+ ١، وطوله س+ ٣
إذن: $س^2 + ٤س + ٣ = (س + ١)(س + ٣)$.

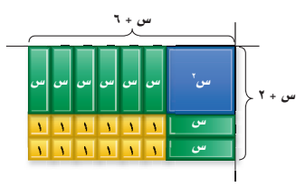
نشاط ٢ تحليل العبارة: $س^2 + ب س + جـ$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^2 + ٨س + ١٢$

الخطوة ١: مثّل $س^2 + ٨س + ١٢$ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^2$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ لتكوّن مستطيلاً. وبما أن $١٢ = ٣ \times ٤$، فحاول إنشاء مستطيل أبعاده ٣ وَ ٤، وحاول إكمال الشكل العام لمستطيل باستعمال بطاقات س، ثم لاحظ أن هناك بطاقات إضافية.



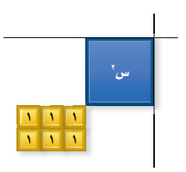
الخطوة ٣: رتّب بطاقات العدد ١ بمستطيل أبعاده ٢ وَ ٦ ثم أكمل المستطيل، وفي هذه الحالة تكون قد استعملت جميع بطاقات س لتكوين المستطيل. ويكون عرض المستطيل س+ ٢، وطوله س+ ٦
إذن $س^2 + ٨س + ١٢ = (س + ٢)(س + ٦)$.

نشاط ٣ **تحليل العبارة: $س^{٢}$ - ب س + جـ**

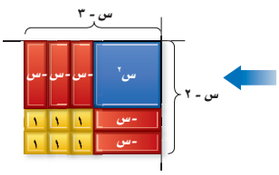
استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^{٢} - ٥س + ٦$

الخطوة ١: مثّل $س^{٢} - ٥س + ٦$

الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^{٢}$ في زاوية لوحة الضرب. ورتّب البطاقات ١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ٢ وَ ٣



الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات $-س$. فيكون بذلك عرضه $س - ٢$، وطوله $س - ٣$
إذن $س^{٢} - ٥س + ٦ = (س - ٢)(س - ٣)$



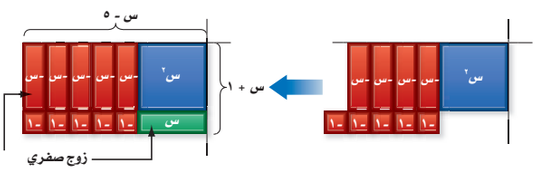
نشاط ٤ **تحليل العبارة: $س^{٢}$ - ب س - جـ**

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^{٢} - ٤س - ٥$.

الخطوة ١: مثل $س^{٢} - ٤س - ٥$

الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^{٢}$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد -١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ١ وَ ٥

الخطوة ٣: ضع البطاقات $-س$ كما في الشكل. وتذكّر أنه يمكنك إضافة أزواج صفرية دون تغيير قيمة كثيرة الحدود. وفي هذه الحالة، أضف زوجًا صفريًّا من البطاقات س، $-س$.
لذا فإن $س^{٢} - ٤س - ٥ = (س + ١)(س - ٥)$



التمثيل والتحليل:

٩) يمكن تحليل ثلاثية الحدود إذا أمكن تمثيلها بمستطيل. إجابات ممكنة: $س^{٢} + ٤س + ٤$ قابلة للتحليل، $س^{٢} + س + ٤$ غير قابلة للتحليل.

استعمل بطاقات الجبر لتحليل كل ثلاثية حدود فيما يأتي: ١-٤ انظر الهامش

١) $س^{٢} + ٣س + ٢$ ٢) $س^{٢} + ٦س + ٨$ ٣) $س^{٢} + ٣س - ٤$ ٤) $س^{٢} - ٧س + ١٢$

استعمل الرسم بمخطط لتبيّن إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي قابلة للتحليل أم لا : ٥-٨ انظر ملحق الإجابات

٥) $س^{٢} + ٣س + ٦$ ٦) $س^{٢} - ٥س - ٦$ ٧) $س^{٢} - ٤$ ٨) $س^{٢} - س - ٤$

٩) **اكتب** كيف يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحدد إذا كانت ثلاثية حدود قابلة للتحليل؟

- أثناء تنفيذهم النشاط (٣)، ذكّر الطلاب بالانتباه إلى الإشارة التي تحملها كل بطاقة من بطاقات الجبر.
- ذكّر الطلاب أثناء تنفيذهم النشاط (٤)، بإمكانية إضافة زوج صفري س ، $-س$

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة ١-٩

٣ التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال ٤؛ لتقويم مدى فهم الطلاب طريقة تحليل ثلاثية حدود باستعمال بطاقات الجبر.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلاب بعد حلّهم الأسئلة ١-٤، إذا كانوا قد لاحظوا العلاقة بين الحاجة إلى استعمال الأزواج الصفرية لتحليل ثلاثية الحدود، وبين إشارات العوامل الناتجة. إجابة ممكنة: تكون إشارات الحدود الثابتة للعوامل متعاكسة عند استعمال الأزواج الصفرية، ومتماثلة عند عدم استعمال الأزواج الصفرية.

التوسُّع في المفهوم

اسأل الطلاب عمّا لاحظوه عن مجموع الحدين الثابتين في عاملَي ثلاثيات الحدود في الأسئلة ١-٤. إجابة ممكنة: مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط في ثلاثية الحدود.

إجابات:

١) $(س + ١)(س + ٢)$
٢) $(س + ٢)(س + ٤)$
٣) $(س - ١)(س + ٤)$
٤) $(س - ٣)(س - ٤)$

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٧- ٣

ضرب ثنائيات الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

الدرس ٧-٣

- تحليل ثلاثية حدود في الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$.
- حل معادلات في الصورة $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$.

ما بعد الدرس ٧ - ٣

تحليل ثلاثية حدود إلى ثنائيتي حد.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا"؟ .

ثمَّ اسأل:

- عند إيجاد بعدي سطح البركة، لماذا تحتاج إلى إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦؟ سطح البركة هو مستطيل، والمساحة تساوي الطول × العرض، وبما أن مساحة البركة هي ٣٦ م^{٢}، إذن الطول والعرض يجب أن يكونا عددين حاصل ضربهما ٣٦
- ما العددان الصحيحان اللَّذان حاصل ضربهما ٣٦؟ ١ وَ ٣٦، ٢ وَ ١٨، ٣ وَ ١٢، ٤ وَ ٩؛ ٦ وَ ٦
- أيُّ زوج منهما مجموعه ١٢؟ ٦ وَ ٦
- ما بُعدا البركة؟ ٦ م، ٦ م

المعادلات التربيعية: $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

فيما سبق

درستُ ضرب ثنائيات الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

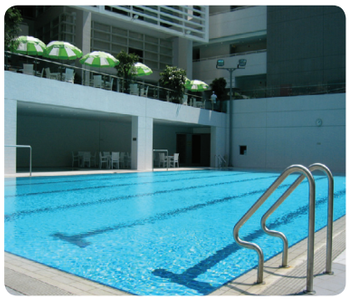
- أحلّل ثلاثية حدود على الصورة: $س^{٢} + ب س + جـ$.
- أحلّ المعادلات على الصورة: $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

المفردات

المعادلة التربيعية

obeikaneducation.com

لماذا؟



بركة سباحة سطحها مستطيل الشكل، يُراد وضع سياج حولها طوله ٢٤ م. إذا كانت مساحة سطح البركة ٣٦ م^{٢}، فما بعداها؟

لحل هذه المسألة يجب إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦ وَمجموعهما يساوي ١٢ (نصف محيط البركة).

تحليل $س^{٢} + ب س + جـ$: تعلمت كيف تضرب ثنائيتي حدّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، على أن تكون كل ثنائية حد منهما عاملاً لناتج الضرب. ويمكن استعمال نمط ضرب ثنائيتي الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود.

$(س + ٣)(س + ٤) = س^{٢} + ٤س + ٣س + ٣ \times ٤$ طريقة التوزيع بالترتيب

$= س^{٢} + (٤ + ٣)س + ٣ \times ٤$ خاصية التوزيع

$= س^{٢} + ٧س + ١٢$ بسّط.

لاحظ أن معامل الحدّ الأوسط ٧ هو مجموع العددين ٣ و٤، والحد الأخير ١٢ هو ناتج ضربهما.

لاحظ القاعدة الآتية في الضرب:

$(س + ٣)(س + ٤) = س^{٢} + (٤ + ٣)س + ٣ \times ٤$

$(س + م)(س + ن) = س^{٢} + (ن + م)س + م ن$ لتكن ٣ = م، ٤ = ن

$= س^{٢} + (م + ن)س + م ن$ الإبدال (+)

$س^{٢} + ب س + جـ$ ب = م + ن، جـ = م ن

لاحظ أن معامل الحد الأوسط هو مجموع م وَ ن، والحدّ الأخير هو ناتج ضربهما.

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$.

مفهوم أساسي — تحليل $س^{٢} + ب س + جـ$ — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب، وناتج ضربهما جـ، ثم اكتب $س^{٢} + ب س + جـ$ على الصورة $(س + م)(س + ن)$.

الرموز: $س^{٢} + ب س + جـ = (س + م)(س + ن)$، حيث م + ن = ب، م ن = جـ

مثال: $س^{٢} + ٦س + ٨ = (س + ٢)(س + ٤)$. لأن ٢ + ٤ = ٦، ٢ × ٤ = ٨

يكون لعاملي جـ الإشارة نفسها عندما تكون موجبة. ويعتمد كون العاملين موجبين أو سالبين على إشارة ب. فإذا كانت ب موجبة فالعاملان موجبان، وإذا كانت سالبة فالعاملان سالبان.

مصادر الدرس ٧ - ٣

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٦٥)	• تنويع التعليم ص (٦٥، ٦٧)	• تنويع التعليم ص (٦٧)
كتاب التمارين	ص (١٣)	ص (١٣)	ص (١٣)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) • تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦) • التدريبات الإثرائية، ص (١٧)

مثال ١ تحليل $س^{٢}$ + ب س + جـ عندما يكون ب، جـ موجبين

حلّل : $س^{٢}$ + ٩س + ٢٠.

بما أن جـ، ب موجبان في ثلاثية الحدود، ب = ٩، جـ = ٢٠. لذا يجب إيجاد عاملين موجبين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠. كوّن قائمة عوامل العدد ٢٠، و أوجد العاملين اللذين مجموعهما ٩.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
١، ٢٠	٢١
٢، ١٠	١٢
٤، ٥	٩

العاملان الصحيحان هما ٤، ٥

$س^{٢}$ + ٩س + ٢٠ = (س + م)(س + ن)

اكتب القاعدة

= (س + ٤)(س + ٥)

م = ٤، ن = ٥

تحقق: يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين لتحصل على العبارة الأصلية.

(س + ٤)(س + ٥) = $س^{٢}$ + ٥س + ٤س + ٢٠ — طريقة التوزيع بالترتيب

= $س^{٢}$ + ٩س + ٢٠ ✓ — بسّط.

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١أ) $د^{٢}$ + ١١د + ٢٤ (د + ٣)(د + ٨)

١ب) ٩ + ١٠ن + $ن^{٢}$ (ن + ٩)(ن + ١)

إذا كانت ب سالبة، وجـ موجبة في ثلاثية الحدود، استعمل ما تعرفه عن ضرب ثنائيتي الحد؛ لتقليص قائمة العوامل الممكنة.

مثال ٢ تحليل $س^{٢}$ + ب س + جـ عندما تكون ب سالبة، جـ موجبة

حلّل: $س^{٢}$ − ٨س + ١٢

بما أن جـ موجبة، و ب سالبة في ثلاثية الحدود ، ب = −٨، جـ = ١٢ لذا يجب إيجاد عاملين سالبين مجموعها −٨ وحاصل ضربهما ١٢

عوامل العدد ١٢	مجموع العاملين
−١، −١٢	−١٣
−٢، −٦	−٨
−٣، −٤	−٧

العاملان الصحيحان هما −٢، −٦

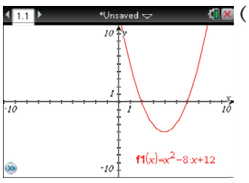
$س^{٢}$ − ٨س + ١٢ = (س + م)(س + ن)

اكتب القاعدة

= (س − ٢)(س − ٦)

م = −٢، ن = −٦

تحقق: مثّل المعادلتين: ص = $س^{٢}$ − ٨س + ١٢، ص = (س − ٢)(س − ٦) بيانيًّا على الشاشة نفسها. بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُللت بصورة صحيحة. ✓



تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

٢أ) ٢١ − ٢٢م + $م^{٢}$ (م − ١)(م − ٢١)

٢ب) و^{٢} − ١١و + ٢٨ (و − ٧)(و − ٤)

إرشادات لحل المسألة

خمّن وتحقق

عند تحليل ثلاثية حدود، اعمل تخمينًا مدروسًا، وتحقق من المعقولية، ثم عدّل التخمين حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

إرشادات للدراسة

إيجاد العوامل

عندما تجد العوامل الصحيحة فليس هناك ضرورة لاختبار العوامل الأخرى. فمثلاً، العاملان الصحيحان في المثال٢ هما: −٢ وَ −٦، لذا فلا داعي لاختبار العاملين: −٣ وَ −٤

تحليل العبارة: $س^{٢}$ + ب س + جـ

الأمثلة ١ - ٣ تُبيّن طريقة تحليل ثلاثية حدود على الصورة: $س^{٢}$ + ب س + جـ، عندما تكون إشارتا ب، جـ موجبتين، وعندما تكون إشارة (ب) سالبة، وإشارة (جـ) موجبة أو سالبة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ حلّل: $س^{٢}$ + ٧س + ١٢

(س+٣) (س+٤)

٢ حلّل: $س^{٢}$ − ١٢س + ٢٧

(س−٣) (س−٩)

تنبيه!

تجنُّب الأخطاء: إذا استعمل الطلاب الحاسبة البيانية للتحقّق من تحليلهم، فتأكّد من أنهم قد حذفوا الدوال جميعها بالضغط على المفاتيح

on 1 New Document

وحذفوا الرسومات جميعها من قائمة الرسم. وجِّه الطلاب إلى أنه بينما قد يبدو تمثيلان متطابقان على الشاشة القياسية للآلة، إلَّا أنهما قد لا يكونان كذلك؛ لذا اقترح عليهم استعمال ميزة TABLE للتحقّق من تساوي قيم (ص).

إرشادات للمعلم الجديد

الحاسبات: اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا الشاشة نفسها؛ للتمثيل البياني للمعادلة الأولى والثانية.

تنويع التعليم:

دون ضمن

إذا بدا مفهوم تحليل ثلاثية الحدود مجرّدًا إلى حدٍّ ما لبعض الطلاب،

فقم بتزويدهم بأمثلة محسوسة كلما قدمت مفهومًا مجرّدًا، وبعد تقديم تحليل ثلاثية الحدود، اطلب إلى الطلاب الرجوع إلى مسألة التقديم للدرس، ووصف أي تشابه لاحظوه بين إيجاد بُعدي البركة وبين تحليل ثلاثية الحدود، وقد يستفيد بعض الطلاب من نمذجة بعض المسائل باستعمال بطاقات الجبر، واستعمال هذه الطريقة بعد ذلك لحل المعادلات التربيعية.

عندما تكون جـ سالبة، يكون لعامليها إشارتان مختلفتان. ولتحدد أي عامل منهما موجب وأيهما سالب، انظر إلى إشارة ب؛ فالعامل الذي له القيمة المطلقة الكبرى له إشارة ب نفسها.

مراجعة المفردات

القيمة المطلقة
تمثل القيمة المطلقة للعدد ن المسافة بين العدد والصفر على خط الأعداد. وتُكتب على الصورة | ن |.

مثال ٣ تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما تكون جـ سالبة

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

أ) س^{٢} + ٢س − ١٥

في ثلاثية الحدود هذه ب = ٢، جـ = −١٥ وبما أن جـ سالبة. فإن م وَ ن عددان مختلفان في الإشارة. وبما أن ب موجبة، فالعامل الذي قيمته المطلقة أكبر يكون موجبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل العدد −١٥، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما ٢.

عوامل العدد −١٥	مجموع العاملين
−١، ١٥	١٤
−٣، ٥	٢

العاملان الصحيحان هما −٣، ٥

س^{٢} + ٢س − ١٥ = (س + م)(س + ن) — اكتب القاعدة

= (س − ٣)(س + ٥) — م = −٣، ن = ٥

تحقق: (س − ٣) (س + ٥) = س^{٢} + ٥س − ٣س − ١٥ — طريقة التوزيع بالترتيب

= س^{٢} + ٢س − ١٥ ✓ — بسّط

ب) س^{٢} − ٧س − ١٨

في ثلاثية الحدود هذه ب = −٧، جـ = −١٨ . ، إذن م أو ن سالبة، وليس كلاهما. وبما أن ب سالبة، فالعامل ذو القيمة المطلقة الكبرى يكون سالبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل −١٨، على أن يكون أحد العاملين في كلّ زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما −٧.

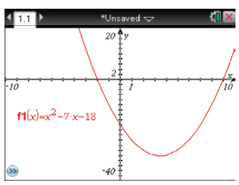
عوامل العدد −١٨	مجموع العاملين
١، −١٨	−١٧
٢، −٩	−٧
−٦، +٣	−٣

العاملان الصحيحان هما ٢، −٩

س^{٢} − ٧س − ١٨ = (س + م)(س + ن) — اكتب القاعدة

= (س + ٢)(س − ٩) — م = ٢، ن = −٩

تحقق: مثّل المعادلتين ص = س^{٢} − ٧س − ١٨ ،
ص = (س + ٢) (س − ٩) بيانيًّا على الشاشة نفسها،
بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُلّلت بصورة صحيحة. ✓



تحقق من فهمك

٣أ) ص^{٢} + ١٣ص − ٤٨ **٣ب)** ر^{٢} − ٢ ر − ٢٤

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكن كتابة **المعادلات التربيعية** على الصورة القياسية:
أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠ ويمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري

مثال إضافي

٣ **حلّل كثيرتي الحدود الآتيتين:**

أ) س^{٢} + ٣س − ١٨
(س + ٦) (س − ٣)

ب) س^{٢} − س − ٢٠
(س − ٥) (س + ٤)

المحتوى الرياضي

تحليل ثلاثيات الحدود: يكون تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: س^{٢} + ب س + جـ إلى عاملي ثنائيات حدٍّ ممكنًا، إذا كان عاملا جـ ، م، ن عددين صحيحين وَيحققان العلاقتين: م + ن = ب، م ن = جـ ، وإلّا فإن التحليل غير ممكن.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة في المدونة الخاصة بالفصل أو مدوناتهم الشخصية، يلخّصون فيها طريقة حل معادلات ذات خطوة واحدة، وتأكد من استعمال الطلاب فكرة العمليات العكسية في شروحاتهم.

إجابات إضافية

٣أ) (ص − ٣) (ص + ١٦)
٣ب) (ر + ٤) (ر − ٦)

مثال ٤ حل المعادلة بالتحليل

حل المعادلة: $س^{٢} + ٦س = ٢٧$، وتحقَّق من صحة الحل.

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} + ٦س - ٢٧ = ٠$	اطرح ٢٧ من كلا الطرفين
$(س - ٣)(س + ٩) = ٠$	حلِّل إلى العوامل
$س - ٣ = ٠$ أو $س + ٩ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$س = ٣$ $\quad س = -٩$	حل كل معادلة

تحقق: عوّض عن س بكل من ٣، −٩ في المعادلة الأصلية.

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$	$س^{٢} + ٦س = ٢٧$
$(٣)^{٢} + ٦(٣) \stackrel{؟}{=} ٢٧$	$(-٩)^{٢} + ٦(-٩) \stackrel{؟}{=} ٢٧$
$٩ + ١٨ = ٢٧$ ✓	$٨١ - ٥٤ = ٢٧$ ✓

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤أ) $ع^{٢} - ٣ع = ٧٠$ $\quad -٧، ١٠$

٤ب) $س^{٢} + ٣س - ١٨ = ٠$ $\quad ٣، -٦$

مثال ٥ من واقع الحياة حل المسألة بالتحليل

تصميم: يصمّم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة عن عرضها بِـ ٢ بوصة. وَمساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربّعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطّط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض × الطول

حلّ: بما أن ض = عرض اللوحة. فيكون طول اللوحة = ض + ٤ + ٢ = ض + ٦

$ض(ض + ٦) = ٦١٦$	اكتب المعادلة
$ض^{٢} + ٦ض = ٦١٦$	اضرب.
$ض^{٢} + ٦ض - ٦١٦ = ٠$	اطرح ٦١٦ من كل طرف.
$(ض + ٢٨)(ض - ٢٢) = ٠$	حلل
$ض + ٢٨ = ٠$ أو $ض - ٢٢ = ٠$	خاصية الضّرب الصفري
$ض = -٢٨$ $\quad ض = ٢٢$	حل كل معادلة

بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة.

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المساحة = ٢٢(٢٢ + ٦) = ٦١٦ بوصة مربعة، وهي مساحة اللوحة المطلوبة. ✓

تحقق من فهمك

٥) هندسة: متوازي أضلاع ارتفاعه أقل من قاعدته بِـ ١٨ سم، ومساحته ١٧٥ سم^{٢}. فما ارتفاعه؟ ٧سم

الربط مع الحياة

تُصمَّم بعض اللوحات الإعلانية لاستخدامها مرة واحدة لمناسبة معينة، وإن كان الغرض من اللوحة الاستخدام لفترة طويلة، فيجب مراعاة المواد المصنوعة منها لتقاوم عوامل الجو.

حل المعادلات بالتحليل

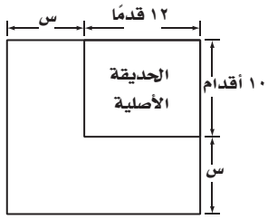
مثال ٤ يُبيّن طريقة حل معادلة في الصورة $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ بالتحليل

المثال ٥ يُبيّن طريقة حل مسالة من واقع الحياة بالتحليل.

مثالان إضافيان

٤ حُلّ المعادلة: $س^{٢} + ٢ س = ١٥$، وتحقّق من صحة الحل. $-٥، ٣$

٥ **حديقة:** يريد مروان توسيع حديقة منزله، بحيث تصبح مساحتها ثلاثة أمثال مساحة الحديقة الحالية، وذلك بزيادة الطول والعرض بالمقدار نفسه. فما بعدا الحديقة بعد التوسيع؟



بعدا الحديقة بعد التوسيع
١٨ قدمًا ، ٢٠ قدمًا

تنبيه!

أخطاء شائعة: عند إعادة كتابة المعادلة، غالبًا ما يكون بعض الطلاب غير حريصين على جعل أحد طرفيها صفرًا؛ لذا ذكّرهم بأنه عليهم القيام بذلك من خلال تطبيق حقائق المساواة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اكتب ثلاثيتَي الحدود: $س^{٢} + س - ٦$، $س^{٢} - س - ٦$ على السبورة، واطلب إلى الطلاب مقارنة ثلاثيتي الحدود قبل التحليل وبعده. ثلاثيتا الحدود مثمائلتان باستثناء إشارة الحد الأوسط، فهما متعاكستان، وتحليل $س^{٢} + س - ٦ = (س+٣)(س-٢)$ ، بينما تحليل $س^{٢} - س - ٦ = (س-٣)(س+٢)$.

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١–١١؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية: في الأسئلة ١–٤ قد يحتاج الطلاب إلى تذكيرهم بعدم أهمية ترتيب العاملين؛ أي أن كلًّا من: (س+م) (س+ن)، (س+ن) (س+م) صحيح.

تنبيه لحل سؤال

السؤال ٢٤ يتطلّب معرفة قانون مساحة المثلث م $= \frac{1}{2}$ ق ع

تأكد

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١) $س^2 + ١٤س + ٢٤$ (س+٢) (س+١٢)

٢) $ص^2 - ٧ص - ٣٠$ (ص – ١٠) (ص+٣)

٣) $ن^2 + ٤ن - ٢١$ (ن+٧) (ن–٣)

٤) $م^2 - ١٥م + ٥٠$ (م – ٥) (م – ١٠)

مثال ٤ حُلَّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٥) $س^2 - ٤س - ٢١ = ٠$

٦) $ن^2 - ٣ن + ٢ = ٠$

٧) $س^2 - ١٥س + ٥٤ = ٠$

٨) $س^2 + ١٢س = -٣٢$

٩) $س^2 - س - ٧٢ = ٠$

١٠) $س^2 - ١٠س = -٢٤$

مثال ٥

١١) **إطار صورة:** اشترت لطيفة إطارًا لصورة، إلا أن الصورة كانت أكبر من الإطار، لذا فإنها بحاجة إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه، على أن تصبح مساحتها نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بُعدا الصورة الأصلية ١٢، ١٦ سم. فما بُعدا الصورة المصغَّرة؟ ٨ سم، ١٢ سم.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١٢) $س^2 + ١٧س + ٤٢$

١٣) $ص^2 - ١٧ص + ٧٢$

١٤) $أ^2 + ٨أ - ٤٨$

١٥) $ن^2 - ٢ن - ٣٥$

١٦) $٤٤ + ١٥هـ + هـ^2$

١٧) $٤٠ - ٢٢س + س^2$

مثال ٤ حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٨) $س^2 - ٧س + ١٢ = ٠$ ٤، ٣

١٩) $ص^2 + ٢٠ = ٩ص$ ٤، ٥

٢٠) $س^2 - ٦س = ٢٧$ ٩، ٣–

٢١) $جـ^2 + ١٠جـ + ٩ = ٠$

٢٢) $ن^2 - ١٢٠ = ٧ن$

٢٣) $هـ^2 + ٤٨ = ١٦هـ$ ٤، ١٢

مثال ٥

٢٤) **هندسة:** مساحة مثلث ٣٦سم^2، ويزيد ارتفاعه ٦سم على طول قاعدته. فما ارتفاعه؟ وما طول قاعدته؟

٢٥) **هندسة:** تمثّل العبارة ($س^2 - ٤س - ١٢$) سم^2 مساحة مستطيل طوله (س+٢) سم. فما عرضه؟ (س–٦) سم

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

٢٦) $ك^2 + ١١ك ر + ١٨ر^2$

٢٧) $س^2 - ٦س ص + ٥ص^2$

٢٨) $أ^2 + ١٠أب - ٣٩ب^2$

٢٩) **سباحة:** يزيد طول حوض سباحة دولي مستطيل الشكل ٢٩ مترًا عن عرضه، ومساحة سطحه ١٠٥٠ م^2.

أ) عرّف متغيرًا، واكتب معادلة تمثل مساحة سطحه. إجابة ممكنة: ليكن ض = العرض، ض (ض+٢٩) = ١٠٥٠

ب) حل المعادلة. ٢١، ٥٠–

جـ) فسّر الإجابتين، وهل هناك معنى لكلٍّ منهما؟

٣٠) **هندسة:** اكتب عبارة تمثّل محيط المستطيل الذي مساحته م = $س^2 + ١٣س - ٩٠$. ٤س+٢٦

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٢ – ٢٥ ، ٣٣ ، ٣٨ – ٤٢
ضمن ضمن المتوسط	١٢ – ٢٧ ، ٢٩ ، ٣١ – ٣٣ ، ٣٨ – ٤٢
فوق فوق المتوسط	٢٦ – ٤٢

٣١) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال، طريقة التحليل عندما لا يساوي المعامل الرئيس ١

أ) جدوليًا: انقل الجدول الآتي، ثمّ أكمله:

ضرب ثنائيتي حد	أ س^{٢} + م س + ن س + جـ	أ س^{٢} + ب س + جـ	م × ن	أ × جـ
(٢ س+٣) (س+٤)	٢س^{٢}+٨س+٣س+١٢	٢س^{٢}+١١س+١٢	٢٤	٢٤
(س+١) (٣س+٥)	٣س^{٢}+٥س+٣س+٥	٣س^{٢}+٨س+٥	١٥	١٥
(٢س-١) (٤س+١)	٨س^{٢}+٢س-٤س-١	٨س^{٢}-٢س-١	-٨	-٨
(٣س+٥) (٤س-٢)	١٢س^{٢}-٦س+٢٠س-١٠	١٢س^{٢}+١٤س-١٠	-١٢٠	-١٢٠

ب) تحليليًا: كيف يرتبط العددان م، ن بالعددين أ، جـ؟ م ن = أ جـ

جـ) تحليليًا: كيف يرتبط العددان م، ن بالعدد ب؟ م + ن = ب

د) لفظيًا: صف إجراءً يمكن استعماله لتحليل كثيرة حدود على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ .

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٢) **اكتشف الخطأ:** حلّل كلٌّ من خليل وماجد العبارة: س^{٢} + ٦ س − ١٦ . فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

ماجد

س^{٢} + ٦س − ١٦ = (س + ٢) (س − ٨)

خليل

س^{٢} + ٦س − ١٦ = (س − ٢) (س + ٨)

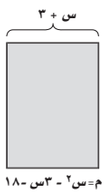
تحد: أوجد جميع قيم هـ التي تجعل كل كثيرة حدود في كلّ مما يأتي قابلة للتحليل باستعمال الأعداد الصحيحة:

٣٣) س^{٢} + هـ س − ١٩ ٣٤) س^{٢} + هـ س + ١٤ ٣٥) س^{٢} − ٨ س + هـ ، هـ > ٠

٣٦) **تحدّ:** حلّل العبارة: (٤ص − ٥)^{٢} + ٣ (٤ص − ٥) − ٧٠.

تدريب على اختبار

٣٧) **هندسة:** ما العبارة التي تمثّل طول المستطيل في الشكل المجاور؟ جـ



أ) س + ٥ جـ) س − ٦

ب) س + ٦ د) س − ٥

٣٨) إذا كان الفرق بين ٢١ والعدد ن هو ٦، فما المعادلة التي تبين هذه العلاقة؟ أ

أ) ٢١ − ن = ٦ جـ) ٢١ + ن = ٦

ب) ٢١ن = ٦ د) ٦ن = −٢١

مراجعة تراكمية

٣٩) ٢م ل (م^{٢} ل − ٨ ل + ٤)

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي: (الدرس ٧-٢)

٣٩) ٢م^{٣}ل^{٢} − ١٦م ل^{٢} + ٨ م ل ٤٠) ٢أ س + ٦س جـ + ب أ + ٣ب جـ (٢س + ب) (أ + ٣جـ)

٤١) س^{٢} − س ص − س ص + ص^{٢} (س − ص) (س − ص)

٤٢) **تبليط:** يريد خالد تبليط غرفة معيشة بُعداها ٤٢٠ سم ، ٣٣٠ سم، ولديه قطع بلاط أبعادها ٢٠ سم ، ٢٠ سم ؛ ٣٠ سم ، ٣٠ سم ؛ ٢٠ سم ، ١٥ سم ؛ ٢٢ سم ، ٣٠ سم. فأيّ الأنواع يمكنه استعمالها دون قص أي قطعة؟ فسّر إجابتك. (الدرس ٧-١) انظر الهامش

٣١د) ابحث عن عددين صحيحين م، ن، على أن يكون م ن = أ جـ ، م + ن = ب.

٣٢) خليل؛ عند ضرب العاملين اللذين يشكّلان إجابة ماجد يكون الناتج س^{٢} − ٦س − ١٦، إلا أن الحد الأوسط يجب أن يكون موجبًا.

٣٣) −١٨، ١٨

٣٤) −١٥، −٩، ٩، ١٥

٣٥) ٧، ١٢، ١٥، ١٦

٣٦) (٤ص − ٥)^{٢} + ٣ = (٤ص − ٥) − ٧٠ = [(٤ص − ٥) + ١٠] = [(٤ص − ٥) − ٧] = (٤ص + ٥) (٤ص − ١٢) = ٤ (٤ ص + ٥) (ص − ٣)

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ٣١، يستعمل الطلاب المعلومات المنظّمة في جدول والجبر؛ لتحليل كثيرات الحدود.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال ٣٢ ذكّر الطلاب بأنه يمكنهم التحقّق من صحة العوامل من خلال ضربها؛ للحصول على كثيرة الحدود الأصلية.

٤ التقويم

تعلم لاحق: أخبر الطلاب أنهم سيدرسون في الدرس القادم المعادلات التربيعية على الصورة : أس^{٢} + ب س + جـ = صفر، واطلب إليهم كتابة الربط بين ما تعلموه في هذا الدرس بالدرس اللاحق من خلال تصوُّرهم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (٧-٣) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٢)، ص (٣٠)

اختبر مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في النصف الأول من الفصل بإعطائهم:

اختبار منتصف الفصل، ص (٣٢)

إجابة:

٤٢) ٣٠سم، ٣٠سم؛ ٢٠سم، ١٥سم؛ ٢٢سم، ٣٠سم. ما عدا النوع الأول فإنه لا يمكن استعماله من دون قصٍّ.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٧ - ٣

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٤)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٣ تدريبات إعادة التعليم

المعادلات التربيعية: س^{٢} + ب س + جـ = ٠

تحليل س^{٢} + ب س + جـ، لتحليل ثلاثية الحدود في الصورة س^{٢} + ب س + جـ أوجد عددين صحيحين م، ن بحيث يكون مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط (ب)، وناتج ضربهما الحد الثابت (جـ).

تحليل س^{٢} + ب س + جـ = س^{٢} + ب س + جـ = (س + م)(س + ن)، حيث م + ن = ب، م ن = جـ

مثال ١ حلّل كلّ كثيرة حدود مما يأتي:

أ) س^{٢} + ٨س + ١٠

ب = ٧، جـ = ١٠ في ثلاثية الحدود هذه.

عوامل ١٠	مجموع العوامل
١، ١٠	١١
٢، ٥	٧

بما أنّ ٢ + ٥ = ٧ × ١ = ٧، ١٠ = ٢ × ٥، افرض أنّ م = ٢، ن = ٥،
لذا س^{٢} + ٧س + ١٠ = (س + ٥)(س + ٢)

ب) س^{٢} − ٨س + ٧

في ثلاثية الحدود هذه ب = −٨، جـ = ٧.

لاحظ أنّ م + ن سالبة، م ن موجب. لذا فإن م، ن كلاهما سالب.

بما أنّ −٧ + (−١) = −٨، (−٧)(−١) = ٧، م + ن = −٧، م ن = ٧.

إذن س^{٢} − ٨س + ٧ = (س − ٧)(س − ١)

مثال ٢ حلّل س^{٢} + ٦س − ١٦.

في ثلاثية الحدود هذه ب = ٦، جـ = −١٦.

وهذا يعني أنّ م + ن موجب، م ن سالب.

كوّن قائمة عوامل العدد −١٦، بحيث يكون أحد العاملين موجبًا في كلّ حالة.

عوامل −١٦	مجموع العاملين
١، −١٦	−١٥
−١، ١٦	١٥
٢، −٨	−٦
−٢، ٨	٦

من الجدول أعلاه نكون م = −٢، ن = ٨

س^{٢} + ٦س − ١٦ = (س − ٢)(س + ٨)

تمارين

حلّل كلّ كثيرة حدود مما يأتي:

١) س^{٢} + ٤س + ٣　(س + ٣)(س + ١)
٢) م^{٢} + ١٢م + ٣٢　(م + ٤)(م + ٨)
٣) ر^{٢} − ٣ر + ٢　(ر − ٢)(ر − ١)
٤) س^{٢} − س − ٦　(س − ٣)(س + ٢)
٥) س^{٢} − ٢٢س + ١٢١　(س − ١١)(س − ١١)
٦) ت^{٢} − ٤ت − ١٢　(ت + ٢)(ت − ٦)
٧) ل^{٢} − ١٦ل + ٦٤　(ل − ٨)(ل − ٨)
٨) ٩ − ١٠ص + ص^{٢}　(٩ − ص)(١ − ص)
٩) ص^{٢} + ٦ ص + ٥　(ص + ٥)(ص + ١)
١٠) أ^{٢} + ٨أ − ٩　(أ + ٩)(أ − ١)
١١) ص^{٢} − ٢ص − ٣　(ص − ٣)(ص + ١)
١٢) ص^{٢} + ٤ص + ١٣　(ص + ٢)(ص + ٢)
١٣) م^{٢} + ٩م + ٢٠　(م + ٤)(م + ٥)
١٤) أ^{٢} − ١٤أ + ٢٤　(أ − ٢)(أ − ١٢)
١٥) ١٨ + ١١ص + ص^{٢}　(٩ + ص)(٢ + ص)
١٦) س^{٢} + ٢ص ص + ص^{٢}　(س + ص)(س + ص)
١٧) أ^{٢} − ٤أب + ٤ ب^{٢}　(أ − ٢ب)(أ − ٢ب)
١٨) س^{٢} + ٦ س ص − ٧ص^{٢}　(س + ٧ص)(س − ص)

تدريبات حل المسألة (١٦)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٣ تدريبات حل المسألة

المعادلات التربيعية: س^{٢} + ب س + جـ = ٠

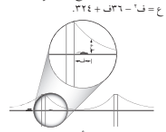
١) **علب هدايا**، طول علبة هدايا يزيد ٢ سم على عرضها، ومساحة الغطاء الأمامي ١٦٨ سم^{٢}. أوجد طول العلبة؟
إنّ أوّل خطوتين لإيجاد طول العلبة (قيمة س) هي الموضحة أدناه. حلّ المعادلة، ثم أوجد طول العلبة.

الطول × العرض = المساحة
س(س + ٢) = ١٦٨
س^{٢} + ٢س − ١٦٨ = ٠
−١٤ أو ١٢: **١٢ سم**

٢) **ألعاب رياضية**، يلعب سلطان ونايف لعبة تخمين عدد. أعطى نايف لسلطان التلميح الآتي حول عددين مجهولين: "ناتج ضرب العددين الصحيحين الموجبين المتتاليين اللذين أفكر بهما يزيد ١١ على مجموعهما." فما العددان؟

٥، ٤

٣) **هندسة جسور**، يقود سائق سيارته على جسر معلّق، مقوّى بحزمة أسلاك مربوطة بين دعامتين في نهايتي الجسر كما في الشكل أدناه. وبما أنّ هذه الحزمة على شكل قطع مكافئ، فيمكن تمثيلها بمعادلة تربيعية. صيغة ارتفاع حزمة الأسلاك ع (بوصة) فوق موقع على الجسر يبعد مسافة ف (بالردة) عن البرج الأول هي:
ع = ف^{٢} − ٣٦ف + ٣٢٤.



إذا كان ارتفاع حزمة الأسلاك فوق سائق السيارة في الخطة ما هو ٤٩ بوصة، فما المسافة بينه وبين البرج التي يكون عندها ذلك؟

عند ١١، ٢٥ بالردة من البرج الأول.

٤) **فيزياء**، تعتمد درجة غليان الماء على الارتفاع (ع) فوق مستوى سطح البحر.
وعلى الارتفاع (ع) فوق مستوى سطح البحر:
د^{٢} + ٥٢٠ د = ع
أوجد درجة غليان الماء التقريبية في موقع على ارتفاع ٥٣٠٠ قدم فوق مستوى سطح البحر.
د = ١٠: هبوط؛
درجة غليان الماء في الموقع ٢٠٢° ف تقريبًا.

٥) **معالم تذكارية**، يصمّم عاصم مُعلّمًا تذكاريًا على شكل هرم رباعي قائم في متنزّه. يتطلّب التصميم أن يكون ارتفاع الهرم ٩ أقدام، وعرض قاعدته أصغر من طولها بـ ٥ أقدام، وحجمه ١٥٠ قدمًا مكعبًا. تذكّر أنّ صيغة حجم الهرم هي:
ح = $\frac{١}{٣}$ ل ع ض، حيث ق مساحة القاعدة، ع الارتفاع.

أ) اكتب معادلة لإيجاد عرض قاعدة الهرم، ثم حلّها.
١٥٠ = $\frac{١}{٣}$ س(س + ٥) × ٩ أو
٣س^{٢} + ١٥س − ١٥٠ = ٠؛
مجموعة الحل: {٥، −١٠}؛
اختر س = ٥ فقط (البعد موجب)

ب) فسّر كلّ قيمة لـ س وفق الحالة الراهنة.
س = ٥: عرض الهرم ٥ أقدام؛ س = −١٠، لا يمكن أن يكون العرض سالبًا.

التدريبات الإثرائية (١٧)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٣ التدريبات الإثرائية

أحجية أعداد أولية

للعدد الأوّلي فقط عاملان مختلفان هما العدد نفسه والعدد ١. العدد ٦ ليس أوّليًا؛ لأن له أكثر من عاملين. ٢، ٣ من عوامل ٦.

العددان ٥، ٧ أوّليّان. العدد ١ ليس أوّليًا.

١) أوجد ٢٥ عددًا أوّليًا، كلٌّ منها أصغر من ١٠٠ مستعينًا بالآلة الحاسبة.
٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٣، ٢٩، ٣١، ٣٧، ٤١، ٤٣، ٤٧، ٥٣، ٥٩، ٦١، ٦٧، ٧١، ٧٣، ٧٩، ٨٣، ٨٩، ٩٧

كانت الأعداد الأولية من اهتمامات علماء الرياضيات لعدة قرون، وقد حاولوا إيجاد عبارات للحصول على جميع الأعداد الأولية، أي أعداد أوّلية فقط. اكتشف العالِم (أويلر) عام ١٧٠٠م أنّ ثلاثية الحدود س^{٢} + س + ٤١ تستنج أعدادًا أوّلية لقيم س من صفر إلى ٣٩.

٢) أوجد الأعداد الأوّلية لقيم س من صفر إلى ٧ مستعملًا صيغة (أويلر).
٤١، ٤٣، ٤٧، ٥٣، ٦١، ٧١، ٨٣، ٩٧

٣) بيّن أنّ ثلاثية الحدود س^{٢} + س +٣١ لن تعطي أعدادًا أوّلية لقيم كثيرة لـ س.
تعطي أعدادًا أوّلية لقيم س = ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ولكن لا تعطي أعدادًا أوّلية لقيم س = ٧، ٤١

٤) أوجد أكبر عدد أوّلي ينتج من صيغة (أويلر).
١٦٠١

يمنّ تخمين (جولد باتش) على أنّ كلّ عدد زوجي غير الصفر، وأكبر من ٢، يمكن كتابته في صورة مجموع عددين أوّليين. لم يُثبت أي شخص أنّ هذا التخمين صحيح دائمًا، ولكن لم يجد أي شخص مثالًا مضادًا له.

٥) بيّن أنّ تخمين (جولد باتش) صحيح لأوّل ٥ أعداد زوجية أكبر من ٢
٤ = ٢ + ٢، ٦ = ٢ + ٤، ٨ = ٢ + ٦، ١٠ = ٢ + ٨، ١٢ = ٥ + ٧

٦) أعطِ طريقة يستطيع شخص أن يستعملها لإثبات عدم صحة تخمين (جولد باتش).
أوجد عددًا زوجيًا لا يمكن كتابته في صورة مجموع عددين أوّليين.

كتاب التمارين (١٣)　دون ضمن فوق

٧ - ٣ المعادلات التربيعية: س^{٢} + ب س + جـ = ٠

حلّ كلّ كثيرة حدود مما يأتي:

١) أ^{٢} + ١٠أ + ٢٤　(أ + ٤)(أ + ٦)
٢) هـ^{٢} + ١٢هـ + ٢٧　(هـ + ٩)(هـ + ٣)
٣) س^{٢} + ١٤ س + ٣٣　(س + ١١)(س + ٣)
٤) جـ^{٢} − ٢ جـ − ٦٣　(جـ − ٩)(جـ + ٧)
٥) و^{٢} + و − ٥٦　(و + ٨)(و − ٧)
٦) ص^{٢} + ٤ ص − ٦٠　(ص + ١٠)(ص − ٦)
٧) ب^{٢} + ٤ ب − ٣٢　(ب − ٤)(ب + ٨)
٨) ن^{٢} − ٣ ن − ٢٨　(ن − ٧)(ن + ٤)
٩) ل^{٢} + ٤ ل ل − ٤٥　(ل + ٩)(ل − ٥)
١٠) ع^{٢} − ١١ع + ٣٠　(ع − ٦)(ع − ٥)
١١) د^{٢} − ١٦ د + ٦٣　(د − ٩)(د − ٧)
١٢) س^{٢} − ١١ س + ٢٤　(س − ٨)(س − ٣)
١٣) ك^{٢} − ك − ٥٦　(ك − ٨)(ك + ٧)
١٤) س^{٢} − ٦ س − ٥٥　(س − ١١)(س + ٥)
١٥) ٣٢ + ١٨ ر + ر^{٢}　(ر + ١٦)(ر + ٢)
١٦) ٤٨ − ١٦ جـ + جـ^{٢}　(جـ − ١٢)(جـ − ٤)
١٧) ل^{٢} − ٩ ل ك − ١٠ ك^{٢}　(ل − ١٠ ك)(ل + ك)
١٨) م^{٢} − م و − ٥٦ و^{٢}　(م − ٨و)(م + ٧و)

حلّ كلّ معادلة مما يأتي، وتحقّق من صحة حلك:

١٩) س^{٢} + ١٧ س + ٤٢ = ٠　−١٤، −٣
٢٠) ك^{٢} + ٥ ك − ٨٤ = ٠　−١٢، ٧
٢١) ك^{٢} + ٣ ك − ٥٤ = ٠　−٩، ٦
٢٢) ب^{٢} − ١٢ ب − ٦٤ = ٠　−٤، ١٦
٢٣) ن^{٢} + ٤ ن = ٣٢　−٨، ٤
٢٤) هـ^{٢} − ١٧ هـ = − ٦٠　١٢، ٥
٢٥) ن^{٢} − ٢٦ ن = ٥٦　−٢، ٢٨
٢٦) ع^{٢} − ١٤ ع = ٧٢　−٨، ١٨
٢٧) ص^{٢} − ٨٤ = ٥ ص　−٧، ١٢
٢٨) ٨٠ + أ^{٢} = ١٨ أ　١٠، ٨
٢٩) و^{٢} = ١٦ و + ٣٦　١٨، ٢
٣٠) ١٧ ر + ر^{٢} = − ٥٢　−١٣، −٤

٣١) أوجد جميع قيم (ل) التي تجعل ثلاثية الحدود س^{٢} + ل س − ٣٥ قابلة للتحليل باستعمال الأعداد الصحيحة.
−٣٤، ٢، ٢، ٣٤

٣٢) **إنشاءات**، تخطط شركة إنشاءات لصب خرسانة لجزء من طريق على شكل مستطيل، طوله أكثر من عرضه (ض) بـ ١٦ مترًا.
أ) اكتب عبارة لمساحة هذا الجزء من الطريق. ض (ض + ١٦) مترًا مربعًا.
ب) أوجد بعديه إذا كانت مساحته ٢٦٠ مترًا مربعًا. ١٠ أمتار، ٢٦ مترًا

٣٣) **تصميم موقع**، لدى جميلة صورة بعداها ١٠ سم × ١٢ سم. ترغب في تصغير بعديها بالمقدار نفسه، باستعمال الحاسوب، لتضعها على موقعها الإلكتروني. بحيث تكون مساحة الصورة $\frac{١}{٣}$ مساحة الصورة الأصلية.
أ) اكتب معادلة تُمثّل مساحة الصورة المصغرة. (١٠ − س)(١٢ − س) = $\frac{١}{٣}$ أو س^{٢} − ٢٢ س + ١٠٥ = ٠
ب) أوجد بعدي الصورة المصغرة. ٣ سم × ٥ سم.

ملحوظات المعلم

٧-٤ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٧-٤

تحليل ثلاثية الحدود على الصورة: $س^{٢}$ + ب س + جـ .

الدرس ٧-٤

تحليل ثلاثية حدود على الصورة: أ$س^{٢}$ + ب س + جـ .

حل معادلات على الصورة: أ$س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ .

ما بعد الدرس ٧-٤

تحليل ثلاثية حدود على صورة فرق بين مربعين.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- ما الفرق بين ثلاثيات الحدود التي تعاملت معها في الدرس السابق وثلاثية الحدود: ٥$ن^{٢}$ − ٢ن + ٣٠ ؟ معامل $ن^{٢}$ في ثلاثية الحدود عدد صحيح أكبر من (١)، بينما معامل $س^{٢}$ في ثلاثيات الحدود في الدرس السابق كانت (١) دائمًا.
- أوجد ثلاثية الحدود التي تساوي (٣س + ١) (٢س + ٥)؟
  ٦$س^{٢}$ + ١٧س + ٥
- كيف يرتبط معامل $س^{٢}$ بمعامِلَي س في العاملين؟ معامل $س^{٢}$ يساوي حاصل ضرب ٢ × ٣ = ٦

٧-٤ المعادلات التربيعية: أ$س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠

فيما سبق

درستَ تحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^{٢}$ + ب س + جـ .

والآن

- أحلّل ثلاثية حدود على الصورة: أ$س^{٢}$ + ب س + جـ .
- أحلّ معادلات على الصورة: أ$س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ .

المفردات

كثيرة الحدود الأولية

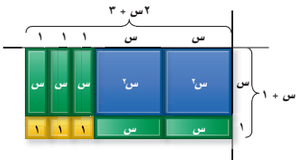
obeikaneducation.com

لماذا؟

يمكن تمثيل مسار الأرجوحة في مدينة الألعاب بالعبارة ٥$ن^{٢}$ − ٢ن + ٣٠؛ حيث (ن) زمن الحركة. وتحليل هذه العبارة إلى عواملها الأولية يساعد المسؤول عن التشغيل على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتها في المرة الأولى.

تحليل أ$س^{٢}$ + ب س + جـ : حللت في الدرس السابق عبارات تربيعية على الصورة: أ$س^{٢}$ + ب س + جـ ، أ = ١ .

ستطبق في هذا الدرس طرق تحليل عبارات تربيعية فيها أ ≠ ١ . في الشكل المجاور بعدا المستطيل المكوّن من بطاقات الجبر هما (س + ١)، (٢س + ٣)، وهما عاملا ٢$س^{٢}$ + ٥س + ٣. يمكنك استعمال طريقة التحليل بتجميع الحدود لتحليل هذه العبارة.



الخطوة ١: طبِّق القاعدة:

٢$س^{٢}$ + ٥س + ٣ = ٢$س^{٢}$ + م س + ن س + ٣.

الخطوة ٢: أوجد عددين ناتج ضربهما ٢ × ٣ = ٦ ومجموعهما ٥ .

عوامل العدد ٦	مجموع العاملين
٦ ، ١	٧
٣ ، ٢	٥

الخطوة ٣: استعمل التجميع لإيجاد العوامل.

٢$س^{٢}$ + ٥س + ٣ = ٢$س^{٢}$ + م س + ن س + ٣	اكتب القاعدة
= ٢$س^{٢}$ + ٢س + ٣س + ٣	م = ٢، ن = ٣
= (٢$س^{٢}$ + ٢س) + (٣س + ٣)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
= ٢س(س + ١) + ٣(س + ١)	حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)
= (٢س + ٣)(س + ١)	(س+١) عامل مشترك

إذن: ٢$س^{٢}$ + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١).

مفهوم أساسي — تحليل أ$س^{٢}$ + ب س + جـ

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة أ$س^{٢}$ + ب س + جـ ، أوجد عددين صحيحين م ، ن مجموعهما يساوي ب، وناتج ضربهما أ جـ ، ثم اكتب أ$س^{٢}$ + ب س + جـ على الصورة أ$س^{٢}$ + م س + ن س + جـ ، ثم حلّل بتجميع الحدود.

مثال: ٥$س^{٢}$ − ١٣س + ٦ = ٥$س^{٢}$ − ١٠س − ٣س + ٦ — م = −١٠، ن = −٣

= ٥س(س − ٢) + (−٣)(س − ٢)

= (٥س − ٣)(س − ٢)

مصادر الدرس ٧ - ٤

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٧١)	• تنويع التعليم ص (٧٤،٧١)	• تنويع التعليم ص (٧٤)
كتاب التمارين	ص (١٤)	ص (١٤)	ص (١٤)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) • التدريبات الإثرائية، ص (٢١)

مثال ١ تحليل أس^{٢} + ب س + جـ

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

أ) ٧س^{٢} + ٢٩س + ٤

في ثلاثية الحدود أعلاه، أ = ٧، ب = ٢٩، جـ = ٤. أوجد عددين ناتج ضربهما ٧ × ٤ = ٢٨، ومجموعهما ٢٩. كوّن قائمة بأزواج من عوامل العدد ٢٨، وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ٢٩.

عوامل العدد ٢٨	مجموع العوامل	
١، ٢٨	٢٩	العوامل الصحيحة ١ ، ٢٨

٧س^{٢} + ٢٩س + ٤ = ٧س^{٢} + م س + ن س + ٤ — استخدم القاعدة.

= ٧س^{٢} + ١س + ٢٨س + ٤ — م = ١، ن = ٢٨

= (٧س^{٢} + ١س) + (٢٨س + ٤) — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= س(٧س + ١) + ٤(٧س + ١) — حلّل بإخراج (ق. م. أ)

= (س + ٤)(٧س + ١) — (٧س+١) عامل مشترك

ب) ٣س^{٢} + ١٥س + ١٨

(ق.م.أ) للحدود ٣س^{٢}، ١٥س، ١٨، هو ٣. حلّل بإخراج العامل ٣.

٣س^{٢} + ١٥س + ١٨ = ٣(س^{٢} + ٥س + ٦) — خاصية التوزيع

= ٣(س + ٣)(س + ٢) — أوجد عاملين للعدد ٦ مجموعهما ٥

تحقق من فهمك

١أ) ٥س^{٢} + ١٣س + ٦ (٥س + ٣)(س + ٢) **١ب)** ٦س^{٢} + ٢٢س − ٢٨ (٣س − ١)(س + ٤)

مثال ٢ تحليل أس^{٢} + ب س + جـ

حلل كثيرة الحدود ٣س^{٢} − ١٧س + ٢٠.

في ثلاثية الحدود أعلاه أ = ٣، ب = −١٧، جـ = ٢٠. وبما أن ب سالبة، فإن م + ن ستكون سالبة أيضًا، وبما أن جـ موجبة، فإن م ن ستكون موجبة.

لتحديد م، ن كوّن قائمة العوامل السالبة لـ أ جـ، = ٦٠ وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما −١٧

عوامل العدد ٦٠	مجموع العاملين	
−٢، −٣٠	−٣٢	
−٣، −٢٠	−٢٣	
−٤، −١٥	−١٩	
−٥، −١٢	−١٧	العاملان الصحيحان هما −٥، −١٢

٣س^{٢} − ١٧س + ٢٠ = ٣س^{٢} − ١٢س − ٥س + ٢٠ — م = −١٢، ن = −٥

= (٣س^{٢} − ١٢س) + (−٥س + ٢٠) — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= ٣س(س − ٤) + (−٥)(س − ٤) — حلل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

= (٣س − ٥)(س − ٤) — خاصية التوزيع

تحقق من فهمك

٢أ) ٢ن^{٢} − ن − ١ (ن − ١)(٢ن + ١) **٢ب)** ١٠ص^{٢} − ٣٥ص + ٣٠ ٥(٢ص − ٣)(ص − ٢)

إرشادات للدراسة

القاسم المشترك الأكبر

ابحث عن القاسم المشترك الأكبر لحدود كثيرة الحدود قبل تحليلها.

تحليل أ س^{٢} + ب س + جـ

المثالان ١، ٢ يبيِّنان طريقة تحليل ثلاثية حدود على الصورة: أ س^{٢} + ب س + جـ

المثال ٣ يبين طريقة تمييز كثيرة الحدود الأولية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

أ) ٥س^{٢} + ٢٧س + ١٠

(٥س + ٢) (س + ٥)

ب) ٤س^{٢} + ٢٤س + ٣٢

٤(س + ٢) (س + ٤)

٢ ٢٤س^{٢} − ٢٢س + ٣

(٤س − ٣) (٦س − ١)

تنبيه!

تجنُّب الأخطاء: قد ينسى العديد من الطلاب تضمين (ق . م . أ) الذي تم تحليله من ثلاثية الحدود، لذا ذكّرهم بوضع (ق . م . أ) قبل العاملين الآخرين.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلاب صعوبات في تحليل ثلاثية الحدود،

فقم بتوزيع الطلاب إلى مجموعات لتحليل كثيرات حدود، كتلك التي في المثال ١، وبناءً على عدد العوامل وعدد الطلاب في كل مجموعة، يجد كل طالب عاملًا أو اثنين من عوامل (م ن)، وذلك بتقسيم العمل على الطلاب؛ لإيجاد عوامل (م ن) التي مجموعها م + ن بسرعة، وعندما يجدون هذه العوامل، اطلب إليهم تكملة التحليل كمجموعات.

تُسمّى كثيرة الحدود التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة **كثيرة حدود أولية.**

مثال ٣ تحديد كثيرة الحدود الأولية

حلّل العبارة: ٤س^{٢}−٣س+ ٥ إن أمكن باستعمال الأعداد الصحيحة، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

في ثلاثية الحدود السابقة أ = ٤، ب = −٣، جـ = ٥

وبما أن ب سالبة، م + ن سالبة. وبما أن جـ موجبة فإن م ن موجبة. لذا يكون كلّ من م وَ ن سالبًا، كوّن قائمة بأزواج عوامل العدد٢٠ . وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما −٣.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
−١، −٢٠	−٢١
−٤، −٥	−٩
−٢، −١٠	−١٢

لا يوجد عاملان مجموعهما −٣. لذا لا يمكن تحليل العبارة التربيعية باستعمال الأعداد الصحيحة. لذا فالعبارة التربيعية ٤س^{٢}−٣س + ٥ أولية.

تحقق من فهمك

أ٣) ٤ر^{٢} − ر + ٧ أولية **ب٣)** ٢س^{٢} + ٣س − ٥ (٢س + ٥)(س − ١)

حل معادلات بالتحليل: تمثّل المعادلة ل = −٥ن^{٢} + ع ن + ل$_{٠}$ ارتفاع جسم مقذوف لأعلى، حيث تمثل (ل) الارتفاع بالمتر، وَ (ن) الزمن بالثواني، وَ (ع) السرعة الابتدائية م/ ثانية، و(ل$_{٠}$) الارتفاع الابتدائي بالمتر. ويمكن حل هذه المعادلة التي على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ بالتحليل واستعمال خاصية الضرب الصفري.

مثال ٤ من واقع الحياة حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

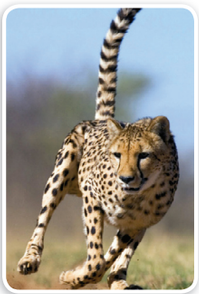
حياة برية: **افترض أن فهدًا يقفز نحو فريسته بسرعة ابتدائية رأسية مقدارها ١١ مترًا/ ثانية. فكم يبقى الفهد في الهواء قبل وصوله إلى فريسته التي ترتفع عن الأرض ٢ متر؟**

ل = −٥ن^{٢} + ع ن + ل$_{٠}$	معادلة الارتفاع
٢ = −٥ن^{٢} + ١١ن + ٠	عوّض ل = ٢، ع = ١١، ل$_{٠}$ = ٠
٠ = −٥ن^{٢} + ١١ن − ٢	اطرح ٢ من كلا الطرفين
٠ = ٥ن^{٢} − ١١ن + ٢	اضرب كلا الطرفين في −١
٠ = (٥ن − ١) (ن − ٢)	حلّل
٥ن = ١ أو ن = ٢	خاصية الضرب الصفري
٥ن = ١ ن = ٢	حل كل معادلة
ن = $\frac{١}{٥}$	

الإجابتان $\frac{١}{٥}$ وَ ٢ ثانية، يحتاج الفهد إلى $\frac{١}{٥}$ ثانية للوصول إلى ارتفاع ٢م في أثناء صعوده، وإلى ثانيتين في الهواء للوصول إلى الفريسة.

تحقق من فهمك

٤) فيزياء: قذف شخص كرة إلى الأعلى من سطح بناية ارتفاعها ٢٠ م. والمعادلة ع = −٥ن^{٢} + ١٦ن+٢٠ تمثل ارتفاع الكرة، (ع) بالأمتار بعد (ن) ثانية. فإذا سقطت الكرة على شرفة ارتفاعها ٤ م عن الأرض، فكم ثانية بقيت الكرة في الهواء؟ ٤ ثوانٍ



الربط مع الحياة

الفهد هو أسرع حيوان في العالم؛ حيث تبلغ سرعته ١١٢ كلم / ساعة، ويمكن أن تصل سرعته من صفر إلى ٦٤ كلم / ساعة في ٣ خطوات واسعة خلال ثوانٍ فقط.

تنبيه!

إشارة السالب

حافظ على (العدد −١) معامل ن^{٢} ، الذي تم إخراجه خلال التحليل، أو اضرب كلا الطرفين في −١ بدلًا من ذلك.

تنبيه!

تجنب الأخطاء: تأكّد من أن الطلاب يكتبون قائمة بعوامل (م ن) الممكنة جميعها، بحيث تتضمّن العوامل الموجبة والسالبة، قبل أن يقرّروا ما إذا كانت كثيرة الحدود أولية أم لا.

مثال إضافي

٣ حلّل كثيرة الحدود: ٣س^{٢}+٧س−٥ إذا أمكن، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال أعداد صحيحة، فاكتب "أولية". أولية

حل معادلات بالتحليل

المثال ٤ يُبيّن طريقة حل مسائل من واقع الحياة بتمثيلها بمعادلة على الصورة: أس^{٢}+ ب س+ جـ = ٠ ، ثم حلّها.

مثال إضافي

٤ **نموذج صاروخ:** في حصة العلوم كوَّن الطلاب نموذج صاروخ، وأطلقوه من حافة سطح ارتفاعه عن الأرض ٣م، وبسرعة ابتدائية رأسية ١٤م / ث ، إذا ارتفع الصاروخ في الجو ثم عاد فارتطم بالأرض، فما الزمن الذي استغرقه الصاروخ في الجو؟ استعمل المعادلة:
ل = −٥ن^{٢} + ع ن +ل$_{٠}$ ٣ ثانية

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اعمل قالبًا
يُظهر ضرب ثنائيتي حد مثل:
(□±□)(□±□)، **واعرضه لإيجاد عوامل عبارة تربيعية، ثم اكتب عوامل الحدين (الأول والأخير)، واسحب كل عامل للفراغات حتى تجد الفراغ المناسب له .**

المحتوى الرياضي

تحليل ثلاثية الحدود أس^{٢} + ب س+ جـ : لتحليل ثلاثية حدود معامل س^{٢} فيها أكبر من ١ بالتجميع، عبّر عن ثلاثية الحدود على صورة عبارة من أربعة حدود، أس^{٢} + م س + ن س + جـ، حيث م + ن = ب، م ن = أ جـ ، وذلك بتكوين جدول يحوي أزواجًا من عوامل (م ن) الممكنة، والتي مجموعها (ب). ثم عوِّض عن أ، ن، م، جـ، بهذه القيم، وجمّع الحدود ذات العوامل المشتركة، وحلّل بإخراج (ق . م . أ) لكل تجميع، ثم حلّل باستعمال خاصية التوزيع.

تأكد

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

١) $٢س^{٢} + ٢٢س + ٥٦$ $٢(س + ٤)(س + ٧)$ ٢) $٥س^{٢} - ٣س + ٤$ أولية ٣) $٣س^{٢} - ١١س - ٢٠$ $(٣س + ٤)(س - ٥)$

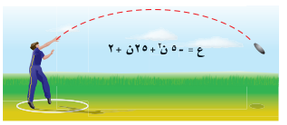
مثال ٤ حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤) $٢س^{٢} + ٩س + ٩ = ٠$ $-\frac{٣}{٢}، -٣$ ٥) $٣س^{٢} - ١٠س + ٨ = ٠$ $\frac{٤}{٣}، ٢$ ٦) $٢س^{٢} - ١٧س + ٣٠ = ٠$ $\frac{٥}{٢}، ٦$

٧) **رمي القرص:** يرمي خالد القرص المعدني كما في الشكل المجاور.

أ) ما الارتفاع الابتدائي للقرص؟ ٢ متر

ب) بعد كم ثانية يصل القرص إلى الارتفاع نفسه الذي قذف منه؟ ٥ ثوان



تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

٨) $٥س^{٢} + ٣٤س + ٢٤$ ٩) $٤س^{٢} + ٣٨س + ٧٠$ ١٠) $٢س^{٢} - ٣س - ٩$

١١) $٤س^{٢} - ١٣س + ١٠$ ١٢) $٢س^{٢} + ٣س + ٦$ أولية ١٣) $١٢س^{٢} + ٦٩س + ٤٥$

١٤) $٤س^{٢} - ٥س + ٧$ أولية ١٥) $٥س^{٢} + ٢٣س + ٢٤$ $(٥س + ٨)(س + ٣)$ ١٦) $٣س^{٢} - ٨س + ١٥$ أولية

مثال ٤ ١٧) **صيد:** أطلق صياد طلقة نارية ارتفاعها تمثّله المعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ٩ن + ٢$. بعد كم ثانية تصل الطلقة إلى الأرض؟ ثانيتين

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٨) $٢س^{٢} + ٩س - ١٨ = ٠$ $\frac{٣}{٢}، -٦$ ١٩) $٤س^{٢} + ١٧س + ١٥ = ٠$ $-\frac{٥}{٤}، -٣$ ٢٠) $-٣س^{٢} + ٢٦س = ١٦$ $\frac{٢}{٣}، ٨$

٢١) $-٢س^{٢} + ١٣س = ١٥$ $\frac{٣}{٢}، ٥$ ٢٢) $-٣س^{٢} + ٥س = -٢$ $-\frac{١}{٣}، ٢$ ٢٣) $-٤س^{٢} + ١٩س = -٣٠$ $-\frac{٥}{٤}، ٦$

٢٤) **نظرية الأعداد:** ستة أمثال مربّع العدد س مضافًا إليها ١١ مِثْلًا للعدد يساوي ٢. ما القيم الممكنة لـ س؟

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

٢٥) $-٦س^{٢} - ٢٣س - ٢٠$ ٢٦) $-٤س^{٢} - ١٥س - ١٤$ ٢٧) $-٥س^{٢} + ١٨س + ٨$

٢٨) $-٦س^{٢} + ٣١س - ٣٥$ ٢٩) $-٤س^{٢} + ٥س - ١٢$ ٣٠) $-١٢س^{٢} + س + ٢٠$

٣١) **تخطيط:** خططت بلدية إحدى المدن لبناء متنزّه جديد مستطيل الشكل، يمكن التعبير عن مساحته بالعبارة: $٦٦٠س^{٢} + ٥٢٤س + ٨٥$. حلّل هذه العبارة لإيجاد ثنائيتي حدّ بمعاملات أعداد صحيحة تمثّل البعدين الممكنين للمتنزّه. وإذا كانت س = ٨، فما محيط المتنزّه؟

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ٧؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

٢٥) $-(٢س + ٥)(٣س + ٤)$

٢٦) $-(س + ٢)(٤س + ٧)$

٢٧) $-(س - ٤)(٥س + ٢)$

٢٨) $-(٢س - ٧)(٣س - ٥)$

٢٩) أولية

٣٠) $-(٣س - ٤)(٤س + ٥)$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٠ – ٢٣ ، ٣٣ – ٤٤
ضمن ضمن المتوسط	١١–٢٤، ٢٥–٩ (فردي) ، ٣٢ – ٤٤
فوق فوق المتوسط	٢٤ – ٤٤

٣٢ هـ) (أ – ب)(أ+ب)؛ كلا الطرفين يمثلان المساحة نفسها.

٣٢) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة. تحليل أنواعٍ خاصة من كثيرات الحدود.

أ) هندسيًا: ارسم مربّعًا طول ضلعه أ. ثم ارسم داخله مربعًا أصغر يشترك معه في أحد الرؤوس، طول ضلعه ب. ما مساحة كل من المربعين؟ $أ^{٢}$، $ب^{٢}$

ب) هندسيًا: قصَّ المربع الصغير. ما مساحة المنطقة الباقية؟ $أ^{٢} - ب^{٢}$

جـ) تحليليًا: ارسم خطًّا قطريًّا بين رأس المربع الكبير ورأس المربع الصغير في الشكل المتبقي. وقصّ على طول هذا الخط للحصول على قطعتين متطابقتين، ثم أعد ترتيب القطعتين لتشكّلا مستطيلًا. ما بُعدا المستطيل الناتج؟ (أ – ب) (أ + ب)

د) تحليليًا: اكتب مساحة المستطيل على صورة ناتج ضرب ثنائيتي حد. (أ – ب) (أ + ب)

هـ) لفظيًا: أكمل العبارة $أ^{٢} - ب^{٢}$ = ... لماذا هذه العبارة صحيحة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٣) زكريا؛ إجابة ممكنة: أعد كتابة المعادلة للحصول على صفر في أحد طرفيها. ثم حلّل وحُل باستعمال خاصية الضرب الصفري.

٣٣) **اكتشف الخطأ:** حلّ كلٌّ من زكريا وسامي المعادلة $٦س^{٢} - س = ١٢$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

زكريا

$٦س^{٢} - س = ١٢$

$٦س^{٢} - س - ١٢ = ٠$

$(٢س - ٣)(٣س + ٤) = ٠$

$٢س - ٣ = ٠$ أو $٣س + ٤ = ٠$

$س = \frac{٣}{٢}$ أو $س = -\frac{٤}{٣}$

سامي

$٦س^{٢} - س = ١٢$

$س(٦س - ١) = ١٢$

$س = ١٢$ أو $٦س - ١ = ١٢$

$٦س = ١٣$ أو $س = \frac{١٣}{٦}$

٣٤) إجابة ممكنة: $١٠س^{٢} + س - ٣ = ٠$ تحلّل كثيرة الحدود إلى $(٢س - ١)(٥س + ٣) = ٠$ لذا فالحلان هما: $\frac{١}{٢}$، $-\frac{٣}{٥}$

٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية معاملات حدودها أعداد صحيحة على أن يكون: $\frac{١}{٢}$، $-\frac{٣}{٥}$ حلين لها. فسّر ذلك

٣٥) **اكتب:** فسّر كيف تحدد القيم التي يجب اختيارها لِـ م وَ ن عند تحليل كثيرة الحدود على الصورة $أس^{٢} + ب س + جـ$. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

٣٦) **إجابة قصيرة:** لدى سلمى أختان: إحداهما أكبر منها بـ٨سنوات، والأخرى أصغر منها بسنتين، وناتج ضرب عمري أختيها ٥٦. فكم سنة عمر سلمى؟ ٦

٣٧) ما مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٢س - ٢٤ = ٠$؟ د

أ) $\{-٤، ٦\}$ جـ) $\{-٣، ٨\}$

ب) $\{٣، -٨\}$ د) $\{٤، -٦\}$

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٧-٣)

٣٨) $س^{٢} - ٩س + ١٤$ $(س - ٢)(س - ٧)$ ٣٩) $س^{٢} - ٥س - ٢٤$ $(س + ٣)(س - ٨)$ ٤٠) $ع^{٢} + ١٥ع + ٣٦$ $(ع + ١٢)(ع + ٣)$

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٢)

٤١) $أ(أ - ٩) = ٠$ $٠، ٩$ ٤٢) $(٢ص + ٦)(ص - ١) = ٠$ $-٣، ١$ ٤٣) $١٠س^{٢} - ٢٠س = ٠$ $٠، ٢$

٤٤) حلّ المتباينة المركبة $ك + ٢ > ١٢$ وَ $ك + ٢ \geq ١٨$ ، ثم مثّل مجموعة الحل على خط الأعداد. (الدرس ٤-٤) انظر الهامش.

تنبيه لحل سؤال

مقصات: يتطلّب حل السؤال ٣٢ توافر مقصات للطلاب.

تمثيلات متعدّدة: في حل السؤال ٣٢ يستعمل الطلاب نموذجًا ماديًّا والتبرير الجبري لتمثيل الفرق بين مربعين.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال ٣٣، اطلب إلى الطلاب أن يفكّروا في الخطوة الأولى لحل معادلة بالتحليل. "اكتب المعادلة في الصورة القياسية"، وهذا الإرشاد سيوضح لهم فورًا أي الطالبين على صواب.

٤ التقويم

تعلم سابق: اسأل الطلاب كيف ساعدهم الدرس السابق على تعلُّم المادة الجديدة في هذا الدرس.

إجابات:

٣٥) إجابة ممكنة: أبحث عن عددين (م وَ ن) حاصل ضربهما (أ جـ)، وحاصل جمعهما ب.

٤٤) $\{ك \mid ١٠ < ك \geq ١٦\}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع: اطلب إلى الطلاب كتابة معادلة تربيعية على الصورة: $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$، على أن يكون أ، ب، جـ أعدادًا صحيحة، ويكون حلا المعادلة: $\frac{١}{٢}$، ٤. إجابة ممكنة: $٢س^{٢} - ٩س + ٤ = ٠$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٧ - ٤

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٨) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٤ تدريبات إعادة التعليم

المعادلات التربيعية: أس٢ + ب س + جـ = ٠

تحليل أس٢ + ب س + جـ لتحليل ثلاثية الحدود في الصورة أس٢ + ب س + جـ أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما يساوي ب ونتاج ضربهما أ جـ. ثم اكتب أس٢ + ب س + جـ في الصورة أس٢ + م س + ن س + جـ ثم حلل بتجميع الحدود وإذا لم يوجد عددان صحيحان وفق هذه المتطلبات، تسمى كثيرة الحدود **كثيرة حدود أوّلية**.

مثال ١ حلّل ٣س٢ + ١٥ س + ١٨

في هذا المثال، أ = ٣، ب = ١٥، جـ = ١٨

يتعيّن أن نجد عددين مجموعهما ١٥، ونتاج ضربهما ٣ × ١٨ = ٣٦. كوّن قائمة بأزواج من عوامل العدد ٣٦ وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ١٥.

عوامل ٣٦	مجموع العوامل
١، ٣٦	٣٧
٢، ١٨	٢٠
٣، ١٢	١٥

طيّن القاعدة أس٢ + م س + ن س + جـ

حيث أ = ٣، م = ٣، ن = ١٢، جـ = ١٨

٣س٢ + ١٥ س + ١٨ = ٣س٢ + ٣س + ١٢س + ١٨

= (٣س٢ + ٣س) + (١٢س + ١٨)

= ٣س(س + ١) + ٦(٢س + ٣)

= (س + ٦)(٣س + ٣)

لذا ٢س٢ + ١٥ س + ١٨ = (س + ٦)(٣س + ٣)

مثال ٢ حلّل ٣س٢ − ٣س − ١٨.

لاحظ أن (ق. م. أ) للحدود ٣س٢، ٣س، ١٨ هو ٣

أوّلاً، حلّل باخراج (ق. م. أ).

٣س٢ − ٣س − ١٨ = ٣(س٢ − س − ٦)

والآن حلّل س٢ − س − ٦. بما أن أ = ١، أوجد عاملين لـ −٦ مجموعهما −١.

عوامل − ٦	مجموع العوامل
١، −٦	−٥
−١، ٦	٥
٢، −٣	−١
−٢، ٣	١

طيّن القاعدة (س + م)(س + ن)، م = ٢، ن = −٣

س٢ − س − ٦ = (س + ٢)(س − ٣)

لذا ٣س٢ − ٣س − ١٨ = ٣(س + ٢)(س − ٣)

تمارين

حلّل كلّ كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أوّلية":

١) ٢س٢ − ٣س − ٢ — (٢س + ١)(س − ٢)
٢) ٣م٢ − ٨م − ٣ — (٣م + ١)(م − ٣)
٣) ١٦ر٢ − ٨ر + ١ — (٤ر − ١)(٤ر − ١)
٤) ٦س٢ + ٥س − ٦ — (٣س + ٢)(٢س − ٣)
٥) ٣س٢ + ٢س − ٨ — (٣س − ٤)(س + ٢)
٦) ١٨س٢ − ٢٧س − ٥ — (٣س − ٥)(٦س + ١)
٧) ١٢أ٢ + ٥أ + ٣ — أوّلية
٨) ١٨ص٢ + ٩ص − ٥ — (٦ص + ٥)(٣ص − ١)
٩) −٤ ث٢ + ١٩ ث − ٢١ — (٤ ث − ٧)(٣ − ٥)
١٠) ٨س٢ − ٤س − ٢٤ — (٤س − ٨)(٢س + ٣)
١١) ٢٨م٢ + ٦٠م − ٢٥ — (٢م + ٥)(١٤م − ٥)
١٢) ٤٨س٢ + ٢٢س − ١٥ — (٦س + ٥)(٨س − ٣)
١٣) ٣ص٢ − ٦ص − ٢٤ — ٣(ص + ٢)(ص − ٤)
١٤) ٤س٢ + ٢٦س − ٤٨ — ٢(٢س + ٣)(س + ٨)
١٥) ٤٨م٢ − ٤٤م + ٨ — ٤(٦م − ١)(٢م − ١)
١٦) ٦س٢ − ٧س + ١٨ — أوّلية
١٧) ٢أ٢ − ١١٤ + ١٨ — ٢(أ − ٩)(أ − ٧)
١٨) ١٨ + ١١س + ٢س٢ — أوّلية

تدريبات حل المسألة (٢٠) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

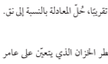
٧-٤ تدريبات حل المسألة

المعادلات التربيعية: أس٢ + ب س + جـ = ٠

١) **نقطة التعادل:** تظهر نقطة التعادل في الأعمال التجارية عندما تتساوى الواردات مع التكلفة. قُورنت تكلفةمتحف للأطفال (الروائب، الكهرباء، ...إلخ) بالواردات من رسوم الدخول إليه، فلوحظ أنّ صيغة الزمن عند نقطة التعادل هي: ٢ن٢ − ٥٢ن + ٢٤ = ٠ أوجد عدد الساعات التي يتعيّن على إدارة المتحف أن تفتحه فيها للوصول إلى نقطة التعادل.
٤ ساعات

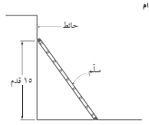
٢) **أعمال تجارة:** يريد تجار إنشاء صندوق للألعاب، ارتفاعه قدمان، وعرضه يتقص٣ أقدام عن طوله. إذا كان حجم الصندوق ٨٠ قدماً مكعّبة، فأوجد بُعديه.
الطول = ٨ أقدام، العرض = ٥ أقدام

٣) **أثاث:** يريد مدير إحدى المدارس شراء طاولة لغرفة الإدارة. تباع الطاولة في متجر مجاور بأبعاد متنوعة، لكن كلّ طاولة يزيد طولها متراً على مثلّي عرضها. تسمح ميزانية المدرسة بشراء طاولة مساحة سطحها ٣ م٢ بالضبط.



أوجد بُعدَي الطاولة التي يمكن لمدير المدرسة شراؤها.
العرض = ١ م، الطول = ٣ م

٤) **سلالم:** يستند سلّم إلى حائط، ويلمس رأس السلّم الحائط عند ارتفاع ١٥ قدماً. فإذا كان طول السلّم يزيد قدماً واحدة على مثلّي بُعد قاعدته عن الحائط، فأوجد بُعد قاعدته عن الحائط. (تلميح: حُلّ المسألة مستعملاً نظرية فيثاغورس).
٨ أقدام



٥) **مزرعة:** لدى عامر صفيحة معدنية مساحتها ٤٨٠ قدماً مربّعة، ويريد أن يستعملها في إنشاء خزّان أسطواني لحفظ الحبوب ارتفاعه ٥, ١٣ قدماً. تذكّر أنّ قانون المساحة السطحية للأسطوانة الدائرية القائمة هو:

م = ط نق٢ + ٢ط نق ع

أ) اكتب معادلة تربيعية (أحد طرفيها صفر) للتعبير عن معطيات المسألة.
ط نق٢ + ٢٧ ط نق − ٤٨٠ = ٠

ب) مستعملاً ط ≈ ٣ تقريباً، حُلّ المعادلة بالنسبة إلى نق.
{٥, −٢٢}

جـ) ما طول نصف قطر الخزان الذي يتعيّن على عامر أن يستعمله؟
٥ أقدام

التدريبات الإثرائية (٢١) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٤ التدريبات الإثرائية

نماذج مساحة لثلاثيات حدود تربيعية

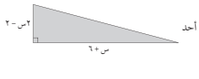
بعد أن تعلّمتَ تحليل ثلاثية حدود تربيعية، يمكنك استعمال العوامل لرسم نماذج هندسية لثلاثية الحدود.

س٢ + ٥ س − ٦ = (س − ١)(س + ٦)

لرسم نموذج مستطيل، استعمل القيمة ٢ بدلاً من س، ليكون طول الضلع الأصغر ١. مع العلم أن وحدات القياس المستخدمة في الرسم هي السنتمترات.

إذن مساحة المستطيل تساوي: س٢ + ٥ س − ٦

لرسم نموذج مثلث قائم الزاوية، تذكّر أن مساحة المثلث تساوي نصف طول القاعدة ضرب الارتفاع. لذا سيكون طول أحد أضلاع المثلث مثلّي طول الضلع الأقصر لنموذج المستطيل.



س٢ + ٥ س − ٦ = (س − ١)(س + ٦)

= ½ (٢ س − ٢)(س + ٦)

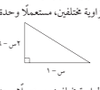
كذلك فإن مساحة المثلث القائم الزاوية تساوي: س٢ + ٥ س − ٦

حلّل كلّ ثلاثية حدود فيما يأتي، ثم ارسم كلّ نموذج:

١) س٢ + ٢س − ٣، استعمل س = ٢
ارسم مستطيلاً أبعاده مقيسة بوحدة السنتمتر.

(س + ٣)(س − ١)

٢) ٣س٢ + ٥ س − ٢، استعمل س = ١
ارسم مستطيلاً أبعاده مقيسة بوحدة السنتمتر.



(س + ٢)(٣س − ١)

٣) س٢ − ٤س + ٣، استعمل س = ٤. ارسم مثلثين قائمي الزاوية مختلفين، مستعملاً وحدة السنتمتر.

(س − ٣)(س − ١)　　(س − ١)(س − ٢)

٤) ٩س٢ − ٩س + ٢، استعمل س = ٢. ارسم مثلثين قائمَي الزاوية مختلفين، مستعملاً وحدة السنتمتر. استعمل ٥, ٠ سنتمتر لكل وحدة قياس.

(٣س − ١)(٣س − ٢)

كتاب التمارين (١٤) — دون ضمن فوق

٧ - ٤ المعادلات التربيعية: أ س٢ + ب س + جـ = ٠

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة، فاكتب "أولية".

١) ٢ ب٢ + ١٠ ب + ١٢ — ٢(ب + ٢)(ب + ٣)
٢) ٣ جـ٢ + ٨ جـ + ٤ — (٣ جـ + ٢)(جـ + ٢)
٣) ٤ س٢ + ٤ س − ٣ — (٢ س + ٣)(٢ س − ١)
٤) ٨ ب٢ − ٥ ب − ١٥ — أولية
٥) ٦ م٢ + ٧ م − ٣ — (٣ م − ١)(٢ م + ٣)
٦) ١٠ د٢ + ١٧ د − ٢٠ — (٥ د − ٤)(٢ د + ٥)
٧) ٦ أ٢ − ١٧ أ + ١٢ — (٣ أ − ٤)(٢ أ − ٣)
٨) ٨ و٢ − ١٨ و + ٩ — (٤ و − ٣)(٢ و − ٣)
٩) ١٠ س٢ − ٩ س + ٦ — أولية
١٠) ١٥ ن٢ − ن − ٢٨ — (٥ ن − ٧)(٣ ن + ٤)
١١) ١٠ س٢ + ٢١ س − ١٠ — (٢ س + ٥)(٥ س − ٢)
١٢) ٩ ر٢ + ١٥ ر + ٦ — ٣(٣ ر + ٢)(ر + ١)
١٣) ١٢ ص٢ − ٤ ص − ٥ — (٣ ص + ١)(٦ ص − ٥)
١٤) ١٤ ك٢ − ٩ ك − ١٨ — (٢ ك − ٣)(٧ ك + ٦)
١٥) ٨ ع٢ + ٢٠ ع − ٤٨ — ٤(ع + ٤)(٢ ع − ٣)
١٦) ١٢ ك٢ + ٣٤ ك − ٢٨ — ٢(٣ ك − ٢)(٢ ك + ٧)
١٧) ١٨ هـ٢ + ١٥ هـ − ١٨ — ٣(٢هـ + ٣)(٣هـ − ٢)
١٨) ١٢ ل٢ − ٢٢ ل − ٢٠ — ٢(٣ ل + ٢)(٢ ل − ٥)

حُلّ كلّ معادلة فيما يأتي، وتحقّق من صحة الحل.

١٩) ٣ هـ٢ + ٢هـ − ١٦ = ٠ — $-\frac{٨}{٣}$، ٢
٢٠) ١٥ ن٢ − ن = ٢ — $-\frac{٢}{٥}$، $\frac{١}{٣}$
٢١) ٨ ك٢ − ١٠ ك + ٣ = ٠ — $\frac{٣}{٢}$، $\frac{١}{٤}$
٢٢) ٦ ب٢ − ٥ ب = ٤ — $\frac{٤}{٣}$، $-\frac{١}{٢}$
٢٣) ١٠ ر٢ − ٢١ ر = −٤ ر + ٦ — $\frac{٣}{٢}$، $\frac{٢}{٥}$
٢٤) ١٠ جـ٢ + ١٠ = ٢٩ جـ — $\frac{٥}{٢}$، $\frac{٢}{٥}$
٢٥) ٦ ص٢ = −٧ ص − ٢ — $-\frac{١}{٣}$، $-\frac{٢}{٢}$
٢٦) ٩ ع٢ = −٦ ع + ١٥ — $-\frac{٥}{٣}$، ١
٢٧) ١٢ ك٢ + ١٥ ك = ١٦ ك + ٢٠ — $\frac{٤}{٣}$، $-\frac{٥}{٤}$
٢٨) ١٢ س٢ − ١ = − س — $-\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٣}$
٢٩) ١٦ أ٢ − ١٦ = ١٢ − ١٢ — $\frac{٣}{٤}$، ٢
٣٠) ١٨ أ٢ + ١٠ أ = −١١ أ + ٤ — $-\frac{٤}{٩}$، $\frac{١}{٢}$

٣١) **غوص،** غطس لؤي في بركة سباحة من لوح غطس على ارتفاع ٣ م بسرعة ابتدائية إلى الأعلى مقدارها ٢ م/ ثانية. أوجد الزمن (ن) بالثواني، الذي يحتاج إليه ليصل إلى الماء. استعمل معادلة الحركة الرأسية
ل = −٥ ن٢ + ع ن + ل، حيث (ل) الارتفاع بالمتر، (ن) الزمن بالثواني (ع) السرعة الابتدائية للأعلى م/ ثانية، (ل) الارتفاع الابتدائي بالمتر. (إرشاد: لتكن ل = ٠ تمثّل سطح البركة). ثانية واحدة.

ملحوظات المعلم

٧ - ٥ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

لماذا؟

يستعمل مصمِّمو الجرافيك الفن والرياضيات لتصميم صور وأشرطة فيديو. ويستعملون المعادلات لتكوين أشكال وخطوط على الحاسوب. ويساعد التحليل إلى العوامل على تحديد أبعاد الأشكال وطريقة ظهورها.

تحليل الفرق بين مربعين: تذكّر أنك تعلمت ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما، ويشير ناتج الضرب هذا إلى **الفرق بين المربعين**. لذا فالصورة المحلّلة للفرق بين مربعين تسمى ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

مفهوم أساسي: الفرق بين مربعين

أضف إلى مطويتك

الرموز: $أ^٢ - ب^٢ = (أ + ب)(أ - ب)$ أو $(أ - ب)(أ + ب)$

أمثلة:
$س^٢ - ٢٥ = (س + ٥)(س - ٥)$ أو $(س - ٥)(س + ٥)$

$ن^٢ - ٦٤ = (ن + ٨)(ن - ٨)$ أو $(ن - ٨)(ن + ٨)$

مثال ١: تحليل الفرق بين مربعين

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $١٦هـ^٢ - ٩أ^٢$

$١٦هـ^٢ - ٩أ^٢ = (٤هـ)^٢ - (٣أ)^٢$ — اكتب العبارة على صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= (٤هـ + ٣أ)(٤هـ - ٣أ)$ — تحليل الفرق بين مربعين

ب) $١٢١ - ٤ب^٢$

$١٢١ - ٤ب^٢ = (١١)^٢ - (٢ب)^٢$ — اكتب العبارة على صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= (١١ - ٢ب)(١١ + ٢ب)$ — تحليل الفرق بين مربعين

جـ) $٢٧جـ^٣ - ٣جـ$

بما أنه يوجد عامل مشترك بين الحدود، لذا حلّل بإخراج (ق. م. أ) أولاً، ثم أكمل بطرق التحليل الأخرى.

$٢٧جـ^٣ - ٣جـ = ٣جـ(٩جـ^٢ - ١)$ — حلّل بإخراج (ق. م. أ)

$= ٣جـ[(٣جـ)^٢ - (١)^٢]$ — اكتب على الصورة $أ^٢ - ب^٢$

$= ٣جـ(٣جـ - ١)(٣جـ + ١)$ — تحليل الفرق بين مربعين.

تحقق من فهمك

أ) $٨١ - جـ^٢$ $(٩ + جـ)(٩ - جـ)$

ب) $٦٤جـ^٢ - هـ^٢$ $(٨جـ - هـ)(٨جـ + هـ)$

جـ) $٩س^٣ - ٤س$ $س(٣س + ٢)(٣س - ٢)$

د) $-٤ص^٣ + ٩ص$ $-ص(٢ص + ٣)(٢ص - ٣)$

فيما سبق

درست تحليل ثلاثية حدود إلى ثنائيتي حد.

والآن

- أحلّل ثنائية حدّ على صورة فرق بين مربعين.
- أحل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين.

المفردات

الفرق بين مربعين

obeikaneducation.com

٧ - ٥ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٧- ٥

تحليل ثلاثية الحدود إلى ثنائيتي حد.

الدرس ٧-٥

- تحليل ثنائية حد على صورة فرق بين مربعين.
- حل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين.

ما بعد الدرس ٧ - ٥

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- ما ناتج $(س + ٣)(س - ٣)$؟ $س^٢ - ٩$
- ما ناتج $(س - ٦)(س + ٦)$؟ $س^٢ - ٣٦$
- ما ناتج $(أ - ب)(أ + ب)$؟ $أ^٢ - ب^٢$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: استعمل قالب الدرس السابق؛ لعرض لماذا يكون الفرق بين مربعين قابلًا للتحليل، بينما لا يكون مجموع المربعين قابلًا للتحليل.

مصادر الدرس ٧ - ٥

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (٧٧، ٧٩)	• تنويع التعليم ص (٧٧، ٧٩)
كتاب التمارين	ص (١٥)	ص (١٥)	ص (١٥)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٢) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٤)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٤)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٤) • التدريبات الإثرائية، ص (٢٥)

تحليل الفرق بين مربعين

المثال ١ يُبيّن طريقة تحليل الفرق بين مربعين.

المثالان ٢، ٣ يُبيّنان تطبيق التحليل أكثر من مرة؛ لتحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

١ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $م^٢ - ٦٤$ $(م + ٨)(م - ٨)$

ب) $١٦ ص^٢ - ٨١ ع^٢$
$(٤ص + ٩ع)(٤ص - ٩ع)$

جـ) $٣ب^٣ - ٢٧ب$
$٣ب(ب + ٣)(ب - ٣)$

٢ حلّل كلًّا من كثيرتَي الحدود الآتيتين:

أ) $ص^٤ - ٦٢٥$ $(ص^٢ + ٢٥)$
$(ص + ٥)(ص - ٥)$

ب) $٢٥٦ - ن^٤$
$(١٦ + ن^٢)(٤ - ن)(٤ + ن)$

٣ حلّل كلًّا من كثيرتَي الحدود الآتيتين:

أ) $٩س^٥ - ٣٦س$
$٩س(س^٢ - ٢)(س^٢ + ٢)$

ب) $٦س^٣ + ٣٠س^٢ - ٢٤س - ١٢٠$
$٦(س + ٢)(س - ٢)(س + ٥)$

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: على الطلاب التحقّق دائمًا من تحليلهم، وذلك بضرب العوامل باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

تنبيه!

مجموع مربعين: لا يمكن تحليل مجموع المربعين $أ^٢ + ب^٢$ إلى $(أ+ب)(أ+ب)$. فمجموع المربعين هو كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

قد تحتاج إلى تحليل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا، باستعمال التحليل أكثر من مرة. وهذا ينطبق أيضًا على الفرق بين مربعين.

مثال ٢ تطبيق التحليل أكثر من مرة

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $ب^٤ - ١٦$

$ب^٤ - ١٦ = (ب^٢)^٢ - (٤)^٢$	اكتب $ب^٤ - ١٦$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٤)$	تحليل الفرق بين مربعين
لاحظ أن العامل $ب^٢ - ٤$ هو فرق بين مربعين أيضًا.	
$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٢^٢)$	اكتب $ب^٢ - ٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
$= (ب^٢ + ٤)(ب + ٢)(ب - ٢)$	تحليل الفرق بين مربعين

ب) $٦٢٥ - س^٤$

$٦٢٥ - س^٤ = (٢٥)^٢ - (س^٢)^٢$	اكتب $٦٢٥ - س^٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
$= (٢٥ + س^٢)(٢٥ - س^٢)$	تحليل الفرق بين مربعين
$= (٢٥ + س^٢)(٥ - س)(٥ + س)$	اكتب $٢٥ - س^٢$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
	تحليل الفرق بين مربعين

تحقق من فهمك

٢أ) $(ص^٢ + ١)(ص + ١)(ص - ١)$

٢ب) $(٢أ^٢ + ب^٢)(٢أ^٢ - ب^٢)$

٢جـ) $(٣ - س)(٣ + س)(٩ + س^٢)$

١أ) $ص^٤ - ١$ **٢ب)** $٤أ^٤ - ب^٤$ **٢جـ)** $٨١ - س^٤$

وتطبق أحيانًا أكثر من طريقة لتحليل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا.

مثال ٣ تطبيق طرق مختلفة

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $٥س^٥ - ٤٥س$

$٥س^٥ - ٤٥س = ٥س(س^٤ - ٩)$	حلل بإخراج (ق. م. أ)
$= ٥س[(س^٢)^٢ - (٣)^٢]$	اكتب $س^٤ - ٩$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
$= ٥س(س^٢ - ٣)(س^٢ + ٣)$	تحليل الفرق بين مربعين

لاحظ أن $س^٢ - ٣$ ليس فرقًا بين مربعين؛ لأن ٣ ليس مربعًا كاملًا.

ب) $٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$

$٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$	العبارة الأصلية
$= ٧(س^٣ + ٣س^٢ - س - ٣)$	التحليل بإخراج (ق. م. أ)
$= ٧[(س^٣ + ٣س^٢) - (س + ٣)]$	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
$= ٧[س^٢(س + ٣) - (س + ٣)]$	حلل كل تجمّع
$= ٧(س + ٣)(س^٢ - ١)$	س+٣ عامل مشترك
$= ٧(س + ٣)(س + ١)(س - ١)$	تحليل الفرق بين مربعين

المحتوى الرياضي

تحليل الفرق بين مربعين: ثنائية الحد $أ^٢ - ب^٢$، هي فرق بين المربعين $أ^٢$ وَ $ب^٢$. وأحد عاملي ثنائية الحد هو $(أ + ب)$، الذي يُمثّل مجموع الجذرين التربيعيّين الأساسيّين لـ $أ^٢$ وَ $ب^٢$، والعامل الآخر هو $(أ - ب)$، الذي يُمثّل الفرق بين الجذرين التربيعيين الأساسيين.

تحقق من فهمك

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

٣أ) ٢ص^{٤} − ٥٠ ٢(ص^{٢} − ٥)(ص^{٢} + ٥) **٣ب)** ٦س^{٤} − ٩٦ ٦(س − ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)

٣جـ) (٢م + ١)(م + ٥)(م − ٥) **٣جـ)** ٢م^{٣} + م^{٢} − ٥٠م − ٢٥

٣د) ر^{٣} + ٦ر^{٢} + ١١ر + ٦٦ (ر^{٢} + ١١)(ر + ٦)

حل معادلات بالتحليل: يمكنك بعد التحليل تطبيق خاصية الضرب الصفري على المعادلة المكتوبة على صورة ناتج ضرب عدة عوامل يساوي صفرًا.

مثال ٤ من اختبار

ما القيمة الموجبة لـ س التي تحقق المعادلة ص = س^{٢} − $\frac{٩}{١٦}$، إذا كانت ص = ٠؟

أ) $\frac{-٩}{٤}$ **ب)** صفر **جـ)** $\frac{٣}{٤}$ **د)** $\frac{٩}{٤}$

اقرأ الفقرة:

عوّض عن ص بـ صفر، ثم حل المعادلة.

حل الفقرة:

ص = س^{٢} − $\frac{٩}{١٦}$	المعادلة الأصلية
٠ = س^{٢} − $\frac{٩}{١٦}$	عوّض عن ص بـ صفر
٠ = س^{٢} − $(\frac{٣}{٤})^{٢}$	اكتب على صورة أ^{٢} − ب^{٢}
٠ = (س + $\frac{٣}{٤}$)(س − $\frac{٣}{٤}$)	تحليل الفرق بين مربعين
٠ = س + $\frac{٣}{٤}$ أو ٠ = س − $\frac{٣}{٤}$	خاصية الضرب الصفري
س = $\frac{-٣}{٤}$ س = $\frac{٣}{٤}$	الإجابة الصحيحة جـ

ارشادات للدراسة

استعمال طريقة أخرى

يمكن استعمال طريقة أخرى للحل بتعويض البدائل في المعادلة.

تحقق من فهمك

٤) حُلَّ المعادلة: ١٨س^{٣} = ٥٠ س؟ جـ

أ) ٠، $\frac{٥}{٣}$ **ب)** $\frac{-٥}{٣}$، $\frac{٥}{٣}$ **جـ)** $\frac{-٥}{٣}$، ٠، $\frac{٥}{٣}$ **د)** $\frac{-٥}{٣}$، $\frac{٥}{٣}$، ١

تأكد

الأمثلة ١-٣

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١) س^{٢} − ٩ (س + ٣)(س − ٣) ٢) ٤أ^{٢} − ٢٥ (٢أ + ٥)(٢أ − ٥) ٣) ٢ل^{٣} − ١٦٢ل

٤) و^{٤} − ٨١ ٥) ٢د^{٤} − ٣٢ف^{٤} ٦) ٢٠ر^{٤} − ٤٥ن^{٤}

٧) ٢٥٦ن^{٤} − جـ^{٤} ٨) ٢جـ^{٣} + ٣جـ^{٢} − ٢جـ − ٣ ٩) ٣ن^{٣} + ٢ن^{٢} − ٤٨ن − ٣٢

مثال ٤

٧) ١٦ن^{٢} + جـ^{٢})(٤ن + جـ)(٤ن − جـ)

٨) (جـ + ١)(جـ − ١) (٢جـ + ٣)

٩) (ن + ٤)(ن − ٤)(٣ن + ٢)

١٠) **سيارات:** قد يكون الأثر الذي تتركه عجلات السيارة ناجمًا عن وقوفها المفاجئ. والمعادلة $\frac{١}{٢٤}$ع^{٢} = ف تعبِّر عن سرعة السيارة التقريبية (ع) بالميل/ ساعة، علمًا بأن (ف) هو طول الأثر الذي تتركه الإطارات بالقدم على سطح جاف. إذا كان طول أثر الإطارات ٥٤ قدمًا، فكم كانت سرعة السيارة عند استعمال الكوابح؟ ٣٦ ميلًا / ساعة

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: يجب على الطلاب ملاحظة أنه بعد إخراج (ق.م.أ)، وتطبيق طريقة تحليل الفرق بين مربعين لمرةٍ واحدةٍ، يجب أن يكون أحد العوامل أوليًّا.

حَلُّ المعادلات بالتحليل إلى العوامل

مثال ٤ يُبيّن طريقة اختيار الإجابة الصحيحة لسؤال اختيار من متعدد، على حل المعادلات بالتحليل.

مثال إضافي

٤ في المعادلة: ص = ك^{٢} − $\frac{٤}{٢٥}$، أي القيم الآتية لِـ (ك) تجعل ص = ٠؟ د

أ) $\frac{٢}{٢٥}$ **جـ)** صفر

ب) $\frac{٤}{٢٥}$ **د)** $\frac{٢}{٥}$ −

٣ التدريب

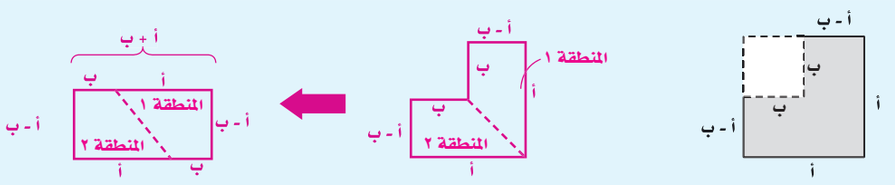
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ − ١٠؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المكانيون والبصريون: ارسم النماذج الهندسية المبيّنة أدناه على السبورة، واطلب إلى الطلاب استعمال مربعاتهم الورقية والمقصات لعمل نموذج لِـ أ^{٢} ثم إزالة المربع ب^{٢} منه، ثم اطلب إليهم تفسير كيف يوضِّح نموذجهم أن: (أ − ب) (أ + ب) = أ^{٢} − ب^{٢}.



إرشادات للمعلم الجديد

حسٌّ منطقي: إذا لم ينتبه الطلاب إلى أن الكسور الاعتيادية يمكن أن تكون مربعات كاملة، فذكّرهم بأنه إذا كان كلٌّ من البسط والمقام مربعًا كاملًا، فإن الكسر يكون مربعًا كاملًا.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ٤٤ يستعمل الطلاب الجبر والمعلومات المنظمة في جدول؛ لاستكشاف صورة ثلاثية الحدود التي تكون مربعًا كاملاً.

إجابات:

٢٠) ٧(هـ^{٢} + ل^{٢})(هـ + ل) (هـ – ل)

٢١) ٦ ك^{٢} (هـ^{٢} +٣ك) (هـ^{٢} – ٣ك)

٢٢) ٥ هـ (هـ +٢) (هـ – ٢)

٢٣) (ف +٨) (ف – ٨) (ف +٢)

٢٤) ٣ ر (ر+٨) (ر – ٨)

٢٥) ١٠ ك (ك+١١) (ك – ١١)

٢٦) ٣س (ن^{٢} + ٣س) (ن^{٢} –٣س)

٢٧) ل^{٣} ر (ر+١) (ر–١) (ر^{٢} +١)

٢٨) ٨ جـ (جـ+١) (جـ –١)

٢٩) (ر+١٠) (ر – ١٠) (ر – ٥)

٣٠) (ن +١) (ن–١) (٣ن –٧)

٣١) (م +٣) (م –٣) (٤م +٩)

٣٢) ٣ (م^{٤} +٨١)

٣٣) س (س +٦) (س –٦) (س +٦)

٣٤) ٣ (م +٥) (م –٥) (٥م +٤)

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي: ٢٠-٣٤ انظر الهامش

١١) ل^{٢} – ١٢١

١٢) ر^{٤} – ك^{٤}

١٣) ٦ ن^{٤} – ٦

١٤) ر^{٢} – ٩ ن^{٢}

١٥) ٢ جـ^{٢} – ٣٢ د^{٢}

١٦) هـ^{٣} – ١٠٠ هـ

١٧) هـ^{٤} – ٢٥٦

١٨) ٢ن^{٣} – ن^{٢}–١٦٢ن+٨١

١٩) س^{٢} – ٤ص^{٢}

٢٠) ٧ هـ^{٤} – ٧ ل^{٤}

٢١) ٦ ك^{٢} هـ^{٤} – ٥٤ ك^{٤}

٢٢) ٥ هـ^{٣} – ٢٠ هـ

٢٣) ف^{٣} + ٢ ف^{٢}–٦٤ ف–١٢٨

٢٤) ٣ ر^{٣} – ١٩٢ ر

٢٥) ١٠ ك^{٣} – ١٢١٠ ك

٢٦) ٣ س ن^{٤} – ٢٧س^{٣}

٢٧) ل ر^{٥} – ل ر^{٣}

٢٨) ٨ جـ^{٣} – ٨جـ

٢٩) ر^{٣}–٥ ر^{٢}–١٠٠ ر+٥٠٠

٣٠) ٣ن^{٣} – ٧ ن^{٢} – ٣ن +٧

٣١) ٤ م^{٣} + ٩ م^{٢} – ٣٦ م – ٨١

٣٢) ٣ م^{٤} + ٢٤٣

٣٣) س^{٤} + ٦ س^{٣} – ٣٦ س^{٢}–٢١٦س

٣٤) ١٥ م^{٣}+١٢ م^{٢}–٣٧٥ م–٣٠٠

مثال ٤

الربط مع الحياة

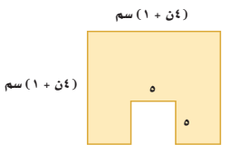
على الرغم من انتشار الإنترنت في معظم المنازل وأماكن العمل ليكون وسيلة للبحث والاطلاع، إلا أن البعض لايزال يفضل تكوين معلوماته من قراءة الكتب وارتياد المكتبات.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات بالتحليل

تذكّر أن تجعل أحد طرفي المعادلة صفرًا قبل حل المعادلة بالتحليل .

٣٥) **هندسة:** يمثّل الشكل المجاور مربعًا قُطِعَ منه مربع آخر.



أ) اكتب عبارة تمثّل مساحة المنطقة المظللة. (٤ن+١)^{٢}–٥^{٢}

ب) أوجد بُعدي مستطيل له مساحة المنطقة المظللة نفسها، مفترضًا أنهما يُمثّلان بثنائيتي حد بمعاملات صحيحة.

٣٦) **مبانٍ:** أراد زياد بناء ملحق في باحة منزله الخلفية، بُعداه ٨م ، ٨م . ثم قرّر تقليص طول أحد البعدين وزيادة البعد الآخر بالعدد نفسه من الأمتار. فإذا كانت مساحة الملحق بعد تقليصه تساوي ٦٠م^{٢}، فما بُعداه ؟ ٦ م، ١٠ م

٣٧) **كتب:** نشرت إحدى دور النشر كتابًا جديدًا، وتمثّل المعادلة ع = –٢٥م^{٢}+ ١٢٥م مبيعات الكتاب، حيث (ع) تمثّل عدد النسخ المبيعة، و (م) عدد الأشهر التي بيع فيها الكتاب.

أ) في أي شهر يُتوقّع أن تنفذ النسخ المعروضة من الكتاب؟ ٥

ب) متى وصلت المبيعات إلى ذروتها؟ في منتصف الشهر الثالث ٢,٥

جـ) ما عدد النسخ المبيعة في الذروة؟ حوالي ١٥٦ كتابًا

حل كلّ معادلة مما يأتي بالتحليل، ثمّ تحقق من صحة الحل:

٣٨) ٣٦ل^{٢} = ١٢١ ، $\frac{١١}{٦}$ ، $-\frac{١١}{٦}$

٣٩) ١٠٠ = ٢٥س^{٢} ٢، –٢

٤٠) ٤ص^{٢} – $\frac{٩}{١٦}$ = ٠ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $-\frac{٣}{٨}$

٤١) $\frac{١}{٤}$ب^{٢} = ١٦ ٨، –٨

٤٢) ٨١ – $\frac{١}{٢٥}$ س^{٢} = ٠

٤٣) ٩د^{٢} – ٨١ = ٠ ٣، –٣

٤٤) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة ثلاثية الحدود التي تمثّل مربعًا كاملاً.

أ) **جدوليًا:** انسخ الجدول أدناه وأكمله بتحليل كل ثلاثية حدود، ثم اكتب أول وآخر حد في كثيرة الحدود على صورة مربعات كاملة.

كثيرة الحدود	تحليل كثيرة الحدود	الحد الأول	الحد الأخير	الحد الأوسط
٤س^{٢}+١٢س+٩	(٢س+٣)(٢س+٣)	٤س^{٢}=(٢س)^{٢}	٩=٣^{٢}	١٢س=٢×٢س×٣
٩س^{٢}–٢٤س+١٦	(٣س–٤)(٣س–٤)	٩س^{٢}=(٣س)^{٢}	١٦=٤^{٢}	–٢٤س=–٣×٢×٤س
٤س^{٢}–٢٠س+٢٥	(٢س–٥)(٢س–٥)	٤س^{٢}=(٢س)^{٢}	٢٥=٥^{٢}	–٢٠س=–٢×٢×٥س
١٦س^{٢}+٢٤س+٩	(٤س+٣)(٤س+٣)	١٦س^{٢}=(٤س)^{٢}	٩=٣^{٢}	٢٤س=٢×٤×٣س

٣٥ ب) (٤ن+٦)
(٤ن–٤)

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١١ – ٣٥ ، ٤٥ ، ٤٨ – ٦٢
ضمن ضمن المتوسط	١١ – ٣٥ (فردي) ، ٣٦ – ٣٧ ، ٣٩ – ٤٣ (فردي) ، ٤٤ – ٤٥، ٤٨ – ٦٢
فوق فوق المتوسط	٢٦ – ٦٢

ب) تحليليًا: اكتب الحد الأوسط في كل كثيرة حدود باستعمال الجذور التربيعية للمربعات الكاملة للحدين الأول والأخير. انظر الجدول

جـ) جبريًا: اكتب قاعدة لثلاثية الحدود التي تمثّل مربعًا كاملاً.

د) لفظيًا ما الشروط الواجب توافرها في ثلاثية حدود لتصنَّف على أنها مربع كامل؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٥) **اكتشف الخطأ:** حلَّلت كلٌّ من هلا ومنى العبارة الآتية، فأيهما إجابتها صحيحة؟ فسِّر ذلك.

هلا	منى
١٦س^{٤} – ٢٥ص^{٢} = (٤س – ٥ص)(٤س + ٥ص)	١٦س^{٤} – ٢٥ص^{٢} = (٤س^{٢} – ٥ص)(٤س^{٢} + ٥ص)

٤٦) **تحدٍّ:** بسِّط العبارة: ٩ – (ك+٣)^{٢} بتحليلها بالفرق بين مربعين. [٣+(ك+٣)][٣–(ك+٣)] = (ك+٦)(–ك) = –ك^{٢} – ٦ك

٤٧) **تحدٍّ:** حلّل: س^{١٦} – ٨١ (س^{٤} – ٣)(س^{٤} + ٣)(س^{٨} + ٩)

٤٨) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. وأعطِ مثالاً مضادًّا للتحقق من إجابتك: "أي ثنائية حد جميع حدودها مربعات كاملة قابلة للتحليل". خاطئة؛ أ^{٢} + ب^{٢}

٤٩) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا لثنائية حد نحتاج عند تحليلها تحليلاً تامًّا إلى تكرار قاعدة الفرق بين مربعين، ثم حلّلها. إجابة ممكنة: س^{٤} – ١٦ = (س – ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)

٥٠) **اكتب:** لماذا لا تتضمن قاعدة الفرق بين مربعين حدًّا متغيرًا في الوسط؟

تدريب على اختبار

٥١) إذا كان أحد جذري المعادلة ٢س^{٢} + ١٣س = ٢٤ هو –٨ فما الجذر الآخر؟ ب

أ) $-\frac{٣}{٢}$ ج) $-\frac{٢}{٣}$

ب) $\frac{٣}{٢}$ د) $-\frac{٢}{٣}$

٥٢) أي ممّا يأتي يمثّل مجموع حليّ المعادلة س^{٢} + ٣س = ٥٤؟ أ

أ) –٣ ج) ٣

ب) –٢١ د) ٢١

مراجعة تراكمية

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي، وإذا لم يمكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة، فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٤)

٥٣) ٥س^{٢} – ١٧س + ١٤ (٥س – ٧)(س – ٢) ٥٤) ٥أ^{٢} – ٣أ + ١٥ أولية

٥٥) ١٠س^{٢} – ٢٠س ص + ١٠ص^{٢} ١٠(س – ص)(س – ص)

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلِّك: (الدرس ٧-٣)

٥٦) ن^{٢} – ٩ن = –١٨ ٣، ٦ ٥٧) ١٠ + أ^{٢} = –٧أ –٥، –٢

٥٨) ٢٢س – س^{٢} = ٩٦ ٦، ١٦

أوجد ناتج كلًّا ممّا يأتي: (الدرس ٦-٧)

٥٩) (س + ٣)(س + ٣) س^{٢} + ٦س + ٩ ٦٠) (٢س – ٥)^{٢} ٤س^{٢} – ٢٠س + ٢٥

٦١) (٦س – ١)^{٢} ٣٦س^{٢} – ١٢س + ١ ٦٢) (٤س + ٥)(٤س + ٥) ١٦س^{٢} + ٤٠س + ٢٥

٤٤ جـ) (أ + ب)(أ + ب) = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}

(أ – ب)(أ – ب) = أ^{٢} – ٢أب + ب^{٢}

٤٤ د) يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، والحد الأوسط يساوي مثلي ناتج ضرب الجذرين التربيعيين للحدين الأول والأخير بإشارة موجبةٍ أو سالبة.

٤٥) منى؛ إجابة ممكنة: عند التحقق من إجابة هلا يكون ناتج الضرب ١٦ س^{٢} – ٢٥ص^{٢}

٥٠) عند ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، يكون كلّ من الحدين الأوسطين والطرفين معكوسًا للآخر، وعند جمع هذين الحدين فإن مجموعهما يساوي صفرًا.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: تحقّق من قدرة الطلاب على تفسير الخطأ الذي وقعت فيه هلا في السؤال ٤٥، وأكّد لهم أن هذا الخطأ شائع، واسألهم: ما الذي يمكن فعله لتجنّب الوقوع في هذا الخطأ؟

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب كتابة عوامل ١٨س^{٢} – ٥٠ في ورقة، وأن يُسلِّموك أعمالهم قبل خروجك من غرفة الصف. ٢(٣س + ٥)(٣س – ٥).

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين (٧-٤ ، ٧-٥) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٣)، ص (٣١)

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب حلَّ المعادلة: س^{٣} – ٤س = ١٢ – ٣س^{٢} بالتحليل إلى العوامل، ثم اطلب إليهم التحقّق من حلولهم. –٣، –٢، ٢

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٧ - ٥

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٢٢)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٥ تدريبات إعادة التعليم

المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

تحليل الفرق بين مربعين: ثنائية الحد $أ^٢ - ب^٢$ تُسمّى الفرق بين مربعين.

تبيّن القاعدة الآتية كيفية تحليل الفرق بين مربعين.

الفرق بين مربعين	$أ^٢ - ب^٢ = (أ + ب)(أ - ب) = (أ - ب)(أ + ب)$

مثال ١ حلّل كلّ كثيرة حدود ممّا يأتي:

أ) $ن^٢ - ٦٤$

$= ن^٢ - ٨^٢$　اكتب العبارة في صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= (ن + ٨)(ن - ٨)$　تحليل الفرق بين مربعين

ب) $٤م^٢ - ٨١ص^٢$

$٤م^٢ - ٨١ص^٢$

$= (٢م)^٢ - (٩ص)^٢$　اكتب العبارة في صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= (٢م - ٩ص)(٢م + ٩ص)$　تحليل الفرق بين مربعين

مثال ٢ حلّل كلّ كثيرة حدود ممّا يأتي:

أ) $١٥٠ أ^٢ - ٧٢$

$٧٢ أ^٢ - ١٥٠$

$= ٢(٢٥ أ^٢ - ٣٦)$　حلّل بإخراج (ق. م. أ)

$= ٢[(٥ أ)^٢ - (٦)^٢]$　اكتب في صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= ٢(٥ أ + ٦)(٥ أ - ٦)$　تحليل الفرق بين مربعين

ب) $٤ص^٤ + ٨ص^٣ - ٤ص^٢ - ٨ص$

$٤ص^٤ + ٨ص^٣ - ٤ص^٢ - ٨ص$　كثيرة الحدود الأصلية

$= ٤ص(ص^٣ + ٢ص^٢ - ص - ٢)$　حلّل بإخراج (ق. م. أ)

$= ٤ص[(ص^٣ + ٢ص^٢) - (ص + ٢)]$　جمع الحدود

$= ٤ص[ص^٢(ص + ٢) - (ص + ٢)]$　حلّل بإخراج (ق. م. أ)

$= ٤ص[(ص^٢ - ١)(ص + ٢)]$　حلّل بتجميع الحدود

$= ٤ص(ص - ١)(ص + ١)(ص + ٢)$　تحليل الفرق بين مربعين

تمارين

حلّل كلّ كثيرة حدود فيما يأتي:

١) $ص^٢ - ٨١$　٢) $م^٢ - ١٠٠$　٣) $١٦ن^٢ - ٢٥$

$(ص + ٩)(ص - ٩)$　$(م + ١٠)(م - ١٠)$　$(٤ن + ٥)(٤ن - ٥)$

٤) $٣٦ - ١٠٠ص^٢$　٥) $١٦ أ^٢ - ٩ب^٢$　٦) $٢٢٥ب^٢ - أ^٢$

$٤(٣ص - ٥ص)(٣ص + ٥ص)$　$(٤ - ٣ب)(٤ + ٣ب)$　$(١٥ب - أ)(١٥ب + أ)$

٧) $٧٢ن^٢ - ٥٠$　٨) $-٢ + ٢ص^٢$　٩) $-٨١ + أ^٢$

$٢(٦ن + ٥)(٦ن - ٥)$　$٢(ص - ١)(ص + ١)$　$(أ - ٢)(أ + ٢)(أ^٢ + ٩)$

١٠) $٦ن^٢ - ٥٤$　١١) $٨ص^٣ - ٢٠٠$　١٢) $٤ص^٣ - ١٠٠ص$

$٦(١ + ٢أ)(١ - ٢أ)$　$٨(ص + ٥)(ص - ٥)$　$٤ص(ص + ٥)(ص - ٥)$

١٣) $٢ص^٣ - ٣٢ص$　١٤) $٨م^٣ - ١٢٨م$　١٥) $٢أ^٣ - ٩٨أب^٢$

$٢ص(ص^٢ + ٤)(ص + ٤)$　$٨م(م + ٤)(م - ٤)$　$٢(أ - ٧ب)(أ + ٧ب)$

١٦) $١٨ص^٢ - ٧٢ص^٤$　١٧) $١٦٩ص^٢ - ص$　١٨) $٣ص^٣ + ٦ص^٢ - ٣ص - ٦ص$

$١٨ص^٢(١ - ٢ص)(١ + ٢ص)$　$ص(١٣ص + ١)(١٣ص - ١)$　$٣ص(ص - ١)(ص + ١)(ص + ٢)$

تدريبات حل المسألة (٢٤)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٥ تدريبات حل المسألة

المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

١) **أعمال خيرية:** تقوم جمعية خيرية ببيع بطاقات لصالح بناء مشروع خيري للأطفال. العبارة الآتية تساعد على حساب العدد المرجّح للأشخاص الذين سيشترون البطاقات:

$٨١ أ^٢ - ٣٦ ب^٢$

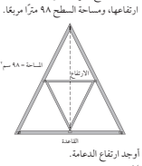
حلّل هذه العبارة تحليلًا كاملًا.

$٩(١٣ أ + ٢ب)(١٣ أ - ٢ب)$

٢) **بصريات:** العاكس الموجود داخل مصباح يدوي على شكل قطع مكافئ معادلته $ص = س^٢ - ٢٥$. أوجد نقاط تقاطع العاكس مع عدسة المصباح، بإيجاد قيم س عندما ص = صفر.

٥، -٥

٣) **هندسة عمارة:** بيّن الشكل أدناه دعامة على شكل مثلّث لسطح مُرتفة. طول قاعدة الدعامة يساوي ارتفاعها، ومساحة السطح ٩٨ مترًا مربعًا.



أوجد ارتفاع الدعامة.

١٤م

٤) **متحدث:** تمثّل الدالة $ف(ن) = -١٦ن^٢ + ٥٧٦$ المسافة التي يقطعها جسم بعد سقوطه سقوطًا حُرًّا من السكون من منطاد ارتفاعه ٥٧٦ قدمًا فوق سطح الأرض. بعد كم ثانية يصطدم الجسم بالأرض؟

بعد ٦ ثوانٍ

٥) **تصميم:** تريد مريم شراء بساط مستطيل الشكل، مساحته ٨٠ قدمًا مربعة. لم تستطع تذكّر طول البساط وعرضه، ولكنها تذكّرت أنّ طوله يزيد ٨ على عدد معيّن، وعرضه ينقص ٨ عن العدد نفسه.

أ) اكتب معادلة تربيعية باستعمال المعلومات المعطاة.

$ص^٢ - ٦٤ = ٨٠$

أو $ص^٢ - ١٤٤ = ٠$

ب) ما طول البساط، وما عرضه؟

٢٠ قدمًا، ٤ أقدام

التدريبات الإثرائية (٢٥)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٥ التدريبات الإثرائية

تحليل ثلاثيات حدود من الدرجة الرابعة

بعض ثلاثيات الحدود في الصورة $أ^٤ + أب^٢ + ب^٤$ يمكنك كتابتها في صورة فرق بين مربعين، ثم تحليلها.

مثال حلّل $٤س^٤ - ٣٧س^٢ص^٢ + ٩ص^٤$

الخطوة ١، أوجد الجذرين التربيعين لكلٍّ من الحدّين الأول والأخير.

$\sqrt{٤س^٤} = ٢س^٢$　$\sqrt{٩ص^٤} = ٣ص^٢$

الخطوة ٢، أوجد مثلّي ناتج ضرب الجذرين التربيعيين.

$٢(٢س^٢)(٣ص^٢) = ١٢س^٢ص^٢$

الخطوة ٣، افصل الحد الأوسط إلى قسمين، بحيث يكون القسم الأول إجابة للخطوة ٢ أو عكسها، والقسم الآخر عكس مربع كامل.

$-٣٧س^٢ص^٢ = -١٢س^٢ص^٢ - ٢٥س^٢ص^٢$

الخطوة ٤، أعد كتابة ثلاثية الحدود في صورة فرق بين مربعين، ثم حلّل.

$٤س^٤ - ٣٧س^٢ص^٢ + ٩ص^٤ = (٤س^٤ - ١٢س^٢ص^٢ + ٩ص^٤) - ٢٥س^٢ص^٢$

$= (٢س^٢ - ٣ص^٢)^٢ - ٢٥س^٢ص^٢$

$= [(٢س^٢ - ٣ص^٢) + ٥س ص][(٢س^٢ - ٣ص^٢) - ٥س ص]$

$= (٢س^٢ + ٥س ص - ٣ص^٢)(٢س^٢ - ٥س ص - ٣ص^٢)$

$= (٢س - ص)(س + ٣ص)(٢س + ص)(س - ٣ص)$

حلّل كلّ كثيرة حدود فيما يأتي:

١) $س^٤ + س^٢ص^٢ + ص^٤$　٢) $س^٤ + س^٢ + ١$

$(س^٢ + س ص + ص^٢)(س^٢ - س ص + ص^٢)$　$(س^٢ + س + ١)(س^٢ - س + ١)$

٣) $٩س^٤ - ١٥س^٢ + ١$　٤) $١٦ أ^٤ - ١٧ + ١$

$(٣س^٢ + ٣س - ١)(٣س^٢ - ٣س - ١)$　$(٤أ^٢ - ١)(أ^٢ + ١)(٤أ^٢ + ١)(أ^٢ - ١)$

٥) $٤أ^٤ - ١٣أ^٢ + ١$　٦) $٩أ^٤ + ٢٦أ^٢ب^٢ + ٢٥ب^٤$

$(٢أ^٢ + ٣أ - ١)(٢أ^٢ - ٣أ - ١)$　$(٣أ^٢ + ٥ب^٢ + ٢أب)(٣أ^٢ + ٥ب^٢ - ٢أب)$

٧) $٤ص^٤ - ٢١ص^٢ص^٢ + ٩ص^٤$　٨) $٤أ^٤ - ٢٩أ^٢ب^٢ + ٢٥ب^٤$

$(٣ص^٢ + ٣ص ص - ٣ص^٢)(٣ص^٢ - ٣ص ص - ٣ص^٢)$　$(٢ + ٥أ)(١ - ب)(٢ - ٥أ)(١ + ب)$

كتاب التمارين (١٥)　دون ضمن فوق

٧ - ٥ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

١) $ك^٢ - ١٠٠$　٢) $٨١ - ر^٢$　٣) $١٦ ل^٢ - ٣٦$

$(ك + ١٠)(ك - ١٠)$　$(٩ + ر)(٩ - ر)$　$(٤ل + ٦)(٤ل - ٦)$

٤) $٤ س^٢ + ٢٥$　٥) $١٤٤ - ٩ ف^٢$　٦) $٣٦ جـ^٢ - ٤٩ هـ^٢$

أولية　$(١٢ + ٣ ف)(١٢ - ٣ ف)$　$(٦ جـ + ٧هـ)(٦ جـ - ٧ هـ)$

٧) $١٢١ م^٢ - ١٤٤ ل^٢$　٨) $٣٢ - ٨ ص^٢$　٩) $٢٤ أ^٢ - ٥٤ ب^٢$

$(١١ م - ١٢ ل)(١١ م + ١٢ ل)$　$٨(٢ - ص)(٢ + ص)$　$٦(٢أ^٢ - ٣ب)(٢أ^٢ + ٣ب)$

١٠) $٣٢ ن^٢ - ١٨ و^٢$　١١) $٩ د^٢ - ٣٢$　١٢) $٣٦ ع^٢ - ٩ غ$

$٢(٤ن - ٣و)(٤ن + ٣و)$　أولية　$٩غ(٤ع + ١)(٤ع - ١)$

١٣) $٤٥ ك^٢ - ٢٠$　١٤) $١٠٠ب^٢ - ٣٦$　١٥) $٣ ن^٢ - ٤٨ ن^٤$

$٥ ك(٣ ك + ٢)(٣ ك - ٢)$　$٤(٥ ب + ٣)(٥ ب - ٣)$　$٣ ن^٢(ن + ٤)(ن - ٤)$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية بالتحليل، وتحقّق من صحة حلك.

١٦) $٤ ص^٢ = ٨١$　١٧) $٦٤ ك^٢ = ٩$　١٨) $٩٨ ب^٢ - ٥٠ = ٠$

$\pm \frac{٩}{٢}$　$\pm \frac{٣}{٨}$　$\pm \frac{٥}{٧}$

١٩) $٣٢ - ١٦٢ ك^٢ = ٠$　٢٠) $ن^٢ - \frac{٦٤}{١٢١} = ٠$　٢١) $\frac{١٦}{٤٩} - و^٢ = ٠$

$\pm \frac{٤}{٩}$　$\pm \frac{٨}{١١}$　$\pm \frac{٤}{٧}$

٢٢) $\frac{١}{٢}ص^٢ - ٢٥ = ٠$　٢٣) $٢٧ هـ^٢ = ٤٨ هـ$　٢٤) $٧٥ جـ^٢ = ١٤٧ جـ$

± ٣٠　$\pm \frac{٤}{٣}$　$\pm \frac{٧}{٥}$، ٠

٢٥) **ثاقب،** تتكسّر الصخور وتسقط من ارتفاع ١٢٥ مترًا منحدرة في اتجاه الأرض. وتُعطى المسافة (ف) التي تقطعها الصخرة في (ن) ثانية في أثناء سقوطها بالمعادلة $ف = ٥ن^٢$. كم ثانية تحتاج الصخرة لتُرتطم بالأرض؟ ٥ ثوانٍ

٢٦) **حوادث،** رأى عادل وسعيد آثار الإطارات على الشارع لمسافة ١٥٠ قدمًا، فقال عادل: إن هذه الآثار تدل على أن السائق يقود السيارة دون السرعة القصوى المسموح بها على الطريق، والتي تبلغ ٦٥ ميلًا/ ساعة. وقال سعيد: إن السرعة ستكون ٧٠ميلًا/ ساعة. استعمل المعادلة $\frac{١}{٢٠}ع^٢ = ف$، حيث (ع)سرعة السيارة، و(ف) طول آثار الإطارات؛ لتبيّن أيهما كلامه صحيح.

عادل، ٦٠ ميلًا/ ساعة

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٦-٧

إيجاد ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما.

الدرس ٦-٧

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.

حل معادلات تتضمن مربعاتٍ كاملةً.

ما بعد الدرس ٦-٧

حل معادلات تربيعية باستعمال القانون.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- إذا كان الارتفاع الابتدائي ٢٠ مترًا، فما المعادلة التي ستكتبها لتحديد الزمن الذي يحتاج إليه جسم للوصول إلى الأرض؟ $-٥ن^٢ + ٢٠ = ٠$
- حل المعادلة.
$-٥ (ن - ٢) (ن + ٢) = ٠$؛ ٢ ثانية
- كيف يمكنك استعمال تعريف الجذر التربيعي لحل المعادلة؟
$-٥ن^٢ + ٢٠ = ٠$؛ $-٥ن^٢ = -٢٠$
$ن^٢ = ٤$، $ن = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$، بما أن الإجابة السالبة ليست معقولة في هذه الحالة؛ لذا فالحل هو $ن = ٢$

٦-٧ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

فيما سبق

درست إيجاد ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

والآن

- أحلّل ثلاثية الحدود التي على صورة مربع كامل.
- أحلّ معادلات تتضمن مربعات كاملة.

المفردات

المربع الكامل لثلاثية حدود

obeikaneducation.com

لماذا؟

يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها في الفراغ؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة $٠ = -٥ن^٢ + ل_٠$، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي ($ل_٠$) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثّل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل: تعلمت قاعدة مفكوك ثنائيتي الحد $(أ + ب)^٢$، $(أ - ب)^٢$. تذكّر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

$$(أ + ب)^٢ = (أ + ب)(أ + ب)$$
$$= أ^٢ + أب + أب + ب^٢$$
$$= أ^٢ + ٢أب + ب^٢$$

$$(أ - ب)^٢ = (أ - ب)(أ - ب)$$
$$= أ^٢ - أب - أب + ب^٢$$
$$= أ^٢ - ٢أب + ب^٢$$

تكون نواتج الضّرب هذه على صورة **مربع كامل لثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملًا.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلاً ثلاثية الحدود $١٦س^٢ + ٢٤س + ٩$ تشكّل مربعًا كاملًا، كما هو موضح أدناه.

$١٦س^٢ + ٢٤س + ٩$

- هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم؛ لأن $١٦س^٢ = (٤س)^٢$.
- هل الحدّ الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي لكل من الحدين الأول والأخير؟ نعم؛ لأن $٢٤س = ٢(٤س)(٣)$.
- هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأن $٩ = ٣^٢$.

مفهوم أساسي تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا

أضف إلى مطويتك

الرموز:

$$أ^٢ + ٢أب + ب^٢ = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)^٢$$
$$أ^٢ - ٢أب + ب^٢ = (أ - ب)(أ - ب) = (أ - ب)^٢$$

أمثلة:

$$س^٢ + ٨س + ١٦ = (س + ٤)(س + ٤) = (س + ٤)^٢$$
$$س^٢ - ٦س + ٩ = (س - ٣)(س - ٣) = (س - ٣)^٢$$

مصادر الدرس ٧ - ٦

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (٨٦)	• تنويع التعليم ص (٨٦)
كتاب التمارين	ص (١٦)	ص (١٦)	ص (١٦)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٦) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٨) • التدريبات الإثرائية، ص (٢٩)

مثال ١ تمييز ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملاً وتحليلها

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، و إذا كانت كذلك فحلّلها.

أ) $٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٤ص^{٢} = (٢ص)^{٢}$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٩ = ٣^{٢}$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي ٢ (٢ص) (٣)؟ نعم، $١٢ص = ٢(٢ص)(٣)$.

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة $٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩$ ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملاً.

$٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = (٢ص)^{٢} + ٢(٢ص)(٣) + ٣^{٢}$ اكتب العبارة على صورة $أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

$= (٢ص + ٣)^{٢}$ حلّل باستعمال القاعدة

ب) $٩س^{٢} - ٦س + ٤$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٩س^{٢} = (٣س)^{٢}$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٤ = ٢^{٢}$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $-٢(٣س)(٢)$؟ لا، $-٦س \neq -٢(٣س)(٢)$.

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود $٩س^{٢} - ٦س + ٤$ لا تشكّل مربعًا كاملاً.

إرشادات للدراسة

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملاً

إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً، لذا ليس من الضروري التحقق من الشروط الأخرى.

تحقق من فهمك

أ) $٩ص^{٢} + ٢٤ص + ١٦$ **ب)** $٢أ^{٢} + ١٠أ + ٢٥$ لا

أ) نعم؛ $(٣ص + ٤)(٣ص + ٤)$

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تامًّا إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لا يمكن تحليلها فإنها تكون أولية.

ملخص المفهوم طرق التحليل

أضف إلى مطويتك

الخطوات	عدد الحدود	أمثلة
الخطوة ١: حلّل بإخراج (ق . م . أ)	أي عدد	$٤س^{٣} + ٢س^{٢} - ٦س = ٢س(٢س^{٢} + س - ٣)$
الخطوة ٢: تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقًا بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.	٢ أو ٣	$٩س^{٢} - ١٦ = (٣س + ٤)(٣س - ٤)$ $١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩ = (٤س + ٣)^{٢}$
الخطوة ٣: طبّق أنماط التحليل لـ $س^{٢} + ب س + جـ$ أو $أ س^{٢} + ب س + جـ$ (كثيرة حدود بصورة عامة)، أو حلّل بتجميع الحدود.	٣ أو ٤	$س^{٢} - ٨س + ١٢ = (س - ٢)(س - ٦)$ $١٢ص^{٢} + ٩ص + ٨ص + ٦$ $= (١٢ص^{٢} + ٩ص) + (٨ص + ٦)$ $= ٣ص(٤ص + ٣) + ٢(٤ص + ٣)$ $= (٤ص + ٣)(٣ص + ٢)$

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل

المثال ١ يُبيّن طريقة تمييز ثلاثية الحدود التي تُشكّل مربعًا كاملًا وتحليلها.

المثال ٢ يُبيّن كيفية استعمال طرق تحليل متنوعة؛ لتحليل كثيرات حدود تحليلًا تامًّا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

١ **حدّد ما إذا كانت كلٌّ من ثلاثيتي الحدود الآتيتين تُشكّلان مربعًا كاملًا أم لا، وإذا كانت كذلك فحللها.**

أ) $٢٥س^{٢} - ٣٠س + ٩$

نعم؛ $(٥س - ٣)^{٢}$

ب) $٤٩ص^{٢} + ٤٢ص + ٣٦$ لا

تنبيه!

تجنب الأخطاء: يجب تذكير الطلاب بالنظر بدقة إلى معامل الحد الثاني في ثلاثية الحدود التي تُشكّل مربعًا كاملًا؛ حيث إن إشارته تُحدّد ما إذا كان العاملان على الصورة $(أ + ب)$ أو $(أ - ب)$.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: في مدونة الصف، اطلب إلى الطلاب عمل مداخلة يفسّرون فيها العلاقة بين تربيع ثنائية حد، وتحليل ثلاثية حدود تُشكّل مربعًا كاملًا.

مثال ٢ التحليل التام

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب "أولية":

أ) $٥س^{٢} - ٨٠$

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدين $٥س^{٢}$، -٨٠ هو ٥، حلّل ، بإخراج (ق. م. أ).

الخطوة ٢: بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقًا بين مربعين.

$٥س^{٢} - ٨٠ = ٥(س^{٢} - ١٦)$ (ق. م. أ) للحدين ٥

$= ٥(س^{٢} - ٤^{٢})$ $س^{٢} = س \times س$ ، $١٦ = ٤ \times ٤$

$= ٥(س - ٤)(س + ٤)$ تحليل الفرق بين مربعين

ب) $٩س^{٢} - ٦س - ٣٥$

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدود: $٩س^{٢}$، $-٦س$، -٣٥ هو ١.

الخطوة ٢: بما أن ٣٥ ليس مربعًا كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً.

الخطوة ٣: حلّل باستعمال النمط أ $س^{٢}$ + ب س + جـ . هل يوجد عددان ناتج ضربهما ٩(−٣٥)، أو −٣١٥ ومجموعهما −٦؟ نعم، −٢١ وَ ١٥ ناتج ضربهما −٣١٥. ومجموعهما −٦ .

$٩س^{٢} - ٦س - ٣٥ = ٩س^{٢} + م س + ن س - ٣٥$ استخدم القاعدة

$= ٩س^{٢} + ١٥س - ٢١س - ٣٥$ م = ١٥ ، ن = −٢١

$= (٩س^{٢} + ١٥س) + (-٢١س - ٣٥)$ جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

$= ٣س(٣س + ٥) - ٧(٣س + ٥)$ حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

$= (٣س + ٥)(٣س - ٧)$ (٣س+٥) عامل مشترك

تحقق من فهمك

٢أ) $٢س^{٢} - ٣٢$ $٢(س - ٤)(س + ٤)$ **٢ب)** $١٢س^{٢} + ٥س - ٢٥$ $(٤س - ٥)(٣س + ٥)$

إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك:
يمكنك التحقق من إجابتك من خلال:
- استعمال طريقة التوزيع بالترتيب.
- استعمال خاصية التوزيع
- تمثيل كلٍّ من العبارة الأصلية وتحليلها بالرسم والمقارنة بينهما.

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة: عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

مثال ٣ حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

حل المعادلة: $٩س^{٢} - ٤٨س = -٦٤$.

$٩س^{٢} - ٤٨س = -٦٤$ المعادلة الأصلية

$٩س^{٢} - ٤٨س + ٦٤ = ٠$ أضف ٦٤ إلى الطرفين

$(٣س)^{٢} - ٢(٣س)(٨) + (٨)^{٢} = ٠$ تحقق إن كانت ثلاثية الحدود $٩س^{٢} - ٤٨س + ٦٤$ تمثّل مربعًا كاملاً

$(٣س - ٨)^{٢} = ٠$ حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل

$(٣س - ٨)(٣س - ٨) = ٠$ اكتب $(٣س - ٨)^{٢}$ كحاصل ضرب عاملين

تنبيه!

أخطاء شائعة: غالبًا ما يفشل بعض الطلاب في تحليل كثيرات الحدود تحليلًا تامًّا؛ لذا أشر إلى أن $٤س^{٢} - ٣٦$ هو فرق بين مربعين يمكن تحليله على الصورة $(٢س - ٦)(٢س + ٦)$، لكن ذكّر الطلاب بأن هذا التحليل لا يُعدّ تامًّا إذا كان (ق . م . أ) لحدود أي من عوامله أكبر من ١ .

أخطاء مفاهيمية: يعلم الطلاب أن للمعادلات من الدرجة الثانية حلّين؛ لذا قد يشكّون في حلّهم، عندما يكون لمعادلة ثلاثية حدود على صورة مربع كامل حل واحد فقط. بيّن لهم أن لثلاثية الحدود هذه عاملين متكررين؛ لذا فالحلان متساويان، وفي هذه الحالة يُسجَّل حل واحد فقط.

مثال إضافي

٢ حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب "أولية":

أ) $٦س^{٢} - ٩٦$

$٦(س + ٤)(س - ٤)$

ب) $١٦ ص^{٢} + ٨ص - ١٥$

$(٤ص + ٥)(٤ص - ٣)$

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة

المثال ٣ يُبيّن حل معادلات تتضمن عوامل متكررة.

المثالان ٤، ٥ يُبيّنان طريقة حل معادلات باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

مثال إضافي

٣ حُلّ المعادلة:

$٤س^{٢} + ٣٦س = -٨١$ $\frac{-٩}{٢}$

المحتوى الرياضي

تحليل ثلاثيات حدود تُشكّل مربعات كاملة: إذا كانت ثلاثية حدود تشكل مربعًا كاملًا، فإنه يمكن تحليلها إلى ثنائيتي حدٍّ متساويتين، أو مربع ثنائية حدٍّ. والعاملان هما مجموع أو الفرق بين الجذرين التربيعيين الأساسيين للحدين (الأول والأخير) لثلاثية الحدود (بناءً على إشارة الحد الأوسط في ثلاثية الحدود) .

٣س – ٨ = ٠ ضع أحد العوامل المتكررة = ٠

٣س = ٨ أضف ٨ إلى كلا الطرفين

س = $\frac{٨}{٣}$ اقسم كلا الطرفين على ٣

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

٣أ) أ^{٢} + ١٢أ + ٣٦ = ٠ **ب)** ص^{٢} – $\frac{٤}{٣}$ ص + $\frac{٤}{٩}$ = ٠ $\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٣}$

قراءة الرياضيات

الجذر التربيعي

يقرأ ± $\sqrt{١٦}$ موجب أو سالب الجذر التربيعي لـ ١٦

سبق أن حللت معادلات مثل س^{٢} – ١٦ = ٠ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضًا استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

س^{٢} – ١٦ = ٠ المعادلة الأصلية

س^{٢} = ١٦ أضف ١٦ إلى كلا الطرفين

س = ± $\sqrt{١٦}$ خاصية الجذر التربيعي

تذكّر أنه يوجد جذران تربيعيان لـ ١٦، هما ٤ وَ –٤. لذا فإن مجموعة الحل هي {–٤، ٤}. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ {±٤}.

مفهوم أساسي أضف إلى مطويتك

خاصية الجذر التربيعي

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعية على الصورة س^{٢} = ن، خُذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي ن ≥ ٠، إذا كان س^{٢} = ن فإنَّ س = ± $\sqrt{ن}$.

مثال: س^{٢} = ٢٥

س = ± $\sqrt{٢٥}$ = ± ٥

إذا كانت ن في المعادلة س^{٢} = ن، ليست مربعًا كاملاً، فتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي، لذا استعمل الآلة الحاسبة. أما إذا كانت ن مربعًا كاملاً فستحصل على إجابة دقيقة.

مثال ٤ **استعمال خاصية الجذر التربيعي**

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل:

أ) (ص – ٦)^{٢} = ٨١

(ص – ٦)^{٢} = ٨١ المعادلة الأصلية

ص – ٦ = ± $\sqrt{٨١}$ خاصية الجذر التربيعي

ص – ٦ = ± ٩ ٨١ = ٩ × ٩

ص = ٦ ± ٩ أضف ٦ إلى كلا الطرفين

ص = ٦ + ٩ أو ص = ٦ – ٩ افصل المعادلة إلى معادلتين

= ١٥ = –٣ بسّط

الجذران هما ١٥ وَ –٣ تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية

مثال إضافي

٤ حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقّق من صحة الحل:

أ) (ب – ٧)^{٢} = ٣٦ ١، ١٣

ب) (س + ٩)^{٢} = ٨

$-٩ \mp ٢\sqrt{٢}$

إرشادات للمعلم الجديد

حلول معادلات من الدرجة الثانية :

إذا لم يستوعب الطلاب كيف يمكن أن يكون لمعادلة من الدرجة الثانية حل واحد فقط، فاقترح عليهم تمثيل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل باستعمال الحاسبة البيانية. حيث يُظهِر التمثيل فورًا كيف يمكن أن يكون هذا ممكنًا. ويقع رأس تمثيل ثلاثية الحدود التي تُشكّل مربعًا كاملًا على محور السينات؛ لذا فالمعادلة لها حل واحد فقط.

الدرس ٧-٦ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة ٨٣

ب) $(س + ٦)^٢ = ١٢$

$(س + ٦)^٢ = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س + ٦ = \pm\sqrt{١٢}$	خاصية الجذر التربيعي
$س = -٦ \pm \sqrt{١٢}$	اطرح ٦ من كلا الطرفين

الجذران هما $-٦ + \sqrt{١٢}$ ، $-٦ - \sqrt{١٢}$.

باستعمال الآلة الحاسبة، $-٦ + \sqrt{١٢} \approx -٢,٥٤$ ، $-٦ - \sqrt{١٢} \approx -٩,٤٦$

تحقق من فهمك

٤أ) $(أ - ١٠)^٢ = ١٢١$ ٢١، -١

٤ب) $(ع + ٣)^٢ = ٢٦$ $-٣ \pm \sqrt{٢٦}$ أو ٢,١ ، -٨,١ تقريبًا

مثال ٥ من واقع الحياة حل المعادلة

فيزياء: أُسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة $ع = -٥ن^٢ + ع_{.}$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي ($ع_{.}$) بالمتر، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

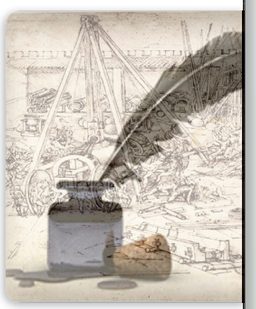
عند مستوى الأرض، ع = ٠ والارتفاع الابتدائي ٦٨ ، إذن $ع_{.} = ٦٨$

$ع = -٥ن^٢ + ع_{.}$	المعادلة الأصلية
$٠ = -٥ن^٢ + ٦٨$	عوض عن ع بـ صفر، وعن $ع_{.}$ بـ ٦٨
$-٦٨ = -٥ن^٢$	اطرح ٦٨ من كلا الطرفين
$١٣,٦ = ن^٢$	اقسم على -٥
$ن \approx \pm ٣,٧$	خاصية الجذر التربيعي

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًّا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.

تحقق من فهمك

٥) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا أُسقطت من سطح مبنى ارتفاعه نصف الارتفاع المذكور أعلاه. ٢,٦ ثانية تقريبًا



تاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي
(١٥٦٤-١٦٤٢)
كان جاليليو أول من أثبت أن الأجسام المختلفة الأوزان تسقط بالسرعة نفسها، وذلك بإسقاط جسمين مختلفي الوزن من قمة برج بيزا المائل في إيطاليا عام ١٥٨٩ ميلادية.

تأكد

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١) $٢٥س^٢ + ٦٠س + ٣٦$ نعم؛ $(٥س + ٦)^٢$ ٢) $٦س^٢ + ٣٠س + ٣٦$ لا

مثال ٢ حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية ، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية" :

٣) $(س - ٤)(٢س + ٧)$ ٤) $٢س^٢ - س - ٢٨$ ٥) $٤س^٢ + ٤٤س + ١٦$ أولية

مثال إضافي

٥ علوم فيزيائية: سقط كتاب من على رفٍّ ارتفاعه ٢م عن الأرض، والمعادلة: $ع = -٥ن^٢ + ع_{.}$، تُمثّل ارتفاع الكتاب (ع) بالمتر إذا سقط من ارتفاع ابتدائي ($ع_{.}$) متر، ويُمثّل (ن) زمن سقوط الجسم بالثواني، فما الوقت الذي يحتاجه الكتاب للوصول إلى الأرض؟

٠,٦٣ ثانية تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

صيغ: الطلاب بطبيعتهم لديهم حبّ الاستطلاع عن شروط استعمال بعض الصيغ. شجّع على هذا الأمر، واطلب إليهم تطوير طريقة لاختبار الصيغة $ع = -٥ن^٢ + ع_{.}$ من المثال ٥، وما الفرضيات التي يجب اعتمادها لتكون الصيغة صحيحة؟

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ٩؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

التحليل: ذكّر الطلاب بأنه يمكن استعمال أيٍّ من طرق التحليل التي درسوها في حل الأسئلة.

المثالان ٣ ، ٤ حل كلًّا من المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل:

٦) ٤س^{٢} = ٣٦ ±٣ ٧) ٦٤ص^{٢} − ٤٨ص + ١٨ = ٩ ٨) (ع + ٥)^{٢} = ٤٧

−٥ ± $\sqrt{٤٧}$ أو −٦,٨٦ ، ١١,٨٦ تقريبًا

مثال ٥ ٩) **طلاء:** سقطت فرشاة الدهان من نايف أثناء قيامه بطلاء غرفة نومه، من ارتفاع ٢م. استعمل المعادلة ع = −٥ ن^{٢} + ع$_{ا}$ لإيجاد العدد التقريبي للثواني التي تستغرقها الفرشاة للوصول إلى الأرض. ٠,٦ ثانية

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١٠) ٤س^{٢} − ٤٢س + ١١٠ لا ١١) ١٦س^{٢} − ٥٦س + ٤٩ نعم؛ (٤س − ٧)^{٢} ١٢) ٨١س^{٢} − ٩٠س + ٢٥ نعم؛ (٩س − ٥)^{٢}

مثال ٢ حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب " أولية ":

١٣) ٢٤د^{٢} + ٣٩د − ١٨ ٣(٨د − ٣)(د + ٢) ١٤) ٨س^{٢} + ١٠س − ٢١ أولية ١٥) ٢ب^{٢} + ١٢ب − ٢٤ ٢(ب^{٢} + ٦ب − ١٢)

١٦) ١٦أ^{٢} − ١٢١ب^{٢} ١٧) ١٢م^{٣} − ٢٢م^{٢} − ٧٠م ١٨) ٨جـ^{٢} − ٨٨جـ + ٢٤٢

١٩) و^{٤} − و^{٢} ٢٠) ١٢ل^{٣} − ٣ل ٢١) ١٦ك^{٣} − ٤٨ك^{٢} + ٣٦ك

٢٢) ٤ن^{٣} + ١٠ن^{٢} − ٨٤ن ٢٣) ٢أ^{٢}ب^{٢} − ٢أ^{٢} − ٢أب^{٣} + ٢أب ٢٤) ٢ر^{٣} − ر^{٢} − ٧٢ر + ٣٦

٢٥) ٣ك^{٣} − ٢٤ك^{٢} + ٤٨ك ٢٦) جـ^{٢} + ٢جـ − ٣هـ^{٢} + ٤هـ أولية ٢٧) ٨ص^{٢} − ٢٠٠ع^{٢} ٨(ص − ٥ع)(ص + ٥ع)

المثالان ٣ ، ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٢٨) ٤م^{٢} − ٢٤م + ٣٦ = ٠ ٣ ٢٩) (ص − ٤)^{٢} = ٧ ٤ ± $\sqrt{٧}$ ٣٠) أ^{٢} + $\frac{١٠}{٧}$أ + $\frac{٢٥}{٤٩}$ = ٠ $-\frac{٥}{٧}$

٣١) س^{٢} − $\frac{٣}{٢}$س + $\frac{٩}{١٦}$ = ٠ $\frac{٣}{٤}$ ٣٢) س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٢٥ ١، −٩ ٣٣) ٥س^{٢} − ٦٠س = −١٨٠ ٦

٣٤) ٤س^{٢} = ٨٠س − ٤٠٠ ١٠ ٣٥) ٩ − ٥٤س = −٨١س^{٢} $\frac{١}{٣}$ ٣٦) ٤جـ^{٢} + ٤جـ + ١ = ١٥ $\frac{-١ \pm \sqrt{١٥}}{٢}$

مثال ٥ ٣٧) **فيزياء:** أسقط بالون ماء في تجربة من نافذة في المدرسة. ارتفاعها ٩م. ما الزمن الذي يستغرقه البالون ليصل إلى الأرض؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة. ١,٣٤ ثانية

٣٨) **هندسة:** مُثِّلتْ مساحة مربع بالعبارة ٩س^{٢} − ٤٢س + ٤٩. أوجد طول ضلع المربع. |٣س − ٧|

٣٩) **هندسة** إذا كانت العبارة ٨ص^{٣} + ٤٠ص^{٢} + ٥٠ص تمثّل حجم منشور رباعي قاعدته مستطيلة. فأوجد أبعاد المنشور الممكنة على صورة كثيرات الحدود بمعاملات أعداد صحيحة.
إجابة ممكنة: ٢ص، ٢ص + ٥، ٢ص + ٥

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٠ – ٤٠ ، ٤٢ – ٥٦
ضمن ضمن المتوسط	١١ – ٣٩ (فردي) ، ٤٠ ، ٤٢ – ٥٦
فوق فوق المتوسط	٤٠ – ٥٥

٤ التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى كل طالب أن يكتب أو يخبر زميله عن الطريقة التي يُحدّد من خلالها ما إذا كانت ثلاثية الحدود تُشكّل مربعًا كاملًا أم لا.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين ٦-١ ، ٦-٢ بإعطائهم:

الاختبار القصير (٤)، ص (٣١)

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال ٤٠، وجه الطلاب إلى تفحّص العوامل دائمًا؛ للتأكّد من أنه قد تم تحليلها تحليلًا تامًّا.

إجابات:

٤٤) أولًا أبحث عن (ق . م . أ) للحدود جميعها، وأحلل بإخراج (ق. م. أ) لكل الحدود. فإذا كان أحد العوامل ثنائية حد، فأتحقق ممَّا إذا كان الحدان يُمثّلان الفرق بين مربعين، ثم أحلل إلى العوامل في هذه الحالة، وإذا كان أحد العوامل ثلاثية حدود، فأتحقق مما إذا كانت كثيرة الحدود تُشكّل مربعًا كاملًا أم لا، وأحلله. وإذا كان أحد العوامل يحتوي على أربعة حدود فأكثر، فإنّي أحلل بتجميع الحدود. أمّا إذا لم يكن لكثيرة الحدود (ق. م. أ) ولم تكن قابلة للتحليل، فإنها تكون أولية.

٤٦) إجابة ممكنة: أحدد ما إذا كان الحدان (الأول والأخير) يُشكّلان مربعات كاملة، ثم أحدد، إذا كان الحد الأوسط يساوي ± مثلَي حاصل ضرب الجذر الأساسي للحدين الأول والأخير. فإذا تحقّقت هذه الشروط، فإن ثلاثية الحدود تُشكّل مربعًا كاملًا.

٤٣) إجابة ممكنة: $س^{٣}+س^{٢}+س+١=٠$ لها حل حقيقي واحد فتحليل كثيرة الحدود إلى عواملها هو $(س^{٢}+١)(س+١)$. وبمساواة هذين العاملين بالصفر نحصل على حل واحد فقط هو $س=-١$؛ لأن $س^{٢}+١$ ليس له حل حقيقي.

٤٥) $٤س^{٢}+١٠س+٤$؛ لأنها ثلاثية الحدود الوحيدة التي لا تشكّل مربعًا كاملًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٠) **اكتشف الخطأ:** حلّل منصور وفيصل العبارة $س^{٨}-س^{٤}$. تحليلًا تامًّا، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

منصور	فيصل
$س^{٨}-س^{٤}=س^{٤}(س^{٢}+١)(س^{٢}-١)$	$س^{٨}-س^{٤}=س^{٤}(س^{٢}+١)(س-١)(س+١)$

فيصل؛ لم يحلل منصور العبارة تحليلاً تامًّا.

٤١) **تحدَّ:** حلّل $س^{ن+٦}+س^{ن+٢}+س^{ن}$ تحليلاً تامًّا. $س^{ن}(س^{٦}+س^{٢}+١)$

٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة ثلاثية حدود تشكل مربعًا كاملاً يكون معامل الحد الأوسط سالبًا والحد الأخير كسرًا اعتياديًّا، ثم حلّ المعادلة إجابة ممكنة: $س^{٢}-٣س+\frac{٩}{٤}=٠$؛ $\frac{٣}{٢}$

٤٣) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا للعبارة:

"لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ثلاثة حلول حقيقية دائمًا".

٤٤) **اكتب:** فسّر كيف تحلّل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا. انظر الهامش

٤٥) حدّد ثلاثية الحدود التي تختلف عن كثيرات الحدود الأخرى فيما يأتي، وفسّر إجابتك:

$٩س^{٢}-٢٤س+١٦$	$٤س^{٢}+١٠س+٤$	$٢٥س^{٢}+١٠س+١$	$٤س^{٢}-٣٦س+٨١$

٤٦) **اكتب:** فسّر كيف تحدّد إذا كانت ثلاثية الحدود تشكل مربعًا كاملاً. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٤٧) حُلّ المعادلة $(س-٣)^{٢}=٢٥$. ب

أ) $-٨، ٢$ ج) $٤، ١٤$

ب) $-٢، ٨$ د) $-٤، ١٤$

٤٨) **هندسة** إذا كان محيط دائرة $\frac{٦ط}{٥}$ وحدة، فما مساحتها؟ جـ

أ) $\frac{٣ط}{٥}$ وحدة مربعة ج) $\frac{٩ط}{٢٥}$ وحدة مربعة

ب) $\frac{١٢ط}{٥}$ وحدة مربعة د) $\frac{٣٠ط}{٢٥}$ وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٥)

٤٩) $٤س^{٢}-٨١ص^{٢}$ $(٢س-٩ص)(٢س+٩ص)$ ٥٠) $١-١٠٠ل^{٢}$ $(١-١٠ل)(١+١٠ل)$ ٥١) $٣أ^{٢}-٢٠$ أولية ٥٢) $٢٥ن^{٢}-١$ $(٥ن-١)(٥ن+١)$

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، و تحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٤)

٥٣) $٦س^{٢}-٤٨س+٩٠=٠$ ٥، ٣ ٥٤) $١٤س^{٢}+١٤س=٢٨$ ١، ٢- ٥٥) $٢س^{٢}-١٠س=٤٨$ ٨، ٣-

٥٦) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٥، ٧) (-٢، -٣). (الدرس ٢-٥) $\frac{١٠}{٧}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اكتب كثيرة الحدود الآتية على السبورة، واطلب إليهم تحليلها تحليلًا تامًّا:

$(م-ل)م^{٢}-٢م(م-ل)+(م-ل)$.

$(م-ل)(م-١)(م-١)=(م-ل)(م-١)^{٢}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٧ - ٦

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٢٦) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٦ تدريبات إعادة التعليم
المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل

ثلاثية حدود في صورة مربع كامل	ثلاثية الحدود في الصورة أ٢ + ٢أب + ب٢ (أ)	أ٢ − ٢أب + ب٢

يمكنك استعمال القواعد أدناه لتحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل:

مربع ثنائية حدود	تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل
(أ + ٤)٢ = أ٢ + ٢(أ)(٤) + ٤٢ = أ٢ + ٨أ + ١٦	أ٢ + ٨أ + ١٦ = أ٢ + ٢(أ)(٤) + ٤٢ = (أ + ٤)٢
(٣س − ٣)٢ = (٢س)٢ − ٢(٢س)(٣) + ٣٢ = ٤س٢ − ١٢س + ٩	٤س٢ − ١٢س + ٩ = (٢س)٢ − ٢(٢س)(٣) + ٣٢ = (٢ س − ٣)٢

مثال ١ حدّد إن كانت ثلاثية الحدود ١٦ن٢ − ٥٢٤ن + ٩ تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها.

(١) هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، ١٦ن٢ = (٤ن)٢

(٢) هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، ٩ = ٣٢

(٣) هل الحد الأوسط = ٢(٤ن)(٣)؟

نعم، ٥٢٤ن = ٢(٤ن)(٣)

بما أنّ الشروط الثلاثة متوفرة، فإنّ العبارة ١٦ن٢ − ٥٢٤ن + ٩ ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملًا.

١٦ن٢ − ٥٢٤ن + ٩ = (٤ن)٢ − ٢(٤ن)(٣) + ٣٢

= (٤ن − ٣)٢

مثال ٢ حلّل ١٦س٢ − ٣٢س + ١٥

بما أنّ ١٥ ليس مربعًا كاملًا، استعمل قاعدة مختلفة للتحليل.

١٦س٢ − ٣٢س + ١٥ ثلاثية الحدود الأصلية

= ١٦س٢ + م س + ن س + ١٥ اكتب القاعدة

= ١٦س٢ − ١٢س − ٢٠س + ١٥ م = −١٢، ن = −٢٠

= (١٦س٢ − ١٢س) − (٢٠س − ١٥) جمّع الحدود

= ٤س(٤س − ٣) − ٥(٤س − ٣) حلّل بإخراج (ق. م. أ.)

= (٤س − ٥)(٤س − ٣) حلّل بتجميع الحدود

لذا ١٦س٢ − ٣٢س + ١٥ = (٤س − ٥)(٤س − ٣)

تمارين

حدّد إن كانت كلّ ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١) س٢ − ١٦س + ٦٤ نعم؛ (س − ٨)(س − ٨)

٢) م٢ + ١٠م + ٢٥ نعم؛ (م + ٥)(م + ٥)

٣) ل٢ + ٨ل + ٦٤ لا

تدريبات حل المسألة (٢٨) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٦ تدريبات حل المسألة
المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

١) **إنشاءات**، تمثّل ثلاثية الحدود س٢ − ١٠ س + ٢٥ مساحة مدينة رياضية مربعة الشكل. اكتب عبارة تمثّل محيط المدينة الرياضية بدلالة المتغير س.

٤س − ٢٠ أو ٤(س − ٥)

٢) **مدينة الألعاب**، تريد إدارة مدينة الألعاب تركيب عربة أشخاص تتحرك رأسيًا إلى أعلى من مستوى الأرض، بسرعة ابتدائية ٩٦ قدمًا / ثانية. فإذا كانت الدّالة ع = −٩٦ن − ١٦ن٢ تمثّل ارتفاع العربة ع قدمًا بعد ن ثانية من انطلاقها، فبعد كم ثانية تصل إلى ارتفاع ١٤٤ قدمًا؟

٣ ثوان

٣) **أعمال**، تمتلك إحدى الشركات الزراعية بيع وتركيب أنظمة لريّ المزروعات، وتستعمل الدوالّ الآتية لمتابعة التكلفة الشهرية ت، والعائدات ع، والربح الشهري ر، حيث س عدد أنظمة الريّ المبيعة.

ت(س) = ٧س + ٢٠ − ١٢

ع(س) = ٨س٢ + ١٢س + ٤

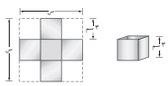
ر(س) = ع(س) − ت(س)

أوجد دالة الربح الشهري ر بدلالة س، ثم استعملها لإيجاد نقطة التعادل التي يكون الربح عندها صفرًا.

ر(س) = س٢ − ٨س + ١٦، س = ٤

٤) **هندسة**، تستطيع هالة عمل صندوق بلا غطاء، كما في الشكل أدناه، باستعمال قطعة مربّعة من الورق المقوى، بقصّ مربّعات من عند الزوايا طول ضلع كلّ منها ٣سم، ثمّ طيّ المربعات الأربعة الجانبية المتبقية إلى أعلى. حجم الصندوق الناتج:

ح = ٣س٢ − ٣٦س + ١٠٨، حيث س طول ضلع القطعة المربّعة الأصلية من الورق المقوى.



أ) حلّل كثيرة الحدود الواردة في معادلة الحجم.

٣(س − ٦)(س − ٦)

ب) ما حجم الصندوق إذا كان طول ضلع القطعة المربّعة الأصلية من الورق المقوى ١٤ سم؟

١٩٢ سم٣

جـ) ما طول ضلع القطعة المربّعة الأصلية من الورق المقوى عندما يكون حجم الصندوق ٢٧ سم٣؟

٩سم

التدريبات الإثرائية (٢٩) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٧-٦ التدريبات الإثرائية
تربيع الأعداد: طريقة مختصرة

توجد طريقة مختصرة تساعدك على تربيع عدد موجب مكوّن من رقمين، ورقم آحاده ٥. طُوّرت الطريقة باستعمال فكرة أنه يمكن التعبير عن هذا العدد في الصورة ١٠ب + أ، حيث أ = ٥.

(١٠ب + ٥)٢ = (١٠ب + ٥)(١٠ب + ٥)

= ١٠٠ب٢ + ٥٠ب + ٥٠ب + ٢٥

= ١٠٠ب٢ + ١٠٠ب + ٢٥

(١٠ب + ٥)٢ = ١٠٠ب(ب + ١) + ٢٥

تنص هذه الصيغة لفظيًا: على أن ناتج تربيع عدد موجب مكوّن من رقمين، ورقم آحاده ٥، يحتوي على ب(ب + ١) مئة.

كذلك فإن رقم منزلة العشرات هو ٢ ورقم الآحاد هو ٥ دائمًا.

مثال استعمال الصيغة (١٠ب + ٥)٢ لإيجاد (٨٥)٢.

(٨٥)٢ = ١٠٠ × ٨ × (١ + ٨) + ٢٥

= ٧٢٠٠ + ٢٥

= ٧٢٢٥ طريقة مختصرة: أولًا، فكر ٨ × ٩ = ٧٢، ثم اكتب ٢٥

لذا لتربيع عدد مثل ٨٥، يمكنك كتابة ناتج ضرب رقم العشرات ب في العدد الصحيح الذي يليه مباشرة (ب + ١)، ثم كتابة ٢٥.

أوجد كلًّا مما يأتي مستعملًا الطريقة المختصرة:

١) (١٥)٢ ٢٢٥

٢) (٢٥)٢ ٦٢٥

٣) (٣٥)٢ ١٢٢٥

٤) (٤٥)٢ ٢٠٢٥

٥) (٥٥)٢ ٣٠٢٥

٦) (٦٥)٢ ٤٢٢٥

٧) ما رقم العشرات في مربع العدد ٩٢؟ **٨**

٨) ما آخر رقمين في مربع العدد ٧٤؟ **٥٦**

٩) أيّ عدد مكوّن من ثلاثة أرقام يمكن كتابته في الصورة ١٠٠أ + ١٠ب + جـ. ربّع هذه العبارة لتلاحظ أنه إذا كان رقم آحاد عدد مكوّن من ثلاثة أرقام هو ٥، فإنّ رقمي الآحاد والعشرات في مربّع هذا العدد هما ٢، ٥

١٠٠٠٠أ٢ + ٢٠٠٠أب + ٢٠٠أجـ + ١٠٠ب٢ + ٢٠ب جـ + جـ٢ =

١٠٠٠٠أ٢ + ٢٠٠٠أب + ١٠٠٠أ + ١٠٠ب٢ + ١٠٠ب + ٢٥

لا يتأثر رقما الآحاد والعشرات بالأرقام الخمسة الأخرى.

كتاب التمارين (١٦) — دون ضمن فوق

٧ - ٦ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها.

١) م٢ + ١٦م + ٦٤ نعم؛ (م + ٨)٢

٢) ٩ر٢ − ٦ر + ١ نعم؛ (٣ ر − ١)٢

٣) ٤ ص٢ − ٢٠ ص + ٢٥ نعم؛ (٢ص − ٥)٢

٤) ١٦ ل٢ + ٢٤ ل + ٩ نعم؛ (٤ ل + ٣)٢

٥) ٢٥ ب٢ − ٤ ب + ١٦ لا

٦) ٤٩ ك٢ − ٥٦ ك + ١٦ نعم؛ (٧ك − ٤)٢

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

٧) ٣ل٢ − ١٤٧ ٣(ل + ٧)(ل − ٧)

٨) ٦ س٢ + ١١ س − ٣٥ (٣س + ٧)(٣س − ٥)

٩) ٥٠ك٢ − ٦٠ك + ١٨ ٢(٥ك − ٣)٢

١٠) ٦ ت٢ − ١٤ ت − ١٢ ٢ ت (٣ ت + ٢)(ت − ٣)

١١) ٦ د٢ − ١٨ ٦(د٢ − ٣)

١٢) ٣٠ ك٢ + ٣٨ ك + ١٢ ٢(٥ك + ٣)(٣ك + ٢)

١٣) ١٥ ب٢ − ٢٤ ب ف ٣ ب (٥ ب − ٨ ف)

١٤) ١٢ هـ٢ − ٦٠ هـ + ٧٥ ٣(٢هـ − ٥)٢

١٥) ٩ن٢ − ٥٣٠ − ٢٥ أولية

١٦) ٧ و٢ − ٢٨م٢ ٧(و − ٢م)(و + ٢م)

١٧) و٢ − ٨ و٢ − ٩ (و٢ + ١)(و + ٣)(و − ٣)

١٨) ١٦ أ٢ + ٧٢ أد + ٨١ د٢ (٤أ + ٩د)٢

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقّق من صحة الحل.

١٩) ٤ك٢ − ٢٨ك = −٤٩ $\frac{7}{2}$

٢٠) ٥٠ ب٢ + ٢٠ ب + ٢ = ٠ $-\frac{1}{5}$

٢١) $\left(\frac{1}{2}\text{ن} - 1\right)^2 = 0$ ٢

٢٢) جـ٢ + $\frac{1}{2}$ جـ + $\frac{1}{4}$ = ٠ $-\frac{1}{4}$

٢٣) ل٢ − $\frac{2}{3}$ ل + $\frac{1}{9}$ = ٠ $\frac{1}{3}$

٢٤) س٢ + ١٢س + ٣٦ = ٢٥ −١١، −١

٢٥) ص٢ − ٨ ص + ١٦ = ٦٤ ١٢، −٤

٢٦) (هـ + ٩)٢ = ٣ $-9 \pm \sqrt{3}$

٢٧) و٢ − ٦و + ٩ = ١٣ $3 \pm \sqrt{13}$

٢٨) **هندسة**، صيغة مساحة الدائرة م = ط نق٢، حيث نق نصف القطر. إذا تزايد نصف القطر بمقدار ١ سم تصبح مساحة الدائرة ١٠٠ ط سم٢. فما نصف القطر الأصلي للدائرة؟ ٩ سم.

٢٩) **إطار صورة**، وضعت عائشة إطارًا حول صورة بعداها ١٠ سم، ١٠ سم، فإذا كانت مساحة الإطار ٦٩ سم٢. فما عرض الإطار؟ ١,٥ سم.

ملحوظات المعلم

حلّل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلاً تامًّا:

١) ٢٥س^{٢}ص^{٤}

٢) ١٧أ ب^{٢} ١٧ × أ × أ × ب × ب × ٥ × ٥ × س × س × ص × ص × ص × ص

٣) −١٨جـ^{٥}د^{٣}
−١ × ٢ × ٣ × ٣ × جـ × جـ × جـ × جـ × جـ × جـ × د × د × د

٤) **حديقة:** زرع مالك ١٤٠ نبتة مرتبة على صورة مستطيل في حديقة منزله. فبكم طريقة يمكنه ترتيبها ليكون لديه على الأقل ٤ صفوف، وعدد النبتات نفسه في كل صف، على ألا يقل عن ٦ نبتات. انظر الهامش

أوجد (ق. م. أ) المشترك الأكبر لكل مجموعة وحيدات حد فيما يأتي:

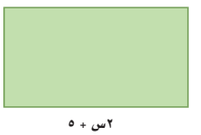
٥) ٢أ، ٨أ^{٢}، ١٦أ^{٣} ٢أ

٦) ٧جـ، ٢٤د ١

٧) ٥٠جـ^{٢}هـ، ١٢٠جـهـ

٨) ٨ك^{٢}ر^{٢}، ٣٦ك ر ٤ك ر ١٠جـهـ

٩) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه ٢س^{٢} − س − ١٥ وحدة مربعة، فما عرضه؟ جـ



أ) س − ٥

جـ) س − ٣

ب) س + ٣

د) ٢س − ٣

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١٠) ٥س ص − ١٠س ٥س(ص − ٢)

١١) ٧أ ب + ١٤أ ب^{٢} + ٢١أ^{٢} ب ٧أ ب(١ + ٢ب + ٣أ)

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١٢) ٤س^{٢} + ٨س + س + ٢ (٤س + ١)(س + ٢)

١٣) ١٠أ^{٢} − ٥٠أ − أ + ٥ (١٠أ − ١)(أ − ٥)

حل كلَّ معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٤) ص (ص − ١٤) = ٠ صفر، ١٤

١٥) ٣س (س + ٦) = ٠ صفر، −٦

١٦) أ^{٢} = ١٢أ صفر، ١٢

١٧) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في فرش غرفة مساحتها (س^{٢} − ٩) متر مربع بالسجاد. فإذا كان عرض الغرفة (س − ٣) متر، فما طولها؟ جـ

أ) س − ٣

جـ) س + ٣

ب) س − ٩

د) ٣

حلّل كلًّا من ثلاثيات الحدود الآتية:

١٨) س^{٢} + ٧س + ٦ (س + ٦)(س + ١)

١٩) س^{٢} − ٣س − ٢٨ (س − ٧)(س + ٤)

٢٠) ١٠س^{٢} − س − ٣ (٥س − ٣)(٢س + ١)

٢١) ١٥س^{٢} + ٧س − ٢ (٣س + ٢)(٥س − ١)

٢٢) س^{٢} − ٢٥ (س + ٥)(س − ٥)

٢٣) ٤س^{٢} − ٨١ (٢س + ٩)(٢س − ٩)

٢٤) ٩س^{٢} − ١٢س + ٤ (٣س − ٢)(٣س − ٢)

٢٥) ١٦س^{٢} + ٤٠س + ٢٥ (٤س + ٥)(٤س + ٥)

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٢٦) س^{٢} − ٤س = ٢١ −٣، ٧

٢٧) س^{٢} − ٢س − ٢٤ = ٠ −٤، ٦

٢٨) ٦س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠ $\frac{-٢}{٣}$، $\frac{٣}{٢}$

٢٩) ٢س^{٢} − ١٣س + ٢٠ = ٠ $\frac{٥}{٢}$، ٤

٣٠) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُعدُّ عاملاً من عوامل س^{٤} − ١ عند تحليلها تحليلًا تامًّا؟ ب

أ) س^{٢} − ١

جـ) س

ب) س − ١

د) ١

المعالجة

بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا أمام الطلاب.

إجابة:

٤) ٤ صفوف في كلٍّ منها ٣٥ نبتة،
و٥ صفوف في كلٍّ منها ٢٨ نبتة،
و٧ صفوف في كلٍّ منها ٢٠ نبتة.
١٠ صفوف في كلٍّ منها ١٤ نبتة،
و٢٠ صفًّا في كلٍّ منها، ٧ نبتات.
١٤ صفًّا في كلٍّ منها ١٠ نبتات.

مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط	المستوى ٢	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على ٢٥٪ تقريبًا من التمارين،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس ٧-١، ٧-٢، ٧-٣، ٧-٤، ٧-٥، ٧-٦	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل ص (٥٠)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

الفصل ٨

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (٨٩)

	الدرس ٨-١ ٣ حصص	توسع ٨-١ حصة واحدة
العنوان	تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا	معدل الجبر: معدل التغيّر في الدالة التربيعية
الأهداف	• تحليل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية. • تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا.	• استعمال دالة تربيعية معطاة لاكتشاف معدل التغير لدالة تربيعية.
المفردات	الدالة غير الخطية الدالة التربيعية الصورة القياسية القطع المكافئ محور التماثل الرأس القيمة الصغرى القيمة العظمى متماثل	
التمثيلات المتعددة	ص (٩٧)	
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٨) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٩) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٧) دون ضمن فوق	
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية ص (٩٠)	
تنويع التعليم	ص (٩٤، ٩٧)	

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الدوال التربيعية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(١٢) حصة	(٣) حصص	(١٥) حصة

الدرس ٨-٢ — ٣ حصص	الدرس ٨-٣ — حصتان	الدرس ٨-٤ — ٣ حصص
حل المعادلات التربيعية بيانيًا	حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع	حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام
• حل المعادلات التربيعية بيانيًا. • تقدير حلول المعادلات التربيعية من تمثيلها البياني.	• كتابة عبارة تربيعية على صورة مربع كامل. • حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.	• حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام. • استعمال المميز لتحديد عدد حلول معادلة تربيعية.
الجذر المكرّر	إكمال المربع	القانون العام المميز
ص (١٠٢)	ص (١٠٨)	ص (١١٤)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٢) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٣) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٨) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٦) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٧) فوق **كتاب التمارين** • ص (١٩) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢١) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٠) دون ضمن فوق
مشغل الوسائط المحمول ص (١٠١)	السبورة التفاعلية ص (١٠٤)	تسجيل صوتي ص (١١٠)
ص (١٠٠، ١٠٣)	ص (١٠٦، ١٠٨)	ص (١١٢، ١١٤)

التقويم الختامي
- اختبار الفصل ص (١١٥)
- اختبار تراكمي١ ص (١١٦، ١١٧)

الفصل ٨ التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل ٨**	
	التهيئة للفصل ٨ ، ص (٨٩)	مخطط المعالجة، ص (٨٨ ج).
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تدريبات المهارات، الفصل ٨
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٨
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة ٤، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (٤٩، ٥٠)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (٥١)	تدريبات المهارات، الفصل ٨
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٨
		www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	اختبار الفصل، ص (١١٥)	تدريبات المهارات، الفصل ٨
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٨
		www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل ٨**	
	اختبار الفصل، النماذج ١، ٢أ، ٢ب، ص (٥٣ - ٥٨)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٨
	اختبار الفصل، النموذج ٣ ، ص (٥٩، ٦٠)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (٥٢)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (٦١)	
	اختبار تراكمي ، ص (٦٢ - ٦٤)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

الفصل ٨

تنويع التعليم

البديل ١ جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون: وزّع الطلاب في مجموعات صغيرة، ثم اطلب إليهم أن يقرِّروا المهام التي يجب عليهم تنفيذها لتمثيل دالة تربيعية أو أسية معطاة بيانيًّا؛ فمثلًا، يمكن أن يجد أحد الطلاب معادلة محور التماثل، وآخر يعوّض القيم لتحديد نقاط التمثيل البياني، وثالث يُمثّل النقاط بيانيًّا برسم منحنى القطع المكافئ.

المتعلمون البصريون والمكانيون: ارسم ثلاثة أعمدة كبيرة على السبورة، وعنون هذه الأعمدة: "جذران حقيقيان"، "جذر واحد حقيقي"، "لا جذور حقيقية"، واطلب إلى مجموعة من الطلاب كتابة معادلة تربيعية لكل عمود، ثم اطلب إلى طلاب الصف استعمال المميّز للتحقّق مما إذا كانت الأمثلة صحيحة أم لا، ثم استعمل القانون العام لإيجاد جذور المعادلات التي لها جذور حقيقية.

البديل ٢ دون المتوسط دون

استعمل شاشة العرض، لتوضيح التمثيل البياني لدالة أسية، واطلب إليهم وصف ما يحدث لقيم (ص) عند زيادة قيم (س) وتحديد المقطع الصادي، كرّر ذلك مع تمثيلات دوال أسية أخرى.

البديل ٣ فوق المتوسط فوق

نظرًا لأن تمثيل دالة تربيعية معطاة بيانيًّا يتطلب عدة خطوات. وزّع الطلاب في مجموعات صغيرة، وأعط كل مجموعة دالة تربيعية واطلب إليها تمثيل هذه الدالة بيانيًّا؛ بحيث يقوم كل عضو في المجموعة بإنجاز خطوة من الخطوات، فمثلًا يجد الطالب الأول معادلة محور التماثل، ويجد الثاني الرأس، وهكذا.

الفصل ٨

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل ٨

مواضيع سابقة قبل الصف الثالث المتوسط

- تقريب الأعداد غير النسبية التي تظهر في مسائل حياتية.
- تبسيط العبارات العددية التي تتضمّن ترتيب العمليات والأسس.
- إيجاد قيم دوال محددة.
- تبسيط عبارات كثيرة الحدود، وتحليلها إلى العوامل.
- تحليل تمثيلات الدوال التربيعية والتوصّل إلى استنتاجات.

الفصل ٨

مواضيع ذات علاقة من الصف الثالث المتوسط

- تحديد الشكل العام لدوال تربيعية وتمثيلها.
- تحليل التمثيلات البيانية لدوال تربيعية والتوصّل إلى خصائصها.
- الربط بين الحلول (الجذور) للمعادلات التربيعية وأصفار الدالة، والمقاطع السينية لتمثيل الدالة.
- تحليل الدوال ذات الفروق والنسب المتتابعة.

ما بعد الفصل ٨

الإعداد للمرحلة الثانوية

- الربط بين الطرق المختلفة لعرض الدوال التربيعية، مثل: الطرق الجبرية، والجداول، والتمثيلات البيانية، والعبارات اللفظية.
- تحديد الدالة التربيعية من خلال جذورها أو تمثيلها البياني.
- حل معادلات أسية باستعمال التمثيل البياني والجداول والطرق الجبرية.

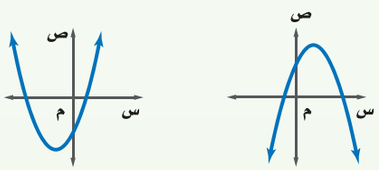
ملخص الدروس

٨-١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

الصيغة القياسية للدالة التربيعية هي:

ص= أس^{٢} + ب س+ جـ ، حيث أ ≠ ٠

- إذا كانت إشارة (أ) موجبة فالقطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى، والإحداثي الصادي لرأسه هو أصغر قيمة للدالة.
- إذا كانت إشارة (أ) سالبة، يكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أسفل، والإحداثي الصادي لرأسه هو أكبر قيمة للدالة.



يُسمّى الخط الذي يقسم القطع المكافئ إلى قسمين متطابقين محور التماثل، ومعادلة محور التماثل للدالة

ص= أس^{٢}+ ب س+ جـ هو س= $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}٢}$

٨-٢ حل المعادلات التربيعية بيانيًا

تُسّمى حلول المعادلة التربيعية جذورًا، والمعادلات التربيعية جميعها لها جذران، وهما كما يأتي:

- جذران حقيقيان، عندما يقطع القطع المكافئ محور السينات في نقطتين مختلفتين.
- جذر حقيقي مكرّر، عندما يقع رأس القطع المكافئ على محور السينات.
- جذران تخيليان، (لا يوجد جذور حقيقية) عندما لا يقطع القطع المكافئ محور السينات.

الدوال التربيعية

٨-٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

إذا كانت العبارة التربيعية في أحد طرفي المعادلة في الصيغة : أس^{٢} + ب س+ جـ = ن تُمثّل مربعًا كاملًا، وكان ن ≠ ٠ فيمكن حل المعادلة بإيجاد الجذر التربيعي لكل طرف. وعلى أي حال بما أن المعادلات التربيعية التي تُمثّل مربعات كاملة قليلة العدد، يمكن استعمال طريقة تُسمّى إكمال المربع.

فلحل معادلة على الصورة س^{٢}+ ب س + جـ = ٠ بإكمال المربع، اعزل الحدين س^{٢}، ب س في طرف واحد من المعادلة، ثم أوجد نصف (ب) ثم ربّعه، وبعد ذلك أضف الناتج إلى طرفي المعادلة، ثم حُلّ باستعمال التحليل إلى العوامل وإيجاد الجذر التربيعي لكل طرف، إذا كان الطرف الأيسر عددًا غير سالب. وإذا كان معامل س^{٢} لا يساوي (١)، فاقسم كل حد على المعامل قبل إكمال المربع.

٨-٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

يمكن حل المعادلة التربيعية في الصورة القياسية:
أس^{٢} + ب س+ جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠ باستعمال القانون العام، ويتم تعويض أ، ب ، جـ في القانون :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

، ثم تبسيط المقدار لإيجاد الحلول، ويُسمّى المقدار الذي يقع تحت إشارة الجذر (ب^{٢} − ٤أجـ) المميّز، ويمكن استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

مشروع الفصل

أكبر مساحة

يستعمل الطلاب ما تعلموه حول الدوال التربيعيّة؛ لمعرفة أكبر مساحة لمستطيل عُلم محيطه.

قسّم الطلاب إلى مجموعات رباعية، واطلب إلى كل مجموعة ما يأتي:

- إكمال الجدول الآتي الذي يتكون من عمودين، بحيث يُكتب في العمود الأول جميع الأبعاد الممكنة لمستطيل محيطه (ل) معلوم (البعدان عددان صحيحان)، ويكتب في العمود الثاني مساحة المستطيل في كل حالة.

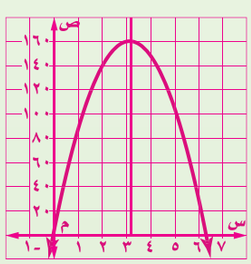
البعدان	المساحة
س ، $\frac{ل}{٢}$ – س	م = س × ($\frac{ل}{٢}$ – س)
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

- (ملحوظة: تُعطَى كل مجموعة مستطيلًا محيطه مختلف عن باقي المجموعات مثل: ١٢سم، ١٦ سم، ٢٠سم، ٣٢سم، ٣٦سم، ٤٠سم، ٤٨سم، ٦٠سم).
- تحديد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل.
- كتابة تخمين حول العلاقة بين بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن.
- أخبر الطلاب أن المستطيل ذا أكبر مساحة سيكون مربعًا.

المفردات: قدِّم مفردات الفصل باستعمال النمط الآتي:

التعريف: محور التماثل هو الخط الرأسي الذي يتضمّن رأس القطع المكافئ.

مثال:



الفصل ٨ الدوالّ التربيعية

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل للعوامل واستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أحلّ المعادلات التربيعية بيانيًا، وبإكمال المربع، و باستعمال القانون العام.

لماذا ؟

تكاليف: تقدر التكلفة الكلية "ت" للإنتاج اليومي لمنتج ما في منشأة صناعية بالدالة:
ت(س) = ٨٠٠ – ١٠س + $\frac{١}{٤}$ س^{٢} حيث س عدد الوحدات المنتجة يوميًا، ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًا لإيجاد عدد الوحدات المنتجة في اليوم التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

المطويات منظم أفكار

الدوال التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول التمثيل البياني للدوال التربيعية، مبتدئًا بورقة ملاحظات.

١ **اطو** الورقة طوليًا بحيث يتكوّن هامش خارجي دليلاً على المطوية.

٢ **اطو** الورقة مرتين عرضيًا لتكوين أربعة أقسام.

٣ **افتح** الطية وقص على خطوط الطي العرضية.

٤ **سمّ** كل قسم كما في الشكل أدناه.

اسأل: ما عدد الأجزاء المتساوية للقطع المكافئ التي يكوّنها محور التماثل؟ (٢)

المطويات منظم أفكار

غرضها: يُسجّل الطلاب ملاحظاتهم عن خصائص الدوال التربيعية وعرضها في دروس الفصل.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وتسميتها كما عرضت، وأن يكتبوا ملاحظاتهم في الأقسام المناسبة، بالإضافة إلى الأشكال والأمثلة عند دراسة كل درس من دروس الفصل.

وقت استعمالها: شجِّع الطلاب على الإضافة بصورة مستمرة إلى مطوياتهم خلال دراستهم الفصل، واستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل ٨

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية:

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

١ – ٩ انظر ملحق الإجابات.

١) ص = س + ٣

٢) ص = ٢س + ٢

٣) ص = –٢س – ٣

٤) ص = ٥, ٠س – ١

٥) ٤س – ٣ص = ١٢

٦) ٣ص = ٦ + ٩س

٧) ص – س = ١

٨) ٣ص = ٦س

٩) **توفير:** مع محسن ١٠٠ ريال، ويخطط لتوفير ١٠ ريالات أسبوعيًّا، مثّل بيانيًّا معادلة تبيّن المبلغ الكلي (م) الذي سيوفره محسن في (س) أسبوعًا.

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١٠) $أ^٢ + ١٢أ + ٣٦$ — نعم؛ $(أ + ٦)^٢$

١١) $س^٢ + ٥س + ٢٥$ — لا

١٢) $س^٢ - ١٢س + ٣٢$ — لا

١٣) $س^٢ + ٢٠س + ١٠٠$ — نعم؛ $(س + ١٠)^٢$

١٤) $٤س^٢ + ٢٨س + ٤٩$ — نعم؛ $(٢س + ٧)^٢$

١٥) $ك^٢ - ١٦ك + ٦٤$ — نعم؛ $(ك - ٨)^٢$

١٦) $أ^٢ - ٢٢أ + ١٢١$ — نعم؛ $(أ - ١١)^٢$

١٧) $٥ت^٢ - ١٢ت + ٢٥$ — لا

١٨) $س^٢ - ٩$ — لا

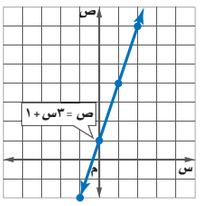
١٩) $س^٢ + ٢س + ١$ — نعم؛ $(س + ١)^٢$

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = ٣ س + ١ بيانيًّا.

س	ص = ٣س + ١	ص
–١	٣(–١) + ١	–٢
٠	٣(٠) + ١	١
١	٣(١) + ١	٤
٢	٣(٢) + ١	٧



مثال ٢

حدّد إذا كانت ثلاثية الحدود $س^٢ - ١٠س + ٢٥$ تشكل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١) هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم

٢) هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم

٣) هل الحد الأوسط يساوي –٢ (١س) (٥)؟ نعم

$س^٢ - ١٠س + ٢٥ = (س - ٥)^٢$

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com .

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.

كما تساعد العبارة : «إذا ... فقم» في المخطط على تحديد المستوى المناسب، وتقترح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى ١ — ضمن المتوسط

إذا: أخطأ بعض الطلاب فيما لايزيد على ٢٥٪ تقريبًا من التمارين.

فقم: بمراجعة تمثيل الدوال الخطية بيانيًّا، وثلاثية الحدود التي تكون على صورة مربع كامل.

زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com

المستوى ٢ — دون المتوسط

إذا: أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ تقريبًا من التمارين ،

فقم: بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك .

زيارة الموقع: www.obeikaneducation.com

٨-١ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٨ - ١

تمثيل الدوال الخطية بيانيًّا.

الدرس ٨ - ١

تحليل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا.

ما بعد الدرس ٨ - ١

حل المعادلات التربيعية بيانيًّا.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- هل ص = ٨س^{٢} – ٤٩س – ٧٥ معادلة خطية؟ فسّر ذلك. لا، لأنها تحتوي على الحد س^{٢}
- هل يُمثل مسار مياه النافورة بخط مستقيم؟ لا
- كيف تصف شكل الماء عندما ينطلق؟ إجابة ممكنة: منحنى متماثل يُطلق عليه قطع مكافئ.

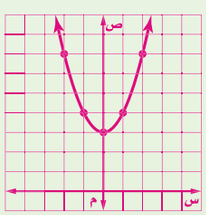
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: استعمل السبورة التفاعلية في أثناء حل أمثلة تمثيل الدوال التربيعية.

إجابة (تحقق من فهمك):

١)

س	ص
-٢	٧
-١	٤
٠	٣
١	٤
٢	٧



المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى= {ص | ص≤ ٣}

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية بيانيًّا.

والآن

- أحلّل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.
- أمثّل الدوال التربيعية بيانيًّا.

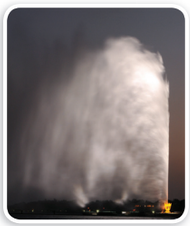
المفردات

الدالة غير الخطية
الدالة التربيعية
الصورة القياسية
القطع المكافئ
محور التماثل
الرأس
القيمة الصغرى
القيمة العظمى
متماثل

obeikaneducation.com

٨-١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

لماذا؟



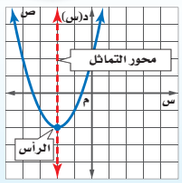
تُعد نافورة الملك فهد في جدة أعلى نافورة من نوعها في العالم، إذ يصل ارتفاعها إلى ٣١٢ مترًا، وتقدم عرضًا رائعًا لحركة المياه والضوء، ويمكن تمثيل حركة المياه بمعادلات تربيعية. كما يمكنك استعمال التمثيلات البيانية لهذه المعادلات لتوضيح مسار المياه.

خصائص الدوال التربيعية: درست سابقًا الدوال الخطية، وهناك أيضًا **دوالّ غير خطية** تختلف أشكال تمثيلاتها البيانية. **فالدوال التربيعية** مثلاً هي دوال غير خطية، ويمكن كتابتها على الصورة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ، حيث أ ≠ ٠، وتُسمى هذه الصورة **بالصورة القياسية** للدالة التربيعية، ويسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية **قطعًا مكافئًا**. وتتماثل القطوع المكافئة حول خط يتوسطها يُسمى **محور التماثل**، يقطع القطع في نقطة واحدة تُسمى **الرأس**.

مفهوم أساسي — الدوال التربيعية

أضف إلى مطويتك

الدالة المولدة (الأم):	د(س) = س^{٢}
الصورة القياسية:	د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ
شكل التمثيل:	قطع مكافئ
محور التماثل:	س = $-\frac{ب}{٢أ}$
المقطع الصادي:	جـ

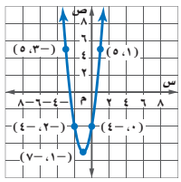


ويكون التمثيل البياني للدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ مفتوحًا إلى أعلى، إذا كان أ > ٠، وتمثل أدنى نقطة فيه نقطة **القيمة الصغرى**، ويكون مفتوحًا إلى أسفل، إذا كان أ < ٠ وتمثّل أعلى نقطة فيه نقطة **القيمة العظمى**، وتمثّل نقطتا القيمة العظمى أو القيمة الصغرى رأس القطع.

مثال ١ — التمثيل البياني للقطع المكافئ

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = ٣س^{٢} + ٦س – ٤ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

س	ص
١	٥
٠	-٤
-١	-٧
-٢	-٤
-٣	٥



مثّل الأزواج المرتبة بيانيًّا، ثُم صِل بينها بمنحنى. يمتد التمثيل البياني للقطع المكافئ إلى ما لا نهاية من كلا طرفيه، ومجاله هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداه هو {ص| ص ≤ -٧}؛ لأن -٧ هي القيمة الصغرى.

تحقق من فهمك

١) استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = س^{٢} + ٣ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها. انظر الهامش

مراجعة المفردات

المجال والمدى

المجال هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير المستقل س. وأما المدى فهو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع ص.

مصادر الدرس ٨- ١

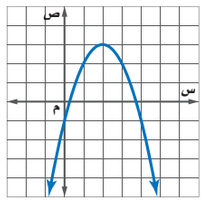
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (٩٤)	• تنويع التعليم ص (٩٤ ، ٩٧)	• تنويع التعليم ص (٩٧)
كتاب التمارين	ص (١٧)	ص (١٧)	ص (١٧)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) • تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨) • التدريبات الإثرائية، ص (٩)

الأشكال **المتماثلة** هي تلك الأشكال التي يكون نصفاها متطابقين تمامًا. فالقطع المكافئ هو شكل متماثل وله محور تماثل، وكل نقطة في نصف القطع إلى يسار محور التماثل تقابلها نقطة في النصف الآخر له.

ومن الأسهل عادة تحديد الرأس أولًا عند إيجاد الخصائص من التمثيل البياني، والذي يمثل إما نقطة عظمى أو نقطة صغرى للقطع.

مثال ٢ تحديد خصائص القطع المكافئ من تمثيله البياني

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للتمثيل البياني الآتي:



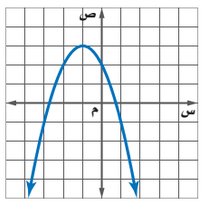
الخطوة ١: أوجد الرأس.
بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل فالرأس يمثّل النقطة العظمى له وهي (٢، ٣).

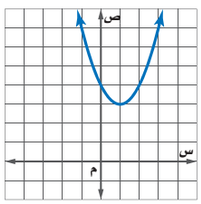
الخطوة ٢: أوجد محور التماثل.
بما أن محور التماثل هو المستقيم الذي يمر بالرأس، ويقسم القطع إلى نصفين متطابقين؛ لذا تكون معادلة محور التماثل هي س = ٢.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.
بما أن المقطع الصادي هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع محور الصادات، وهي النقطة (٠، −١)؛ لذا يكون المقطع الصادي هو −١.

تحقق من فهمك

٢أ) الرأس (−١، ٣) محور التماثل س = −١ المقطع الصادي ٢.
٢ب) الرأس (١، ٣) محور التماثل س = ١ المقطع الصادي ٤.

٢أ)


٢ب)


عند تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة الدالة يكون من الأسهل غالبًا إيجاد معادلة محور التماثل أولاً.

مثال ٣ تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة دالته

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدالة: ص = ٢ س^{٢} + ٤ س − ٣

$س = -\frac{ب}{٢أ}$ صيغة معادلة محور التماثل

$س = -\frac{٤}{٢ \times ٢} = -١$ أ = ٢، ب = ٤، بسّط

معادلة محور التماثل هي س = −١ .

ولإيجاد إحداثي الرأس، خذ القيمة الناتجة من معادلة محور التماثل، واعتبرها إحداثيًّا سينيًّا لرأس القطع المكافئ، ثم عوّضها في معادلة القطع المكافئ لإيجاد الإحداثي الصادي.

ص = ٢س^{٢} + ٤س − ٣ المعادلة الأصلية

= ٢(−١)^{٢} + ٤(−١) − ٣ = −٥ س = −١، بسّط

الرأس هو (−١، −٥)، وبما أن المقطع الصادي هو عند النقطة (٠، جـ) دائمًا؛ لذا فالمقطع الصادي هو −٣.

إرشادات للدراسة
المقطع الصادي
الإحداثي الصادي للمقطع الصادي هو الحد الثابت (جـ) للدالة التربيعية في الصورة القياسية

خصائص الدوال التربيعية

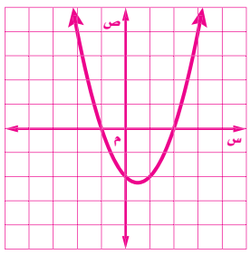
المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال جدول القيم لتمثيل الدالة التربيعية بيانيًّا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

١ استعمل جدول القيم؛ لتمثيل الدالة ص= س^{٢}− س −٢ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى: {ص | ص≥ −٢$\frac{١}{٤}$}

الرأس ومحور التماثل

المثال ٢ يُبيّن طريقة إيجاد الرأس ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للقطع المكافئ.

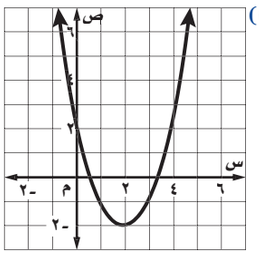
المثال ٣ يُبيّن طريقة إيجاد الرأس ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لدالة تربيعية.

المثال ٤ يُبيّن طريقة تحديد ما إذا كان للدالة التربيعية قيمة عظمى أم صغرى، وطريقة إيجاد هذه القيمة.

مثالان إضافيان

٢ أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

أ)

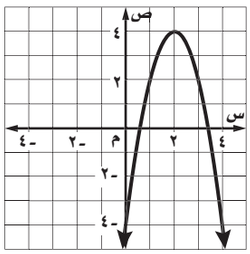


الرأس (٢، −٢)

محور التماثل س=٢

المقطع الصادي ٢

ب)



الرأس (٢، ٤)

محور التماثل س=٢

المقطع الصادي −٤

٣ أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي، للدالتين الآتيتين:

أ) ص= −٢س^{٢} − ٨س −٢

الرأس (−٢، ٦)

محور التماثل س= −٢

المقطع الصادي −٢

ب) ص= ٣س^{٢} + ٦س −٢

الرأس (−١، −٥)

محور التماثل س= −١

المقطع الصادي −٢

٣أ) الرأس (١، −٢)

محور التماثل س= ١

المقطع الصادي −٥

٣ب) الرأس $\left(-\frac{١}{٢}، \frac{٣}{٢}\right)$

محور التماثل س= $-\frac{١}{٢}$

المقطع الصادي ٢

تحقق من فهمك

٣أ) ص = −٣ س^{٢} + ٦س − ٥ **٣ب)** ص = ٢س^{٢} + ٢س + ٢

هناك فروق عامة بين الدوال الخطية والدوال التربيعية تظهر في الجدول الآتي:

	الدوال الخطية	الدوال التربيعية
الصورة القياسية	ص = أ س + ب	ص = أ س^{٢} + ب س + جـ ؛ أ ≠ ٠
الدرجة	١، لاحظ أن جميع المتغيرات من الدرجة الأولى.	٢، لاحظ أن المتغير المستقل س في الحد الأول هو من الدرجة الثانية، ومعامله أ لا يمكن أن يساوي صفرًا، وإلا أصبحت الدالة خطية.
مثال	ص = ٢س + ٦	ص = ٣س^{٢} + ٥س − ٤
التمثيل البياني	خط مستقيم	قطع مكافئ

كيف تحدد إن كان القطع المكافئ مفتوحًا إلى الأعلى أم إلى أسفل، وإذا كان الرأس يمثل له نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

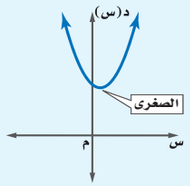
القيم العظمى والقيم الصغرى

التعبير اللفظي: يكون التمثيل البياني للدالة: د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ، حيث أ ≠ ٠ :

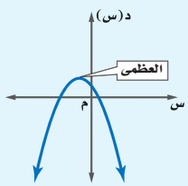
- مفتوحًا إلى أعلى وله قيمة صغرى عندما أ > ٠
- مفتوحًا إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما أ < ٠
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على أو تساوي القيمة الصغرى إذا كانت أ > ٠، أو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى إذا كانت أ < ٠.

مثال:

أ موجبة



أ سالبة



مثال ٤

القيم العظمى والقيم الصغرى

لتكن د(س) = −٢ س^{٢} − ٤س + ٦.

أ) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

في الدالة د(س) = −٢س^{٢} − ٤س + ٦، أ = −٢، ب = −٤، جـ = ٦.

بما أن أ عدد سالب فالتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى أسفل، ويكون للدالة قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي الصادي للرأس.

الإحداثي السيني للرأس = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٤}{(-٢)٢} = -١$.

د (س) = −٢س^{٢} − ٤س + ٦ الدالة الأصلية

د (−١) = −٢(−١)^{٢} − ٤(−١) + ٦ س = −١

د (−١) = ٨ بسّط

إذن، القيمة العظمى تساوي ٨

تنبيه!

القيم الصغرى والقيم العظمى

لا تنسَ إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس (س، ص)، حيث إن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثّل الإحداثي الصادي له.

جـ) حدد مجال الدالة ومداها.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى، أي {ص|ص ≤ ٨ }.

تحقق من فهمك

ليكن د (س) = ٢س^{٢} – ٤س – ١ .

٤أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى. قيمة صغرى

٤ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة. –٣

٤جـ) حدد مجال الدالة ومداها. المجال= مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى = {ص|ص ≤ –٣}

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا: تعلّمت كيفية إيجاد العديد من الخصائص المهمة للدوال التربيعية.

مفهوم أساسي **تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا**

أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.

الخطوة ٢: أوجد الرأس وحدّد إذا كان يمثّل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

الخطوة ٤: استعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.

الخطوة ٥: صِل بين النقاط بمنحنى.

مثال ٥ **تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا**

مثّل الدالة د (س) = س^{٢} + ٤س + ٣ بيانيًّا.

الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.

$س = \frac{-ب}{٢أ}$ صيغة معادلة محور التماثل

$س = \frac{-٤}{٢ \times ١}$ أ = ١ ، ب = ٤

س = –٢ بسّط

الخطوة ٢: أوجد الرأس، وحدّد فيما إذا كان يمثّل نقطة صغرى أم عظمى.

ص = س^{٢} + ٤س + ٣ المعادلة الأصلية

= (–٢)^{٢} + ٤(–٢) + ٣ س = –٢

= –١ بسّط

يقع الرأس عند النقطة (–٢، –١)، وبما أن أ موجبة، فالتمثيل يكون مفتوحًا إلى أعلى؛ لذا يمثّل الرأس قيمة صغرى.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

ص = س^{٢} + ٤س + ٣ المعادلة الأصلية

= (٠)^{٢} + ٤(٠) + ٣ س = ٠

= ٣ بسّط

المقطع الصادي يساوى ٣.

إرشادات للدراسة

التماثل والنقاط

النقاط الواقعة على الطرفين المتقابلين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يمينًا ويسارًا، كما تبعد بعدًا متساويًا من الرأس.

مثالان إضافيان

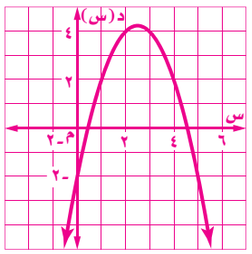
٤ لتكن د (س)= –س^{٢} – ٢س – ٢

أ) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى. عظمى

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة. –١

جـ) حدّد مجال الدالة ومداها.
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية،
والمدى ={ ص| ص ≥ –١}

٥ مثّل الدالة
د (س)= –س^{٢}+ ٥س –٢ بيانيًّا.



تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

المثال ٥ يُبيّن استعمال خصائص الدالة التربيعية لتمثيلها بيانيًّا.

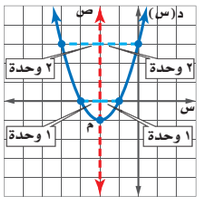
المثال ٦ يُبيّن طريقة استعمال تمثيل الدالة التربيعية بيانيًّا؛ لحل مسائل من واقع الحياة.

المحتوى الرياضي

الرأس: تُسمّى النقطة التي تكون عندها القيمة صغرى أو عظمى للقطع المكافئ رأس القطع. وعندما تكتب الدالة التربيعية بالصورة القياسية ص = أس^{٢}+ ب س + جـ، ويكون (أ) موجبًا، يكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أعلى، ورأسه النقطة الممثلة للقيمة الصغرى، أما عندما يكون (أ) سالبًا، فيكون القطع المكافئ مفتوحًا إلى أسفل، ورأسه النقطة الممثّلة للقيمة العظمى.

الخطوة ٤: يقسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متطابقين، لذا فإنه لكل نقطة على أحد الجزأين توجد نقطة تناظرها في الجزء الآخر، وتبعد المسافة نفسها عن المستقيم الذي يمثّل محور التماثل، وللنقطتين الإحداثي الصادي نفسه

الخطوة ٥: صِل بين النقاط بمنحنى.



تحقق من فهمك

٥أ) د(س) = −٢س^{٢} + ٢س − ١ **٥ب)** د(س) = ٣ س^{٢} − ٦س + ٢

استعملت معلوماتك حول الدوال التربيعية والقطوع المكافئة والتماثل لإنشاء تمثيلات بيانية، ويمكنك تحليل هذه التمثيلات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٦ من واقع الحياة استعمال تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

فيزياء: عرضت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية فيلمًا لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد (س) ثانية بالدالة ف(س) = −١٣س^{٢} + ١٣٠س + ٣١٢.

أ) مثّل الدالة بيانيًّا.

س = $-\frac{ب}{٢أ}$ معادلة محور التماثل

س = $-\frac{١٣٠}{٢(-١٣)}$ = ٥ أ = −١٣ ، ب = ١٣٠

بما أن معادلة محور التماثل س = ٥؛ لذا فالإحداثي السيني للرأس هو ٥.

ص = −١٣س^{٢} + ١٣٠س + ٣١٢ المعادلة الأصلية

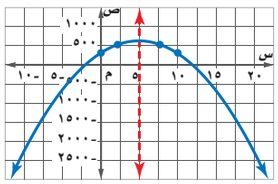
= −١٣ (٥)^{٢} + ١٣٠ (٥) + ٣١٢ س = ٥

= −٣٢٥ + ٦٥٠ + ٣١٢ = ٦٣٧ بسّط

الرأس هو (٥، ٦٣٧).

ولتجد نقطة أخرى، اختر س = ٠ وعوّض ذلك في الدالة الأصلية، فتكون النقطة الجديدة هي (٠، ٣١٢)، وتكون النقطة المقابلة لها على الطرف الآخر لمحور التماثل هي (١٠، ٣١٢).

كرّر هذه العملية واختر س = ٢ لتحصل على النقطة (٢، ٥٢٠)، وتكون النقطة المقابلة لها (٨، ٥٢٠)، ثم صل بين هذه النقاط بمنحنى.



ب) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الصاروخ؟

أُطلق الصاروخ عندما كان الزمن صفرًا، أو عند المقطع الصادي للدالة، أيْ من على ارتفاع ٣١٢ قدمًا عن الأرض.

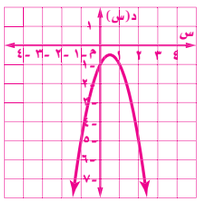
جـ) ما أقصى ارتفاع يصله الصاروخ؟

القيمة العظمى للارتفاع تقع عند الرأس؛ لذا يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له ٦٣٧ قدمًا بعد خمس ثوانٍ من بدء الانطلاق.

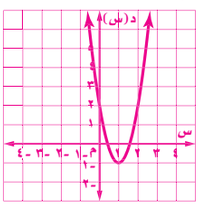
الربط مع الحياة

أُنشئت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية في جامعة الملك خالد عام ١٤٢٢هـ؛ لتهيئة سبل التواصل بين المهتمين بمجالات العلوم الفيزيائية المختلفة، من خلال عقد وتنظيم الندوات والمؤتمرات في مجال العلوم الفيزيائية.

٥أ)



٥ب)



تنبيه!

تجنب الأخطاء: أكد للطلاب أنه ليس من الضروري أن تكون أشكال القطع المكافئ التي يمثلونها بيانيًّا دقيقة تمامًا. واطلب إليهم ألاّ يصلوا النقاط بخطوط مستقيمة، وبيّن لهم أنه من الأهمية أن يمر المنحنى بالأزواج المرتبة الممثلة بيانيًّا.

تمثيل الدوال التربيعية

يحتاج الطلاب عند استعمالهم خاصية التماثل لتمثيل القطع المكافئ إلى إيجاد عدد قليل من النقاط فقط، ثم إيجاد صور هذه النقاط بالنسبة لمحور التماثل. اقترح عليهم التحقّق من الصور بتعويضها في المعادلة الأصلية.

مثال إضافي

٦ رماية: يقذف سمير سهمًا، يمكن تمثيل ارتفاعه بالمعادلة:
ص = −١٦س^{٢} + ١٠٠س + ٤؛
حيث (ص) ارتفاع السهم بالأقدام بعد (س) ثانية من قذفه في الهواء.

أ) مثّل ارتفاع السهم بيانيًّا.

ب) ما الارتفاع الذي قُذف منه السهم؟ ٤ أقدام

جـ) ما القيمة العظمى لارتفاع السهم؟ $١٦٠\frac{١}{٤}$ قدمًا

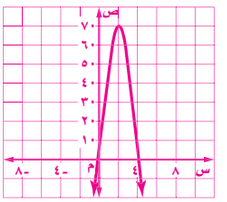
تنويع التعليم:

دون ضمن

إذا كان الطلاب بحاجة إلى تمثيلات مرئية لفهم مفهوم الرأس ومحور التماثل،

فاطلب إليهم إنشاء جدول قيم، وتمثيل الدالة ص= س^{٢}+ ٦س + ٨ بيانيًّا على ورقة مربعات، ورفع أوراقهم في اتجاه الضوء، ثم طي القطع المكافئ لينطبق على نفسه، واستعمال خطوط الطي الظاهرة على أوراقهم؛ لتعيين الرأس، ومحور التماثل، والقيمة الصغرى.
محور التماثل س= −٣، الرأس (−٣، −١)، القيمة الصغرى −١

٦أ)



تحقق من فهمك

٦) **رمي الرمح:** يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (ص) بالأقدام بعد (س) ثانية، بالمعادلة ص = −١٦س^{٢} + ٦٤س + ٦.

أ) مثّل مسار هذا الرمح بيانيًّا.

ب) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الرمح؟ ٦ أقدام

جـ) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟ ٧٠ قدمًا

تأكد

١-٣ انظر ملحق الإجابات

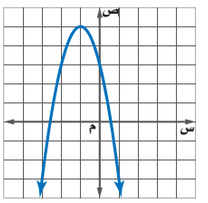
مثال ١ استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

١) ص = ٢س^{٢} + ٤س − ٦ ٢) ص = س^{٢} + ٢س − ١ ٣) ص = ٣س^{٢} − ٦س − ٥

مثال ٢ أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

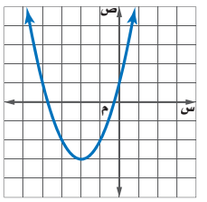
٤) الرأس (−١، ٥)
محور التماثل س = −١
المقطع الصادي ٣

٤)

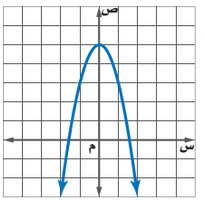


٥) الرأس (−٢، −٣)، محور التماثل س = −٢ المقطع الصادي ١.

٥)



٦)



مثال ٣ أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

٧) ص = −س^{٢} + ٢س + ١ ٨) ص = س^{٢} − ٤س + ٥ ٩) ص = ٤س^{٢} − ٨س + ٩

مثال ٤ في الأسئلة ١٠-١٢ أجب عما يأتي: انظر الهامش

أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أم قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

جـ) حدِّد مجال الدالة ومداها.

٦) الرأس (٠، ٥)، محور التماثل س = ٠، المقطع الصادي ٥

٧) الرأس (١، ٢) محور التماثل س = ١ المقطع الصادي ١

١٠) ص = −س^{٢} − ٢س + ٢ ١١) ص = −٣س^{٢} + ٦س + ٣ ١٢) ص = −٢س^{٢} + ٨س − ٦

مثال ٥ مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا: ١٣ - ١٥ انظر الهامش

١٣) د(س) = −٣س^{٢} + ٦س + ٣ ١٤) د(س) = −٢س^{٢} + ٤س + ١ ١٥) د(س) = ٢س^{٢} − ٨س − ٤

مثال ٦ ١٦) **كرة:** يقذف ياسر كرة في الهواء، وفق المعادلة ص = −١٦س^{٢} + ١٦س + ٥ حيث تمثِّل (ص) ارتفاع الكرة بالأقدام بعد (س) ثانية.

٨) الرأس (٢، ١)، محور التماثل س = ٢، المقطع الصادي ٥

٩) الرأس (١، ٥)، محور التماثل س = ١، المقطع الصادي ٩

أ) مثّل هذه الدالة بيانيًّا. انظر الهامش

ب) ما الارتفاع الذي قُذفت منه الكرة؟ ٥ أقدام

جـ) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة من سطح الأرض؟ ٩ أقدام

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ١٦؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

١٠أ) عظمى

١٠ب) ٣

١٠جـ) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى هو {ص| ص ≤ ٣}

١١أ) عظمى

١١ب) ٦

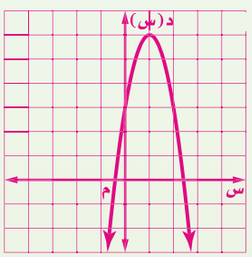
١١جـ) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى هو {ص| ص ≤ ٦}

١٢أ) عظمى

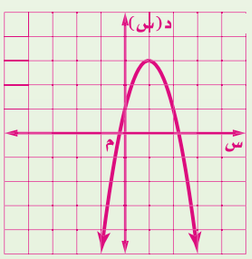
١٢ب) ٢

١٢جـ) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى هو {ص| ص ≤ ٢}

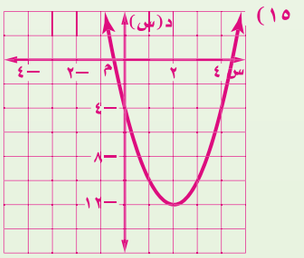
١٣)



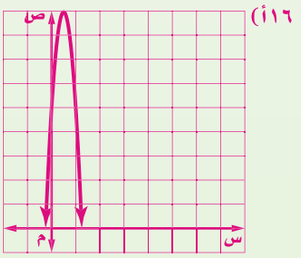
١٤)



١٥)



١٦أ)



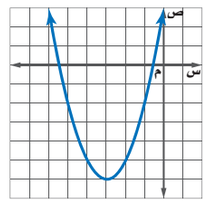
تدرب وحل المسائل

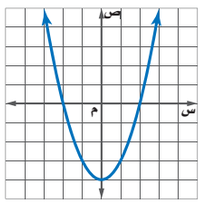
مثال ١ استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها. **١٧–١٩** انظر ملحق الإجابات.

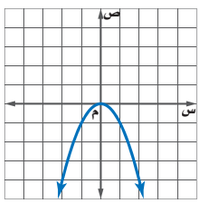
١٧) ص = س^{٢} + ٤س + ٦ ١٨) ص = ٢س^{٢} + ٤س + ٧ ١٩) ص = ٢س^{٢} – ٨س – ٥

مثال ٢ أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

٢٠) ٢١) ٢٢)







مثال ٣ أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي: **٢٣–٢٥** انظر الهامش

٢٣) ص = س^{٢} + ٨س + ١٠ ٢٤) ص = ٢س^{٢} + ١٢س + ١٠ ٢٥) ص = –٣س^{٢} – ٦س + ٧

مثال ٤ في الأسئلة ٢٦–٢٨، أجب عما يأتي: **٢٦–٢٨** انظر الهامش

أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو القيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

جـ) حدِّد مجال الدالة ومداها؟

٢٦) ص = –٢س^{٢} – ٨س + ١ ٢٧) ص = س^{٢} + ٤س – ٥ ٢٨) ص = ٣س^{٢} + ١٨س – ٢١

مثال ٥ مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا: **٢٩–٣١** انظر ملحق الإجابات

٢٩) ص = –٣س^{٢} + ٦س – ٤ ٣٠) ص = –٢س^{٢} – ٤س – ٣ ٣١) ص = ٣س^{٢} – ١٢س + ٥

الربط مع الحياة

عندما ينطلق الجسم أو الأداة في الهواء يسمى مقذوفًا، وقد يكون هذا الجسم أداة جامدة مثل الرمح، قرص، كرة، .... أو كائن حي مثل الوثب العالي، والوثب الطويل.

٣٢) **كرة قدم:** قذف حارس المرمى الكرة من مستوى سطح الأرض إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٩٠ قدمًا في الثانية، والدالة ع = –١٦ن^{٢} + ٩٠ن تمثّل ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية.

أ) ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟ ٧٤ قدمًا.

ب) متى تكون الكرة على ارتفاع ١٢٦ قدمًا؟ ٢,٦٣ ثانية تقريبًا، ٣ ثوانٍ.

جـ) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ ١٢٦,٦ قدمًا تقريبًا

٣٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة حل المعادلات التربيعية باستعمال جداول القيم.

أ) **جبريًّا:** حدّد الدالة المرتبطة بكل معادلة فيما يأتي، ثم انسخ الجدول وأكمله. انظر ملحق الإجابات

المعادلة	الدالة المرتبطة	الأصفار
س^{٢} – س = ١٢	؟	؟
س^{٢} + ٨س = ٩	؟	؟
س^{٢} = ١٤س – ٢٤	؟	؟
س^{٢} + ١٦س = –٢٨	؟	؟

ب) **بيانيًّا:** مثّل كل دالة مرتبطة باستعمال الحاسبة البيانية. انظر ملحق الإجابات

تنبيه لحل أسئلة

ورقة المربعات: يحتاج الطلاب إلى ورقة مربعات لحل الأسئلة ١–٣، ١٣–١٩، ٢٩–٣١، ٣٤

إجابات:

٢٣) الرأس (–٤، –٦)، محور التماثل س= –٤، المقطع الصادي ١٠

٢٤) الرأس (–٣، –٨)، محور التماثل س=–٣، المقطع الصادي ١٠.

٢٥) الرأس (–١، ١٠)، محور التماثل س=–١، المقطع الصادي ٧

٢٦أ) عظمى

٢٦ب) ٩

٢٦جـ) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى هو { ص| ص ≥ ٩}

٢٧أ) صغرى

٢٧ب) –٩

٢٧جـ) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى هو { ص| ص ≤ –٩}

٢٨أ) صغرى

٢٨ب) –٤٨

٢٨جـ) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى هو {ص| ص ≤ –٤٨}

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٧ – ٣٥ ، ٣٧ – ٤٦
ضمن ضمن المتوسط	٢٢ – ٣٠ (زوجي) ، ٣٣ – ٣٥ ، ٣٧ – ٤٦
فوق فوق المتوسط	٣٢ – ٤٦

ج) تحليليًا: استعمل قيم الجدول الموجودة على حاسبتك لتحديد أصفار كل دالة مرتبطة، ثم اكتب الأصفار في الجدول الوارد في الصفحة السابقة. انظر ملحق الإجابات

د) لفظيًا: وضح العلاقة بين عدد حلول المعادلة وأصفار الدالة المرتبطة بها؟ عدد أصفار الدالة يساوي درجتها ويساوي عدد حلول المعادلة.

إرشادات للدراسة

الأصفار

عدد أصفار الدالة يساوي درجة الدالة المرتبطة بالمعادلة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٤) مسألة مفتوحة: اكتب دالة تربيعية معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي س = $-\frac{٣}{٨}$، ملخصًا خطوات عملك.

٣٥) اكتشف الخطأ: تحاول عبير ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك. عبير؛ نسيت منى إشارة السالب مع (−٤).

منى

ص = $-س^{٢} - ٤س + ٦$

س = $-\frac{ب}{٢أ}$

س = $-\frac{٤}{٢(-١)}$

س = ٢

عبير

ص = $-س^{٢} - ٤س + ٦$

س = $-\frac{ب}{٢أ}$

س = $-\frac{-٤}{٢(-١)}$

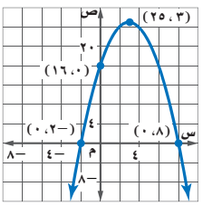
س = −٢

٣٤) إجابة ممكنة:
ص = ٤س^{٢} + ٣س + ٥؛ اكتب معادلة محور التماثل، س = $-\frac{ب}{٢أ}$.
ب = ٣ ، ٢أ = ٨، إذن أ = ٤. عوّض هذه القيم في المعادلة ص = أس^{٢}+ب س+جـ

٣٥) إجابة ممكنة: أمثّل النقاط المعطاة وأرسم القطع المكافئ المار بها، أجد انعكاس النقطة (٥، ٩) حول المستقيم س = ٢.

٣٦) إجابة ممكنة: أجد قيم أ، ب من الصورة القياسية، وأعوّض ذلك في معادلة محور التماثل س = $-\frac{ب}{٢أ}$، وهذا يعطي الإحداثي السيني، ولإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة أعوض في المعادلة الأصلية.
جـ تمثل المقطع الصادي.

٣٦) تحدٍّ: اكتب معادلة التمثيل البياني المجاور باستعمال محور التماثل وأحد المقطعين السينيين. إجابة ممكنة: ص = − س^{٢} + ٦س + ١٦



٣٧) تبرير: إذا كان رأس قطع مكافئ هو النقطة (٢، ٠)، وإحدى نقاطه (٥، ٩)، فأوجد نقطة أخرى عليه، واشرح طريقة إيجادها.

٣٨) اكتب: وضّح كيفية إيجاد محور التماثل لمعادلة الدالة التربيعية، ثم فسّر الخصائص الأخرى للتمثيل البياني التي يمكنك اشتقاقها منه، وكيف توصَّلت إليها.

تدريب على اختبار

٣٩) هندسة: دائرة مساحتها ٣٦ط وحدة مربعة، إذا زاد نصف قطرها إلى مثليه، فكم تصبح مساحة الدائرة الجديدة؟ ب

أ) ٧٢ط وحدة مربعة
ب) ١٤٤ط وحدة مربعة
جـ) ١٢٩٦ط وحدة مربعة
د) ٩ط وحدة مربعة

٤٠) ما مدى الدالة د (س) = $-٤س^{٢} - \frac{١}{٢}$؟ د

أ) جميع الأعداد الصحيحة التي تقل عن أو تساوي $\frac{١}{٢}$
ب) جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة
جـ) جميع الأعداد الحقيقية
د) جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي $-\frac{١}{٢}$

مراجعة تراكمية

٤٢) نعم؛ (٢س − ٥)^{٢}

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها: (الدرس ٧-٦)

٤١) ٤س^{٢} + ٤س + ١ نعم؛ (٢س + ١)^{٢}
٤٢) ٤س^{٢} − ٢٠س + ٢٥
٤٣) ٩س^{٢} + ٨س + ١٦ لا

أوجد المقطع السيني للتمثيل البياني لكل معادلة فيما يأتي: (الدرس ٢-٣)

٤٤) س + ٢ص = ١٠ ١٠
٤٥) ٢س − ٣ص = ١٢ ٦
٤٦) ٣س − ص = −١٨ −٦

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أن الألعاب النارية مصمّمة لتنفجر عند أعلى نقطة، وتُمثّل المعادلة الآتية ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار بعد (ن) ثانية : ع = −٩,٤ن^{٢} + ٢٣٤,٦ن + ١ ، على أي ارتفاع ينفجر الصاروخ؟ وبعد كَمْ ثانية؟
على ارتفاع يساوي ٦١ مترًا تقريبًا، ينفجر الصاروخ بعد ٣,٥ ثانية .

تمثيلات متعدّدة

يستعمل الطلاب في السؤال ٣٣ الحاسبة البيانية والمعلومات المنظّمة في جدول، والتحليل الجبري لحل المعادلات التربيعية.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: اقترح على الطلاب في السؤال ٣٥ تحديد قيم أ، ب، جـ، والحرص على تضمين الإشارات في هذه القيم، واطلب إليهم تعويض تلك القيم في المعادلة س = $-\frac{ب}{٢أ}$ واستعمال الأقواس عند الضرورة.

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اعمل نسخًا متعدّدة لخمسة تمثيلات مختلفة لدوال تربيعية، أعطِ تمثيلًا واحدًا لكل طالب، واطلب إليهم كتابة إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ وتحديد إن كان له قيمة عظمى أم قيمة صغرى، وتسليمك أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (٨-١) بإعطائهم:

الاختبار القصير (١)، ص (٤٩)

١ التركيز

الهدف: استعمال دالة تربيعية معطاة لاكتشاف معدل التغيّر لدالة تربيعية.

المواد اللازمة

- ورقة مربعات.

إرشادات التدريس

يحتاج الطلاب إلى إنشاء جدول مكوّن من ١٩ عمودًا في الخطوة الأولى من النشاط.

٢ التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، واطلب إليهم تنفيذ النشاط.

ثم اسأل:

- ما القيمتان الصغرى والعظمى لكل من س،ص التي تحتاج إليهما عند تمثيل النظام الإحداثي للدالة في هذا النشاط؟
  س: من ٠ إلى ٩، ص: من ٠ إلى ٣٢٤
- ما أوجه الاختلاف بين معدل تغيّر الدالة التربيعية ومعدل تغير الدالة الخطية؟
  الدالة الخطية لها معدل تغيّر ثابت، فلا تتغيّر إشارته، أمّا الدالة التربيعية فلها معدل تغيّر غير ثابت، فيكون موجبًا في بعض الفترات، وسالبًا في فترات أخرى.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة ١-٤

٣ التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة (١-٣) لتقويم مدى فهم الطلاب لمعدل التغير في الدالة التربيعية.

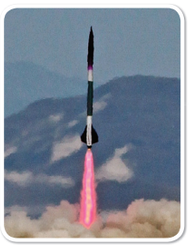
من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب تفحّص الموقف في النشاط، واسألهم كيف تتأثّر المعادلة ومعدل التغيّر في نموذج الصاروخ الذي يتم إطلاقه من الأرض إلى الأعلى بسرعة ٤٤ مترًا في الثانية.

ستكون المعادلة (بمعاملات تقريبية)
ع = -٥ن^{٢} + ٤٤ن، وبما أن
المتر = ٣,٣ أقدام تقريبًا، فإن معاملات المعادلة بالقدم لكل ثانية يتم تقسيمها على ٣,٣، ولا تتأثّر المتغيّرات، وتتغيّر تبعًا لذلك معدلات التغير.

معدل التغير في الدالة التربيعية

أُطلق نموذج صاروخ من الأرض إلى الأعلى بسرعة ١٤٤ قدمًا/ ثانية، والدالة ص= -١٦س^{٢}+ ١٤٤ س تمثّل ارتفاع الصاروخ (ص) بعد (س) ثانية، يمكنك استقصاء معدل التغير في ارتفاع الصاورخ باستعمال الدالة التربيعية.



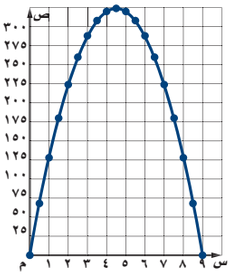
نشاط

الخطوة ١: انسخ الجدول أدناه.

س	٠	٠,٥	١,٠	١,٥	...	٩,٠
ص	٠					
معدل التغير	—					

الخطوة ٢: أوجد قيمة ص عند كل قيمة من قيم س من ٠ إلى ٩.

الخطوة ٣: مثّل الأزواج المرتبة (س، ص) على ورقة مربعات، ثم صل بين النقاط بمنحنى، ولاحظ أن الدالة تتزايد عندما ٠ < س < ٤,٥، وتتناقص عندما ٤,٥ < س < ٩.



الخطوة ٤: تذكر أن معدل التغير هو التغير في ص مقسومًا على التغير في س، أوجد معدل التغير عند كل فترة طولها نصف ثانية.

تمارين

استعمل الدالة التربيعية ص = س^{٢} ١- ٤ انظر ملحق الإجابات.

١) أنشئ جدولاً للدالة مشابهًا للجدول الوارد في النشاط مستعملاً قيم س: -٤، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ثم أوجد قيم ص عند كل قيمة من قيم س.

٢) مثّل بيانيًّا الأزواج المرتبة على ورقة مربعات، وصِلْ بين النقاط بمنحنى، ثم صف تزايد الدالة وتناقصها.

٣) أوجد معدل التغير في كل عمود بدءًا من س= -٣، وقارن بين معدلات التغير عندما تتزايد الدالة، وعندما تتناقص.

٤) **تحدَّ:** إذا أُسقِطَ جسم من ارتفاع ١٠٠ قدم في الهواء فإنه يسقط بمعدل يمكن تمثيله بالدالة د (س) = -١٦ س^{٢}+ ١٠٠ مع تجاهل مقاومة الهواء، حيث تمثّل د (س) ارتفاع الجسم بالأقدام بعد (س) ثانية، أنشئ جدولاً للقيم كما في الجدول الوارد في تمرين ١، واختر قيمًا مناسبة لـ (س)، وأكمل الجدول بقيم س، ص ومعدلات التغير، ثم قارن بين هذه المعدلات، وصف الأنماط التي تلاحظها.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٨ - ١

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٦) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٨-١ تدريبات إعادة التعليم

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

خصائص الدوال التربيعية

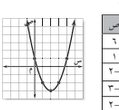
الدالة التربيعية	هي الدالة التي يمكن كتابتها على الصورة د(س) = أس٢ + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠.	مثال: ص = ٢س٢ + ٣س + ٨

الدالة المولدة (الأم) للدوال التربيعية هي ص = س٢، ويسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية **قطعًا مكافئًا**. ويكون هذا التمثيل مفتوحًا إلى أعلى إذا كان أ > ٠، وتمثل أدنى نقطة فيه نقطة القيمة الصغرى، ويكون هذا التمثيل مفتوحًا إلى أسفل إذا كان أ < ٠، وتمثل أعلى نقطة فيه نقطة القيمة العظمى.

مثال ١

أ) مثّل الدالة ص = س٢ − ٤س + ١ بيانيًا، مستعملًا جدول القيم:

س	ص
٦	١−
٥	٠
٤	١
٣	٢−
٢	٣−
١	٢−
٠	١−



مثّل الأزواج المرتبة بيانيًا، ثم صل بينها بمنحنى أملس.

ب) حدّد مجال الدالة ومداها.

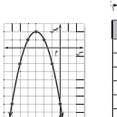
المجال (قيم س) هو جميع الأعداد الحقيقية.

والمدى (قيم ص) هو {ص|ص ≥ −٣}، لأن −٣ هي القيمة الصغرى

مثال ٢

أ) مثّل الدالة ص = − س٢ − ٦س − ٧ بيانيًا، مستعملًا جدول القيم:

س	ص
٦−	٧−
٥−	٢−
٤−	١
٣−	٢
٢−	١
١−	٢−
٠	٧−



مثّل الأزواج المرتبة بيانيًا، ثم صل بينها بمنحنى أملس.

ب) حدّد مجال الدالة ومداها.

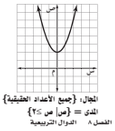
المجال (قيم س) هو جميع الأعداد الحقيقية.

والمدى (قيم ص) هو {ص|ص ≤ ٢}؛ لأن ٢ هي القيمة العظمى.

تمارين

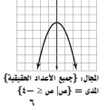
مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، مستعملًا جدول القيم، وحدّد مجالها ومداها:

١) ص = س٢ + ٢



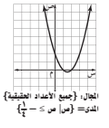
المجال: {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = {ص|ص ≥ ٢}

٢) ص = − س٢ − ٤



المجال: {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = {ص|ص ≤ −٤}

٣) ص = س٢ − ٣س + ٢



المجال: {جميع الأعداد الحقيقية}
المدى = {ص|ص ≥ −$\frac{١}{٤}$}

تدريبات حل المسألة (٨) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٨-١ تدريبات حل المسألة

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

١) **ألعاب نارية:** أُطلق سهم ناريٌّ إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدمًا في الثانية. فإذا كانت الدالة ف = −١٦ن٢ + ٦٤ن تمثل ارتفاع السهم ف (بالأقدام) بعد ن من الثواني، فأوجد إحداثيات الرأس للتمثيل البياني لهذه الدالة، وفسّر معناه.

(٢، ٦٤)؛ يصل السهم إلى أقصى ارتفاع له بعد ثانيتين. أقصى ارتفاع له هو ٦٤ قدمًا فوق سطح الأرض.

٢) **فيزياء:** يستقصي طلاب في حصة الفيزياء ما يحدث عند دفع كرة بسرعة ابتدائية على سطح مائل، فتصعد عليه ثم ترجع. فوجدوا أنه يمكنهم تمثيل المسافة (ف) التي تقطعها الكرة بعد ن ثانية بالدالة ف = −٥ن٢ + ٦٠ن. على التمثيل البياني لهذه الدالة حدد قيمة ف عندما ن = ٤

٨ قدمًا

٣) **هندسة معمارية:** قوس المدخل الرئيسي لأحد الفنادق يأخذ شكل قطع مكافئ. إذا كانت المعادلة ص = − س٢ + ١٠س تمثل ارتفاع القوس ص بالأقدام عند أي بُعد س عن أحد جانبيه، فحدّد أقصى ارتفاع للقوس مستعملًا التمثيل البياني لدالته.

٢٥ قدمًا

٤) **ألعاب نارية:** أُطلقت ألعاب نارية أول مرة عام ١٨٩٦م، وأصبحت تُقام كل ٤ سنوات (باستثناء الأعوام ١٩١٦م، ١٩٤٠م، ١٩٤٤م). ويمكن تمثيل الارتفاع (ص) للفائز بمسابقة الوثب بالزانة للرجال في الدورة الأولمبية رقم (س) بالمعادلة ص = ٠,٣٧س٢ + ٤,٣س + ٢٦، أكمل الجدول أدناه لتقدير الارتفاعات للفائزين بمسابقة الوثب بالزانة في كل دورة أولمبية معطاة، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

السنة	رقم الدورة الأولمبية (س)	الارتفاع (ص) بوصة
١٨٩٦م	١	١٣٠,٧
١٩٠٠م	٢	١٣٦,١
١٩٢٤م	٧	١٧٤,٢
١٩٣٦م	١٠	٢٠٦,٠
١٩٦٤م	١٥	٢٧٣,٨
٢٠٠٨م	٢٦	٤٨٧,٩

٥) **هندسة:** أنشأ عز الدين قاعدة خشبية مستطيلة كما في الشكل أدناه:

أ) اكتب دالّة تمثّل مساحة القاعدة الخشبية.

ص = (س − ٢)(س + ٦)

ص = س٢ + ٤س − ١٢

ب) ما معادلة محور التماثل؟

س = −٢

جـ) مثّل الدالة بيانيًا وحدّد رأس التمثيل البياني.

الرأس (−٢، −١٦)

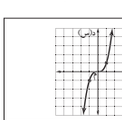
التدريبات الإثرائية (٩) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٨-١ التدريبات الإثرائية

تمثيل الدوال التكعيبية بيانيًا

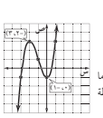
الدالة التكعيبية: هي كثيرة حدود على الصورة د(س) = أس٣ + ب س٢ + جـ س + ع، حيث أ ≠ ٠، لا يوجد للدالة التكعيبية نقطة قيمة عظمى مطلقة أو نقطة قيمة صغرى مطلقة مثل الدوال التربيعية، لكن قد يوجد لها نقطة قيمة عظمى محلّية أو نقطة قيمة صغرى محلّية.

الدالة المولّدة (الأم): د(س) = س٣ المجال: جميع الأعداد الحقيقية المدى: جميع الأعداد الحقيقية	

مثال

مثّل الدالة ص = س٣ + ٣س٢ − ١ بيانيًا، مستعملًا جدول القيم، ثمّ قدّر من التمثيل البياني مواقع القيم العظمى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية.

س	−٣	−٢	−١	٠	١
ص	−١	٣	١	−١	٣



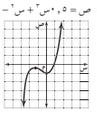
مثّل الأزواج المرتبة بيانيًا، وصِل بينها بمنحنى أملس.

يمتد الشكل الذي يشبه حرف (S) إلى ما لانهاية في اتجاه المحور الصادي الموجب وإلى سالب ما لانهاية في اتجاه المحور الصادي السالب. نقطة القيمة الصغرى المحلّية هي (٠، −١)، ونقطة القيمة العظمى المحلّية هي (−٢، ٣).

تمارين

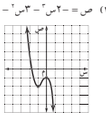
مثّل كلّ دالة فيما يأتي بيانيًا، مستعملًا جدول القيم، ثمّ قدّر من التمثيل البياني مواقع القيم العظمى المحلّية والصغرى المحلّية:

١) ص = ٥، س٣ + س − ١



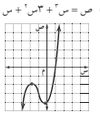
قيمة عظمى محلية عند: (−١،٣، −٠،٤)
قيمة صغرى محلية عند: (٠، −١)

٢) ص = −٢س٣ − ٣س٢ − ١



قيمة عظمى محلية عند: (٠، −١)
قيمة صغرى محلية عند: (−١، −٣)

٣) ص = س٣ + ٣س٢ − ٤



قيمة عظمى محلية عند: (−١٫٨، −١٫٩)
قيمة صغرى محلية عند: (−٠٫٢، −٤٫١)

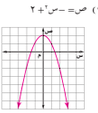
كتاب التمارين (١٧) — دون ضمن فوق

الفصل الثامن: الدوال التربيعية

٨ - ١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

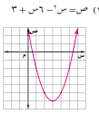
استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها.

١) ص = −س٢ + ٢



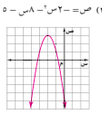
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المدى = {ص|ص ≤ ٢}

٢) ص = س٢ − ٦س + ٣



المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المدى = {ص|ص ≥ −٦}

٣) ص = −٢س٢ − ٨س − ٥



المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المدى = {ص|ص ≤ ٣}

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

٤) ص = س٢ − ٩
(٠، −٩)؛ س = ٠ ،
المقطع الصادي = −٩

٥) ص = −٢س٢ + ٨س − ٥
(٢، ٣)؛ س = ٢ ،
المقطع الصادي = −٥

٦) ص = ٤س٢ − ٤س + ١
(٠٫٥، ٠)؛ س = ٠٫٥ ،
المقطع الصادي = ١

بيّن ما إذا كان لكل معادلة فيما يأتي قيمة عظمى أم صغرى، ثم حدّدها، وحدّد مجال الدالة ومداها.

٧) ص = ٥س٢ − ٢س + ٢
صغرى؛ (٠٫٢، ١٫٨)؛
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المدى = {ص|ص ≥ ١٫٨}

٨) ص = −س٢ + ٥س − ١٠
عظمى؛ (٢٫٥، −٣٫٧٥)؛
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المدى = {ص|ص ≤ ٣٫٧٥}

٩) ص = $\frac{٣}{٤}$س٢ + ٤س − ٩
صغرى؛ (−$\frac{٤}{٣}$، −١١$\frac{١}{٣}$)؛
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المدى = {ص|ص ≥ −١١$\frac{١}{٣}$}

١٠) **كرة:** تُمثّل المعادلة ع = −٠٫٠٠٥س٢ + س + ٣ مسار كرة قذفها لاعب في الهواء، حيث (ع) ارتفاع الكرة بالأقدام، و (س) المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة.

أ) ما معادلة محور التماثل؟ س = ١٠٠

ب) ما القيمة العظمى للارتفاع الذي تصله الكرة؟ ٥٣ قدمًا

جـ) إذا التقط اللاعب الكرة من ارتفاع ٣ أمتار من مستوى سطح الأرض، فما المسافة الأفقية التي تبعدها الكرة عن موضع سقوطها على الأرض؟ ٢٠٠ قدم

ملحوظات المعلم

حل المعادلات التربيعية بيانيًّا

لماذا؟

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل.

والآن

- أحل المعادلات التربيعية بيانيًا.
- أقدّر حلول المعادلات التربيعية من تمثيلها البياني.

المفردات

الجذر المكرّر

obeikaneducation.com

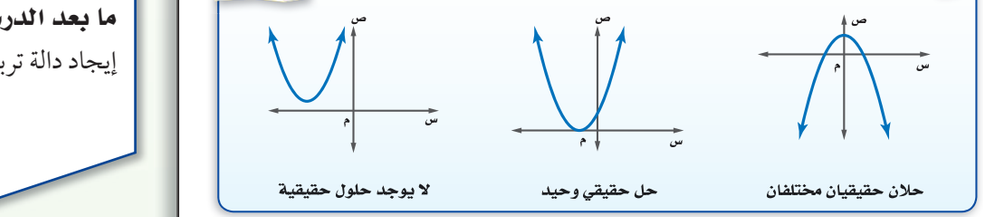
يعبّر عن المسار المنحني لكرة قدم رُكلت داخل ملعب بالدالة ص = −س^{٢} + ١٨س؛ حيث (س) المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة بالأمتار، (ص) ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض بالأمتار.

ويمكن استعمال المقاطع السينية للتمثيل البياني لهذه الدالة لتحديد المسافة الأفقية التي ستقطعها الكرة حتى تلمس الأرض.

حل المعادلة التربيعية بالتمثيل البياني: الصورة القياسية للمعادلة التربيعية هي: أس^{٢}+ب س+ جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠، ولكتابة الدالة التربيعية على صورة معادلة، استبدل ص أو د (س) بصفر، وتذكّر أن حلول المعادلة أو جذورها يمكن تحديدها بإيجاد المقاطع السينية للتمثيل البياني للدالة المرتبطة، ويوجد للمعادلة التربيعية حلان حقيقيان أو حل حقيقي واحد، أو لا يوجد لها حلول حقيقية.

مفهوم أساسي حلول المعادلات التربيعية

أضف إلى مطويتك

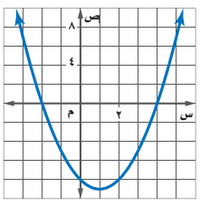


حلان حقيقيان مختلفان | حل حقيقي وحيد | لا يوجد حلول حقيقية

مثال ١ جذران حقيقيان مختلفان

حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠ بيانيًّا.

مثّل الدالة د (س) = س^{٢} − ٢س − ٨ المرتبطة بالمعادلة بيانيًّا.



تظهر المقاطع السينية للتمثيل البياني عند −٢، ٤؛ لذا فالحلول هي −٢، ٤

تحقق: تحقّق من صحة كل حل بالتعويض في المعادلة الأصلية.

س = −٢	المعادلة الأصلية	س = ٤
س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠		س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠
(−٢)^{٢} − ٢(−٢) − ٨ ≟ ٠		(٤)^{٢} − ٢(٤) − ٨ ≟ ٠
٠ = ٠ ✓	بسّط.	٠ = ٠ ✓

تحقق من فهمك للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

١أ) −س^{٢} − ٣س + ١٨ = ٠ ٣، −٦ **١ب)** س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠ ١، ٣

حلول المعادلة في مثال ١ عددان حقيقيان مختلفان، إلا أنه أحيانًا يكون الجذران هما العدد نفسه، ويُسمّى عندها **جذرًا مكرّرًا**.

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٨ - ٢

حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل.

الدرس ٨ - ٢

حل المعادلات التربيعية بيانيًّا.

تقدير حلول المعادلات التربيعية من تمثيلها البياني.

ما بعد الدرس ٨ - ٢

إيجاد دالة تربيعية بمعرفة خصائصها.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمّ اسأل:

إذا كانت المقاطع السينية تُمثّل نقطة التقاء القطع المكافئ بالأرض، فماذا يمثل المستقيم المار بهذه النقاط؟ محور السينات

- ما المقطعان السينيان للتمثيل البياني للمعادلة؟ −٥، ٢٠٥ تقريبًا
- ما معادلة محور التماثل؟ س = ١٠٠
- ما المسافة بين نقطتي التقاء القطع المكافئ بالأرض؟ ٢١٠ أقدام

مصادر الدرس ٨- ٢

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٠٠)	• تنويع التعليم ص (١٠٠)	• تنويع التعليم ص (١٠٣)
كتاب التمارين	ص (١٨)	ص (١٨)	ص (١٨)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) • تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢) • التدريبات الإثرائية، ص (١٣)

حل المعادلات التربيعية بيانيًّا

المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال التمثيل البياني لإيجاد جذرين حقيقيين لمعادلة تربيعية.

المثال ٢ يُبيّن طريقة استعمال التمثيل البياني لإيجاد جذر مكرر لمعادلة تربيعية.

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال التمثيل البياني لتحديد ما إذا كان للمعادلة التربيعية جذور حقيقية أم لا.

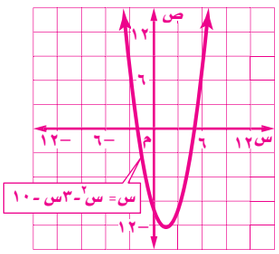
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

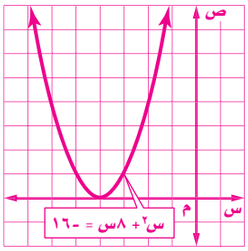
أمثلة إضافية

حل المعادلات الآتية بيانيًّا:

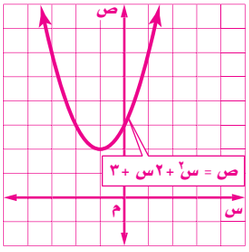
١ $س^٢ - ٣س - ١٠ = ٠$ $-٢، ٥$



٢ $س^٢ + ٨س = -١٦$ -٤



٣ $س^٢ + ٢س + ٣ = ٠$ $\varnothing$



مثال ٢ جذر مكرر

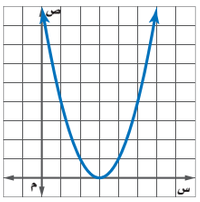
حل المعادلة $س^٢ - ٦س = -٩$ بيانيًّا.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$س^٢ - ٦س = -٩$ المعادلة الأصلية

$س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$ أضف ٩ إلى كلا الطرفين.

الخطوة ٢: مثّل الدالة المرتبطة د (س) $= س^٢ - ٦س + ٩$



الخطوة ٣: حَدِّد المقطع السيني للتمثيل البياني، ولاحظ أن رأس القطع المكافئ هو المقطع السيني الوحيد للدالة؛ لذا فإن للمعادلة حلًّا وحيدًا هو ٣

تحقق: حل المعادلة بالتحليل إلى العوامل

$س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$ المعادلة الأصلية

$(س - ٣)(س - ٣) = ٠$ حلّل إلى العوامل

$س - ٣ = ٠$ أو $س - ٣ = ٠$ خاصية الضرب الصفري

$س = ٣$ $س = ٣$ أضف ٣ إلى كلا الطرفين

الحل الوحيد هو ٣

تحقق من فهمك للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

٢أ) $س^٢ + ٢٥ = ١٠س$ ٥ **٢ب)** $س^٢ = -٨س - ١٦$ -٤

تنبيه!

الحلول الدقيقة

قد تظهر الحلول التي نتوصل إليها من التمثيل البياني على أنها دقيقة، إلا أنه لا يمكنك التأكد من ذلك ما لم تتحقق منها في المعادلة الأصلية.

كما أن جذور المعادلة التربيعية تكون أحيانًا أعدادًا غير حقيقية.

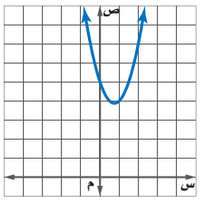
مثال ٣ لا يوجد جذور حقيقية

حل المعادلة $٢س^٢ - ٣س + ٥ = ٠$ بيانيًّا.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة مكتوبة بالصورة القياسية.

الخطوة ٢: مثّل الدالة المرتبطة د(س) $= ٢س^٢ - ٣س + ٥$.



الخطوة ٣: حدِّد المقطع السيني للتمثيل البياني للدالة. لاحظ أن التمثيل البياني ليس له مقطع سيني؛ لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية، وبالتالي فإن مجموعة الحل هي $\varnothing$.

تحقق: حُلّ المعادلة بالتحليل إلى العوامل.

لا يوجد عوامل للعدد ١٠ مجموعها -٣، لذا فالعبارة غير قابلة للتحليل إلى العوامل، أيْ أنه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية.

تحقق من فهمك للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

٣أ) $-س^٢ - ٣س = ٥$ $\varnothing$ **٣ب)** $-٢س^٢ - ٨ = ٦س$ $\varnothing$

تنويع التعليم:

دون ضمن

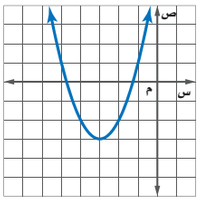
إذا افترض الطلاب أن إحداثيي رأس القطع المكافئ هما أعداد صحيحة دائمًا ،

فقم بالإشارة إلى المثال ٣، حيث إن الإحداثي الصادي للرأس أكبر من ٣ وأقل بقليل من ٤ .

تقدير الحلول: تمثّل الجذور التي وجدت للمعادلات السابقة أعدادًا صحيحة، إلا أن جذور المعادلات التربيعية ليست دائمًا كذلك، ويستعمل في هذه الحالات التقدير لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلة.

مثال ٤ تقدير الجذور باستعمال الجدول

حُلَّ المعادلة س^{٢} + ٦س + ٦ = ٠ بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدِّرها إلى أقرب جزء من عشرة.



مثل الدالة المرتبطة د (س) = س^{٢} + ٦س + ٦ بيانيًا.

يقع المقطعان السينيان بين −٥، −٤، وبين −٢، −١

أنشئ جدولاً بتدريج طوله ٠,١ لقيم س التي تقع بين −٥، −٤، وبين −٢، −١. وابحث عن التغير في إشارات قيم الدالة، وتُعد قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر هي التقريب الأفضل لصفر الدالة.

س	−٤,٩	−٤,٨	−٤,٧	−٤,٦	−٤,٥	−٤,٤	−٤,٣	−٤,٢	−٤,١
ص	٠,٦١	٠,٢٤	−٠,١١	−٠,٤٤	−٠,٧٥	−١,٠٤	−١,٣١	−١,٥٦	−١,٧٩

س	−١,٩	−١,٨	−١,٧	−١,٦	−١,٥	−١,٤	−١,٣	−١,٢	−١,١
ص	−١,٧٩	−١,٥٦	−١,٣١	−١,٠٤	−٠,٧٥	−٠,٤٤	−٠,١١	٠,٢٤	٠,٦١

بما أن قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر عند تغير الإشارة في كلا الجدولين هي −١١,٠؛ لذا فإن الجذرين التقريبيين هما: −٤,٧، −٣,١.

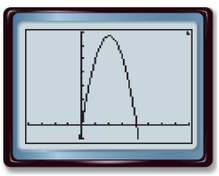
تحقق من فهمك

٤) حُل المعادلة ٢س^{٢} + ٦س − ٣ = ٠ بيانيًا. وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة. −٤,٠، −٣,٤

يُعدّ تقريب المقطعين السينيين للتمثيل البياني للدوال التربيعية مفيدًا في تطبيقات من واقع الحياة.

مثال ٥ من واقع الحياة تقدير الجذور باستعمال الحاسبة البيانية

قذف سعد الكرة بقدمه من ارتفاع قدم واحدة من الأرض إلى أعلى بسرعة ٦٥ قدمًا/ ثانية، وتمثل الدالة ع = −١٦ن^{٢} + ٦٥ ن + ١ ارتفاع الكرة (ع) بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟



لإيجاد جذور المعادلة −١٦ن^{٢} + ٦٥ن + ١ = ٠، استعمل الحاسبة البيانية في تمثيل الدالة المرتبطة د (ن) = −١٦ن^{٢} + ٦٥ن + ١.

بما أن المقطع السيني الموجب للتمثيل هو ٤ تقريبًا؛ لذا فإن الكرة بقيت ٤ ثوانٍ تقريبًا في الهواء.

تحقق من فهمك

٥) إذا قذف سعد الكرة من ارتفاع قدمين من الأرض إلى أعلى بسرعة ٥٥ قدمًا/ ثانية. فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟ ٣,٥ ثوانٍ.

إرشادات للدراسة

مواقع الأصفار

بما أن الدوال التربيعية دوال متصلة؛ لذا يجب أن يوجد صفر بين قيمتي س اللتين يقابلهما قيمتان متعاكستان في الإشارة من ص.

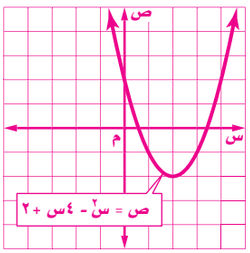
تقدير الحلول

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال التمثيل البياني وجدول القيم، لتقدير جذور المعادلة التربيعية إذا كانت الجذور غير صحيحة.

المثال ٥ يُبيّن استخدام تقدير الجذور لحل مسألة من واقع الحياة تتضمن معادلات تربيعية.

مثالان إضافيان

٤ حُلَّ المعادلة س^{٢} − ٤س + ٢ = ٠ بيانيًا. وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدِّرها إلى أقرب جزء من عشرة. ٣,٤، ٠,٦



٥ نموذج صاروخ: يبني راشد نموذجًا لصاروخ في مشروعه العلمي، وتُمثّل المعادلة ع = −١٦ن^{٢} + ٢٥٠ن ارتفاع الصاروخ بالقدم بعد انطلاقه من مستوى سطح الأرض بسرعة ٢٥٠ قدمًا في الثانية، بعد (ن) ثانية، قدّر زمن تحليق الصاروخ في الهواء. ١٥,٦ ثانية.

التعليم باستعمال التقنيات

مشغل الوسائط المحمول:

حمّل أشكالاً للتمثيلات البيانية لدوالّ تربيعية على الصفحة الإلكترونية الخاصة بصفك؛ ليقوم الطلاب بتحميلها على مشغّلات الوسائط الخاصة بهم، واطلب إليهم إيجاد أصفار الدالة في كل تمثيل.

إرشادات للمعلم الجديد

الحاسبة البيانية أداة قوية لحل المعادلات التربيعية بيانيًا، أو باستعمال الجداول. ناقش مع الطلاب هذه الطرق.

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ٧؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل أسئلة

ورقة المربعات: يحتاج الطلاب إلى ورقة مربعات لحل الأسئلة ١–٦، ٨–١٣، ١٩، ٢٦–٢٩.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ١٩ يستعمل الطلاب التمثيل البياني والتحليل لتفسير العلاقة بين الدوال التربيعية وتمثيلاتها البيانية.

المحتوى الرياضي

لا يوجد جذور حقيقية:
يساعد إنشاء جدول القيم قبل تمثيل الدالة على معرفة إذا كان للدالة مقطع سيني. إذا كانت قيم (ص) جميعها موجبة، وكان تتناقص أولاً ثم تتزايد، أو كانت القيم جميعها سالبة، وتتزايد أولاً ثم تتناقص، فالتمثيل لا يقطع محور السينات، وليس له جذور حقيقية.

الجذر المتكرّر: عند وجود عاملين متساويين لثلاثية الحدود في المعادلة التربيعية، فسيوجد جذر واحد يُسمّى الجذر المكرر، وإذا كانت القيمة الصغرى أو العظمى لـ(ص) في المدى تساوي صفرًا، فالرأس يقع على محور السينات، والحل هو جذر مكرر.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال ٢٠، ذكّر الطلاب أنه يمكن معرفة جذور المعادلة أو حلولها، بإيجاد المقاطع السينية أو أصفار الدالة المرتبطة.

تأكد

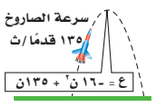
الأمثلة ١ - ٣ حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا: ١–٦ للتمثيل انظر ملحق الإجابات

١) $س^٢ + ٣س - ١٠ = ٠$ ٢، -٥ ٢) $٢س^٢ - ٨س = ٠$ ٠، ٤ ٣) $س^٢ + ٤س = -٤$ -٢

مثال ٤ حُلَّ كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة ، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة:

٤) $-س^٢ - ٥س + ١ = ٠$ $-٥,٢$، $٠,٢$ ٥) $-٩ = س^٢$ لا يوجد حلول حقيقية ٦) $س^٢ = ٢٥$ ٥، -٥

مثال ٥ ٧) **معرض العلوم:** إذا صمّم نواف نموذجًا لصاروخ يمكنه أن ينطلق في الهواء وفق المعادلة المبيَّنة في الشكل، حيث (ع) ارتفاع الصاروخ بالأقدام بعد (ن) ثانية من انطلاقه، فكم يبقى الصاروخ في الهواء تقريبًا؟ ٨,٤ ثوانٍ تقريبًا.



تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حُلَّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا: ٨–١٣ للتمثيل انظر ملحق الإجابات.

٨) $س^٢ + ٧س + ١٤ = ٠$ ∅ ٩) $س^٢ + ٢س - ٢٤ = ٠$ -٦، ٤ ١٠) $س^٢ = ٢س - ١$ ١

مثال ٤ حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة:

١١) $س^٢ + ٢س - ٩ = ٠$ $٢,٢$، $-٤,٢$ ١٢) $س^٢ - ٤س = ٢٠$ $٢,٩$، $-٦,٩$ ١٣) $س^٢ + ٣س = ١٨$ ٣، -٦

مثال ٥ ١٤) **أفعوانية:** ترتفع أفعوانية براكبيها إلى الأعلى، ثم تنزل بهم إلى الأسفل وفق المعادلة: $ع = -١٦ن^٢ + ١٨٥ن$، حيث (ع) الارتفاع بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم ثانية تستغرق الأفعوانية للعودة إلى الأسفل؟ ١١,٦ ثانية تقريبًا

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثم حدِّد أصفار كل منها:

١٥) $ص = ٤س^٢ - ٨س + ١٦$ ٤؛ ١ ١٦) $ص = س^٢ + ٣س + ٤$ لا يوجد جذور حقيقية ١٧) $ص = س^٢ + ١٢س + ٣٢$ -٤، -٨؛ ٢

١٨) **نظرية الأعداد:** استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠. ٤، ٥

١٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة كيفية تفسير العلاقة بين الدوال التربيعية وتمثيلاتها البيانية.

أ) بيانيًا: مثّل الدالة $ص = س^٢$. انظر ملحق الإجابات

ب) تحليليًا: اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على التمثيل.

جـ) بيانيًا: مثّل الدوال $ص = س^٢ + ٢$، $ص = س^٢ + ٤$، $ص = س^٢ + ٦$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي السابق نفسه. انظر ملحق الإجابات

د) تحليليًا اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على كل من هذه التمثيلات التي لها الإحداثيات السينية نفسها. ماذا تستنتج؟

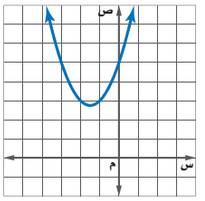
١٩ب) (٠، ٠)؛ إجابة ممكنة: (١، ١)، (−١، ١)

١٩د) ص = $س^٢ + ٢$:
(٠، ٢)، (١، ٣)، (−١، ٣)؛
ص = $س^٢ + ٤$:
(٠، ٤)، (١، ٥)، (−١، ٥)؛
ص = $س^٢ + ٦$:
(٠، ٦)، (١، ٧)، (−١، ٧)؛
إجابة ممكنة: يمكن الحصول على التمثيلات البيانية للدوال:
ص = $س^٢ + ٢$،
ص = $س^٢ + ٤$،
ص = $س^٢ + ٦$ بانسحاب التمثيل البياني للدالة ص = $س^٢$ إلى الأعلى ٢، ٤، ٦ وحدات على الترتيب.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٨ – ١٣ ، ٢٠ – ٢١ ، ٢٣ – ٣٤
ضمن ضمن المتوسط	٩، ١٠ – ١٤ (زوجي) ، ١٦ – ٣٤
فوق فوق المتوسط	١٤ – ٣٤

مسائل مهارات التفكير العليا



٢٠) **اكتشف الخطأ:** يقوم معاذ وأحمد بإيجاد عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثَّلة بالشكل المجاور، فيقول معاذ إنه ليس لهذه الدالة أصفار حقيقية؛ لأنه لا يوجد لتمثيلها البياني مقاطع سينية. بينما يقول أحمد: إن لها صفرًا حقيقيًّا واحدًا؛ لأن للتمثيل البياني للدالة مقطعًا صاديًّا. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش

٢١) **مسألة مفتوحة:** صف مسألة من واقع الحياة يتم فيها قذف جسم في الهواء، واكتب معادلة تمثّل ارتفاع الجسم بالنسبة للزمن، وحدّد الفترة الزمنية التي يمكثها الجسم في الهواء. انظر الهامش.

٢٢) **تحدٍّ:** اكتب معادلة تربيعية لها الجذور المذكورة في كل مما يأتي:

أ) جذر مكرر مرة واحدة. إجابة ممكنة: $س^٢ + ٨س + ١٦ = ٠$

ب) جذر نسبي (غير صحيح) واحد، وجذر صحيح واحد. إجابة ممكنة $٢س^٢ - ٢٣س + ٤٥ = ٠$

جـ) جذران صحيحان مختلفان ومتعاكسان جمعيًّا. إجابة ممكنة: $س^٢ - ٤ = ٠$.

٢٣) **اكتب:** وضِّح كيف تقرّب جذور المعادلة التربيعية عندما لا تكون أعدادًا صحيحة. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٢٤) إذا حصل إبراهيم على الدرجة ٥٠ في اختبار درجته العظمى ٨٠. فما النسبة المئوية لدرجته في الاختبار؟ أ

أ) ٦٢,٥٪ **جـ)** ١,٦٪

ب) ٦,٢٥٪ **د)** ٠,١٦٪

٢٥) تمثّل الصيغة $ف = \frac{١}{٢} جـ ن^٢$ المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها جسم يسقط على كوكب سقوطًا حرًّا بعد (ن) ثانية. اكتب الصيغة بدلالة المتغير جـ، الذي يمثّل تسارع الجاذبية. د

أ) $جـ = \frac{١}{٢} جـ ن^٢ - ف$ **جـ)** $جـ = ف - \frac{١}{٢} جـ ن^٢$

ب) $جـ = ٢ ف - ن^٢$ **د)** $جـ = \frac{٢ف}{ن^٢}$

مراجعة تراكمية

٢٦-٢٩ انظر ملحق الإجابات

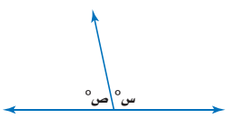
أوجد إحداثيات الرأس، ومعادلة محور التماثل، وبيِّن إذا كان الرأس يمثّل قيمة عظمى أم قيمة صغرى، ثم مثِّل الدالة بيانيًّا: (الدرس ٨-١)

٢٦) $ص = ٣س^٢$ ٢٧) $ص = س^٢ - ٦س - ٨$ ٢٨) $ص = -٤س^٢ - ٨س + ٥$ ٢٩) $ص = ٣س^٢ + ٢س + ١$

حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقّق من صحة الحل: (الدرس ٧-٦)

٣٠) $٢س^٢ = ٣٢$ ٤، -٤ ٣١) $(س - ٤)^٢ = ٢٥$ ٩، -١ ٣٢) $٤س^٢ - ٤س + ١ = ١٦$ $-\frac{٣}{٢}$، $\frac{٥}{٢}$ ٣٣) $٢س^٢ + ١٦س = -٣٢$ -٤

٣٤) **هندسة:** الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسهما ١٨٠°، فإذا كان قياس الزاوية الكبرى للزاويتين المتكاملتين في الشكل المجاور يزيد بمقدار ٢٤° عن قياس الزاوية الصغرى، فاكتب نظامًا من المعادلات لإيجاد قياسي الزاويتين، ثم حُلَّه. (مهارة سابقة)



س + ص = ١٨٠، س = ص + ٢٤، ١٠٢°، ٧٨°

تنويع التعليم

فوق

توسّع: أخبر الطلاب أن الدالة ص = -١٦ ن^٢ + ٣٠ ن + ٢ تُمثّل ارتفاع كرة قُذِفت إلى أعلى بسرعة رأسية مقدارها ٣٠ قدمًا/ ث من ارتفاع ٢ قدم. واسأل بعد كم ثانية تصل الكرة إلى الأرض؟ بعد حوالي ثانيتين

٤ التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا طريقتين توضّحان كيف ساعدهم تعلم تمثيل الدوالّ التربيعية في الدرس السابق على حل المعادلات التربيعية في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (٨-٢) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٢)، ص (٤٩)

اختبار تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل بإعطائهم:

اختبار منتصف الفصل، ص (٥١)

إجابات:

٢٠) معاذ، إجابة ممكنة: أصفار الدالة التربيعية هي المقاطع السينية للتمثيل، وبما أن التمثيل لا يقطع محور السينات فلا توجد مقاطع سينية ولا أصفار.

٢١) إجابة ممكنة: قُذفت كرة تنس في الهواء، وفق المعادلة: ع = -١٦ن^٢ + ٢٥ن + ٢، تبقى الكرة في الهواء ١,٦ ثانية تقريبًا.

٢٣) مثّل أولًا الدالة المرتبطة بيانيًّا، ثم حدّد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقطع التمثيل البياني محور السينات بينهما، وأنشئ جدولًا بقيم الأعشار بين هذين العددين الصحيحين، ثمّ عيّن الموقع الذي تتغيّر عنده إشارة الدالة، فتكون قيمة (س) التي تكون عندها قيمة الدالة أقرب إلى الصفر هي أفضل تقدير لجذر المعادلة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٨ - ٢

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٠)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٢ تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات التربيعية بيانيًا

حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني:

المعادلة التربيعية	الصورة القياسية للمعادلة التربيعية هي أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠

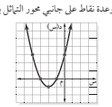
يمكنك تحديد حلول المعادلة التربيعية د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ = صفر، أو جذورها بتمثيل الدالة المرتبطة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ وإيجاد المقاطع السينية أو أصفار الدالة.

مثال ١ حُلّ المعادلة س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠ بيانيًا.

مثّل الدالة د(س) = س^{٢} + ٤ س + ٣ المرتبطة بالمعادلة بيانيًا.

معادلة محور التماثل هي س = $-\frac{٤}{(١)٢}$ = −٢، والرأس هو (−٢، −١).

مثّل الرأس وعدة نقاط على جانبي محور التماثل بيانيًا.



يتطلب أن تعرف متى تكون د(س) = ٠ لحلّ المعادلة س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠، وهذا يحدث عند المقاطع السينية، −٣، −١؛ لذا فالحلول هي −٣، −١

مثال ٢ حُلّ المعادلة س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠ بيانيًا.

مثّل الدالة د(س) = س^{٢} − ٦ س + ٩ المرتبطة بالمعادلة بيانيًا.

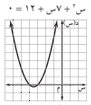
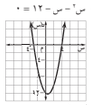
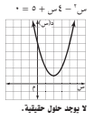
معادلة محور التماثل هي س = ٣، والرأس عند (٣، ٠).

مثّل الرأس وعدة نقاط على جانبي محور التماثل بيانيًا. يتطلب أن تعرف متى تكون د(س) = ٠ لحلّ المعادلة س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠، رأس القطع المكافئ هو القطع السيني الوحيد لهذه الدالة، لذا فإن لهذه المعادلة حلًا وحيدًا هو ٣

تمارين

حُلّ كلّ معادلة فيما يأتي بيانيًا:

١) س^{٢} + ٧ س + ١٢ = ٠　٢) س^{٢} − س − ١٢ = ٠　٣) س^{٢} − ٤ س + ٥ = ٠

−٣، −٤　　٤، −٣　　لا يوجد حلول حقيقية.

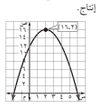
تدريبات حل المسألة (١٢)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٢ تدريبات حل المسألة

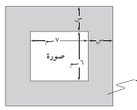
حل المعادلات التربيعية بيانيًا

١) **زراعة**، راجع عبد السلام سجلات الأعوام السابقة كي يحدّد كمية السماد المطلوبة لمحصول الذرة هذا العام، فوجد أن الإنتاج من يعتمد على كمية السماد س المستعملة وفق الدالة ص = − س^{٢} + ٤ س + ١٢. مثّل الدالة بيانيًا، وأوجد النقطة التي يتوقع عبد السلام أن يحصل عندها على أكبر إنتاج.



٢) **ضوء**، يحمل أحمد وسيف مصباحًا يدويًا، ويسقط الضوء المنبعث منه على قطعة من ورق الرسم البياني ليشكّل قطعًا مكافئًا، فرسم أحمد وسيف القطع المكافئ الناتج، ووجدا أنه يطابق التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢} − ٣س − ١٠، حدّد جذور هذه الدالة.
−٢، ٥

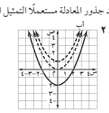
٣) **تأطير**، صورة مستطيلة الشكل طولها ٧سم وعرضها ٦سم، أحيطت بإطار عرضه سم سم من جميع الجوانب كما في الشكل أدناه. إذا كانت مساحة الإطار والصورة معًا ١٥٦ سم^{٢}، فما عرض الإطار؟
٣سم



٤) **ورق تغليف**، هل يمكن لورقة تغليف مستطيلة مساحتها ٨١ سنتمترًا مربعًا أن يكون محيطها ٦٠ سنتمترًا؟ فسّر إجابتك. (إرشاد: افترض أن العرض = س، الطول = ٣٠ − س).
عند حل المعادلة (٣٠ − س) س = ٨١، تجد أن س = ٢٧ أو ٣. فالورقة التي بعدها ٣سم، ٢٧سم تكون مساحتها ٨١سم^{٢} ومحيطها ٦٠سم وتحقق المطلوب.

٥) **هندسة**، شكل طبق الأقمار الصناعية هو قطع مكافئ تمثل أحد هذه الأطباق.

أ) أوجد جذور المعادلة مستعملًا التمثيل البياني.
−٢، ٢



ب) اسحب القطع المكافئ على المستوى الإحداثي أعلاه بحيث يكون له جذر واحد. سمّ المنحنى الناتج أ.
إجابة ممكنة: انظر الشكل (أ) أعلاه.

جـ) اسحب القطع المكافئ بحيث يصبح دون جذور. سمّ المنحنى الناتج ب.
إجابة ممكنة: انظر الشكل (ب) أعلاه.

التدريبات الإثرائية (١٣)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٢ التدريبات الإثرائية

إيجاد معادلة قطع مكافئ يمر بثلاث نقاط معطاة

إذا عرفت نقطتين على منسقيه، فيمكنك إيجاد معادلته. ولإيجاد معادلة قطع مكافئ يجب أن تعرف إحداثيات ثلاث نقاط واقعة عليه. وفيما يأتي توضيح لطريقة إيجاد معادلة القطع المكافئ المار بالنقاط (٠، −٢)، (٣، ٠)، (٥، ٢).

أولًا: عوّض عن قيم س، ص في الصورة القياسية للمعادلة التربيعية، وهي ص = أس^{٢} + ب س + جـ لتحصل على ثلاث معادلات.

(٠، −٢): −٢ = جـ
(٣، ٠): ٠ = ٩أ + ٣ب + جـ
(٥، ٢): ٢ = ٢٥أ + ٥ب + جـ

ثانيًا: عوّض −٢ عن جـ في المعادلتين الثانية والثالثة، ثم حلّ هاتين المعادلتين.

اضرب في ٥: ٠ = ٤٥أ + ١٥ب − ١٠
اضرب في −٣: −٦ = −٧٥أ − ١٥ب + ٦
−٦ = −٣٠أ
أ = $\frac{١}{١٥}$

ثالثًا: عوّض $\frac{١}{١٥}$ عن أ في المعادلة الثانية أو الثالثة لإيجاد قيمة ب.

٠ = ٩($\frac{١}{١٥}$) + ٣ب − ٢
ب = $\frac{٧}{١٥}$

لذا فمعادلة القطع المكافئ المارّ بالنقاط الثلاث هي: ص = $\frac{١}{١٥}$ س^{٢} + $\frac{٧}{١٥}$ س − ٢

تمارين

أوجد معادلة القطع المكافئ المارّ بكل مجموعة من ثلاث نقاط فيما يأتي:

١) (٥، ١)، (٦، ٠)، (٣، ٢)
ص = − $\frac{٢}{٩}$ س^{٢} + $\frac{٢٢}{٩}$ س + ٦

٢) (−٥، ٠)، (٠، ٠)، (٨، ١٠٠)
ص = $\frac{١٣٢}{١٩}$ س^{٢} + $\frac{١٣٢}{١٩}$ س

٣) (٤، −٤)، (١، ٠)، (٣، −٢)
ص = − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ س + ١

٤) (٣، ١)، (٠، ٦)، (٠، ٠)
ص = − $\frac{٣}{٥}$ س^{٢} + $\frac{١٨}{٥}$ س

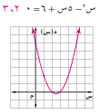
٥) (٢، ٢)، (٥، −٣)، (٠، −١)
ص = − $\frac{١٩}{٣٠}$ س^{٢} + $\frac{٨٣}{٣٠}$ س − ١

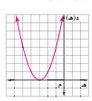
٦) (٤، ٠)، (٠، ٤)، (−٤، ٤)
ص = − $\frac{١}{٨}$ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ س + ٤

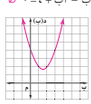
كتاب التمارين (١٨)　دون ضمن فوق

٨ - ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيًا

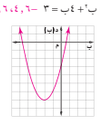
حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًا:

١) س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠　٢، ٣


٢) هـ^{٢} + ٦هـ + ٩ = ٠　−٣


٣) ب^{٢} − ٣ب + ٤ = ٠　∅


حُلّ المعادلات الآتية بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة.

٤) ب^{٢} + ٤ب = ٣　−٦،٤، ٠،٦


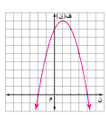
٥) ٢هـ^{٢} + ٥ = ١٠هـ　٤،٤، ٠،٦

٦) ٢ف^{٢} + ٨ف = −٧　−٢،٧، −١،٣

٧) **نظرية الأعداد**، عددان مجموعهما ٢، وحاصل ضربهما −٨، يمكن استعمال المعادلة التربيعية −ن^{٢} + ٢ن + ٨ = ٠ لتحديد هذين العددين.

أ) مثّل الدالة ف(ن) = −ن^{٢} + ٢ن + ٨ بيانيًا، وحدّد المقطعين السينيين. −٢، ٤

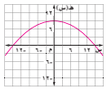
ب) ما العددان؟ −٢، ٤



٨) **تصميم**، جسر مشاة معلّق بدعامة على شكل قطع مكافئ، وتُمثّل الدالة هـ(س) = − $\frac{١}{٢٥}$ س^{٢} + ٩ ارتفاع الدعامة بالأقدام، وتُمثّل (س) نقطة منتصف الجسر.

أ) مثّل الدالة بيانيًا، وحدّد المقطعين السينيين. −١٥، ١٥

ب) ما طول الممر الواصل بين الدعامتين؟ ٣٠ قدمًا



ملحوظات المعلم

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٨ - ٣

حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

الدرس ٨ - ٣

كتابة عبارة تربيعية على صورة مربع كامل.

حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

ما بعد الدرس ٨ - ٣

حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- انظر إلى المعادلة: هل ٤ تُعدّ مربعًا كاملاً؟ نعم
- هل $-٩س^{٢}+١٨س+٥$ تُعدّ مربعًا كاملاً؟ لا
- هل يمكنك حل المعادلة بإيجاد الجذر التربيعي لكل من طرفي المعادلة؟ لا

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية:

احفظ الأمثلة التي استخدمتها في أثناء تعليمهم طريقة إكمال المربع، وأرسلها إلى الطلاب .

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أكتب العبارة التربيعية على صورة مربع كامل.
- أحل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

المفردات

إكمال المربع

obeikaneducation.com

لماذا ؟

يسدِّد لاعبو كرة السلة بعض كراتهم نحو المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة: ع = $-٩س^{٢}+١٨س+٥$، حيث تمثل (ع) ارتفاع الكرة بعد (س) ثانية. ويمكن إيجاد الزمن عند أي ارتفاع معطى للكرة ؛ فمثلًا لإيجاد الزمن عندما تكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار، نحتاج إلى حل المعادلة: ٤ = $-٩س^{٢}+١٨س+٥$ باستعمال طرق مختلفة منها طريقة إكمال المربع.

إكمال المربع: درست في الدرس ٧- ٦ حل معادلات تربيعية بإيجاد الجذر التربيعي لكل طرف منها، والتي تستعمل فقط إذا كان المقدار الواقع على الطرف الأيمن مربعًا كاملًا، أما في العبارات ثلاثية الحدود التربيعية التي تمثل مربعات كاملة والتي يكون معاملها الرئيسي ١، فهناك علاقة بين معامل الحد الذي يحتوي س والحد الثابت.

$$(س+٥)^{٢} = س^{٢}+٢(٥)س+٥^{٢}$$

$$= س^{٢}+١٠س+٢٥$$

لاحظ أن $\left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢} = ٢٥$، ويمكن الحصول على الحد الثابت، بقسمة معامل الحد الذي يحتوي س على ٢، وتربيع الناتج، يمكن استعمال هذه الفكرة في تحويل أي عبارة تربيعية على الصورة

$س^{٢}+ب س$ إلى مربع كامل باستعمال طريقة تُسمى **إكمال المربع**.

مفهوم أساسي — إكمال المربع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $س^{٢}+ب س$، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: أوجد نصف ب، (معامل س)

الخطوة ٢: ربّع الناتج في الخطوة١.

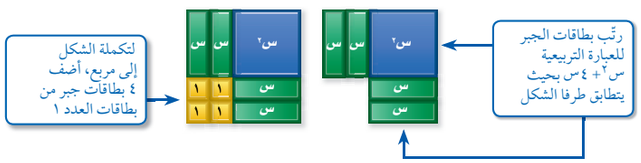
الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $س^{٢}+ب س$.

الرموز: $س^{٢}+ب س+\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = \left(س+\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

مثال ١ — إكمال المربع

أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود: $س^{٢}+٤س+$ جـ مربعًا كاملًا.

الطريقة ١: استعمال بطاقات الجبر.



مصادر الدرس ٨- ٣

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٠٦)	• تنويع التعليم ص (١٠٦)	• تنويع التعليم ص (١٠٨)
كتاب التمارين	ص (١٩)	ص (١٩)	ص (١٩)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) • تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦) • التدريبات الإثرائية، ص (١٧)

إرشادات للدراسة

الخوارزمية

الخوارزمية هي سلسلة خطوات لإجراء عملية أو لحل مسألة.

الطريقة ٢: استعمال خوارزمية إكمال المربع.

الخطوة ١: أوجد $\frac{1}{2}$ العدد ٤. $\frac{4}{2} = 2$

الخطوة ٢: ربّع الناتج من الخطوة ١. $2^2 = 4$

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة٢ إلى $س^2 + 4س$. $س^2 + 4س + 4$

إذن، جـ = ٤، لاحظ أن $س^2 + 4س + 4 = (س + 2)^2$.

تحقق من فهمك

١) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود $ر^2 - 8ر +$ جـ مربعًا كاملًا. ١٦

حل المعادلات بإكمال المربع: يمكن استعمال طريقة إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية، والتي تتطلب فَصل الحدين $س^2$، ب س أولًا.

مثال ٢ **حل معادلة بإكمال المربع**

حُلَّ المعادلة: $س^2 - 6س + 12 = 19$ بإكمال المربع.

$س^2 - 6س + 12 = 19$	المعادلة الأصلية
$س^2 - 6س = 7$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين
$س^2 - 6س + 9 = 7 + 9$	بما أن $(\frac{-6}{2})^2 = 9$؛ لذا أضف ٩ إلى كلا الطرفين
$(س - 3)^2 = 16$	حلّل $س^2 - 6س + 9$
$س - 3 = \pm 4$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$س = 3 \pm 4$	أضف ٣ إلى كل طرف
$س = 3 + 4$ أو $س = 3 - 4$	افصل الحلين
$= 7$ $= -1$	الحلان هما ٧، ١-

تحقق من فهمك

٢) حل المعادلة: $س^2 - 12س + 3 = 8$ بإكمال المربع. ٠,٤، ١٢,٤ تقريبًا

لحل معادلة تربيعية معاملها الرئيس لا يساوي (١)، اقسم كل حد على هذا المعامل، ثم افصل الحدين اللذين يحتويان $س^2$، س ثم أكمل المربع.

تنبيه!

المعامل الرئيس

تذكر أن المعامل الرئيس يجب أن يساوي (١) قبل إجراء عملية إكمال المربع.

مثال ٣ **معادلة فيها أ ≠ ١**

حل المعادلة: $-2س^2 + 8س - 18 = 0$ بإكمال المربع.

$-2س^2 + 8س - 18 = 0$

$\frac{-2س^2 + 8س - 18}{-2} = \frac{0}{-2}$	اقسم كلا الطرفين على -٢
$س^2 - 4س + 9 = 0$	بسّط
$س^2 - 4س = -9$	اطرح ٩ من كلا الطرفين
$س^2 - 4س + 4 = -9 + 4$	بما أن $(\frac{-4}{2})^2 = 4$؛ لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين
$(س - 2)^2 = -5$	حلّل $س^2 - 4س + 4$

لا توجد أعداد حقيقية مربعاتها سالبة؛ لذا فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

٣) حُلّ المعادلة: $3س^2 - 9س - 3 = 21$ بإكمال المربع. ٠,٧-، ١,٧، ٤,٧ تقريبًا.

إكمال المربع

المثال ١ يُبيّن طريقة لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $س^2 + ب س$.

المثال ٢ يُبيّن طريقة حل معادلة تربيعية بإكمال المربع.

المثال ٣ يُبيّن طريقة حل معادلة تربيعية معاملها الرئيس (أ) لا يساوي (١)

المثال ٤ يُبيّن طريقة حل مسائل من واقع الحياة بطريقة إكمال المربع.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير: يجب أن يتحقّق الطلاب دائمًا من حلولهم بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة بيانيًّا، أو بتعويض الحلول في المعادلة الأصلية، فمثلاً أخبر الطلاب أن تعويض ٧، -١ في $س^2 - 6س + 12$ في المثال ٢، يجب أن يؤدي إلى الناتج ١٩

أمثلة إضافية

١ أوجد قيمة (جـ) التي تجعل $س^2 - 12س +$ جـ مربعًا كاملًا. ٣٦

٢ حُلّ المعادلة: $س^2 + 6س + 5 = 12$ بإكمال المربع. ١، ٧-

٣ حُلّ المعادلة: $-2س^2 + 36س - 10 = 24$ بإكمال المربع. ١، ١٧

مثال إضافي

٤ إبحار: إذا كان معدل تدفّق المياه في نهر عرضه ٨٠ قدمًا يُمثّل بالمعادلة:

ر = −٠١ , ٠ س^{٢} + ٨ , ٠ س، حيث (ر) المعدل بالميل لكل ساعة، (س) البعد عن الشاطئ بالأقدام، ولا يرغب أحمد في أن تزيد سرعة قاربه في عكس اتجاه تيار المياه على ٥ أميال في الساعة، فعلى أي بُعد عن الشاطئ يمكنه أن يعدل شراع القارب، لتجنّب تيار سرعته ٥ أميال في الساعة؟ عن بعد ٧ أقدام من كلتا ضفتي النهر.

ملاحظة: حلا المعادلة هما ٧ أقدام، و٧٣ قدمًا تقريبًا، وبما أن عرض النهر ٨٠ قدمًا، فإن ٨٠−٧٣ = ٧؛ فالمدى يقع ضمن ٧ أقدام من شاطئ النهر.

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ − ٩؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

أخطاء مفاهيمية: أخبر الطلاب ألّا يستبعدوا الحلول السالبة في حل مسائل من واقع الحياة، وذكّرهم بأن عليهم أولاً تفحّص المسألة؛ للتأكّد من أن الحل مناسب للموقف.

مثال ٤ من واقع الحياة — حل مسألة بإكمال المربع

زيّ رياضي: أراد أحد الفرق الرياضية شراء زيّ خاص بلاعبي كرة القدم، إذا أمكن تمثيل تكلفة الزي الرياضي بالمعادلة: ك = ٢ , ٠ س^{٢} + ٨ , ٤ س + ٣٥٠، حيث (ك) ثمن (س) قطعة من هذا الزي، فما عدد القطع التي يمكن شراؤها بمبلغ ٨٦٠ ريالًا؟

المبلغ الكلي ٨٦٠ ريالًا؛ لذا اجعل المعادلة تساوي ٨٦٠، ثم أكمل المربع.

٢ , ٠ س^{٢} + ٨ , ٤ س + ٣٥٠ = ٨٦٠	المعادلة الأصلية
$\frac{٢ , ٠ س^{٢} + ٨ , ٤ س + ٣٥٠}{٠ , ٢} = \frac{٨٦٠}{٠ , ٢}$	اقسم كل طرف على ٠ , ٢
س^{٢} + ٢٤ س + ١٧٥٠ = ٤٣٠٠	بسّط
س^{٢} + ٢٤ س + ١٧٥٠ − ١٧٥٠ = ٤٣٠٠ − ١٧٥٠	اطرح ١٧٥٠ من كلا الطرفين
س^{٢} + ٢٤ س = ٢٥٥٠	بسّط
س^{٢} + ٢٤ س + ١٤٤ = ٢٥٥٠ + ١٤٤	بما أن $(\frac{٢٤}{٢})^{٢}$ = ١٤٤؛ لذا أضف ١٤٤ إلى كلا الطرفين
س^{٢} + ٢٤ س + ١٤٤ = ٢٦٩٤	بسّط
(س + ١٢)^{٢} = ٢٦٩٤	حلّل س^{٢} + ٢٤ س + ١٤٤ إلى العوامل
س + ١٢ = ± $\sqrt{٢٦٩٤}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
س = −١٢ ± $\sqrt{٢٦٩٤}$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين

استعمل الحاسبة لتقريب قيمتي س.

س = −١٢ + $\sqrt{٢٦٩٤}$	أو	س = −١٢ − $\sqrt{٢٦٩٤}$
≈ ٣٩ , ٩		≈ −٦٣ , ٩

افصل الحلين

أوجد القيم التقريبية

بما أنه لا يمكن أن نشتري عددًا سالبًا من القطع فالحل السالب غير معقول، إذن يمكن شراء ٣٩ قطعة من هذا الزي.

الربط مع الحياة

يرتدي لاعبو فريق كرة القدم زيًّا موحدًا يشمل: القميص والبنطال والحذاء والجورب ويزيد حارس المرمى بالقفازات. ويختلف لون الزي والشعار تبعًا لكل فريق؛ للتمييز بينهم.

تحقق من فهمك

٤) إذا أمكن زيادة المبلغ إلى ٩٨٠ ريالًا، فما عدد قطع الزي التي يمكن شراؤها؟ ٤٥ قطعة.

تأكد

مثال ١ أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملًا:

١) س^{٢} − ١٨ س + جـ ٨١

٢) س^{٢} + ٢٢ س + جـ ١٢١

٣) س^{٢} + ٩ س + جـ $\frac{٨١}{٤}$

٤) س^{٢} − ٧ س + جـ $\frac{٤٩}{٤}$

المثالان ٢، ٣ حُلَّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

٥) س^{٢} + ٤ س = ٦ ; −٥,٢، ١,٢

٦) س^{٢} − ٨ س = −٩ ; ٦,٦، ١,٤

٧) ٤ س^{٢} + ٩ س − ١ = ٠ ; ٠,١، ٢,٤−

٨) −٢ س^{٢} + ١٠ س + ٢٢ = ٤ ; ٦,٤، ١,٤−

مثال ٤ ٩) **إنشاءات:** يبني إسماعيل صالة مستطيلة الشكل خلف منزل عائلته، مساحتها ١٤٤ مترًا مربعًا، وطولها يزيد على عرضها بمقدار ١٠ أمتار، فما بُعدا الصالة؟ ٨ أمتار، ١٨ مترًا.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون: يستفيد بعض الطلاب من بطاقات الجبر في إكمال المربع عند حل معادلات تربيعية، مثِّل تلك الواردة في المثالين ٢، ٣، اطلب إليهم استعمال لوحة المعادلات، وذكّرهم بحذف أو إضافة العدد نفسه من بطاقات الجبر إلى كل جانب في اللوحة.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملًا:

١٠) $س^{٢}+٢٦س+$ جـ ١٦٩ ١١) $س^{٢}-٢٤س+$ جـ ١٤٤ ١٢) $س^{٢}-١٩س+$ جـ $\frac{٣٦١}{٤}$

١٣) $س^{٢}-٢٢س+$ جـ ١٢١ ١٤) $س^{٢}-١٥س+$ جـ $\frac{٢٢٥}{٤}$ ١٥) $س^{٢}-١٣س+$ جـ $\frac{١٦٩}{٤}$

المثالان ٢ ، ٣ حُلَّ كلَّ معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

١٦) $س^{٢}+٦س-١٦=٠$ $-٨، ٢$ ١٧) $س^{٢}-٢س-١٤=٠$ $-٩، ٢، ٤، ٩$

١٨) $س^{٢}-٨س-١=٨$ $-١، ٩$ ١٩) $س^{٢}+٣س+٢١=٢٢$ $-٣، ٣، ٣، ٠$

٢٠) $س^{٢}-٢س+٧=٥$ $\varnothing$ ٢١) $٣س^{٢}+١٢س+٨١=١٥$ $\varnothing$

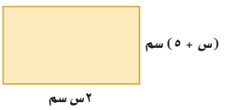
مثال ٤

٢٢) **ثقافة مالية:** يمكن تمثيل سعر سهم معين (س) بالمعادلة التربيعية $س=٥,٣ن-٠٥,٠ن^{٢}$، حيث (ن) عدد الأيام بعد شراء الأسهم، فمتى يصبح سعر السهم ٦٠ ريالًا؟ في اليوم الثلاثين واليوم الأربعين بعد الشراء.

هندسة: أوجد قيمة س في كل شكل مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

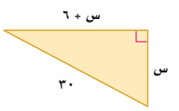
٢٣) م = ٤٥ سم^{٢} $٦,٣$

٢٤) م = ١١٠ سم^{٢} $٥,٣$



٢٥) **نظرية الأعداد:** عددان صحيحان زوجيان متتاليان ناتج ضربهما ٢٢٤، فما هما؟ ١٤، ١٦، ١٤-، ١٦-

٢٦) **هندسة:** أوجد مساحة المثلث المجاور. ٢١٦ م^{٢}



٢٧) **علم الفلك:** يُعبَّر عن ارتفاع جسم بعد ثانية من سقوطه بالمعادلة ل = $\frac{-١}{٢}$جـ ن^{٢} + ل. ، حيث (ل.) الارتفاع الابتدائي، (جـ) التسارع الناتج عن الجاذبية، فإذا كان تسارع الجاذبية بالقرب من سطح كوكب المريخ ٣,٧٣م/ ث^{٢} ، وعلى سطح الأرض ٨,٩م/ ث^{٢} ، وسقط الجسم من ارتفاع ابتدائي مقداره ١٢٠ مترًا فوق سطح كلّ من الكوكبين، فأجب عن السؤالين الآتيين:

أ) أيّ الكوكبين يصل الجسم إلى سطحه أولًا؟ الأرض

ب) كم يستغرق الجسم للوصول إلى سطح كل من الكوكبين مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة؟ الأرض ٤,٩ ثوان، المريخ ٨,٤ ثوان.

٢٨) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود: $س^{٢}+$ جـ $س+٢٢٥$ مربعًا كاملًا . -٣٠ و ٣٠

٢٩) **رسم:** إذا كان لدى أحمد إطار طوله ٦٠ بوصة، وعرضه ٤ بوصات، ويرغب في زيادة بُعدي الإطار على أن تكون الزيادة في الطول تعادل ١٠ أمثال الزيادة في العرض؛ لتناسب قطعة قماش مساحتها ٤٨٠ بوصة مربعة. فما بُعدا الإطار الجديد؟ ٨٠ بوصة، ٦٠ بوصات

الربط مع الحياة

البضاعة التي ليس لها أصول حقيقية، بل أوراق أو أصول مالية تكون غالبًا أسهمًا وسندات، ويتم تداولها في سوق يُسمى سوق الأسهم، ولهذا السوق قواعد قانونية وفنية تحكم أداءه.

تنبيه!

تجنب الأخطاء: ذكّر الطلاب عند حل الأسئلة ١٦-٢١، أن المقدار الذي تتم إضافته إلى أحد طرفي المعادلة لإكمال المربع، يجب أن يُضاف إلى الطرف الآخر من المعادلة.

صيغة: لحل السؤال ٢٣ يحتاج الطلاب إلى معرفة صيغة مساحة المثلث. م = $\frac{١}{٢}$ ق × ع

المحتوى الرياضي

حلول غير نسبية:

لا يعني حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع أن الحلول دائمًا ستكون أعدادًا صحيحة، وإذا كانت المعادلة تحتوي على حد ثابت غير صفري، فلن يجعل إكمال المربع على الأرجح الثابت مربعًا كاملًا، وبذلك تكون الحلول غير نسبية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٠ – ٢٦ ، ٣٢ – ٤٢
ضمن ضمن المتوسط	١١، ١٤ – ٢٤ (زوجي) ، ٢٧ – ٣٠، ٣٢ – ٤٢
فوق فوق المتوسط	٢٧ – ٤٢

تمثيلات متعدّدة: يستعمل الطلاب في السؤال ٣٠ المعلومات المنظّمة في جدول، والمعادلات الجبرية، والتحليل في ربط قيمة المميز في المعادلة التربيعية بعدد الجذور الحقيقية لها.

٤ التقويم

فهم الرياضيات: اسأل الطلاب عن الإجراءات الرياضية التي يستعملونها لحل معادلة تربيعية بطريقة إكمال المربع.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس (٨-٣) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٣)، ص (٥٠)

إجابات:

٣١) ص = أس^{٢} + ب س + جـ

ص = أ (س^{٢} + $\frac{ب}{أ}$ س) + جـ

ص = أ [س^{٢} + $\frac{ب}{أ}$ س + ($\frac{ب}{٢أ}$)^{٢}] + جـ − أ($\frac{ب}{٢أ}$)^{٢}

ص = أ [س + ($\frac{ب}{٢أ}$)]^{٢} + $\frac{٤أجـ − ب^{٢}}{٤أ}$،

ص = أ [س − $\frac{-ب}{٢أ}$]^{٢} + $\frac{٤أجـ − ب^{٢}}{٤أ}$

وتكتب المعادلة الأخيرة على الصورة ص = أ(س−هـ)^{٢} + ك ، حيث

هـ = $\frac{-ب}{٢أ}$ ، ك = $\frac{٤أجـ−ب^{٢}}{٤أ}$ ، إذن محور التماثل هو س = $\frac{-ب}{٢أ}$.

٣٢) لايوجد، إجابة ممكنة: إذا أضفت ($\frac{ب}{٢}$)^{٢} إلى كل من طرفي المتباينة وطرفي المعادلة، فإنك ستحصل على س^{٢} + ب س + ($\frac{ب}{٢}$)^{٢} = حـ + ($\frac{ب}{٢}$)^{٢} ، جـ + ($\frac{ب}{٢}$)^{٢} > ٠ وبما أن الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة هو مربع كامل، فلا يمكن أن يساوي عددًا سالبًا، إذن لا توجد حلول حقيقية.

٣٠) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة خاصية للمعادلات التربيعية.

أ) جدوليًا: انسخ الجدول المجاور وأكمل العمود الثاني.

ثلاثية الحدود	ب^{٢} − ٤أجـ	عدد الجذور
س^{٢} − ٨س + ١٦	٠	١
٢س^{٢} − ١١س + ٣	٩٧	٢
٣س^{٢} + ٦س + ٩	−٧٢	٠
س^{٢} − ٢س + ٧	−٢٤	٠
س^{٢} + ١٠س + ٢٥	٠	١
س^{٢} + ٣س − ١٢	٥٧	٢

ب) جبريًا: اكتب كل ثلاثية حدود على صورة معادلة وحلّها بإكمال المربع، وأكمل العمود الثالث في الجدول بكتابة عدد جذور كل معادلة.

جـ) لفظيًا: قارن عدد الجذور لكل معادلة بالنتيجة في العمود ب^{٢} − ٤أجـ، وهل هناك علاقة بينهما؟ وإن كانت هناك علاقة فصفها.

د) تحليلًا: تنبأ بعدد حلول ٢س^{٢} − ٩س − ١٥ = ٠، وتحقق من صحة تنبُّئك بحلّ المعادلة.

٣٠ جـ) إذا كان ب^{٢} − ٤أجـ سالبًا فلا توجد حلول حقيقية، وإذا كان صفرًا فهناك حل واحد، وإذا كان موجبًا فهناك حلاّن.

٣٠ د) بما أن إشارة ب^{٢} − ٤أجـ سالبة فلا توجد حلول حقيقية؛ لأن الجذر التربيعي لعدد سالب لا يكون حقيقيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣١) **تحدٍّ:** اشتق معادلة محور التماثل بإكمال المربع للمعادلة ص = أس^{٢} + ب س + جـ، أ ≠ ٠، وأعد كتابة المعادلة على الصورة ص = أ(س − هـ)^{٢} + ك.

٣١-٣٥ انظر الهامش.

٣٢) **تبرير:** حدّد عدد حلول المعادلة س^{٢} + ب س = جـ إذا كانت جـ < − ($\frac{ب}{٢}$)^{٢} . فسّر إجابتك.

٣٣) حدّد العبارة التي تختلف عن العبارات الثلاث الأخرى. وفسّر إجابتك.

ن^{٢} − ن + $\frac{١}{٤}$	ن^{٢} + ن + $\frac{١}{٤}$	ن^{٢} − $\frac{٤}{٣}$ن + $\frac{١}{٩}$	ن^{٢} + $\frac{١}{٣}$ن + $\frac{١}{٩}$

٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية حلها الوحيد هو ٤.

٣٥) **اكتب:** قارن بين الطرق الآتية: إكمال المربع، التمثيل البياني، التحليل للعوامل التي تُستعمل لحل المعادلة: س^{٢} − ٥س − ٧ = ٠

تدريب على اختبار

٣٦) إذا كان طول مستطيل يساوي ثلاثة أمثال عرضه ومساحته ٧٥ سنتمترًا مربعًا، فما طوله؟ ب

أ) ٢٥سم　　جـ) ١٠سم

ب) ١٥سم　　د) ٥سم

٣٧) **إجابة قصيرة:** يمكن تمثيل عدد سكان إحدى المدن بالمعادلة ص = ٢٢٠٠٠ + ١٢٠٠ن، حيث (ص) عدد السكان، (ن) عدد السنوات بعد عام ١٤٣١هـ، ما عدد السنوات اللازمة بعد عام ١٤٣١هـ ليصبح عدد سكانها ٢٨٠٠٠ نسمة؟ ٥ سنوات

مراجعة تراكمية

اكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا: (الدرس ٦-٢)

٣٨) $\frac{أ^{٦}}{أ^{٣}}$ أ^{٣}　　٣٩) $\frac{٤^{٧}}{٤^{٥}}$ ١٦　　٤٠) $\frac{جـ^{٣}د^{٤}}{جـ د^{٧}}$ $\frac{جـ^{٢}}{د^{٣}}$

حل كلًّا من المتباينات الآتية: (الدرس ٥-٥)

٤١) |٣ − ٢ص| ≤ ٨ {ص | ص ≤ ٥, ٥ أو ص ≥ −٢, ٥}　　٤٢) |٥ب − ٢| ≥ ١٣ {ب | ب ≤ −٢, ٢ أو ب ≥ ٣}

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب حل المعادلة $\frac{١}{٣}$س^{٢} − $\frac{٧}{٦}$س + $\frac{١}{٢}$ = ٠ بإكمال المربع، واسألهم كيف تقارن هذه الطريقة بطريقتي التحليل والتمثيل البياني. $\frac{١}{٢}$، ٣، يمكن حل المعادلة بسهولة أكبر بالتحليل، أمّا التمثيل البياني فلا يُعطي إجابة دقيقة.

٣٣) ن^{٢} + $\frac{١}{٣}$ن + $\frac{١}{٩}$، هي ثلاثية الحدود الوحيدة التي لا تُمثّل مربعًا كاملًا.

٣٤) إجابة ممكنة: س^{٢} − ٨س + ١٦ = ٠

٣٥) إجابة ممكنة: بما أن المعامل الرئيس يساوي (١)، فإن طريقة إكمال المربع هي الأفضل، ويمكن تمثيل الدالة المرتبطة باستعمال الحاسبة البيانية، وهذه الطريقة مناسبة للتقدير فقط. أمّا التحليل فغير ممكن.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٨ - ٣

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٤) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٣ تدريبات إعادة التعليم

حلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع

إكمال المربع، يمكنك حلّ المعادلة التربيعية التي تمثّل مربّعًا كاملًا بسرعة، بإيجاد الجذر التربيعي لكل من طرفي المعادلة. أمّا العبارة التربيعية التي ليست مربّعًا كاملًا، فيمكنك تحويلها إلى مربع كامل باستعمال طريقة تُسمّى طريقة **إكمال المربع**.

إكمال المربع

لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $س^٢ + ب س$، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١، أوجد نصف ب (معامل س).

الخطوة ٢، ربّع الناتج في الخطوة ١.

الخطوة ٣، أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $س^٢ + ب س$.

$س^٢ + ب س + (\frac{ب}{٢})^٢ = (س + \frac{ب}{٢})^٢$

مثال أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود $س^٢ + ٢ س +$ جـ مربعًا كاملًا.

الخطوة ١، أوجد $\frac{١}{٢}$ العدد ٢ — $\frac{٢}{٢} = ١$

الخطوة ٢، ربّع الناتج من الخطوة ١ — $١^٢ = ١$

الخطوة ٣، أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $س^٢ + ٢ س$. — $س^٢ + ٢ س + ١$

لذا جـ = ١، لاحظ أنّ $س^٢ + ٢ س + ١ = (س + ١)^٢$

تمارين

أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملًا:

١) $س^٢ + ١٠ س +$ جـ — ٢) $س^٢ + ١٤ س +$ جـ — ٤٩

٣) $س^٢ - ٤ س +$ جـ — ٤) $س^٢ - ٨ س +$ جـ — ١٦

٥) $س^٢ + ٥ س +$ جـ — $\frac{٢٥}{٤}$

٦) $س^٢ + ٩ س +$ جـ — $\frac{٨١}{٤}$

٧) $س^٢ - ٣ س +$ جـ — $\frac{٩}{٤}$

٨) $س^٢ - ١٥ س +$ جـ — $\frac{٢٢٥}{٤}$

٩) $س^٢ + ٣٨ س +$ جـ — ١٩٦

١٠) $س^٢ + ٢٢ س +$ جـ — ١٢١

تدريبات حل المسألة (١٦) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٣ تدريبات حل المسألة

حلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع

١) **تصميم داخلي**، يتم فرش الغرف بقطع صغيرة من السجاد بدلًا من قطعة واحدة كبيرة أحيانًا، ويساعد هذا على استبدال قطع صغيرة فقط في حالة تلف جزء من سجاد الغرفة. افترض أنه تم فرش الغرفة في المخطط أدناه بقطع السجاد المبيّنة في الشكل. أكمل المربع الكبير لتحديد عدد قطع السجاد المربعة (قدم في قدم) المطلوبة لتكملة أرضية الغرفة، واملأ الحدود المفقودة في المعادلة الموضحة أدناه.

٥ ؛ ٢٥

$س^٢ + ١٠ س + \_\_ = (س + \_\_)^٢$

٢) **الأجسام الساقطة**، ألقى معاذ حجرًا في بئر قديمة، وأمكن تمثيل المسافة ف (بالأقدام) التي يقطعها الحجر بعد ن ثانية بالمعادلة ف = ١٦ ن^٢ + ٥٤. إذا كان الماء في البئر دون مستوى الأرض بمقدار ٨٠ قدمًا، فبعد كم ثانية يصل الحجر إلى سطح الماء؟

بعد ثانية واحدة

٣) **المريخ**، قوة الجاذبية على سطح المريخ أصغر من قوة جاذبية الأرض. عند ضرب كرة جولف إلى أعلى بسرعة ابتدائية ٢٦ مترًا في الثانية من سطح الأرض، فإنّ أقصى ارتفاع لها هو ٣٤٫٥ مترًا تقريبًا. إذا كانت المعادلة ف = -١٫٩ ن^٢ + ٢٦ ن تمثّل الارتفاع ف بعد ن ثانية، بحسب قُذف من سطح المريخ بسرعة ابتدائية ٢٦ مترًا في الثانية، فأوجد أقصى ارتفاع تصل إليه كرة الجولف نفسها عند ضربها من سطح المريخ بالسرعة الابتدائية نفسها، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

٨٨٫٩ م

٤) **شقلاع**، كان شقلاع جالسًا على جذع شجرة ارتفاعه ٣ أقدام، ثم قفز وهبط على الأرض. فإذا كانت المعادلة ص = -٠٫٥ س^٢ + ٣ س + ٣ تمثّل ارتفاع الشقلاع ص (بالأقدام) عن سطح الأرض في أثناء قفزه، حيث تمثل س بُعده عن قاعدة الجذع، فما بعد الشقلاع عن قاعدة الجذع عندما يصل إلى الأرض؟

٢ + √٦٠ ، أو ٥٫١٦ أقدام تقريبًا

٥) **بستنة**، يخطط سمير لإحاطة ثلاثة جوانب لبستان خضروات مستطيل الشكل بسياج طوله ٢٥٠ مترًا. والجانب الرابع محاط بسياج قديم.

أ) ليكن س = عرض المستطيل. اكتب دالة لتمثيل مساحة الحديقة عند استعمال السياج الجديد.

م(٢٥٠ − ٢ س)

ب) أوجد رأس منحنى الدالة التي أوجدتها في الفرع أ، وحدّد ما إذا كان يمثل نقطة قيمة عظمى أو صغرى.

(٦٢٫٥، ٧٨١٢٫٥)، عظمى

جـ) فسّر معنى رأس المنحنى في سياق الموقف.

إذا كان عرض البستان ٦٢٫٥ مترًا، وطوله ١٢٥ مترًا، فإنّ مساحته تكون أكبر ما يمكن، وتساوي ٧٨١٢٫٥ مترًا مربعة.

التدريبات الإثرائية (١٧) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٣ التدريبات الإثرائية

تحليل كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة

إن إكمال المربع طريقة مفيدة في تحليل العبارات التربيعية وحلّ المعادلات التربيعية. ويمكنك الاستفادة من طريقة مشابهة في تحليل كثيرات حدود من الدرجة الرابعة على الصورة $س^٤ +$ جـ.

مثال حلّل كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة $س^٤ + ٦٤$

الخطوة ١، أوجد قيمة الحد الأوسط المطلوب لإكمال المربع.

وهذه القيمة هي $(٢\sqrt{٦٤}\ س^٢)$ أو $١٦ س^٢$

الخطوة ٢، أعد كتابة كثيرة الحدود الأصلية على صورة قابلة للتحليل:

$س^٤ + ٦٤ = (س^٤ + ١٦ س^٢ + (٨)^٢) - ١٦ س^٢$

الخطوة ٣، حلّل كثيرة الحدود $س^٤ + ١٦ س^٢ + ٨^٢$ إلى $(س^٢ + ٨)^٢$

لذا فإن $س^٤ + ٦٤ = (س^٢ + ٨)^٢ - ١٦ س^٢$

الخطوة ٤، أعد المقدار السابق في صورة فرق بين مربعين على النحو الآتي:

$(س^٢ + ٨ + ٤ س)(س^٢ + ٨ - ٤ س)$

لذا فإن تحليل $س^٤ + ٦٤$ هو $(س^٢ + ٤ س + ٨)(س^٢ - ٤ س + ٨)$. ويمكنك تحليلها إلى أبعد من ذلك، إذا كان هذا ضروريًا، لإيجاد حلول معادلة من الدرجة الرابعة.

حلّل كلّ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة فيما يأتي:

١) $س^٤ + ٤$ — $(س^٢ + ٢ س + ٢)(س^٢ - ٢ س + ٢)$

٢) $س^٤ + ٣٢٤$ — $(س^٢ + ٦ س + ١٨)(س^٢ - ٦ س + ١٨)$

٣) $س^٤ + ٢٥٠٠$ — $(س^٢ + ١٠ س + ٥٠)(س^٢ - ١٠ س + ٥٠)$

٤) $س^٤ + ٩٦٠٤$ — $(س^٢ + ١٤ س + ٩٨)(س^٢ - ١٤ س + ٩٨)$

٥) $س^٤ + ١٠٢٤$ — $(س^٢ + ٨ س + ٣٢)(س^٢ - ٨ س + ٣٢)$

٦) $س^٤ + ٥١٨٤$ — $(س^٢ + ١٢ س + ٧٢)(س^٢ - ١٢ س + ٧٢)$

٧) $س^٤ + ٤٨٤$ — $(س^٢ + س\sqrt{٤٤} + ٢٢)(س^٢ - س\sqrt{٤٤} + ٢٢)$

٨) $س^٤ + ٩$ — $(س^٢ + س\sqrt{٦} + ٣)(س^٢ - س\sqrt{٦} + ٣)$

٩) $س^٤ + ١٤٤$ — $(س^٢ + ٢س\sqrt{٦} + ١٢)(س^٢ - ٢س\sqrt{٦} + ١٢)$

١٠) حلّل $س^٤ +$ جـ للوصول إلى قاعدة عامة لتحليل كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة.

$(س^٢ + س\sqrt{٢جـ} + \sqrt{جـ})(س^٢ - س\sqrt{٢جـ} + \sqrt{جـ})$

كتاب التمارين (١٩) — دون ضمن فوق

٨ - ٣ حلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع

أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملًا.

١) $س^٢ - ٢٤ س +$ جـ ١٤٤ — ٢) $س^٢ + ٣٨ س +$ جـ ١٩٦ — ٣) $س^٢ + ٤٠ س +$ جـ ٤٠٠

٤) $س^٢ + ٣ س +$ جـ $\frac{٩}{٤}$ — ٥) $س^٢ - ٩ س +$ جـ $\frac{٨١}{٤}$ — ٦) $س^٢ - س +$ جـ $\frac{١}{٤}$

حُلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا.

٧) $س^٢ - ١٤ س + ٢٤ = ٠$ — $٢, ١٢$

٨) $س^٢ + ١٢ س = ١٣$ — $١, -١٣$

٩) $س^٢ - ٣٠ س + ٥٦ = -٢٥$ — $٢٧, ٣$

١٠) $س^٢ + ٨ س + ٩ = ٠$ — $-٦, -١, ٤$

١١) $س^٢ - ١٠ س + ٦ = -٧$ — $٨, ٥, ١, ٥$

١٢) $س^٢ + ١٨ س + ٥٠ = ٩$ — $-٣, -١٥, ٣, ٧$

١٣) $٣ س^٢ + ١٥ س - ٣ = ٠$ — $٠, ٢, ٢٥, -٢$

١٤) $٤ س^٢ - ٧٢ = ٢٤ س$ — $٨, ٢, ٢, ٢, -٢$

١٥) $٩, ٠ س^٢ + ٥, ٤ س - ٤ = ٠$ — $\frac{٣}{٢٠}, \frac{٦}{٦}$

١٦) $٤, ٠ س^٢ + ٨, ٠ س = ٢, ٠$ — $٠, ٢, ٢, ٢, -٢$

١٧) $\frac{١}{٢} س^٢ - س - ١٠ = ٠$ — $٥, ٤, -$

١٨) $\frac{١}{٤} س^٢ + س - ٢ = ٠$ — $١, ٥, ٥, ٥, -$

١٩) **نظرية الأعداد**، عددان زوجيان متتاليان، حاصل ضربهما ٧٢٨، فما هما؟ ٢٦، ٢٨

٢٠) **عمل**، يُصمّم محمود صناديق المجوهرات والتحف، وتُمثّل الدالة ص = س^٢ + ٥٠ س + ١٨٠٠ ربحه (ص) بعد (س) شهرًا في أول ستين من العمل.

أ) اكتب معادلة تُمثّل الشهر الذي يكون ربح محمود فيه ٢٤٠٠ ريال. س^٢ + ٥٠ س + ١٨٠٠ = ٢٤٠٠

ب) استعمل طريقة إكمال المربع؛ لتحديد الشهر الذي يحصل فيه محمود على ٢٤٠٠ ريال. الشهر العاشر

٢١) **فيزياء**، سقطت صخرة من علو ٢٥٦ قدمًا، وتُمثّل الدالة ع = -١٦ ن^٢ + ٥٣٢ + ٢٥٦ ارتفاع الصخرة (ع) بعد (ن) ثانية من سقوطها. ما الزمن الذي تستغرقه الصخرة للوصول إلى الأرض؟ (إرشاد: عوّض ع = ٠) ٥, ١ ثانية

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٨ - ٤

حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

الدرس ٨ - ٤

حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام.

استعمال المميّز لتحديد عدد حلول معادلة تربيعية.

ما بعد الدرس ٨ - ٤

استعمال خاصية قسمة الجذور التربيعية لاشتقاق القانون العام.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمّ اسأل:

- ما المعادلة التي تحتاج إليها لإيجاد عمر امرأة يبلغ ضغط دمها ١٢٠؟
  ١٢٠ = ٠,٠١ س^{٢} + ٠,٠٥ س + ١٠٧
- اكتب هذه المعادلة بالصورة القياسية.
  ٠ = ٠,٠١ س^{٢} + ٠,٠٥ س − ١٣.
- ما قيم كل من أ، ب، جـ؟
  أ = ٠,٠١، ب = ٠,٠٥، جـ = −١٣
- لماذا يصعب حل هذه المعادلة بالتحليل أو بإكمال المربع؟ لأن القيم العشرية للمعاملات تجعل ذلك صعبًا إن لم يكن مستحيلاً.

حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن

- أحلّ معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لتحديد عدد حلول معادلة تربيعية.

المفردات

القانون العام

المميز

obeikaneducation.com

لماذا؟

يمكن تمثيل ضغط الدم الانقباضي الطبيعي (ص) بالملليتر زئبق للأنثى البالغة بالدالة: ص = ٠,٠١ س^{٢} + ٠,٠٥ س + ١٠٧، حيث (س) العمر بالسنوات، وتستعمل هذه الدالة لتقدير عمر الأنثى إذا عُلِم ضغط الدم الانقباضي لها، إلا أنه من الصعب حل المعادلة المرافقة لها بالتحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: ينتج عن إكمال المربع للمعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠، صيغة نستعملها لحل أية معادلة تربيعية مكتوبة بالصيغة القياسية، وتُسمى هذه الصيغة **القانون العام**.

مفهوم أساسي — القانون العام

أضف إلى مطويتك

حلّ المعادلة التربيعية: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠ يُعبّر عنه بالقانون العام:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

سيطلب إليك اشتقاق هذا القانون لاحقًا (في الدرس ٩- ١)

مثال ١ — استعمال القانون العام

حل المعادلة: ٣س^{٢} + ٥س = ١٢ باستعمال القانون العام.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

٣ س^{٢} + ٥س = ١٢	المعادلة الأصلية
٣ س^{٢} + ٥س − ١٢ = ٠	اطرح ١٢ من كلا الطرفين

الخطوة ٢: طبّق القانون العام.

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$	القانون العام
$= \frac{-(٥) \pm \sqrt{(٥)^{٢} - ٤(٣)(-١٢)}}{(٣)٢}$	أ = ٣، ب = ٥، جـ = −١٢
$= \frac{-٥ \pm \sqrt{١٤٤ + ٢٥}}{٦}$	اضرب
$= \frac{-٥ \pm \sqrt{١٦٩}}{٦} = \frac{-٥ \pm ١٣}{٦}$	اجمع ثم أوجد الجذر التربيعي
$س = \frac{-٥ - ١٣}{٦}$ أو $س = \frac{-٥ + ١٣}{٦}$	افصل الحلين
$س = -٣ \quad = \frac{٤}{٣}$	بسّط

الحلان هما −٣ وَ $\frac{٤}{٣}$.

تحقق من فهمك

أ) ٢س^{٢} + ٩س = ١٨. $-٦، \frac{٣}{٢}$ ب) ٤س^{٢} − ٢٤س + ٣٥ = ٠ $\frac{٧}{٢}، \frac{٥}{٢}$

عند تطبيق القانون العام لحل المعادلات التربيعية قد تحتاج إلى تقريب بعض حلولها.

مصادر الدرس ٨- ٤

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١١٢)	• تنويع التعليم ص (١١٢)	• تنويع التعليم ص (١١٢، ١١٤)
مصادر الفصل	• كتاب التمارين ص (٢٠)	• كتاب التمارين ص (٢٠)	• كتاب التمارين ص (٢٠)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) • التدريبات الإثرائية، ص (٢١)

القانون العام

المثالان ١، ٢ يُبيّنان طريقة استعمال القانون العام في حل معادلات تربيعية بجذور صحيحة وغير صحيحة.

المثال ٣ يُبيّن طريقة حل معادلة تربيعية باستعمال أربع طرق مختلفة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: قد يلاحظ بعض الطلاب أن ثلاثية الحدود في المثال (١) يمكن تحليلها إلى العوامل. لذا وضّح لهم أن هذه المعادلة استُعملت لتوضيح أن القانون العام ينتج حلولاً صحيحة أيضًا.

وأخبر الطلاب أنهم إذا وجدوا طريقة أسهل (مثل التحليل إلى العوامل) لحل المعادلة التربيعية فعليهم استعمال هذه الطريقة.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل صوتي:

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات؛ لتسجيل مقاطع أناشيد تساعدهم على تذكّر القانون العام، ويمكن إعادة هذه التسجيلات للمراجعة، قبل بدء حل المسائل أو الاختبارات.

مثال ٢ استعمال القانون العام

حُلِّ المعادلة $١٠س^{٢} - ٥س = ٢٥$ باستعمال القانون العام، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$١٠س^{٢} - ٥س = ٢٥$ — المعادلة الأصلية

$١٠س^{٢} - ٥س - ٢٥ = ٠$ — اطرح ٢٥ من كلا الطرفين

الخطوة ٢: طبّق القانون العام.

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ — القانون العام

$= \frac{-(-٥) \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤(١٠)(-٢٥)}}{(١٠)٢}$ — أ = ١٠، ب = −٥، جـ = − ٢٥

$= \frac{٥ \pm \sqrt{١٠٠٠ + ٢٥}}{٢٠} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ — اضرب ثم اجمع

$= \frac{٥ - \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ أو $س = \frac{٥ + \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ — افصل الحلين

$\approx -١,٤$ $\approx ١,٩$ — بسط

الحلان هما −١,٤ وَ ١,٩ تقريبًا.

إرشادات للاختبار

الإجابات الدقيقة

العدد $\sqrt{١٠٢٥}$ في المثال٢ غير نسبي؛ لذا فالآلة الحاسبة تعطي فقط قيمة تقريبية له، أما الإجابة الدقيقة في المثال ٢ فهي: $\frac{٥ \pm \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ أما العددان −١,٤، ١,٩ فقيمتان تقريبيتان.

تحقق من فهمك

٢) $٣س^{٢} - ٢س - ٩ = ٠$ ١، ٢,−، ١,٤ تقريبًا

يمكنك استعمال طرق مختلفة لحل المعادلات التربيعية. ولا توجد طريقة هي الأفضل دائمًا لحل أي مسألة.

مثال ٣ حُلَّ المعادلات التربيعية باستعمال طرق مختلفة

حل المعادلة: $س^{٢} - ٤س = ١٢$.

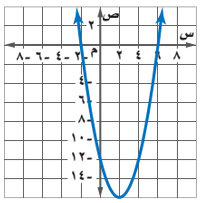
الطريقة ١: التمثيل البياني

أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$س^{٢} - ٤س = ١٢$ — المعادلة الأصلية

$س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$ — اطرح ١٢ من كلا الطرفين

مثّل الدالة المرتبطة د(س)= $س^{٢}$− ٤س− ١٢ بيانيًا، وحدّد المقطعين السينيين على التمثيل.



الحلان هما −٢ ، ٦.

الطريقة ٢: التحليل إلى عوامل

$س^{٢} - ٤س = ١٢$ — المعادلة الأصلية

$س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$ — اطرح ١٢ من كلا الطرفين

$(س - ٦)(س + ٢) = ٠$ — حلّل

$س - ٦ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$ — خاصية الضرب الصفري

$س = ٦$ $س = -٢$ — إيجاد قيم س

المحتوى الرياضي

القانون العام:

على الرغم من أن القانون العام قد لا يكون أسهل طريقة لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أنه مفيد دائمًا. ولاشتقاق هذا القانون، حُلّ $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$ بإكمال المربع.

تنبيه !

الحلول

لا يُعدّ نوع الطريقة المستعملة لحل المعادلة التربيعية مهمًّا، إذ إن جميع الطرق تُعطي الحل نفسه أو الحلول نفسها.

الطريقة ٣: إكمال المربع

المعادلة مكتوبة بالصورة المناسبة لإكمال المربع؛ لأن المعامل الرئيس يساوي ١، والحدين اللذين يحتويان س^{٢}، س تم فصلهما.

س^{٢} − ٤س = ١٢	المعادلة الأصلية
س^{٢} − ٤س + ٤ = ١٢ + ٤	بما أن $\left(\frac{-٤}{٢}\right)^{٢}$ = ٤، لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين
(س − ٢)^{٢} = ١٦	حلّل س^{٢} − ٤س + ٤.
س − ٢ = ±٤	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
س = ٢ ± ٤	أضف ٢ لكلا الطرفين
س = ٢ + ٤ أو س = ٢ − ٤	افصل الحلين
= ٦ = −٢	بسّط

الطريقة ٤: القانون العام

من الطريقة الأولى، الصورة القياسية للمعادلة هي: س^{٢} − ٤س − ١٢ = ٠.

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$	القانون العام
$= \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤(١)(-١٢)}}{(١)٢}$	أ = ١، ب = −٤، جـ = −١٢
$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ + ٤٨}}{٢}$	اضرب
$= \frac{٤ \pm \sqrt{٦٤}}{٢} = \frac{٤ \pm ٨}{٢}$	اجمع وبسّط
$س = \frac{٤ - ٨}{٢}$ أو $س = \frac{٤ + ٨}{٢}$	افصل الحلين
= −٢ = ٦	بسّط

تحقق من فهمك

٣أ) ٢س^{٢} − ١٧س + ٨ = ٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٨ **٣ب)** ٤س^{٢} − ٤س − ١١ = ٠ ، ٢,٢ ، −١,٢ تقريبًا

ويمكنك تلخيص طرق حل المعادلات التربيعية في ملخص المفهوم الآتي :

ملخص المفهوم — **حل المعادلات التربيعية**

أضف إلى مطويتك

الطريقة	متى يُفضل استعمالها؟
التحليل إلى عوامل	تستعمل إذا كان الحد الثابت صفرًا، أو إذا كان من السهل تحديد العوامل فليست جميع المعادلات قابلة للتحليل.
التمثيل البياني	تستعمل عندما يكون الحل التقريبي مقبولًا.
استعمال الجذور التربيعية	تستعمل إذا كانت المعادلة مكتوبة على الصورة س^{٢} = ن، أي تستعمل إذا كانت المعادلة لا تحتوي على الحد س فقط.
إكمال المربع	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠، إلا أنه من الأسهل استعمالها إذا كان ب عددًا زوجيًّا وَ أ = ١.
القانون العام	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠.

إرشادات للمعلم الجديد

استعمال القانون العام: أخبر الطلاب أنه من الأفضل لهم الحل خطوة خطوة عند استعمالهم القانون العام، فمثلاً، على الطلاب أن يحسبوا أولاً المقدار تحت إشارة الجذر، ثم يجدوا الجذر التربيعي، ثم يبسّطوا البسط والمقام، وأخيرًا يجروا القسمة؛ إذ قد يؤدي تجاوز أي خطوة إلى الوقوع في بعض الأخطاء.

أمثلة إضافية

١ حُلّ المعادلة: س^{٢} − ٢س = ٣٥ باستعمال القانون العام. −٥، ٧

٢ **حُلّ المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة، إن كان ذلك ضروريًّا:**

أ) ٢س^{٢} − ٢س − ٥ = ٠

٢,٢ ، −١,٢

ب) ٥س^{٢} − ٨س = ٤

٢ ، −٠,٤

٣ حُلّ المعادلة: ٣س^{٢} − ٥س = ١٢

$-\frac{٤}{٣}$ ، ٣

إرشادات للمعلم الجديد

حسٌّ منطقي: يُقدّم الجدول الوارد في هذه الصفحة اقتراحات لاستعمال كل طريقة، لا تفرض على الطلاب استعمال الطرق جميعها، فبعض الطلاب لم يصلوا إلى المستوى المطلوب في مادة الرياضيات الذي يمكنهم من تحليل كل معادلة وتحديد الطريقة الملائمة لحلها.

المميز

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال المميّز لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

مثال إضافي

٤ أوجد قيمة المميّز للمعادلة: ٣س^{٢} + ١٠س = ١٢، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية.

٢٤٤، حلان حقيقيان.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: ذكّر الطلاب أن يكونوا حريصين عند التعامل مع الإشارات السالبة عند إيجاد المميّز، فنسيان إشارة سالبة واحدة يمكن أن يحوّل المميّز من موجب إلى سالب، ويؤدي إلى ناتج غير صحيح.

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ١٠؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

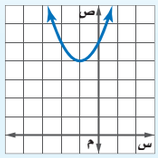
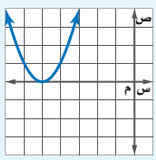
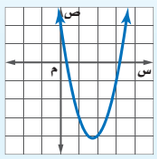
إرشادات للدراسة

المميز: تذكر أنه إذا كان الطرف الأيمن في الصورة القياسية لثلاثي حدود من الدرجة الثانية مربعًا كاملاً فهناك حل واحد، ويكون المميز صفرًا.

المميز: في القانون العام، تُسمى العبارة التي تحت الجذر (ب^{٢} – ٤أ جـ) **المميز**، ويمكنك استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

مفهوم أساسي استعمال المميز

أضف إلى مطويتك

المعادلة	س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠	س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠	٢س^{٢} – ٧س + ٢ = ٠
المميز	ب^{٢} – ٤أ جـ = –١٦ سالب	ب^{٢} – ٤أ جـ = ٠ صفر	ب^{٢} – ٤أ جـ = ٣٣ موجب
تمثيل الدالة المرتبطة			
عدد الحلول الحقيقية	عدد المقاطع السينية = ٠	عدد المقاطع السينية = ١	عدد المقاطع السينية = ٢
	٠	١	٢

مثال ٤ استعمال المميز

أوجد قيمة المميز للمعادلة: ٤س^{٢} – ٥س = –٣، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية: ٤س^{٢} – ٥س = –٣ ← ٤س^{٢} – ٥س + ٣ = ٠

الخطوة ٢: أوجد المميز.

ب^{٢} – ٤أ جـ = (–٥)^{٢} – ٤(٤)(٣) — أ = ٤، ب = –٥، جـ = ٣

= –٢٣ — بسّط

بما أن المميز سالب فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

٤أ) ٢س^{٢} + ١١س + ١٥ = ٠ — ٤أ) ١، حلان حقيقيان

٤ب) ٩س^{٢} – ٣٠س + ٢٥ = ٠ — ٤ب) ٠، حل حقيقي واحد

تأكد

المثالان ١ ، ٢

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

١) س^{٢} – ٢س – ١٥ = ٠ — ٣، ٥

٢) س^{٢} – ٨س = –١٠ — ١,٦، ٦,٤

٣) ٥س^{٢} + ٥ = –١٣س — –٢,١، –٠,٥

حُلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

٤) ٢س^{٢} + ١١س – ٦ = ٠

٥) ٢س^{٢} – ٣س – ٦ = ٠

٦) ٩س^{٢} = ٢٥ — ± ٥/٣؛ الجذور التربيعية

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدِّد عدد حلولها الحقيقية:

٧) س^{٢} – ٩س + ٢١ = ٠

٨) ٩س^{٢} + ٢٤س = –١٦

٩) ٣س^{٢} – س = ٨

المثالان ١ ، ٢

٤) –٦، ١/٢؛ التحليل إلى عوامل

٥) ٦ ,٢، –١ , ١؛ القانون العام

مثال ٣

٧) –٣؛ لا توجد حلول حقيقية

٨) ٠، حل حقيقي واحد

مثال ٤

٩) ٩٧، حلان حقيقيان.

تنويع التعليم:

دون ضمن فوق

إذا كنت تعتقد أن بعض الطلاب يمكنهم أن يكونوا مبدعين في هذا الدرس ،

فقم باستعمال الأحاجي والألغاز والقصائد والأشعار، أو أي مساعدات؛ ليتذكّروا القانون العام وطريقة استعمال المميز عند تحديد عدد الحلول الحقيقية، ثم اطلب إليهم أن يشاركوا زملاءهم في ذلك.

١٠) **منصّة القفز:** يقفز خالد من فوق منصة القفز، حيث تمثل المعادلة ل = −١٦ن٢ + ٤ ,٢ن + ٦، ارتفاع خالد (ل) بعد (ن) من الثواني، استعمل المميز لتحديد ما إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع ٢٠ قدمًا. فسّر إجابتك. المميز −٢٤ ,٨٩٠، لا يوجد حل، لذا فلن يصل خالد إلى ٢٠ قدمًا.

تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

١١) ٤س٢ + ٥س − ٦ = ٠ ، $-2، \frac{3}{4}$ ١٢) س٢ + ١٦ = ٠ ∅ ١٣) ٦س٢ − ١٢س + ١ = ٠ ٠,١,١,٩

١٤) ٥س٢ − ٨س = ٦ ٢,٢، −٠,٦ ١٥) ٥س٢ + ٢١س = −١٨ $-3، -\frac{6}{5}$ ١٦) ٢س٢ = ١٢س − ١٨ ٣

مثال ٣

حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

١٧) ٢س٢ − ٨س = ١٢ ٦،٢ ١٨) ٣س٢ − ٢٤س = −٣٦ ١٩) س٢ − ٣س = ١٠ −٢، ٥

مثال ٤

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية: انظر الهامش

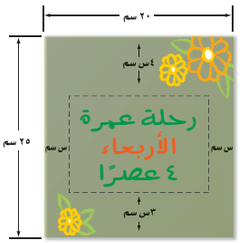
٢٠) س٢ − $\frac{٤}{٥}$ س = ٣ ٥,٢,١,٢− ٢١) ٥,٠س٢ − ٢س = −٢ ٢٢) ٢,٠س٢ − ٥,١س + ٢,٩ = ٠

الربط مع الحياة

بلغ عدد الحوادث المرورية في العام ١٤٢٨هـ أكثر من ٤٨٥ ألف حادث راح ضحيتها ٦٤٨٥ شخصًا. ومن أسباب الحوادث المرورية: القيادة في أثناء التعب والإرهاق، الانشغال عن القيادة، عدم التقيد بأنظمة المرور، التهور في القيادة، وعدم ربط حزام الأمان، وغيرها.

٢٣) **مرور:** تمثّل المعادلة ف = ٠,٠٠٧ع٢ + ٠,١٩ع المسافة (ف) بالأمتار التي تقطعها سيارة تسير بسرعة (ع) كلم/ ساعة للتوقف تمامًا بعد استعمال المكابح، فإذا كانت حدود السرعة القصوى في أحد الشوارع ٨٠ كلم/ ساعة، وتوقفت سيارة منذر بعد ٥٥ مترًا من استعماله المكابح، فهل كانت سرعته تزيد على السرعة القصوى؟ فسّر تبريرك.

٢٤) **إعلان:** يعدّ راشد ملصقًا للإعلان عن رحلة عمرة، ويريد أن يغطي ثلاثة أرباع المساحة بنصوص كتابية.



أ) اكتب معادلة لمساحة القسم النصّي. (٢٠ − ٢س)(٢٥ − ٧س) = ٣٧٥

ب) حُلَّ المعادلة باستعمال القانون العام. ٠,٧، ١٢,٩ تقريبًا

جـ) كم يجب أن تكون هوامش الملصق؟ ٠,٧ سم على الجانبين، و٢,٨ سم من الأعلى، ٢,١ سم من الأسفل تقريبًا

حدّد دون استعمال التمثيل البياني عدد المقاطع السينية لكل دالة فيما يأتي:

٢٥) ٤,٢٥ س + ٣ = −٣س٢ ٠ ٢٦) س٢ + $\frac{٢}{٢٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ س ٢ ٢٧) ٠,٢٥ س٢ + س = −١ ١

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

٢٨) −٢س٢ − ٧ س = −١,٥ ٠,٢,٣,٧− ٢٩) ٢,٣ س٢ − ٤,١س = ٦,٨ ٢,١,١,٤− ٣٠) س٢ − ٢س = ٥ ٣,٤، −١,٤

٣١) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف الدوال الأسّية في هذه المسألة :

أ) جدوليًا: انسخ الجدول الآتي وأكمله:

الزمن (ساعة)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد البكتيريا	١ = ٢٠	٢ = ٢١	٤ = ٢٢	٨ = ٢٣	١٦ = ٢٤	٣٢ = ٢٥	٦٤ = ٢٦

تنبيه لحل سؤال

ورق المربعات: لحل السؤال ٣١ زوّد الطلاب بورق مربعات.

إجابات:

٢٠) ٦٤ ,١٢، حلان حقيقيان

٢١) ٠، حل حقيقي واحد

٢٢) −٠,٠٧ ,٠، لا توجد حلول حقيقية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١١ − ٢٢ ، ٢٧ − ٤٧
ضمن ضمن المتوسط	١٢ − ١٦ (زوجي) ، ١٥ − ٢٣ (فردي) ، ٢٤ ، ٢٣ − ٤٧
فوق فوق المتوسط	٢٣ − ٤٧

ب) بيانيًا: مثّل المعلومات المعطاة في الجدول بيانيًّا باستعمال النقاط (الزمن، عدد البكتيريا)، وهل التمثيل خطي أم تربيعي أم غير ذلك؟ انظر الهامش.

جـ) تحليليًا: ماذا يحدث لعدد البكتيريا كل ساعة؟ اكتب دالة تمثّل هذا النمط.
يتضاعف عدد البكتيريا كل ساعة. د(س)= ٢^س

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٢) **تحدَّ:** أوجد جميع قيم ك التي تجعل للمعادلة: "٢س^٢ – ٣س + ٥ك = ٠" حلين حقيقيين. ك < ٩/٤٠

تبرير: بيّن فيما إذا كان عدد الحلول الحقيقية لكل مما يأتي حلان، أو حل واحد، أو لا يوجد حل :

٣٣) التمثيل البياني لدالة تربيعية لا تحتوي على مقطع سيني. لا يوجد حل

٣٤) التمثيل البياني لدالة تربيعية تمس محور السينات. حل واحد

٣٥) التمثيل البياني لدالة تربيعية تقطع محور السينات مرتين. حلان

٣٦) قيمتا كل من أ، ب أكبر من صفر، وقيمة جـ أصغر من صفر في الصيغة القياسية للدالة التربيعية. حلان

٣٧) **مسألة مفتوحة:** اكتب ٣ دوال تربيعية على أن يكون مميز الأولى موجب، ومميز الثانية سالبًا، ومميز الثالثة صفرًا. انظر الهامش

٣٨) **اكتب:** وضّح طرق حل المعادلات التربيعية، وأعطِ مثالًا مختلفًا لكل طريقة. فسّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

٣٩) **إجابة قصيرة:** إذا علمت أن المثلث المجاور متطابق الضلعين، فما قيمة س؟ ٥٨ أو ٦٤

٤٠) ما حلول المعادلة التربيعية ٦هـ^٢ + ٦هـ = ٧٢؟ أ

أ) ٣ أو –٤ جـ) لا يوجد حلول حقيقية

ب) –٣ أو ٤ د) ١٢ أو –٤٨

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا: (الدرس ٨-٣)

٤١) ٦س^٢ – ١٧س + ١٢ = ٠ ٤/٣، ٣/٢ ٤٢) س^٢ – ٩س = –١٢ ٧,٤، ١,٦ ٤٣) ٤س^٢ = ٢٠س – ٢٥ ٥/٢

لتكن ص = س^٢ – ٥س + ٤. (الدرس ٨-١)

٤٤) اكتب معادلة محور التماثل. س = ٢,٥

٤٥) أوجد إحداثيات نقطة الرأس، وهل هي نقطة عظمى أم صغرى؟ (٢,٥ ، –٢,٢٥) نقطة صغرى

٤٦) مثّل الدالة بيانيًّا؟ انظر الهامش

٤٧) حدِّد مجال الدالة ومداها. المجال = جميع الأعداد الحقيقية، والمدى {ص |ص ≤ –٢,٢٥}

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اعمل نسخًا لخمس معادلات تربيعية مختلفة، ووزّعها على الطلاب، واطلب إلى كل منهم أن يحسب المميز، ويحدد عدد الحلول الحقيقية لمعادلته، ويسلمك ورقته قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

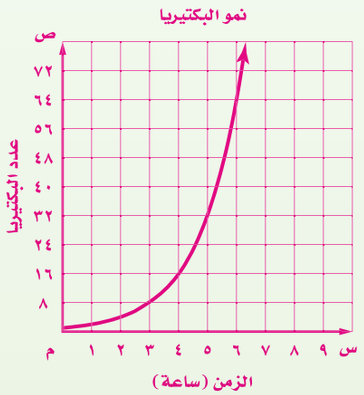
تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (٨–٤) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٤)، ص (٥٠)

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ٣١، يستعمل الطلاب جدولاً بالقيم، وتمثيلاً في المستوى الإحداثي، وتحليلاً للتعرف على الدالة الأُسّية.

إجابات:

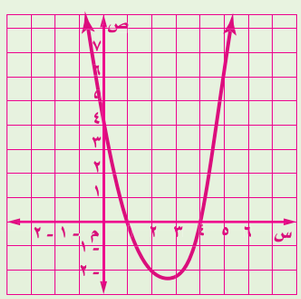
٣١ب)



التمثيل البياني ليس خطيًّا ولا تربيعيًّا.

٣٧) إجابة ممكنة: المميّز موجب للدالة د(س) = س^٢ – ٤. المميز سالب للدالة د(س)= س^٢ + ٤. المميز صفر للدالة د(س)= س^٢ – ٨س + ١٦

٤٦)



تنويع التعليم

فوق

توسّع: يميل الطلاب إلى حفظ المفهوم إن كانوا هم الذين توصّلوا إليه وفسّروه. لذا اطلب إليهم البحث عن اشتقاق القانون العام، وكتابة فقرة توضّح هذا الاشتقاق.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٨ - ٤

دون المتوسط — ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٨) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٤ تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

القانون العام: يمكنك حل المعادلة التربيعية على الصورة القياسية $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ باستعمال القانون العام.

القانون العام	حلّ المعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$، حيث $أ \neq ٠$ يعبّر عنه بالقانون العام: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

مثال ١ حُلّ المعادلة $س^٢ + ٢س = ٣$ باستعمال القانون العام.

أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$س^٢ + ٢س = ٣$	المعادلة الأصلية
$س^٢ + ٢س - ٣ = ٣ - ٣$	اطرح ٣ من كلا الطرفين
$س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$	بسّط

والآن عوّض $أ = ١$، $ب = ٢$، $جـ = -٣$ في القانون العام.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$= \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤(١)(-٣)}}{(١)٢}$$

$$= \frac{-٢ \pm \sqrt{١٦}}{٢}$$

$$س = \frac{-٢ + ٤}{٢} \text{ أو } س = \frac{-٢ - ٤}{٢}$$

$$= ١ \qquad = -٣$$

مجموعة الحل هي $\{-٣، ١\}$.

مثال ٢ حُلّ المعادلة $س^٢ - ٦س + ٢ = ٠$ باستعمال القانون العام، مقرّبًا الحلّ إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا.

في هذه المعادلة، $أ = ١$، $ب = -٦$، $جـ = ٢$.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$= \frac{-(-٦) \pm \sqrt{(-٦)^٢ - ٤(١)(٢)}}{(١)٢}$$

$$= \frac{٦ \pm \sqrt{٢٨}}{٢}$$

$$س = \frac{٦ + \sqrt{٢٨}}{٢} \text{ أو } س = \frac{٦ - \sqrt{٢٨}}{٢}$$

$$\approx ٥,٣ \qquad \approx ٠,٣$$

مجموعة الحل هي $\{٥,٣، ٠,٣\}$.

تمارين

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام، مقرّبًا الحلّ إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

١) $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$ — ٢، ١	٢) $س^٢ - ٨س = -١٦$ — ٤
٣) $١٦س^٢ - ٨س = -١$ — $\frac{١}{٤}$	٤) $س^٢ + ٥س = ٦$ — ١، ٦-
٥) $٣س^٢ + ٢س = ٨$ — ٢-، ١,٣	٦) $٨س^٢ - ٨س - ٥ = ٠$ — ٠,٨-، ١,٤
٧) $-٤س^٢ + ١٩س = ٢١$ — ٣، $\frac{٧}{٤}$	٨) $٣س^٢ + ٨س = ٥$ — ٢,٧، ٠,٧-
٩) $٤٨س^٢ + ٢٢س - ١٥ = ٠$ — $\frac{٣}{٨}$، $\frac{٥}{٦}$-	١٠) $٨س^٢ - ٤س = ٢٤$ — ٢، $\frac{٣}{٤}$-
١١) $٣س^٢ + ٥س = ٨$ — ١,١، ٢,٦-	١٢) $٨س^٢ + ٩س - ٤ = ٠$ — ٠,٢، ١,٥-
١٣) $٢س^٢ + ٩س + ٤ = ٠$ — $\frac{١}{٢}$-، ٤-	١٤) $٨س^٢ + ١٧س + ٢ = ٠$ — $\frac{١}{٨}$-، ٢-

تدريبات حل المسألة (٢٠) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٤ تدريبات حل المسألة

حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

١) **أعمال،** بدأ أحمد عملًا خاصًا جديدًا، ويمكنه بناءً على سجلاته تقدير أرباحه الأسبوعية باستعمال الدالة $د(س) = -س^٢ + ٢س - ٣٧$، حيث س عدد الوحدات التي ينتجها. وعندما تكون $د(س)$ سالبة يكون العمل خاسرًا. فما أقل عدد من الوحدات التي يتعيّن على أحمد إنتاجها حتى يربح؟

٦ وحدات

٢) **علم الطيران،** عند إقلاع مكوك الفضاء (دسكفري) يكون تسارعه ثابتًا مقداره ١٦,٤ قدمًا في الثانية المربعة، وتكون سرعته الإبتدائية ١٣٤١ قدمًا في الثانية بسبب دوران الأرض. إذا كانت المعادلة $ف(ن) = \frac{١}{٢}١٦,٤ن^٢ + ٨٨٠٢ن$ تمثّل المسافة المقطوعة ف بعد ن ثانية من الإقلاع، فما الزمن الذي يقطع فيه المكوك ٤٠٠٠٠ قدم؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

٢٥,٨ ثانية

٣) **فن العمارة،** تظهر النسبة الذهبية في نموذج التصميم المجاور؛ لأن عرض الواجهة الأمامية س، وارتفاعها ع يرتبطان وفق المعادلة $\frac{س + ع}{س} = \frac{س}{ع}$.

إذا كان ارتفاع النموذج ١٦ سنتمترًا فما عرضه؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

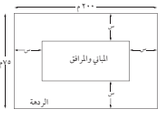
٢٥,٩ سنتمترًا

٤) **حرف يدوية،** قصّت سعاد خيطًا طوله ٦٠ سنتمترًا إلى قطعتين غير متساويتين، واستعملت كل قطعة في صنع مربع. فإذا كان مجموع مساحتي المربعين ١١٧ سنتمترًا مربعًا، وكانت س تمثّل طول إحدى القطعتين، فاكتب معادلة للتعبير عن هذا الموقف، ثم حلّها لإيجاد طولي القطعتين الأصليتين.

$(١٥ - س)^٢ + (\frac{س}{٤})^٢ = ١١٧$

٢٤سم، ٣٦ سم

٥) **تصميم مواقع،** تخطط إحدى البلديات لبناء وحدة لمعالجة المياه على قطعة أرض مستطيلة الشكل عرضها ٧٥ مترًا، وطولها ٢٠٠ متر، كما في الشكل أدناه. وتغطّي المباني والمرافق منطقة مساحتها ١٠٠٠٠ متر مربع. وقد جرى الاتفاق مع المصمم على توفير أكبر فسحة ممكنة بين المباني والمرافق وحدود قطعة الأرض من كل جهاتها. افترض أنّ س تمثّل عرض هذه الفسحة.



أ) مثّل الموقف بمستعملًا معادلة شبيهة بالمعادلة م = ل × ع

ب) اكتب المعادلة بالصورة التربيعية القياسية، ثم حلّها.

$١٠٠٠٠ = (٢٠٠ - ٢س)(٧٥ - ٢س)$

$٤س^٢ - ٥٥٠س + ٥٠٠٠ = ٠$ ، ٩,٨، ١٢٧,٧

جـ) كم يتعيّن أن يكون عرض الفسحة؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

٩,٨ م

التدريبات الإثرائية (٢١) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٨-٤ التدريبات الإثرائية

المستطيلات الذهبية

للمستطيل الذهبي خاصية تتمثل في أنّ أضلاعه تحقّق التناسب الآتي:

$$\frac{أ + ب}{أ} = \frac{أ}{ب}$$

ويمكن كتابة معادلتين تربيعيتين من هذا التناسب، تسميان المعادلتين التربيعيتين الذهبيتين أحيانًا.

١) في التناسب أعلاه، افترض أنّ $أ = ١$، واكتب معادلة تربيعية مستعملًا الضرب التبادلي.

$ب^٢ + ب - ١ = ٠$

٢) حُلّ المعادلة في تمرين (١) لـ ب.

$$ب = \frac{-١ + \sqrt{٥}}{٢}$$

٣) في التناسب أعلاه، افترض أنّ $ب = ١$ واكتب معادلة تربيعية مستعملًا الضرب التبادلي.

$أ^٢ - أ - ١ = ٠$

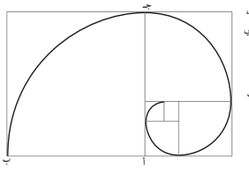
٤) حُلّ المعادلة في تمرين (٣) لـ أ.

$$أ = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$$

٥) فسّر لماذا تسمّى كلٌّ من $\frac{١}{٢}(١ + \sqrt{٥})$، $\frac{١}{٢}(\sqrt{٥} - ١)$ نسبة ذهبية.

كلٌّ منهما تمثل النسبة بين طولي ضلعين متجاورين في مستطيل ذهبي. الأولى هي نسبة طول الضلع الأطول إلى طول الضلع الأقصر؛ والثانية هي نسبة طول الضلع الأقصر إلى طول الضلع الأطول.

توجد خاصية أُخرى للمستطيلات الذهبية، وهي أنه إذا رُسم مربع داخل مستطيل ذهبي فإنه يُنشئ مستطيلًا ذهبيًا أصغر. في التصميم المجاور، وُصلت الرؤوس المتقابلة في كل مربع بأقواس أرباع دوائر. فمثلًا، يُرسم القوس الواصل من النقطة ب إلى النقطة جـ بوضع رأس الفرجار عند النقطة أ وبنصف قطر طوله أب.



٦) ارسم نسخة مكبّرة من هذا التصميم على ورقة منفصلة. ابدأ بمستطيل ذهبي طول ضلعه الأطول ٢٥ سم.

يتعين أن يكون طول الضلع الأصغر ١٥,٥ سم تقريبا.

كتاب التمارين (٢٠) — دون ضمن فوق

٨ - ٤ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا.

١) $س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$ — ١,٣-	٢) $س^٢ + ٨س + ٧ = ٠$ — ٧-، ١-	٣) $س^٢ - ٤س + ٦ = ٠$ — ∅
٤) $س^٢ - ٦س + ٧ = ٠$ — ٤,٤، ١,٦	٥) $٣س^٢ + ٩س - ٥ = ٠$ — $\frac{١}{٣}$، ٥,-	٦) $٢س^٢ + ١٢س + ١٠ = ٠$ — ٥,-، ١-
٧) $٢س^٢ - ٩س = -١٢$ — ∅	٨) $٣س^٢ - ٥س = ١٢$ — ٤، $١\frac{١}{٣}$-	٩) $٣س^٢ + س = ٤$ — ١,١ $\frac{١}{٣}$-
١٠) $٣س^٢ - ١ = -٨س$ — ٠,١، ٢,٨-	١١) $٤س^٢ + ٧س = ١٥$ — ١ $\frac{١}{٤}$، ٣,-	١٢) $١,٦س^٢ + ٢س + ٢,٥ = ٠$ — ∅

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية.

١٣) $س^٢ + ٨س + ١٦ = ٠$ — ٠، حل حقيقي واحد	١٤) $س^٢ + ٣س + ١٢ = ٠$ — -٣٩، لا توجد حلول حقيقية	١٥) $٢س^٢ + ١٢س = -٧$ — ٨٨، حلان حقيقيان
١٦) $٢س^٢ + ١٥س = -٣٠$ — -١٥، لا توجد حلول حقيقية	١٧) $٤س^٢ + ٩ = ١٢س$ — ٠، حل حقيقي واحد	١٨) $٣س^٢ - ٢س = ٣,٥$ — ٤٦، حلان حقيقيان

١٩) **فيزياء،** سقطت قطعة من الطوب من ارتفاع ٣٠ قدمًا إلى الأرض، بسرعة ابتدائية مقدارها ١٠ أقدام في الثانية.

أ) اكتب معادلة لإيجاد زمن وصول قطعة الطوب إلى الأرض. استعمل نموذج الحركة الرأسية:

$ع = -١٦ن^٢ + ع_٠ن + ل$ ، حيث (ن) ثانية، و(ع) ارتفاع الجسم بعد (ن) ثانية، و($ع_٠$) السرعة الابتدائية، و(ل) الارتفاع الابتدائي. (إرشاد: بما أن الجسم يُلقى إلى الأسفل فالسرعة الابتدائية سالبة). $ع = -١٦ن^٢ - ١٠ن + ٣٠$

ب) ما المدة الزمنية التي تستغرقها قطعة الطوب حتى تصل إلى الأرض؟ ١,١ ثانية تقريبًا

ملحوظات المعلم

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدِّد مجالهما ومداهما: انظر الهامش

١) ص= س^{٢}+ ٢س + ٥ ٢) ص= ٢س^{٢} – ٣س + ١

لتكن الدالة ص = س^{٢} – ٧س + ٦.

٣) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى. قيمة صغرى

٤) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة. ٦,٢٥–

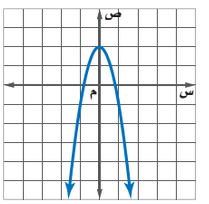
٥) حدد مجال الدالة ومداها.
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى= {ص| ص ≤ ٦,٢٥–}

حُلّ كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

٦) س^{٢} + ٧س + ١٠ =٠ ٥–، ٢–

٧) س^{٢} – ٥ = –٣س ٢,٤، ١,٢–

٨) **اختيار من متعدد:** أيّ المعادلات الآتية تعبّر عن الدالة الممثلة بيانيًّا أدناه؟ د



أ) ص = –٣س^{٢} ج) ص = س^{٢} + ٢

ب) ص = ٣س^{٢} + ١ د) ص = –٣س^{٢} + ٢

حُلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال إكمال المربع:

٩) س^{٢} – س – ٦ =٠ ٣،٢–

١٠) ٢س^{٢} – ٣٦ = –٦س ٣،٦–

حُلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام، مقرّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

١١) س^{٢} – س – ٣٠ =٠ ٦،٥–

١٢) ٢س^{٢} + س – ١٥ = ٠ ٣–، ٢,٥

١٣) **كرة سلة:** سدَّد نواف كرة السلة نحو المرمى، وفق المعادلة ع= –١٦ن^{٢} + ٦٠ن + ٣٠، حيث تمثّل (ع) ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية، كم تبقى الكرة في الهواء؟ ٣,٨ ثوانٍ تقريبًا

١٤) مثِّل الدالة: ص = ٣س^{٢} بيانيًّا، وأوجد المقطع الصادي، وحدد مجالها ومداها. انظر إجابات الطلاب

١٥) **اختيار من متعدد:** أي مما يلي يُعَد تحليلًا تامًّا للعبارة ٤ س^{٢} – ٨س – ١٢ إلى عواملها الأوليّة؟ أ

أ) ٤ (س–٣) (س+١)

ب) (٤س+١٢) (س–١)

جـ) ٤ (س+٣) (س–١)

د) (س–٣) (٤س+٤)

١٦) أوجد مساحة المستطيل أدناه؟ (س^{٢}+١٥س+٣٦)سم^{٢}

١٧) مثّل مجموعة الأزواج المرتبة الآتية بيانيًّا:
{(–٢، ٤)، (–١، ١)، (٠،٠)، (١،١)، (٢، ٤)}، وحدّد فيما إذا كانت تمثّل دالة خطية أم تربيعية. انظر الهامش.

١٨) ابحث عن النمط في الجدول الآتي لتحديد أفضل نموذج دالة لوصف البيانات: خطية أم تربيعية. فسّر إجابتك. خطية

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	١	٣	٥	٧	٩

مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط	المستوى ٢	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على ٢٥٪ تقريبًا من التمارين،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس ٨–١ ، ٨–٢، ٨–٣، ٨–٤	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل ص (٨٨)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

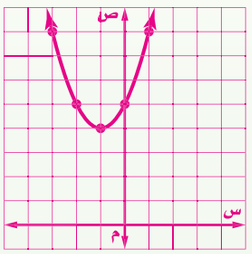
المعالجة

بناء على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلاب.

إجابات:

(١

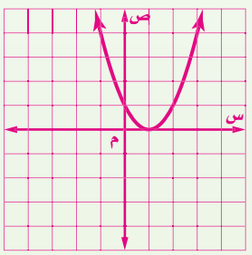
س	–٣	–٢	–١	٠	١	٢
ص	٨	٥	٤	٥	٨	١٧



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى = {ص| ص ≤ ٤}

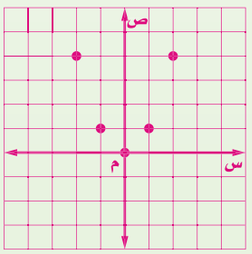
(٢

س	–٢	–١	٠	١	٢	٣
ص	١٥	٦	١	٠	٣	١٠



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى = {ص| ص ≤ –١٢٥, ٠}

(١٧



تشخيص أخطاء الطلاب.

تفحص إجابات الطلاب على كل فقرة: إذ قد تشير إجاباتهم إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية.

١ أ) التبديل بين إحداثيات المقطع الصادي.

ب) التبديل بين إحداثيات المقطع الصادي والرأس.

جـ) التبديل بين إحداثيات المقطعين السيني والصادي.

د) صحيح.

٢) أ) التبديل بين الميل والمقطع الصادي.

ب) صحيح.

جـ) اختيار غير صحيح للمقطع السالب بدلاً من الموجب.

د) التبديل بين الميل والمقطع الصادي بشكل غير صحيح، واختيار المقطع السالب بدلاً من الموجب.

٣) أ) صحيح.

ب) خطأ في إشارة الحد الثابت.

جـ) خطأ في التحليل.

د) خطأ في التحليل.

٤) أ) عدم ضرب −٣ب جـ في ٥ب جـ^{٢}.

ب) صحيح.

جـ) عدم ضرب المعاملات.

د) ضرب الأسس بدلاً من جمعها.

٥) أ) تخمين.

ب) صحيحة.

جـ) عكس إشارة الثوابت.

د) خطأ في حساب المميز.

٦) أ) تخمين.

ب) صحيح.

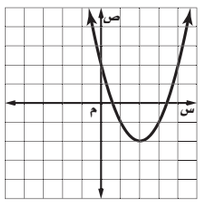
جـ) قسمة إحداثيي النقطة.

د) إيجاد فرق الصادات والقسمة على س.

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) ما إحداثيا رأس القطع المكافئ الممثل أدناه؟ د



أ) (٢، ٠)　　جـ) (−٢، ٢)

ب) (٠، ٢)　　د) (٢، −٢)

٢) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{٩}{١٠}$ ومقطعه الصادي ٣ بصيغة الميل والمقطع. ب

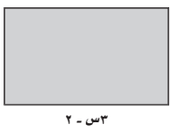
أ) ص = ٣س + $\frac{٩}{١٠}$

ب) ص = $\frac{٩}{١٠}$ س + ٣

جـ) ص = $\frac{٩}{١٠}$ س − ٣

د) ص = ٣س − $\frac{٩}{١٠}$

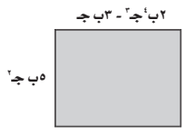
٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه ٣س^{٢} + ١٩س − ١٤ وحدة مربعة فكم وحدة عرضه؟ أ



أ) س + ٧　　جـ) س + ٢

ب) س − ٧　　د) س − ٢

٤) اكتب عبارة تمثل مساحة المستطيل أدناه. ب



أ) ١٠ب^{٥}جـ^{٥} − ٣ب جـ

ب) ١٠ب^{٥}جـ^{٥} − ١٥ب^{٢}جـ^{٣}

جـ) ٢ب^{٥}جـ^{٥} − ٣ب^{٢}جـ^{٣}

د) ١٠ب^{٤}جـ^{٦} − ١٥ب جـ^{٢}

٥) حل المعادلة التربيعية: س^{٢} − ٢س − ١٥ = ٠. ب

أ) −١، ٤

ب) −٣، ٥

جـ) ٣، −٥

د) ∅

٦) ماقيمة ر التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين (−٤، ٨)، (ر، ١٢) يساوي $\frac{٤}{٣}$. ب

أ) −٤

ب) −١

جـ) ٢

د) ٣

إرشادات للاختبارات

سؤال ٥: يمكنك استعمال الحاسبة البيانية؛ لإيجاد حلول المعادلة بسرعة إذا كان ذلك مسموحًا به.

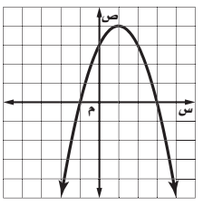
إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٧) استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$٢س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠$. $\frac{٣\sqrt{٧} \pm ٣}{٢}$

٨) استعمل التمثيل البياني الآتي للمعادلة التربيعية للإجابة عن الأسئلة أدناه.



أ) ما إحداثيا رأس النقطة؟ (١، ٤)

ب) ما إحداثيا نقطة المقطع الصادي؟ (٠، ٣)

جـ) ما معادلة محور التماثل؟ س = ١

د) حل المعادلة التربيعية المرافقة. ٣، -١

٩) ثمن ٥ دفاتر و٣ أقلام ١٩,٥ ريالًا، وثمن ٤ دفاتر و٦ أقلام ٢١ ريالًا، استعمل هذه المعطيات في الإجابة عما يأتي:

أ) اكتب نظامًا من المعادلات يمثّل هذا الموقف. انظر الهامش

ب) حل نظام المعادلات، ما ثمن كلٍّ من الدفتر والقلم؟
القلم ١,٥ ريال، الدفتر ٣ ريالات ريال

١٠) يبين الجدول الآتي الأجرة الكلية لقارب مدة (ن) ساعة.

عدد الساعات (ن)	الأجرة الكلية (ج)
١	٤٥ ريالًا
٢	٧٠ ريالًا
٣	٩٥ ريالًا
٤	١٢٠ ريالًا

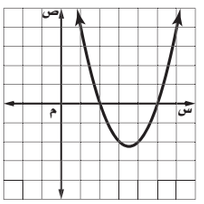
أ) اكتب دالة تمثّل هذا الموقف. ج(ن) = ٢٥ن + ٢٠

ب) ما أجرة القارب مدة ٧ ساعات؟ ١٩٥ ريالاً

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل:

١١) استعمل المعادلة وتمثيلها البياني للإجابة عن الأسئلة الآتية:



أ) حلّل العبارة $س^{٢} - ٧س + ١٠$ إلى عواملها الأولية. (س – ٢)(س – ٥)

ب) ما حلّ المعادلة: $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$؟ س = ٢، ٥

جـ) ماذا تلاحظ على التمثيل البياني للدالة التربيعية، وأين يقطع تمثيلها محور السينات؟ وما العلاقة بين هذه القيم وحل المعادلة $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$؟ فسّر إجابتك.
انظر الهامش

للمساعدة ..											
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
فراجع الدرس ..	١-٨	٢-٣	١-٦	٥-٦	٤-٨	٥-٢	٤-٨	١-٨	٤-٥	٦-٢	٣-٧

التقويم التكويني:

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتقويم مدى تقدم الطلاب.

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل ٩: حدد الأسئلة ص (١١٩) واجبًا منزليًّا لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

إجابات:

٩أ) ٥ن + ٣ب = ١٩,٥
٤ن + ٦ب = ٢١

١١جـ) إجابة ممكنة: الرسم يقطع محور (س) عند ٢، ٥، وهما حلا المعادلة.

الفصل ٩

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (١١٩)

	الدرس ٩-١ حصتان	الدرس ٩-٢ توسع حصة واحدة	الدرس ٩-٢ حصتان	الدرس ٩-٣ ٣ حصص	الدرس ٩-٤ حصتان
العنوان	تبسيط العبارات الجذرية	معمل الحاسبة البيانية الأسس النسبية	العمليات على العبارات الجذرية	المعادلات الجذرية	نظرية فيثاغورس
الأهداف	• استعمال خاصية ضرب الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية. • استعمال خاصية قسمة الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.	• استعمال الحاسبة البيانية؛ لاكتشاف معنى الأسس النسبية.	• جمع العبارات الجذرية وطرحها. • ضرب العبارات الجذرية.	• حل معادلات جذرية. • حل معادلات جذرية تتضمن حلولًا دخيلة.	• حل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس. • تحديد ما إذا كان المثلث المعطى قائم الزاوية أم لا.
المفردات	العبارة الجذرية إنطاق المقام المرافق			• المعادلات الجذرية • الحلول الدخيلة	• الوتر • الساق • المعكوس • ثلاثية فيثاغورس
التمثيلات المتعددة				ص (١٣٣)	
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٨) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٩) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢١) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٢) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٣) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٢) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٦) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٧) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٣) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢١) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٤) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	مدونة ص (١٢١)		السبورة التفاعلية ص (١٢٨)	مدونة ص (١٣٤)	الكاميرا الرقمية ص (١٣٧)
تنويع التعليم	ص (١٢٢، ١٢٤)		ص (١٢٧، ١٢٩)	ص (١٣٢، ١٣٤)	ص (١٣٦، ١٣٨)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

المعادلات الجذرية والمثلثات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(١٧) حصة	(٣) حصص	(٢٠) حصة

الدرس ٩-٥ حصتان	الدرس ٩-٦ حصتان	استكشاف ٩-٧ حصة واحدة	الدرس ٩-٧ حصتان
المسافة بين نقطتين	المثلثات المتشابهة	معمل الجبر: استقصاء النسب المثلثية	النسب المثلثية
• إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي • إيجاد نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى الإحداثي	• تحديد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا • إيجاد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين	• استعمال المثلثات المتشابهة لاستقصاء النسب المثلثية.	• إيجاد النسب المثلثية للزوايا • استعمال حساب المثلثات لحل المثلثات
• قانون المسافة بين نقطتين • نقطة المنتصف • قانون نقطة المنتصف	• المثلثات المتشابهة		حساب المثلثات النسب المثلثية الجيب جيب التمام الظل حل المثلث معكوس الجيب معكوس جيب التمام معكوس الظل
			ص (١٥٥)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٢) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٤) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢١) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٥) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٦) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٨) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢٩) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٦) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٣٠) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٣٢) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٣٣) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٧) دون ضمن فوق
مدونة ص (١٤٢)	السبورة التفاعلية ص (١٤٨)		السبورة التفاعلية ص (١٥٣)
ص (١٤١، ١٤٤)	ص (١٤٧، ١٤٩)		ص (١٥٢، ١٥٦)

التقويم الختامي
• اختبار الفصل ص (١٥٧)

الفصل ٩ التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل ٩**	
	التهيئة للفصل ٩ ، ص (١١٩)	مخطط المعالجة، ص (١١٨ جـ).
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تدريبات المهارات، الفصل ٩
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٩
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة ٤، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (٦٨،٦٩)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (٧٠)	تدريبات المهارات، الفصل ٩
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٩
		www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	اختبار الفصل، ص (١٥٧)	تدريبات المهارات، الفصل ٩
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٩
		www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل ٩**	
	اختبار الفصل، النماذج ١، ٢أ، ٢ب، ص (٧٢-٧٧)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ٩
	اختبار الفصل، النموذج ٣ ، ص (٧٨،٧٩)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (٧١)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (٨٠)	
	اختبار تراكمي ، ص (٨١-٨٣)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

الفصل ٩

تنويع التعليم

البديل ١ جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون السمعيون: ناقش طلابك في عناصر المثلث القائم الزاوية الذي يُستعمل في تعريف نسب الجيب وجيب التمام والظل، وحدّد معهم الضلع المقابل للزوايا الحادة والضلع المجاور لها.

المتعلمون البصريون والمكانيون: يمكن إخراج المربعات الكاملة من تحت إشارة الجذر، ووضعها على صورة جذر تربيعي، فمثلًا بما أن:

$\sqrt{٢٥} = ٥$، فإن $\sqrt{٥٠} = \sqrt{٢ \times ٢٥} = ٥\sqrt{٢}$

اقترح على الطلاب عمل لوحات ملوّنة للمربعات الكاملة من الصفر إلى ٤٠٠

البديل ٢ دون المتوسط دون

ارسم على السبورة عدة مثلثات قائمة بأوضاع مختلفة، ثم اطلب إلى الطلاب تسمية وتر المثلث القائم، والتأكد من صحة اختيارهم له.

الضلع الأطول في المثلث القائم هو الوتر دائمًا، ويقابل الزاوية القائمة.

البديل ٣ فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب حل كلٍّ من المعادلتين:

$\sqrt{٢س + ٩} - \sqrt{س + ١} = \sqrt{س + ٤}$ صفر

$\sqrt{١٧س - \sqrt{س^{٢} - ٥}} = ٧$ ٣

ثم تحقق من صحة الحل.

الفصل ٩

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل ٩

مواضيع ذات علاقة بما قبل الصف الثالث المتوسط

- تمثيل المربعات والجذور التربيعية باستعمال النماذج الهندسية.
- تقريب قيم الأعداد غير النسبية، كما تظهر في مسائل من واقع الحياة.
- استعمال خاصية التوزيع لتبسيط العبارات الجبرية.
- حل المعادلات التربيعية باستعمال الطريقة الجبرية.
- حل مسائل تتضمّن تغيّرًا نسبيًّا.

الفصل ٩

مواضيع ذات علاقة من الصف الثالث المتوسط

- جمع العبارات الجذرية وطرحها، وضربها، وتبسيطها.
- حل المعادلات الجذرية.
- استعمال نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين وقانون نقطة المنتصف، والنسب المثلثية لحل المسائل.
- تحديد إذا كان مثلثان متشابهين أم لا، وإيجاد العناصر المجهولة لأضلاع المثلثين المتشابهين.

ما بعد الفصل ٩

الإعداد للمرحلة الثانوية

- استعمال نظرية فيثاغورس.
- تحديد أنماط من المثلثات القائمة وتطبيقها؛ لحل مسائل ذات أهمية.
- استعمال صيغ الطول والميل ونقطة المنتصف.
- استعمال النسب لحل مسائل تتضمّن أشكالاً متشابهة.
- صياغة معادلات ومتباينات تعتمد على دوال الجذر التربيعي واستعمال طرق متنوعة لحلها. وتحليل الحلول حسب الموقف.

ملخص الدروس

٩-١ تبسيط العبارات الجذرية

تُسمّى العبارة التي تتضمّن جذرًا تربيعيًّا عبارة جذرية. وعندما لا يكون تحت الجذر التربيعي عوامل تشكّل مربعات كاملة عدا الواحد، يقال: إنه في أبسط صورة، ويمكن استعمال خصائص الجذر التربيعي الآتية لتبسيط العبارات الجذرية:

- خاصية ضرب الجذور التربيعية: الجذر التربيعي لحاصل ضرب عددين يساويان حاصل ضرب جذريهما، هذه الأعداد لأي عددين أكبر من أو تساوي صفرًا. فمثلاً:
$\sqrt{١٨} = \sqrt{٣ \times ٣ \times ٢} = \sqrt{٣^{٢}} \times \sqrt{٢}$ ، والمبدأ الأساسي للجذر التربيعي هو أنه لا يمكن أن يكون سالبًا. لذا يجب استعمال القيمة المطلقة للدلالة على أن بعض النتائج ليست سالبة. وكمثال ذلك $\sqrt{س^{٢}} = |س|$.
- خاصية قسمة الجذور التربيعية : الجذر التربيعي لناتج قسمة أي عدد أكبر من أو يساوي صفرًا على عدد أكبر من صفر. يساوي ناتج قسمة جذريهما التربيعين فمثلاً $\sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \frac{\sqrt{٢٥}}{\sqrt{٤}} = \frac{٥}{٢}$
- لا تكون العبارة في أبسط صورة، عند وجود عبارة جذرية في المقام. ولكتابة العبارة الجذرية في أبسط صورة، فإننا نحذف إشارة الجذر من المقام. وذلك بتحويل المقام إلى عدد نسبي، وبما أن تربيع الجذر التربيعي وإيجاده هما دالتان متعاكستان، لذا نضرب كلًّا من البسط والمقام في العبارة الجبرية نفسها، بحيث يصبح الجذر في المقام مربعًا كاملاً. فمثلاً: $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{١٥}}{٥}$
- إذا كان المقام عبارة تحتوي على جذر، فاضرب بمرافق الجذر لتحويل المقام إلى عدد نسبي فمثلاً. إذا كان المقام على الصورة $\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$ فاضرب كلًّا من البسط والمقامِ في $\sqrt{أ} - \sqrt{ب}$

٩-٢ العمليات على العبارات الجذرية

- نستعمل تجميع الحدود المتشابهة لجمع العبارات الجذرية وطرحها. ويجب أن يكون ما تحت الجذر نفسه للحدود التي يتم تجميعها.
- ضرب عبارتين جذريتين كل منهما يتكون من حدين، تشبه عملية ضرب ثنائيتي حد. وليس بالضرورة أن يكون ما تحت جذورها متشابهًا عند ضربها.

المعادلات الجذرية والمثلثات

٩-٣ المعادلات الجذرية

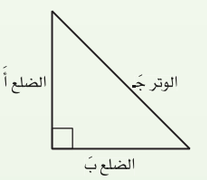
المعادلات التي تحتوي على جذور لمتغيرات تُسمّى المعادلات الجذرية، ولحل هذه المعادلات، نجعل الجذر في أحد طرفي المعادلة أولًا. ثم نربّع الطرفين، وبذلك نتخلّص من إشارة الجذر.

قد يؤدي تربيع الطرفين أحيانًا إلى حلول دخيلة، لا تُمثّل حلولًا للمعادلة الأصلية. تأكّد من ذلك بتعويض الحلول جميعها في المعادلة الأصلية للتحقّق من صحتها.

٩-٤ نظرية فيثاغورس

تنصُّ نظرية فيثاغورس على أن مربع الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين؛ أي أن:

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$، حيث (جـ) طول الوتر، و أ، ب طولا ساقي المثلث (ضلعي الزاوية القائمة) .



يمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد طول أي ضلع مجهول في المثلث القائم الزاوية، إذا عُلم طولا ضلعين فيه. وتُعرف أية ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تُحقّق هذه المعادلة بثلاثية فيثاغورس.

وتُمثّل الثلاثية دائمًا أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية، وهذا يعني أنه إذا لم تُحقّق ثلاثة أعداد موجبة نظرية فيثاغورس، فإن المثلث لن يكون قائم الزاوية بهذه الأطوال.

٩-٥ المسافة بين نقطتين

يعتمد قانون المسافة بين نقطتين على نظرية فيثاغورس، ويمكن استعماله لإيجاد المسافة "ف" بين نقطتي إحداثياتهما $(س_{١}، ص_{١})$، $(س_{٢}، ص_{٢})$، بحسب القانون:

$ف = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$ ، ولإيجاد إحداثيي نقطة المنتصف (م) لقطعة مستقيمة نهايتاها هما النقطتان $(س_{١}، ص_{١})$، $(س_{٢}، ص_{٢})$، نستعمل القانون: $م = \left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}\right)$.

٩-٦ المثلثات المتشابهة

المثلثات المتشابهة هي المثلثات التي لها الشكل نفسه، إلّا أنه ليس من الضروري أن تكون لأضلاعها الأطوال نفسها.

- جميع الزوايا المتناظرة لها القياس نفسه.
- جميع الأضلاع المتناظرة متناسبة.
- المثلثات المتشابهة التي تكون النسبة بين أضلاعها ١ إلى ١، لها الأطوال نفسها؛ أي متطابقة.

ولتحديد ما إذا كان المثلثان متشابهين، تأكّد من أن الزوايا المتناظرة لها القياس نفسه، وإذا لم تتمكن من تحديد قياسات الزوايا جميعها، فتحقّق من تناسب الأضلاع، ويمكن استعمال التناسب لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة للمثلثات المتشابهة. ولتحقيق ذلك، يجب أن يكون معلومًا طولا زوجين من الأضلاع المتناظرة على الأقل، وطول الضلع المناظر للضلع المجهول الطول.

ثم اكتب التناسب وحله لإيجاد الطول المجهول.

٩-٧ النسب المثلثية

حساب المثلثات هو دراسة العلاقات بين زوايا المثلثات القائمة الزاوية وأضلاعها. وتُسمّى النسب التي تقارن قياسات ضلعين في المثلث القائم نسبًا مثلثية. والنسب المثلثية الأكثر استعمالًا هي: الجيب، وجيب التمام، والظل.

ويمكن استعمال هذه النسب لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة، أو قياسات الزوايا المجهولة، إذا كان طولا ضلعين في المثلث القائم الزاوية، أو طول ضلع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين معلومًا، وهو ما يُسمّى حل المثلث.

مشروع الفصل

حركة المحيطات

يستعمل الطلاب ما تعلَّموه عن القياسات غير المباشرة، والنسب المثلثية، وتبسيط العبارات الجذرية لإيجاد ارتفاع موجات المحيطات وسرعتها.

- أخبر الطلاب أنه يمكن أن يصل ارتفاع موجة التسونامي من ١٢ بوصة إلى أكثر من ١٠٠ قدم، ثم اسأل الطلاب إذا كان لديهم أي فكرة عن كيفية وصول الارتفاع إلى ١٠٠ قدم. هل تعتقد أن ارتفاع سارية العلم يصل إلى ١٠٠ قدم؟ أوجد ارتفاع السارية.
- وزّع الطلاب مجموعات صغيرة، واطلب إلى كل مجموعة قياس طول أحد أفرادها بالبوصات وقياس طول ظل هذا الشخص، وطول ظل سارية العلم.
- اطلب إلى المجموعات كتابة تناسب يقارن طول الطالب وارتفاع سارية العلم (س) بأطوال ظلالهما. ما قيمة (س)؟
- أخبر المجموعات أن شخصًا يسبح على سطح الماء، على بعد ١٠٠ قدم من قاعدة موجة ارتفاعها يساوي ارتفاع سارية علم مدرستهم نفسه. ما قياس الزاوية إلى أقرب درجة، والتي يمكن لهذا الشخص أن يرى من خلالها قمة الموجة؟
- أخبر الطلاب أن السرعة (ع) لموجة المياة الضحلة تساوي $\sqrt{\frac{١٠ م}{٢ (ثانية)} \times ل}$

حيث (ل) عمق الماء بالأمتار. اطلب إلى الطلاب إيجاد سرعة الموجة والتي ارتفاعها يساوي طول زميلهم الذي أوجدوه، وذكّر المجموعات أن يضربوا في ٠,٣٠٤٨ للتحويل من أقدام إلى أمتار.

المفردات: قدم مفردات الفصل باستعمال النمط الآتي:

التعريف: المعادلة الجذرية هي معادلة تحتوي على متغيرات تحت الجذر.

مثال: $\sqrt{٢س} = ٥$ تمثل معادلة جذرية

اسأل: كيف نحل المعادلة الجذرية؟ نجعل الجذر في طرف من المعادلة، ثم نربّع كل طرف منها؛ للتخلُّص من الجذر، ونحل المعادلة.

المطويات منظم أفكار

غرضها: يكتب الطلاب أمثلة ويسجّلون ملاحظاتهم عن المعادلات الجذرية والمثلثات في مطوياتهم، في أثناء دراستهم لهذا الفصل.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو مُبيّن في تعليمات إعداد المطوية، وقبل أن يبدؤوا ذلك، اطلب إليهم تصفّح الفصل وتسجيل أية مسألة أو مشكلة يعتقدون أنها تُشكّل تحديًا لقدراتهم، وذلك في الصفحة المقابلة للمسائل المرتبطة بالدرس، وتأكّد من قدرتهم على إيجاد إجابات هذه المسائل بعد دراستهم لهذا الفصل.

وقت استعمالها: شجّع الطلاب على إضافة ملاحظاتهم إلى مطوياتهم في أثناء دراستهم الفصل، واستعمالها للمراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

فيما سبق

درستُ حل المعادلات التربيعية.

والآن

- أبسّط عبارات جذرية وأجمعها، وأطرحها، وأضربها.
- أحلّ معادلات جذرية.
- أستعمل نظرية فيثاغورس.
- أجد النسب المثلثية.

لماذا؟

المحيطات: يتكون التسونامي أو الموجات العالية من هزات أرضية تحت البحر. ويمكن استعمال معادلة جذرية لإيجاد سرعة التسونامي بالمتر لكل ثانية أو عمق المحيط بالأمتار.

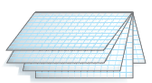
المطويات منظم أفكار

المعادلات الجذرية والمثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المعادلات الجذرية والمثلثات مبتدئًا بأربع أوراق مربعات.

١ **اطوِ** الأوراق من المنتصف عرضيًّا.

٢ **ثبّت** الأوراق معًا عند خط الطي.

٣ **سمّ** غلاف المطوية بعنوان الفصل، ثم اكتب كذلك عنوان كل درس في الفصل على كل صفحة من صفحاتها بدءًا من اليمين.



التهيئة للفصل ٩

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية:

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد الجذر التربيعي لكل ممّا يأتي، مقرّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

١) $\sqrt{٨٢}$ ٩,٠٦ ٢) $\sqrt{٢٦}$ ٥,١٠

٣) $\sqrt{١٥}$ ٣,٨٧ ٤) $\sqrt{٩٩}$ ٩,٩٥

٥) **صندوق الرمل:** إذا صنع إسحاق صندوقًا رمليًّا قاعدته مربعة الشكل مساحتها ١٠٠ قدم مربعة. فما طول ضلع قاعدة الصندوق؟ ١٠ أقدام

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٦) (٢١س + ١٥ص) – (٩س – ٤ص) ١٢س + ١٩ص

٧) ١٣س – ٥ص + ٢ص ١٣س – ٣ص

٨) (١٠أ – ٥ب) + (٦أ + ٥ب) ١٦أ

٩) ٦م + ٥ن + ٤ – ٣م – ٢ن + ٦ ٣م + ٣ن + ١٠

حُلّ كل معادلة فيما يأتي:

١٠) ٢س^{٢} – ٤س = صفر ٠، ٢

١١) ٢س^{٢} + ٧س – ٥ = –١ $-٤، \frac{١}{٢}$

١٢) **هندسة:** إذا كانت مساحة المستطيل المجاور ٩٠ سم^{٢}، فما قيمة س؟ ١٠ سم

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان الآتيتان تشكّلان تناسبًا، واكتب "نعم" أو "لا":

١٣) $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٤}{٩}$ لا ١٤) $\frac{٣}{٤}$، $\frac{١٥}{٢٠}$ نعم

١٥) **خرائط:** إذا مَثَّلت مسافة ١٠ كلم سنتمترًا واحدًا على الخريطة، فما المسافة بين مدينتين على الخريطة إن كانت المسافة بينهما ٥٠ كلم؟ ٥ سم

مراجعة سريعة

مثال ١

أوجد الجذر التربيعي للعدد ٥٠ مقرّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

$\sqrt{٥٠}$ = ٧,٠٧١٠٦٧٨١٢.... استعمل الحاسبة

و إلى أقرب جزء من مئة $\sqrt{٥٠}$ = ٧,٠٧ .

مثال ٢

بسّط العبارة: ٣ س + ٧ ص – ٤ س – ٨ص

٣س + ٧ص – ٤س – ٨ص

= (٣س – ٤س) + (٧ص – ٨ص) اجمع الحدود المتشابهة

= – س – ص بسّط

مثال ٣

حُلّ المعادلة: س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠

س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠ المعادلة الأصلية

(س – ٣) (س – ٢) = ٠ حلّل إلى العوامل

س – ٣ = ٠ أو س – ٢ = ٠ خاصية الضرب الصفري

س = ٣ س = ٢ حل كل معادلة

مثال ٤

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان $\frac{٢}{٣}$ وَ $\frac{٨}{١٢}$ تشكّلان تناسبًا أم لا.

$\frac{٢}{٣} \stackrel{؟}{=} \frac{٨}{١٢}$ اكتب المعادلة

٢(١٢) $\stackrel{؟}{=}$ ٣(٨) اضرب تبادليًّا

٢٤ = ٢٤ ✓ بسّط

لذا، فهما تشكّلان تناسبًا.

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com .

المعالجة

استعمل نتائج اختبار التهيئة ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، كما تساعدك العبارة «إذا ... فقم» في المخطط أدناه على تحديد المستوى المناسب، وتقترح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لايزيد على ٢٥٪ تقريبًا من التمارين.
فقم	بمراجعة الجذور التربيعية، والتناسب، وكذلك مراجعة الدروس ٦-٤ ، ٧-٤ من كتاب الطالب.
	وزيارة الموقع: www.obeikaneducation.com
المستوى ٢	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ من التمارين ،
فقم	بتحديد أخطائهم، وَضَعْ أنشطةً علاجيةً لذلك .
	وزيارة الموقع: www.obeikaneducation.com

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٩ - ١

إيجاد الجذور التربيعية.

الدرس ٩ - ١

استعمال خاصية ضرب الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.

استعمال خاصية قسمة الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.

ما بعد الدرس ٩ - ١

جمع العبارات الجذرية وضربها وطرحها.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- ما العبارة الجذرية في معادلة إيجاد السرعة المدارية للقمر الاصطناعي؟ $\sqrt{\frac{٤ \times ١٠^{١٤}}{\text{نق}}}$
- ماذا تعني إشارة الجذر في المعادلة؟ يجب أن تجد الجذر التربيعي للقيمة التي تقع تحت إشارة الجذر.
- بناءً على ما تعرفه عن ترتيب العمليات، متى يجب عليك أن تُبسّط العبارة الجذرية؟ يتم تبسيط العبارة الجذرية تحت إشارة الجذر، قبل إيجاد الجذر التربيعي.

تبسيط العبارات الجذرية

فيما سبق

درست إيجاد الجذور التربيعية.

والآن

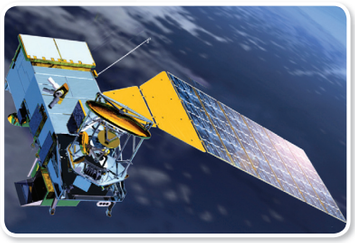
- أستعمل خاصية ضرب الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.
- أستعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.

المفردات

العبارة الجذرية
إنطاق المقام
المرافق

obeikaneducation.com

لماذا؟



تؤدي الأقمار الاصطناعية العديد من المهام، منها: دراسة الكون والتنبؤ بالطقس، والاتصالات بأنواعها، وتيسير الملاحة البحرية والجوية... إلى غير ذلك، حيث تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، يمكن حسابها بالعلاقة:

ع $= \sqrt{\frac{٤ \times ١٠^{١٤}}{\text{نق}}}$ حيث تمثل (ع) السرعة المدارية للقمر الاصطناعي بوحدة المتر/ ثانية، (نق) نصف قطر المدار (م) ويساوي بعد القمر عن مركز الأرض.

ويُذكر أن المملكة العربية السعودية أطلقت منظومة أقمار اصطناعية تجارية صغيرة يصل عددها إلى ٢٤ قمرًا منها (كمسات ١ ، ٢).

خاصية ضرب الجذور التربيعية: تتضمن **العبارة الجذرية** جذرًا، كالجذر التربيعي مثلاً، ويكون ما تحت الجذر التربيعي في أبسط صورة إذا حقَّق الشروط الآتية:

- لا يكون أيٌّ من عوامله مربعًا كاملاً عدا ١.
- لا يتضمن كسورًا.
- لا يظهر أي جذر في مقام الكسر.

ويمكنك استعمال الخاصية الآتية لتبسيط الجذور التربيعية.

مفهوم أساسي — خاصية ضرب الجذور التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الجذر التربيعي للمقدار أ ب لأي عددين حقيقيين غير سالبين أ ، ب، يساوي الجذر التربيعي للمقدار أ مضروبًا في الجذر التربيعي للمقدار ب.

الرموز: $\sqrt{\text{أ ب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}$ ، إذا كانت أ ≥ ٠ ، ب ≥ ٠

أمثلة: $\sqrt{٤ \times ٩} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٩} = ٢ \times ٣ = ٦$

مثال ١ — تبسيط الجذور التربيعية

بسّط العبارة: $\sqrt{٨٠}$.

$\sqrt{٨٠} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٥}$ — حلّل ٨٠ إلى عوامله الأولية

$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٥}$ — خاصية ضرب الجذور

$= ٢ \times ٢ \times \sqrt{٥} = ٤\sqrt{٥}$ — بسّط

تحقق من فهمك

أ) $\sqrt{٥٤}$ $٣\sqrt{٦}$

ب) $\sqrt{١٨٠}$ $٦\sqrt{٥}$

مصادر الدرس ٩- ١

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٢٢)	• تنويع التعليم ص (١٢٢)	• تنويع التعليم ص (١٢٤)
كتاب التمارين	ص (٢١)	ص (٢١)	ص (٢١)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) • تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨) • التدريبات الإثرائية، ص (٩)

مثال ٢ ضرب الجذور التربيعية

بسّط العبارة: $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٤}$

$\sqrt{٢} \times \sqrt{١٤} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٧}$ خاصية ضرب الجذور

$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٧} = ٢\sqrt{٧}$ خاصية ضرب الجذور

تحقق من فهمك

٢أ) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠}$ $٥\sqrt{٢}$ **٢ب)** $\sqrt{٦} \times \sqrt{٨}$ $٤\sqrt{٣}$

عند النظر إلى العبارة $\sqrt{س^{٢}}$ قد يبدو لك أن $س = \sqrt{س^{٢}}$، لذا عند إيجادك الجذر التربيعي الرئيس لعبارة تحتوي متغيرات، عليك التأكد من أن النتيجة ليست سالبة. فمثلاً، افرض أن $س = -٣$.

$\sqrt{س^{٢}} \stackrel{؟}{=} س$

$\sqrt{(-٣)^{٢}} \stackrel{؟}{=} -٣$ عوّض عن س بـ(−٣)

$\sqrt{٩} \stackrel{؟}{=} -٣$ $(-٣)^{٢} = ٩$

$٣ \neq -٣$ $\sqrt{٩} = ٣$

عند تبسيط العبارات الجذرية، إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغير ذا أس زوجي، وناتج تبسيطه ذا أس فردي، يجب استعمال القيمة المطلقة والأمثلة التالية توضح ذلك.

$\sqrt{س^{٢}} = |س|$ $\sqrt{س^{٣}} = |س| \sqrt{س}$ $\sqrt{س^{٤}} = س^{٢}$ $\sqrt{س^{٦}} = |س^{٣}|$

مثال ٣ تبسيط الجذر التربيعي لمتغيرات

بسّط العبارة: $\sqrt{٩٠ س^{٣} ص^{٤} ك^{٥}}$.

$\sqrt{٩٠ س^{٣} ص^{٤} ك^{٥}} = \sqrt{٢ \times ٣^{٢} \times ٥ \times س^{٣} \times ص^{٤} \times ك^{٥}}$ حلّل إلى العوامل الأولية

$= \sqrt{٢} \times \sqrt{٣^{٢}} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{س^{٢}} \times \sqrt{س} \times \sqrt{ص^{٤}} \times \sqrt{ك^{٤}} \times \sqrt{ك}$ خاصية ضرب الجذور

$= \sqrt{٢} \times ٣ \times \sqrt{٥} \times |س| \times \sqrt{س} \times ص^{٢} \times ك^{٢} \times \sqrt{ك}$ بسّط

$= ٣ ص^{٢} ك^{٢} |س| \sqrt{١٠ س ك}$ بسّط

تحقق من فهمك

٣أ) $\sqrt{٣٢ ر^{٢} ك^{٤} ت^{٥}}$ $٤ |ر| ك^{٢} ت^{٢} \sqrt{٢ ت}$ **٣ب)** $\sqrt{٥٦ س ص^{١٠} ك^{٥}}$ $٢ |ص^{٥}| ك^{٢} \sqrt{١٤ س ك}$

خاصية قسمة الجذور التربيعية: يمكنك استعمال خاصية قسمة الجذور التربيعية عند قسمة الجذور التربيعية وتبسيط العبارات الجذرية.

مفهوم أساسي خاصية قسمة الجذور التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين أ، ب، حيث أ ≥ صفر، ب > ٠، الجذر التربيعي للمقدار $\frac{أ}{ب}$ يساوي الجذر التربيعي للبسط أ مقسومًا على الجذر التربيعي للمقام ب.

الرموز: $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

قراءة الرياضيات

الكسور تحت الجذر

تُقرأ العبارة $\sqrt{\frac{أ}{ب}}$ على صورة الجذر التربيعي لِـ أ على ب، أو الجذر التربيعي للمقدار "أ على ب".

خاصية ضرب الجذور التربيعية

المثال ١ يُبيّن طريقة تبسيط عبارة جذرية، لا يكون ما تحت الجذر فيها مربعًا كاملًا.

المثال ٢ يُبيّن طريقة ضرب الجذور التربيعية.

المثال ٣ يُبيّن طريقة تبسيط جذر تربيعي يتضمّن متغيّرات.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١ $\sqrt{٥٢}$ $١٣\sqrt{٢}$

٢ $\sqrt{٢} \sqrt{٢٤}$ $٣\sqrt{٤}$

٣ $\sqrt{٤٥ أ^{٤} ب^{٥} جـ^{٦}}$ $٣أ^{٢} ب^{٢} |جـ^{٣}| \sqrt{٥ب}$

المحتوى الرياضي

خاصية ضرب الجذور التربيعية: يمكن استعمال خاصية الضرب لتبسيط العبارات الجذرية. وحاصل ضرب جذور أعداد غير سالبة يساوي الجذر التربيعي لحاصل ضرب هذه الأعداد.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة: في مدوّنة صفّك المحمية، اطلب إلى بعض الطلاب توضيح طريقة تبسيطهم العبارات الجذرية. ثم اطلب إلى طلاب آخرين توضيح طريقة تبسيط حاصل ضرب الجذور وقسمتها، ثم اعرض ذلك على الصفحة الإلكترونية المحمية للصف؛ ليكون مرجعًا إضافيًا عندما يوافق عليه الجميع.

إرشادات للمعلم الجديد

المعالجة: عند تبسيط الجذور التربيعية باستعمال خاصية ضرب الجذور التربيعية، يحتاج الطلاب إلى القدرة على تحليل ما تحت الجذر إلى العوامل الأولية؛ لذا أتِحْ لهم الوقت لمراجعة إيجاد العوامل الأولية؛ حتى يستطيع الطلاب التركيز على تعلّم المفاهيم الجديدة أكثر من محاولة تذكّر مواد سابقة.

خاصية قسمة الجذور التربيعية

المثال ٤ يُبيّن طريقة إنطاق المقام في عبارة جذرية، وذلك لحذف الجذور في المقام.

المثال ٥ يُبيِّن طريقة استعمال المرافق في إنطاق المقام لعبارة جذرية.

المحتوى الرياضي

خاصية قسمة الجذور التربيعية:
يمكن استعمال خاصية القسمة في تبسيط العبارات الجذرية، وجذر ناتج قسمة عدد غير سالب على عدد موجب، يساوي ناتج قسمة الجذر التربيعي الأساسي لهذين العددين.

مثالان إضافيان

٤ **تدريب على اختبار:**
أيُّ العبارات الآتية تكافئ $\frac{\sqrt{٣}\,ن}{\sqrt{٨}}$ ؟ د

أ) $\frac{\sqrt{٣}\,ن}{٨}$

ب) $\frac{\sqrt{٣}\,ن}{٤}$

جـ) $\frac{\sqrt{٦}\,ن}{٢}$

د) $\frac{\sqrt{٦}\,ن}{٤}$

٥ بسّط العبارة:
$\frac{٢}{\sqrt{٥}-٤}\left(\frac{\sqrt{٥}٢+٨}{١١}\right)$

يمكنك استعمال خصائص الجذر التربيعي **لإنطاق المقام** وكتابته على صورة عدد نسبي إذا كان جذرًا، وهذا يتضمن ضرب كل من البسط والمقام في عامل يؤدي إلى حذف الجذر من المقام.

إرشادات للاختبار

تبسيط:
انظر أولاً إلى ما تحت الجذر إن كان يمكن تبسيطه؛ لأن ذلك يجعل حساباتك أبسط.

مثال ٤ من اختبار

بسّط العبارة $\sqrt{\frac{٣٥}{١٥}}$.

أ) $\frac{\sqrt{٢١}}{١٥}$ ب) $\frac{\sqrt{٢١}}{٣}$ جـ) $\frac{\sqrt{٥٢٥}}{١٥}$ د) $\frac{\sqrt{٣٥}}{١٥}$

اقرأ الفقرة:
يجب تبسيط العبارة الجذرية.

حل الفقرة:

$\sqrt{\frac{٣٥}{١٥}} = \frac{\sqrt{٣٥}}{\sqrt{١٥}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{٣٥}}{\sqrt{١٥}} \times \frac{\sqrt{١٥}}{\sqrt{١٥}}$ اضرب في $\frac{\sqrt{١٥}}{\sqrt{١٥}}$

$= \frac{\sqrt{٥٢٥}}{١٥}$ خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt{٧\times٥\times٥\times٣}}{١٥}$ حلّل إلى العوامل الأولية

$= \frac{\sqrt{٢١}\,٥}{١٥} = \frac{\sqrt{٢١}}{٣}$ البديل الصحيح هو ب

تحقق من فهمك
٤) بسّط العبارة: $\frac{\sqrt{٦}\,ص}{\sqrt{١٢}}$ $\frac{\sqrt{٢}\,ص}{٢}$

كلٌّ من ثنائيتي الحد أ $\sqrt{ب}$ + جـ $\sqrt{د}$، أ $\sqrt{ب}$ − جـ $\sqrt{د}$ تُسمى **مرافقة** للأخرى حيث أ، ب، جـ، د أعدادٌ نسبية، فعلى سبيل المثال ٢ + $\sqrt{٧}$ وَ ٢ − $\sqrt{٧}$ مترافقتان. حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد نسبي، ويمكن إيجاده باستعمال الفرق بين مربعين.

مثال ٥ استعمال المرافق في إنطاق المقام

بسّط العبارة: $\frac{٣}{\sqrt{٢}+٥}$.

$\frac{٣}{\sqrt{٢}+٥} = \frac{٣}{\sqrt{٢}+٥} \times \frac{\sqrt{٢}-٥}{\sqrt{٢}-٥}$ مرافق ٥ + $\sqrt{٢}$ هو ٥ − $\sqrt{٢}$

$= \frac{٣(\sqrt{٢}-٥)}{(\sqrt{٢})^{٢}-٥^{٢}}$ (أ−ب) (أ+ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

$= \frac{١٥-٣\sqrt{٢}}{٢-٢٥} = \frac{١٥-٣\sqrt{٢}}{٢٣}$ $(\sqrt{٢})^{٢} = ٢$

تحقق من فهمك
٥أ) $\frac{٣}{\sqrt{٢}+٢}$ $\frac{٦-٣\sqrt{٢}}{٢}$ ٥ب) $\frac{٧}{\sqrt{٧}-٣}$ $\frac{٢١+٧\sqrt{٧}}{٢}$

تنويع التعليم:

دون ضمن

إذا احتاج بعض الطلاب المزيد من التدريب على المرافق،

فقم واطلب إليهم استعمال حاسباتهم؛ ليبيّنوا أن استعمال الضرب بالمرافق ينتج عبارات متكافئة.

اطلب إلى الطلاب أن يتحقّقوا من تكافؤ العبارات في المثال٥:

$\frac{٣}{\sqrt{٢}+٥}$، $\frac{٣(\sqrt{٢}-٥)}{(\sqrt{٢}+٥)(\sqrt{٢}-٥)}$، $\frac{١٥-٣\sqrt{٢}}{٢٣}$

وأن قيمة كل عبارة منها تساوي ٠,٤٦٧٧ تقريبًا.

تأكد

الأمثلة ١-٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٧) $٢س^{٢}|ص^{٣}|\sqrt{١٥ص}$

٨) $٢|ام|اب|ر^{٢}|\sqrt{٢٢م ر}$

٩) $٣ب^{٢}|اجـ|\sqrt{١١أب}$

١) $\sqrt{٢٤}\times\sqrt{٦}\times٢$

٢) $\sqrt{١٦}\times٣$ ١٢

٣) $\sqrt{٢٥}\times٢$ ١٠

٤) $\sqrt{١٠}\times\sqrt{١٤}\times\sqrt{٣٥}\times٢$

٥) $\sqrt{٦}\times٣$ $\sqrt{١٨}\times٣$

٦) $\sqrt{١٠}\times٣$ $\sqrt{١٠}\times٤$ ١٢٠

٧) $\sqrt{٦٠س^{٤}ص^{٧}}$

٨) $\sqrt{٨٨م^{٣}ب^{٢}ر^{٥}}$

٩) $\sqrt{٩٩أب^{٥}جـ^{٢}}$

مثال ٤

١٠) **اختيار من متعدد:** بسّط العبارة $\sqrt{\frac{٤٥}{١٠}}$. د

أ) $\frac{\sqrt{٢٥}}{١٠}$ ب) $\frac{\sqrt{٤٥٠}}{١٠}$ جـ) $\frac{\sqrt{٥٠}}{١٠}$ د) $\frac{\sqrt{٣}\times٢}{٢}$

مثال ٥

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١١) $\frac{٣}{\sqrt{٥}+٣}$ $\frac{\sqrt{٥}٣-٩}{٤}$

١٢) $\frac{٥}{\sqrt{٦}-٢}$ $\frac{\sqrt{٦}٥+١٠}{-٢}$

١٣) $\frac{٢}{\sqrt{١٠}-١}$ $\frac{\sqrt{١٠}٢+٢}{-٩}$

١٤) $\frac{١}{\sqrt{١٢}+٤}$ $\frac{\sqrt{٣}٢-}{٢}$

١٥) $\frac{٤}{\sqrt{٧}-٦}$ $\frac{\sqrt{٧}٤+٢٤}{٢٩}$

١٦) $\frac{٦}{\sqrt{١١}+٥}$ $\frac{\sqrt{١١}٣-١٥}{٧}$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٢٨) $٢|أ^{٢}|اب|\sqrt{٧ب}$

٢٩) $\sqrt{٧٥ك ر^{٣}}\times٥|ار|\sqrt{٣ك ر}$

٣٠) $٤|اجـ|هـ^{٢}|\sqrt{٦٦}$

٣١) $٢|أ^{٣}||ب|\sqrt{٥ب}$

١٧) $\sqrt{٥٢}\times\sqrt{١٣}\times٢$

١٨) $\sqrt{٥٦}\times٢$ $\sqrt{١٤}$

١٩) $\sqrt{٧٢}\times٢$ $\sqrt{٦}$

٢٠) $\sqrt{١٨}\times٣$ $\sqrt{٩}\times٢$

٢١) $\sqrt{٢٤٣}\times٣$ $\sqrt{٩}$

٢٢) $\sqrt{٢٤٥}\times٧$ $\sqrt{٥}$

٢٣) $\sqrt{٥}\times\sqrt{١٥}\times\sqrt{٣٥}$

٢٤) $\sqrt{٨}\times٣$ $\sqrt{٧}\times٢$ $\sqrt{١٤}\times١٢$

٢٥) $\sqrt{٨}\times٥$ $\sqrt{٢}\times٤$ ٨٠

٢٦) $\sqrt{٢٥ت^{٢}}\times٣$ $\sqrt{١٥}$ |ت|

٢٧) $\sqrt{٨١ك^{٥}}\times٥$ $\sqrt{٤٥ك^{٢}}$ ك

٢٨) $\sqrt{٢٨أ^{٢}ب^{٣}}$

٣٠) $\sqrt{٦٦جـ^{٢}هـ^{٤}}\times٤$

٣١) $\sqrt{٢أب^{٢}}\times\sqrt{١٠أ^{٥}ب}$

٣٢) **مكافحة حرائق:** تمثل سرعة الماء (ع) الذي يُضَخ لمكافحة الحرائق بالمعادلة ع = $\sqrt{٢}$ ف جـ، حيث (ف) أقصى ارتفاع للماء، (جـ) تسارع الجاذبية الأرضية (٣٢ قدمًا/ ث^{٢}).

أ) حُلّ المعادلة بالنسبة لـ ف. ف = $\frac{ع^{٢}}{٢جـ}$

ب) إذا احتاجت إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع ٨٠ قدمًا، فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة ٧٠ قدمًا/ ث؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش.

جـ) تريد إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة تضخ الماء إلى ارتفاع ٩٠ قدمًا. فهل المضخة التي تضخ الماء بسرعة ٧٧ قدمًا/ ث تحقق حاجة الإدارة؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش.

الربط مع الحياة

صدر الأمر الملكي في عام ١٣٤٦هـ بإنشاء أول فرقة إطفاء في المملكة في مكة المكرمة ضمن جهاز البلدية، وفي عام ١٣٨٥هـ عُدّل مُسمّى المديرية العامة للإطفاء إلى المديرية العامة للدفاع المدني.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: قد يعتقد بعض الطلاب أن الكسر الذي يتضمّن جذرًا، لا يكون أبسط من الكسر الأصلي المتضمن جذرًا؛ لذا بيّن لهم أن الكسر الذي يتضمّن جذرًا، يكون في أبسط صورة إذا حقّق الشروط الثلاثة لتبسيط العبارة الجذرية.

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ١٦؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

٣٢ب) لا، إجابة ممكنة: المضخة المعلن عنها، ستضخ ماءً إلى ارتفاعٍ أقصاه ٧٦,٦ قدمًا تقريبًا.

٣٢جـ) نعم، إجابة ممكنة: المضخة المعلن عنها، ستضخ ماءً إلى ارتفاع أقصاه ٩٢,٦ قدمًا تقريبًا.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٧ – ٣٨، ٤٢، ٤٤–٥٢
ضمن ضمن المتوسط	١٧ – ٢١ (فردي)، ٢٤–٢٨ (زوجي)، ٣١–٣٥ (فردي)، ٣٦، ٣٩–٤٢، ٤٤–٥٢
فوق فوق المتوسط	٣٩–٥٢

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا عبارات جذرية تتطلّب استعمال المرافق لإنطاق المقام في كلٍّ منها، ثم اطلب إليهم تبسيطها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (٩-١) بإعطائهم:

الاختبار القصير (١)، ص (٦٨)

المثالان ٤، ٥ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٣٣) $\sqrt{\frac{٣٢}{ت^{٤}}}$ $\frac{\sqrt{٤}}{ت^{٢}}$

٣٤) $\sqrt{\frac{٢٧}{م^{٥}}}$ $\frac{\sqrt{٣م}}{|م^{٣}|}$

٣٥) $\frac{\sqrt{٦٨أ جـ^{٣}}}{\sqrt{٢٧أ^{٢}}}$ $\frac{٢|جـ|\sqrt{٥١أ جـ}}{|أ|٩}$

٣٦) $\sqrt{\frac{٣}{١٦}} \times \frac{٩}{٥}$ $\frac{\sqrt{١٥}٣}{٢٠}$

٣٧) $\frac{٩}{\sqrt{٨}-٦}$ $\frac{٢\sqrt{٩}+٢٧}{١٤}$

٣٨) $\frac{٥\sqrt{٢}}{٣\sqrt{٣}+\sqrt{٧}٢}$ $٤\sqrt{١٥}٦ - ٣٥$

٣٩) **طاقة حركية:** يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة: ع $= \sqrt{\frac{٢ق}{ك}}$، حيث (ق) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (ك) كتلة الكرة.

أ) بسّط المعادلة معتبرًا كتلة الكرة ٣ كيلو جرامات. ع $= \frac{\sqrt{٦ق}}{٣}$

ب) إذا كانت سرعة الكرة ٧ أمتار/ ثانية، فما قيمة الطاقة الحركية للكرة بالجول؟ ٧٣,٥ جول

٤٠) **قفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي (ن) بالثواني اللازم لسقوط جسم من ارتفاع (ل) بالأقدام يُعطى بالمعادلة: ن $= \sqrt{\frac{ل}{١٦}}$ ، فما الارتفاع الذي سقط منه مظلّيٌّ إذا كان الزمن قبل فتح المظلة كما هو موضّح بالجدول الآتي:

زمن السقوط	٤	٥	٦	٧
الارتفاع	٢٥٦	٤٠٠	٥٧٦	٧٨٤

٤١، ٤٢) انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

٤١) **تبرير:** وضّح كيف تحل (٣ س − ٢)^{٢} = (٢س + ٦)^{٢}.

٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائيتي حد على الصورة أ $\sqrt{ب}$ + جـ $\sqrt{ف}$ ، أ $\sqrt{ب}$ − جـ $\sqrt{ف}$ ثم أوجد ناتج ضربهما.

٤٣) **تحد:** استعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية لتشتق القانون العام لحل المعادلة التربيعية من خلال حل المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ (ابدأ بإكمال المربع). انظر ملحق الإجابات

٤٤) **اكتب:** ملخصًا تبين فيه كيف تكتب عبارة جذرية في أبسط صورة. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٤٥) **إجابة قصيرة:** دفع أحمد قيمة فاتورة الكهرباء أقلّ بِـ ٢٣ ريالاً مما دفع خالد. وكان مجموع قيمة الفاتورتين ١٠٩ ريالات. اكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد قيمة فاتورة خالد. ٢ جـ − ٢٣ = ١٠٩

٤٦) أيّ العبارات الآتية تكافئ $\sqrt{١٦٠س^{٢}ص^{٥}}$؟ جـ

أ) ١٦|س|ص^{٢} $\sqrt{١٠ص}$ جـ) ٤|س|ص^{٢} $\sqrt{١٠ص}$

ب) |س|ص^{٢} $\sqrt{١٦٠ص}$ د) ١٠|س|ص^{٢} $\sqrt{٤ص}$

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر: (الدرس ٨-٤)

٤٧) ر^{٢} + ٢٥ = ٠ ∅

٤٨) ٤و^{٢} + ١٠٠ = ٤٠و ٥

٤٩) ١١س^{٢} − س = ٣ −٠,٦، ٠,٥

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب أولية: (الدرس ٧-٥)

٥٠) ٤ − ٩أ^{٢} (٢ − ٣أ)(٢ + ٣أ)

٥١) ٤ت^{٢} − ٢٧ أولية

٥٢) س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٢٧ (س + ٣)(س − ٣)(س − ٣)

إجابات:

٤١) إجابة ممكنة: أولًا خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين، ثم بسّط لتجد أن س $= -\frac{٤}{٥}$ وَ ٨.

٤٢) إجابة ممكنة:

(٤$\sqrt{٥}$ + ٢$\sqrt{٣}$) (٢$\sqrt{٣}$ − ٤$\sqrt{٥}$)

= ١٦ × ٥ − ٣ × ٤

= ٨٠ − ١٢ = ٦٨

٤٤) لا تحتوي العبارات الجذرية في أبسط صورة على جذور في مقام الكسر؛ لذا أنطق المقام لحذف الجذر من المقام، ثم تحقق ممَّا إذا كان أيٌّ من العوامل تحت الجذر مربعًا كاملًا، وإذا وجد فبسِّطه.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: ذكّر الطلاب بأننا نتراجع عن عملية تربيع عدد، بأخذ الجذر التربيعي للناتج.

اكتب: ٣^{٢} = ٩، $\sqrt{٩}$ = ٣ على السبورة. وتحدَّ الطلاب في أن يحدّدوا ما إذا كانت كتابة الجذر التربيعي في صورة أسيَّةٍ ممكنًا.

في توسّع ٩ − ١، سيتعلّم الطلاب، أن الجذور التربيعية يمكن كتابتها باستعمال الأس $\frac{١}{٢}$، وعليه فإن ٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ٣

درست خصائص الأسس للأعداد الكلية إلا أن بعض الأسس قد تكون أعدادًا نسبية أو كسورًا. ويمكنك في هذا النشاط استعمال الحاسبة لاستكشاف معنى الأسس النسبية.

نشاط الأسس النسبية

الخطوة ١: احسب قيمة $١٦^{\frac{١}{٢}}$ ثم $\sqrt{١٦}$.

اضغط المفاتيح: (2 ÷ 1) enter 16 ^

اضغط المفاتيح: 16 x^2 ctrl enter

سجِّل النتائج في الجدول المجاور.

الخطوة ٢: استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل عبارة، ثم سجِّل النتائج في جدولك.

لإيجاد الجذور الأخرى غير الجذر التربيعي، اختر دالة $\sqrt[n]{\ }$ بالضغط على المفاتيح ctrl ^ .

العبارة	القيمة	العبارة	القيمة
$١٦^{\frac{١}{٢}}$	٤	$\sqrt{١٦}$	٤
$٢٥^{\frac{١}{٢}}$	٥	$\sqrt{٢٥}$	٥
$٦٤^{\frac{١}{٣}}$	٤	$\sqrt[٣]{٦٤}$	٤
$١٢٥^{\frac{١}{٣}}$	٥	$\sqrt[٣]{١٢٥}$	٥
$٦٤^{\frac{٢}{٣}}$	١٦	$\sqrt[٣]{٦٤^{٢}}$	١٦
$٨١^{\frac{٣}{٤}}$	٢٧	$\sqrt[٤]{٨١^{٣}}$	٢٧

أ) ما الذي تلاحظه في أثناء دراستك الجدول حول قيمة العبارة التي على الصورة $أ^{\frac{١}{ن}}$ ؟ تساوي $\sqrt[ن]{أ}$

ب) ما الذي تلاحظه حول قيمة العبارة التي على الصورة $أ^{\frac{م}{ن}}$ ؟ تساوي $\sqrt[ن]{أ^{م}}$

تمارين

١) تذكّر خاصية قوة القوة لأي عدد حقيقي أ، وأي عددين صحيحين م، ن. $(أ^{م})^{ن} = (أ^{م})^{ن}$.

افترض أن الأسس الكسرية تعامل معاملة أسس الأعداد الكلية، وأوجد قيمة $(ب^{\frac{١}{٢}})^{٢}$.

$(ب^{\frac{١}{٢}})^{٢} = ب^{\frac{١}{٢}\times٢}$ خاصية قوة القوة

$= ب^{١} = ب$ بسّط

لذا، فإن $ب^{\frac{١}{٢}}$ هو عدد مربعه يساوي ب؛ لذا فمن الممكن تعريف $ب^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{ب}$. استعمل طريقة مشابهة لتعريف $ب^{\frac{١}{ن}}$.

٢) عرّف $ب^{\frac{م}{ن}}$. برّر إجابتك. ١ – ٢ انظر ملحق الإجابات

اكتب كل جذر فيما يأتي على صورة عبارة أسية باستعمال الأسس الكسرية، ثم أوجد قيمتها:

٣) $\sqrt{٣٦}$ $٣٦^{\frac{١}{٢}}$؛ ٦

٤) $\sqrt{١٢١}$ $١٢١^{\frac{١}{٢}}$؛ ١١

٥) $\sqrt[٤]{٢٥٦}$ $٢٥٦^{\frac{١}{٤}}$؛ ٤

٦) $\sqrt[٥]{٣٢}$ $٣٢^{\frac{١}{٥}}$؛ ٢

٧) $\sqrt{٨^{٢}}$ $٨^{\frac{٢}{٣}}$؛ ٤

٨) $\sqrt[٤]{١٢٩٦}$ $١٢٩٦^{\frac{١}{٤}}$؛ ٦

٩) $\sqrt[٤]{١٦^{٣}}$ $١٦^{\frac{٣}{٤}}$؛ ٨

١٠) $\sqrt{٨^{٣}}$ $٨^{\frac{٣}{٣}}$؛ ٨

١ التركيز

الهدف: استعمال الحاسبة البيانية لاستكشاف معنى الأسس النسبية.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية .

إرشادات للدراسة

اعرض على الطلاب المفاتيح التي يحتاجون إليها؛ لإيجاد قيمة $١٦^{\frac{١}{٢}}$، $\sqrt{١٦}$ على الحاسبة، وبيّن لهم أن الحاسبة فيها مفتاح للجذر التكعيبي. ولإيجاد الجذور الأخرى الجذور التربيعية والتكعيبية، اطلب إلى الطلاب اختيار المفتاح الذي عليه إشارة $\sqrt[n]{\ }$ بضغط ctrl ^ .

٢ التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، واطلب إليهم تنفيذ النشاط وحل السؤالين ١، ٢

- تأكّد من أن الطلاب يستعملون المفاتيح المناسبة لكتابة الصورة الصحيحة للأسس.
- قد ترغب في مراجعة الخاصية $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$ لحل السؤال ٢

التدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة ٣– ١٠

من المحسوس إلى المجرد

يتطلّب السؤال٢، أن يكون الطلاب قادرين على توضيح أن $ب^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{ب^{م}}$ ، بيّن لهم أن

$ب^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{ب^{م}} = (\sqrt[ن]{ب})^{م}$.

ووضِّح للطلاب أنه من الأبسط إيجاد قيمة $\sqrt[ن]{ب}$ أولًا، ثم رفع $\sqrt[ن]{ب}$ إلى القوة (م).

٣ التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤالين ٤، ٥؛ لتقويم ما إذا كان باستطاعة الطلاب كتابة الجذور باستعمال الأسس النسبية أم لا.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٩ - ١

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٦) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٩-١ تدريبات إعادة التعليم
تبسيط العبارات الجذرية

خاصية ضرب الجذور التربيعية: يمكنك استعمال خاصية ضرب الجذور التربيعية والتحليل إلى العوامل الأولية لتبسيط الجذور التربيعية. ويجب استعمال القيمة المطلقة عند تبسيط العبارات الجذرية بمتغيرات إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغيرًا ذا أس زوجي ونتائج تبسيطه ذا أس فردي؛ للتأكد من أنّ النتيجة غير سالبة.

خاصية ضرب الجذور التربيعية	$\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ ب}$، إذا كانت أ ≥ ٠، ب ≥ ٠

مثال ١ بسّط العبارة: $\sqrt{١٨٠}$

$\sqrt{١٨٠} = \sqrt{٢ \times ٣ \times ٣ \times ٥ \times ٢}$ حلل ١٨٠ إلى عوامله الأولية

$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٣^{٢}} \times \sqrt{٥}$ خاصية ضرب الجذور

$= ٢ \times ٣ \times \sqrt{٥}$ بسّط

$= ٦\sqrt{٥}$ بسّط

مثال ٢ بسّط العبارة: $\sqrt{١٢٠ أ^{٢} ب^{٣} جـ^{٤}}$

$\sqrt{١٢٠ أ^{٢} ب^{٣} جـ^{٤}} = \sqrt{٢^{٢} \times ٣ \times ٥ \times أ^{٢} \times ب^{٢} \times ب \times جـ^{٤}}$

$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{أ^{٢}} \times \sqrt{ب^{٢}} \times \sqrt{ب} \times \sqrt{جـ^{٤}}$

$= ٢ \times |أ| \times ب \times جـ^{٢} \sqrt{٣٠ب}$

تمارين

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $\sqrt{٢٨}$ ٢) $\sqrt{٦٨}$ ٣) $\sqrt{٦٠٠}$ ٤) $\sqrt{٧٥}$

٥) $\sqrt{١٦٢}$ ٦) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٦}$ ٧) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٥}$ ٨) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠}$

٩) $\sqrt{٩}$ ١٠) $\sqrt{٩ س^{٤}}$ ١١) $\sqrt{٣٠٠ أ^{٤}}$ ١٢) $\sqrt{١٢٨ جـ^{٤}}$

١٣) $\sqrt{١٠} \times \sqrt{٦}$ ١٤) $\sqrt{٣ س^{٢}} \times \sqrt{٣ س^{٣}}$ ١٥) $\sqrt{١٢٠ أ^{٣} ب^{٤}}$ ١٦) $\sqrt{١٠٠ س^{٢} ص^{٤}}$

١٧) $\sqrt{٢٤ أ^{٢} ب^{٤}}$ ١٨) $\sqrt{٨١ س^{٤} ص^{٤}}$ ١٩) $\sqrt{١٥٠ ب^{٢} جـ^{٤}}$ ٢٠) $\sqrt{٧٢ أ^{٢} ب^{٢} جـ^{٤}}$

٢١) $\sqrt{٤٥ س^{٢} ص^{٢} ع^{٢}}$ ٢٢) $\sqrt{٩٨ س^{٢} ص^{٢} ع^{٢}}$

تدريبات حل المسألة (٨) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-١ تدريبات حل المسألة
تبسيط العبارات الجذرية

١) **رياضة:** حسبت ياسمين ارتفاع عارضة مرمى كرة القدم فوجدته يساوي $\frac{١٥}{\sqrt{٣}}$ قدم. بسّط هذه العبارة.
$٣\sqrt{٥}$

٢) **تسونامي:** سببت هزة أرضية تحت المحيط الهندي عام ٢٠٠٤ تسونامي مدمّرًا. ويستطيع العلماء حساب السرعة النظرية س (قدم/ ث) لتسونامي في ماء عمقه ع (بالأقدام) بالمعادلة $س = \sqrt{٣٢ ع}$. حدّد سرعة تسونامي في ماء عمقه ٣٠٠ قدم. اكتب إجابتك في أبسط صورة جذرية.
$٤٠\sqrt{٣}$ قدم/ ث

٣) **سيارات:** يمكن إيجاد الزمن الذي تستغرقه سيارة لتتسارع من وضع التوقف إلى أن تصبح سرعتها ٦٠ ميلًا في الساعة باستعمال المعادلة الآتية:
$س = \sqrt{\frac{٦٠ ق}{ك}}$،
حيث س سرعة السيارة (م/ ث)،
ق متوسط قدرتها (بوحدة الواط)، ك كتلتها (بالكيلوجرامات)، ن الزمن بالثواني. أوجد الزمن الذي تستغرقه سيارة كتلتها ٩٠٠ كيلوجرام، ومتوسط قدرتها ٦٠٠٠٠ واط لتتسارع من وضع التوقف إلى أن تصبح سرعتها ٢٦,٨٢ م/ ث، أي ٦٠ ميلًا في الساعة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.
٥,٤ ثوان تقريبا

٤) **فيزياء:** عندما تكون مادة مثل بخار الماء في الحالة الغازية، فإنّ حجم جزيئاتها وسرعتها يزيدان مع زيادة درجة الحرارة. يُعطى متوسط السرعة س للجزيء الواحد الذي كتلته ك عند درجة حرارة د بالمعادلة:
$س = \sqrt{\frac{٣ د}{ك}}$.
حلّ المعادلة بالنسبة لِـ أ.
$أ = \frac{٩ س^{٢}}{٢ د}$

٥) **هندسة:** افترض أنّ مدير أحد المستشفيات الكبيرة يريد بناء مهبط لطائرات إسعاف عمودية، على أن يكون المهبط دائريًا ومصنوعًا من مادة مطاطية مقاومة للحرارة كما في الشكل أدناه:

أ) إذا كانت مساحة المهبط م، فاكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد طول نصف القطر نق.
$نق = \sqrt{\frac{م}{ط}}$

ب) اكتب عبارة جذرية في أبسط صورة تمثل طول نصف قطر مهبط مساحته ٢٨٨ مترًا مربعًا.
$نق = \frac{١٢\sqrt{٢}}{ط}$

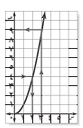
جـ) أوجد طول نصف القطر، مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة، باستعمال آلة حاسبة.
٩,٥٧ مترا

التدريبات الإثرائية (٩) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-١ التدريبات الإثرائية
إيجاد مربعات الأعداد والجذور التربيعية لها من التمثيل البياني

يمكنك استعمال التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢} لإيجاد مربعات الأعداد والجذور التربيعية لها.



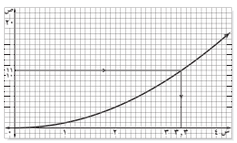
لإيجاد مربع العدد ٣، عيّن ٣ على محور السينات، ثم أوجد قيمة ص المناظرة لها من التمثيل البياني. تبين الأسهم أنّ ٣^{٢} = ٩

ولإيجاد الجذر التربيعي للعدد ٤، عيّن ٤ على محور الصادات، ثم أوجد قيمة س المناظرة لها من التمثيل البياني. تبين الأسهم أنّ $\sqrt{٤} = ٢$

يبيّن الشكل أدناه جزءًا صغيرًا من التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢}، حيث كانت النسبة بين طول الوحدة على محور الصادات إلى طول الوحدة على محور السينات تساوي ١٠ : ١

مثال أوجد $\sqrt{١١}$ من التمثيل البياني المجاور.

تشير الأسهم إلى أنّ $\sqrt{١١} = ٣,٣$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.



تمارين

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، مستعملًا التمثيل أعلاه، مقربًا إلى أقرب عدد كلّي:

١) ٢(١,٥)^{٢} ٢) ٧(٢,٧)^{٢} ٣) ١(٠,٩)^{٢}

٤) ١٣(٣,٦)^{٢} ٥) ١٨(٤,٢)^{٢} ٦) ١٥(٣,٩)^{٢}

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، مستعملًا التمثيل أعلاه، مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة:

٧) $\sqrt{١٥}$ ٢,٩ ٨) $\sqrt{٨}$ ٢,٨ ٩) $\sqrt{٣}$ ١,٧

١٠) $\sqrt{٥}$ ٢,٢ ١١) $\sqrt{١٤}$ ٣,٧ ١٢) $\sqrt{١٧}$ ٤,١

كتاب التمارين (٢١) — دون ضمن فوق

الفصل التاسع: المعادلات الجذرية والمثلثات

٩ - ١ تبسيط العبارات الجذرية

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $\sqrt{٢٤}$ ٢ ٢) $\sqrt{٦٠٠}$ ٢ ٣) $\sqrt{٨} \times \sqrt{٦}$ ٤ ٤) $\sqrt{٧} \times \sqrt{١٤}$ ٧ ٥) $\sqrt{١٢} \times \sqrt{٦}$ ٣ ٦) $\sqrt{٢٧ ت و^{٣}}$ ٣ |و| ت $\sqrt{٣ت}$

٧) $\sqrt{٥٠ ب^{٣}}$ ٥ ب $\sqrt{٢ب}$ ٨) $\sqrt{١٠٨ س^{٢} ص^{٢} ز^{٢}}$ ٦ |س| ص ز $\sqrt{٣ز}$ ٩) $\frac{\sqrt{٨ر}}{\sqrt{٦ر}}$ $\frac{٣\sqrt{٢}ر}{٣}$

١٠) $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}}$ $\frac{\sqrt{١٠}}{٥}$ ١١) $\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٢٣}}$ $\frac{\sqrt{٢٣٠}}{٨}$ ١٢) $\sqrt{\frac{١}{٧}} \times \sqrt{\frac{٧}{١١}}$ $\frac{\sqrt{١١}}{١١}$

١٣) $\sqrt{\frac{٣ك}{٨}}$ $\frac{\sqrt{٦ك}}{٤}$ ١٤) $\sqrt{\frac{١٨}{س}}$ $\frac{٣\sqrt{٢س}}{س}$ ١٥) $\sqrt{\frac{٩أ ب}{٤ أ^{٢}}}$ $\frac{٣\sqrt{ب}}{٢ب}$

١٦) $\frac{٣}{\sqrt{٢١-٥}}$ $\frac{٣\sqrt{٢١+١٥}}{٢٣}$ ١٧) $\frac{٨}{٣\sqrt{٢+٣}}$ $\frac{١٢\sqrt{٣}-٣٢}{٣}$ ١٨) $\frac{\sqrt{٧}٣}{\sqrt{٢٧}-١}$ $\frac{٣\sqrt{٢١}-٧\sqrt{٣}-٩}{٢٦}$

١٩) **قفز مظلي:** عندما يقفز مظلي من طائرة في الهواء؛ يستغرق في السقوط الحر لمسافة معيّنة زمنًا يمكن تقديره بالمعادلة ن = $\sqrt{\frac{٢ف}{٣٢,٨}}$ حيث (ن) الزمن بالثانية، (ف) المسافة بالأمتار. فإذا قفز المظلي من طائرة لمسافة ٧٥٠ مترًا، فما الزمن الذي يستغرقه في السقوط الحر؟ ١٢,٤ ثانية تقريبًا.

٢٠) **أرصاد جوية:** يستعمل الراصدون الجوّيون المعادلة ن = $\sqrt{\frac{ق}{٢١٦}}$ لتقدير زمن استمرار عاصفة رعدية، حيث (ن) الزمن بالساعة، (ق) قطر العاصفة بالميل.

أ) إذا كان قطر العاصفة الرعدية ٨ أميال. فقدّر زمن استمرارها. واكتب إجابتك في أبسط صورة، وفي صورة كسر عشري. $\frac{٣\sqrt{٨}}{٦} \approx ١,٥$ ساعة

ب) إذا هبت عاصفة رعدية قطرها مثلي قطر العاصفة السابقة، هل ستستمر مثلي زمن تلك العاصفة أيضًا؟ فسّر إجابتك. لا، ستستمر العاصفة نحو ٤,٤ ساعة أو ٣ أمثال زمن العاصفة الأولى تقريبًا.

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٩ - ٢

تبسيط العبارات الجذرية.

الدرس ٩ - ٢

جمع العبارات الجذرية وطرحها.

ضرب العبارات الجذرية.

ما بعد الدرس ٩ - ٢

حل المعادلات الجذرية.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمّ اسأل:

- ما العبارة التي تُبيّن طول المسار؟
  س + ٢س + $\sqrt{٣}$ س
- ما العبارة التي تُبيّن المسافة التي يقطعها خالد يوميًّا؟ ٣ (٣س + $\sqrt{٣}$ س)

العمليات على العبارات الجذرية

فيما سبق

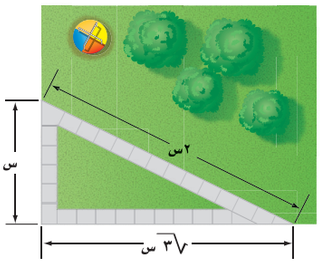
درست تبسيط العبارات الجذرية.

والآن

- أجمع العبارات الجذرية وأطرحها.
- أضرب العبارات الجذرية.

obeikaneducation.com

لماذا؟



يتدرّب خالد على الجري في الحديقة، في مسار على صورة مثلث كما في الشكل المجاور؛ استعدادًا للمشاركة في مسابقات الجري، منهيًا ثلاث دورات يوميًّا. ما المسافة التي يقطعها في دورة الجري الواحدة؟ وما المسافة التي يقطعها يوميًّا؟

جمع العبارات الجذرية وطرحها: يجب أن تكون العبارات الجذرية عند جمعها أو طرحها متشابهة مثلها مثل وحيدات الحد.

وحيدات الحدّ	العبارات الجذرية
٤أ + ٢أ = (٤ + ٢)أ	$\sqrt{٥}$ ٤ + $\sqrt{٥}$ ٢ = $\sqrt{٥}$ (٤ + ٢)
= ٦أ	= $\sqrt{٥}$ ٦
٩ب − ٢ب = (٩ − ٢)ب	$\sqrt{٣}$ ٩ − $\sqrt{٣}$ ٢ = $\sqrt{٣}$ (٩ − ٢)
= ٧ب	= $\sqrt{٣}$ ٧

لاحظ أن ما تحت الجذر لا يتغير عند جمع العبارات الجذرية أو طرحها، ويحدث الشيء نفسه عند جمع وحيدات الحد، إذ تبقى المتغيرات كما هي.

مثال ١ جمع عبارات ما تحت جذورها متشابه وطرحها

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $\sqrt{٢}$ ٥ + $\sqrt{٢}$ ٧ − $\sqrt{٢}$ ٦

$\sqrt{٢}$ ٥ + $\sqrt{٢}$ ٧ − $\sqrt{٢}$ ٦ = $\sqrt{٢}$ (٥ + ٧ − ٦) خاصية التوزيع

= $\sqrt{٢}$ ٦ بسّط

ب) ١٠ $\sqrt{٧}$ + ٥ $\sqrt{١١}$ − ٤ $\sqrt{٧}$ − ٦ $\sqrt{١١}$

١٠ $\sqrt{٧}$ + ٥ $\sqrt{١١}$ − ٤ $\sqrt{٧}$ − ٦ $\sqrt{١١}$ = (١٠ + ٤) $\sqrt{٧}$ + (٥ − ٦) $\sqrt{١١}$ خاصية التوزيع

= ١٤ $\sqrt{٧}$ − $\sqrt{١١}$ بسّط

تحقق من فهمك

أ) ٣ $\sqrt{٢}$ − ٥ $\sqrt{٢}$ + ٤ $\sqrt{٢}$ $\sqrt{٢}$

ب) ٦ $\sqrt{١١}$ + ٢ $\sqrt{١١}$ − ٩ $\sqrt{١١}$ − $\sqrt{١١}$

جـ) ١٥ $\sqrt{٣}$ − ١٤ $\sqrt{٥}$ + ٦ $\sqrt{٥}$ − ١١ $\sqrt{٣}$

د) ٤ $\sqrt{٣}$ + ٦ $\sqrt{٣}$ − ٣ $\sqrt{٧}$ + ٣ $\sqrt{٧}$

جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ − ٨ $\sqrt{٥}$

د) −٢ $\sqrt{٣}$ + ٦ $\sqrt{٧}$

بعض العبارات الجذرية لايكون لها ما تحت الجذر نفسه، وعند تبسيطها قد يكون لها ما تحت الجذر نفسه فيمكنك جمعها أو طرحها.

مصادر الدرس ٩ - ٢

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٢٧)	• تنويع التعليم ص (١٢٧، ١٢٩)	• تنويع التعليم ص (١٢٩)
كتاب التمارين	ص (٢٢)	ص (٢٢)	ص (٢٢)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) • تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢) • التدريبات الإثرائية، ص (١٣)

مثال ٢ جمع عبارات ما تحت جذورها غير متشابه وطرحها

بسّط: $٢\sqrt{١٨} + ٢\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢}$.

$٢\sqrt{١٨} + ٢\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} = ٢(\sqrt{٣^٢} \times \sqrt{٢}) + ٢(\sqrt{٢٤^٢} \times \sqrt{٢}) - (\sqrt{٢٦^٢} \times \sqrt{٢})$ خاصية الضرب

$= ٢(٣\sqrt{٢}) + ٢(٤\sqrt{٢}) - (٦\sqrt{٢})$ بسّط

$= ٦\sqrt{٢} + ٨\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢}$ اضرب

$= ٢٠\sqrt{٢}$ بسّط

تحقق من فهمك

٢أ) $٤\sqrt{٢٤} + ٥٤\sqrt{٤} - ١٦\sqrt{٦}$ $٤\sqrt{٢٤٥} - ٢٠\sqrt{٧} + ٤٥\sqrt{٣}$ **٢جـ)**

٢ب) $٤\sqrt{١٢} - ٤٨\sqrt{٦}$ $-١٦\sqrt{٣}$

٢د) $٢٤\sqrt{٧} - ٥٤\sqrt{٧} + ٩٦\sqrt{٧}$ $٣\sqrt{٦}$

ضرب العبارات الجذرية: يشبه ضرب العبارات الجذرية ضرب وحيدات الحد. لتكن س ≥ ٠.

وحيدات الحد	العبارات الجذرية
$(٢س)(٣س) = ٢ \times ٣ \times س \times س$	$(٢\sqrt{س})(٣\sqrt{س}) = ٢ \times ٣ \times \sqrt{س} \times \sqrt{س}$
$= ٦س^٢$	$= ٦س$

كما يمكنك أيضًا تطبيق خاصية التوزيع على العبارات الجذرية.

مثال ٣ ضرب العبارات الجذرية

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $٣\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٦}$

$٣\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٦} = (٣ \times ٢)(\sqrt{٢} \times \sqrt{٦})$ خاصية التجميع

$= ٦(\sqrt{١٢})$ اضرب

$= ٦(٢\sqrt{٣})$ بسّط

$= ١٢\sqrt{٣}$ اضرب

ب) $٣\sqrt{٥}(٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٣})$

$٣\sqrt{٥}(٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٣}) = (٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥}) + (٣\sqrt{٥} \times ٥\sqrt{٣})$ خاصية التوزيع

$= [(٣ \times ٢)(\sqrt{٥} \times \sqrt{٥})] + [(٣ \times ٥)(\sqrt{٥} \times \sqrt{٣})]$ خاصية التجميع

$= ٦(\sqrt{٢٥}) + ١٥(\sqrt{١٥})$ اضرب

$= ٦(٥) + ١٥(\sqrt{١٥})$ بسّط

$= ٣٠ + ١٥\sqrt{١٥}$ اضرب

تحقق من فهمك

٣أ) $٢\sqrt{٤٢}$ $٢\sqrt{٦} \times ٣\sqrt{٧}$

٣ب) $٣\sqrt{٤٩٥}$ $٩\sqrt{٥} \times ١١\sqrt{١٥}$

٣جـ) $٢\sqrt{٣}(٤\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٢})$ $١٢\sqrt{٦} + ٣٦$

٣د) $٥\sqrt{٣}(٣\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٢})$ $١٥\sqrt{٦} - ١٥$

ويمكنك أيضًا ضرب عبارات جذرية يضم كلّ منها أكثر من حد واحد. وهو ما يشبه ضرب عبارتين جبريتين ثنائيتي الحّد.

إرشادات للدراسة

بسّط:
يجب تبسيط كل حد جذري أولًا، ثم إجراء العمليات الحسابية المطلوبة.

تنبيه!

ضرب العبارات الجذرية
الخطأ الشائع عند ضرب العبارات الجذرية هو جمع ما تحت جذورها لا ضربه؛ لذا تحقق من ضرب ما تحت الجذور.

جمع العبارات الجذرية وطرحها

المثال ١ يُبيّن طريقة جمع العبارات الجبرية التي ما تحت جذورها متشابه، وطرحها.

المثال ٢ يُبيّن طريقة جمع العبارات الجبرية التي ما تحت جذورها غير متشابه، وطرحها.

التقويم التكويني

استعمل أسئلة «تحقّق من فهمك» بعد كل مثال؛ للتحقّق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $٥\sqrt{٦} - ٥\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٢}$ $٥\sqrt{٣}$

ب) $٢\sqrt{٧} + ١١\sqrt{٨} - ١١\sqrt{٤}$

$-٢\sqrt{٦}$ $٢\sqrt{٧} + ١١\sqrt{٤}$

٢ بسّط العبارة الآتية:

$٧٥\sqrt{٢} + ١٢\sqrt{٨} + ٢٧\sqrt{٦}$ $٣\sqrt{٤٤}$

ضرب العبارات الجذرية

المثال ٣ يُبيّن طريقة ضرب عبارات جذرية، مختلف ما تحت جذورها.

المثال ٤ يُبيّن طريقة ضرب العبارات الجذرية لإيجاد مساحة مستطيل.

مثال إضافي

٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $٢\sqrt{٣} \times ٤\sqrt{٦}$ $٢٤\sqrt{٢}$

ب) $٤\sqrt{٢}(٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣})$

$٢٤ + ١٦\sqrt{٣}$

تنويع التعليم:

دون ضمن

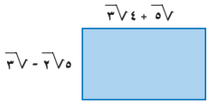
إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في استعمال طريقة التوزيع بالترتيب في المثال ٤،

فقم واطلب إليهم إعادة كتابة حل المثال في خمس خطوات؛ لتسهيل فهم الحدين الأولين، والحدين في الطرفين، والحدين الأوسطين، والحدين الأخيرين. فعلى سبيل المثال، اطلب إليهم في الخطوة ١ كتابة العبارة الأصلية، ووضع خط تحت الحدين الأولين، ثم الضرب لإيجاد ناتج ضربها.

يتابع الطلاب هذا الإجراء حتى يجدوا حاصل ضرب الحدود جميعها، ثم يجمعون في الخطوة الخامسة الحدود المتشابهة، ويبسّطون نتائج الخطوات الأربع السابقة.

مثال ٤ من واقع الحياة ضرب عبارات جذرية

هندسة: أوجد مساحة المستطيل المجاور بأبسط صورة.



$$م = (\sqrt{٣}٤ + \sqrt{٥})(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}٥)$$

م = ل × ض

$$= (\sqrt{٥})(\sqrt{٢}٥) + (\sqrt{٣}٤)(\sqrt{٢}٥) + (\sqrt{٥})(-\sqrt{٣}) + (\sqrt{٣}٤)(-\sqrt{٣})$$

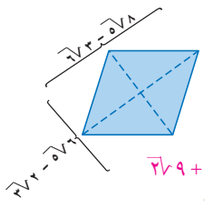
الحدّان الأولان — الحدّان في الطرفين — الحدّان الأوسطان — الحدّان الأخيران

$$= \sqrt{١٠}٥ + \sqrt{٢٠}٦ - \sqrt{١٥} - \sqrt{٩}٤$$ اضرب

$$= \sqrt{١٠}٥ + \sqrt{٢٠}٦ - \sqrt{١٥} - ١٢$$ بسّط

تحقق من فهمك

٤) **هندسة:** يمكن إيجاد مساحة معين باستعمال المعادلة م = $\frac{١}{٢}$ ق١ × ق٢، حيث ق١، ق٢ طولا قطري المعين.
ما مساحة المعين في الشكل المجاور؟ م = $\sqrt{٢}٩ + \sqrt{٣٠}٩ - \sqrt{١٥}٨ - ١٢٠$



قراءة الرياضيات

طريقة التوزيع بالترتيب:
اضرب ثنائيتي حد عن طريق إيجاد مجموع حاصل ضرب الحدين الأولين والحدين في الطرفين والحدين الأوسطين والحدين الأخيرين.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

العمليات على العبارات الجذرية

العملية	الرموز	مثال
الجمع، ب ≥ ٠	أ $\sqrt{ب}$ + جـ $\sqrt{ب}$ = (أ + جـ) $\sqrt{ب}$ ما تحت الجذرين متشابه	$\sqrt{٣}٤ + \sqrt{٣}٦ = \sqrt{٣}(٤ + ٦)$ $= \sqrt{٣}١٠$
الطرح، ب ≥ ٠	أ $\sqrt{ب}$ − جـ $\sqrt{ب}$ = (أ − جـ) $\sqrt{ب}$ ما تحت الجذرين متشابه	$\sqrt{٥}١٢ - \sqrt{٥}٨ = \sqrt{٥}(١٢ - ٨)$ $= \sqrt{٥}٤$
الضرب، ب ≥ ٠، جـ ≥ ٠	(أ $\sqrt{ب}$)(د $\sqrt{جـ}$) = أ د $\sqrt{ب جـ}$ ليس من الضروري تشابه ما تحت الجذرين.	$\sqrt{٢}٣ (\sqrt{٧}٥) = (٥ \times ٣)(\sqrt{٧} \times \sqrt{٢})$ $= \sqrt{١٤}١٥$

تأكد

الأمثلة ١-٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $\sqrt{٥}٣ + \sqrt{٥}٦$ $\sqrt{٥}٩$

٢) $\sqrt{٧}٦ - \sqrt{٧}$ $-\sqrt{٧}٥$

٣) $\sqrt{٥}٤ + \sqrt{٢٠}٢$ $\sqrt{٥}٨$

٤) $\sqrt{١٢}٧ - \sqrt{٣}$ $\sqrt{٣}$

٥) $\sqrt{٨}٧ + \sqrt{١٢}٧ + \sqrt{١٨}٧$

٦) $\sqrt{٢٧}٧ + \sqrt{٣}٢ - \sqrt{١٢}٧$

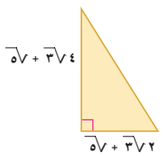
٧) $\sqrt{٢}٩ (\sqrt{٦}٤)$ $\sqrt{٣}٧٢$

٨) $\sqrt{٣}٧ (\sqrt{٧}٣ + \sqrt{٢}٣)$

٩) $\sqrt{٥}٧ (\sqrt{٢}٤ + \sqrt{٢}٧)$ $\sqrt{١٠}٥$

مثال ٤

١٠) **هندسة:** يمكن إيجاد مساحة المثلث م باستعمال المعادلة:
م = $\frac{١}{٢}$ ق × ع، حيث (ق) طول القاعدة، (ع) ارتفاع المثلث.
احسب مساحة المثلث في الشكل المجاور؟ $\sqrt{١٥}٣ + ١٤,٥$



المحتوى الرياضي

العمليات على العبارات الجذرية:
يمكن جمع العبارات الجذرية وطرحها، إذا كان ما تحت جذورها متشابهًا فقط. ويمكن ضرب العبارات الجذرية، سواءٌ تشابه ما تحت جذورها أم لا.

مثال إضافي

٤ **هندسة:** أوجد مساحة المستطيل الذي عرضه $\sqrt{٦}٤ - \sqrt{١٠}٢$، وطوله $\sqrt{٥}٧ + \sqrt{٣}٥$ في أبسط صورة؟ $\sqrt{٢}١٠ - \sqrt{٣٠}١٨$

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ١٠؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب عبارة تتضمّن جمع عبارات جذرية وطرحها على السبورة التفاعلية، وحرّك الحدود المتشابهة لتجميعها معًا في أثناء تبسيط العبارة. ثم جمّعها وبسّط العبارة الأسّية.

٤ التقويم

تعلم لاحق: اطلب إلى الطلاب أن يدوِّنوا توقّعاتهم عن العلاقة بين ما تعلموه اليوم حول جمع العبارات الجذرية وطرحها بالدرس القادم حول المعادلات الجذرية.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١١) $٢\sqrt{٦} + ٩\sqrt{٦}$ $١١\sqrt{٦}$

١٢) $٣\sqrt{٣٢} - ٣\sqrt{٥٠}$ $٣\sqrt{٢}$

١٣) $٧\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٣}$ $٣\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٣}$

١٤) $٧\sqrt{٥}(٣\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥})$ $٤\sqrt{٣٥}$

١٥) $٦\sqrt{٢}(٣\sqrt{٢} + ١٠\sqrt{٢})$ $٤\sqrt{٦} + ١٥\sqrt{٦}$

١٦) $٥\sqrt{٣}(٦\sqrt{٣} - ١٠\sqrt{٦})$ $٣٠\sqrt{٣٠} - ٩٠$

١٧) $(٣\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٢})(١٥\sqrt{١٢} + ٢\sqrt{٢})$

١٨) $(٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٥})(٢\sqrt{١٠} - ٥)$ $٥\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٢}$

مثال ٤ ١٩) **هندسة:** أوجد محيط ومساحة مستطيل عرضه $٢\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥}$ وطوله $٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥}$.

المحيط = $(١٠\sqrt{٧} + ٢\sqrt{٥})$ وحدة؛ والمساحة = ١٢ وحدة مربعة

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٢٠) $\frac{١}{٥}\sqrt{٥} - \frac{٥\sqrt{٤} - }{٥}$

٢١) $\frac{٢}{٣}\sqrt{٦} + \frac{٦\sqrt{٤}}{٣}$

٢٢) $\frac{١}{٢}\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢} - ٨\sqrt{٢}$

٢٣) $\frac{٥}{٤}\sqrt{٨} + ٢٠\sqrt{٣} - \frac{١}{٥}\sqrt{١٠}$

٢٤) $(٣ - \sqrt{٥})^{٢}$ $١٤ - ٥\sqrt{٦}$

٢٥) $(٣\sqrt{٢} + \sqrt{٢})^{٢}$ $٥ + ٦\sqrt{٢}$

٢٦) **لعبة الأفعوانية:** تعبر المعادلة ع. $= \sqrt{٦٤ل - ع^{٢}}$ عن السرعة للعبة أفعوانية (ع) بالقدم/ ثانية في أدنى نقطة لها عند هبوطها من ارتفاع عمودي (ل) بالأقدام وبسرعة انطلاق (ع.).

أ) كم تكون سرعة الأفعوانية عند قمة ارتفاعها ٢٢٥ قدمًا كي تصل سرعتها إلى ١٢٠ قدمًا/ ثانية في أدنى نقطة لها؟ صفر قدم/ ث

ب) فسّر لماذا لا تكافئ المعادلة ع. $= ع - ٨\sqrt{ل}$ المعادلة المعطاة؟

الربط مع الحياة

لعبة الأفعوانية نموذج مصغر لسكة حديدية ملتوية ترتفع عن الأرض، وتعد من الألعاب الشهيرة والرئيسة في مدن الألعاب الكبيرة، ويقبل عليها الكثيرون وخصوصًا الشباب للتسلية والترفيه، ولما يميزها من المتعة والإثارة.

٢٧) **استثمار:** استثمر عامر مبلغ ٢٢٥٠٠ ريال في التجارة، فأصبح المبلغ ٢٧٠٠٠ ريال بعد سنتين. يمكنك استعمال المعادلة ر $= \sqrt{\frac{ع}{ع.}} - ١$ لإيجاد معدّل الربح السنوي (ر)، حيث تمثل (ع.) المبلغ الأصلي، و (ع٢) المبلغ بعد سنتين. أوجد معدّل الربح السنوي للمبلغ الذي استثمره عامر؟ ٩,٥ ٪ تقريبًا

٢٨) **كهرباء:** تستعمل المعادلة ت $= \frac{\sqrt{\text{قد}}}{\sqrt{\text{م}}}$ لحساب شدة التيار الكهربائي بالأمبير (ت)، حيث (قد) قدرة الجهاز بالواط، (م) المقاومة بالأوم. ما شدة التيار الكهربائي في فرن الميكروويف إذا كانت قوة التيار ٨٥٠ واط، ومقاومته ٥ أوم؟ اكتب شدة التيار في أبسط صيغة جذرية، ثم قدّر قيمته إلى أقرب جزء من عشرة. $١٧٠\sqrt{}$ ، ١٣ أمبير تقريبًا

٢٦ب) إجابة ممكنة: نأخذ في المعادلة الجذر التربيعي للفرق بين الحدين وليس الجذر التربيعي لكل حد.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٩) **تحدَّ:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو غير صحيحة، وأعط مثالًا أو مثالًا مضادًّا:

$\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} > س + ص$ عندما س > ٠ ، ص > ٠

صحيحة؛ $\sqrt{١ + ١} < ١ + ١$ أو $٢\sqrt{} < ٢$.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون	١٥ – ١٩، ٣٠ – ٥٣
ضمن	١١ ، ١٢ – ٢٤ (زوجي) ، ٢٧، ٢٨، ٣٠ – ٥٣
فوق	٢٠ – ٥٣

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اكتب: $٦\sqrt{} + ٣\sqrt{} = ٩\sqrt{}$ ، $٣ = ٤٠\sqrt{} = ٣٦\sqrt{} + ٤\sqrt{} = ٨$ على السبورة. واطلب إلى الطلاب توضيح الأخطاء الواردة في هذين المثالين. لا يمكنك جمع العبارات الجذرية ما لم يكن ما تحت الجذر هو نفسه؛ لذا لا يمكنك كتابة الجذر التربيعي لمجموع عددين في صورة مجموع جذرَي هذين العددين.

٣٠) **تبرير:** بيّن أنه إذا كانت أ، ب، جـ، د، أعدادًا نسبية، فإن ناتج ضرب:
$(أ\sqrt{ب} + جـ\sqrt{ف})$، $(أ\sqrt{ب} - جـ\sqrt{ف})$، لا يحوي جذورًا. فسّر إجابتك. ٣٠ – ٣٢) انظر الهامش

٣١) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة جمع جذرين ما تحت كل منهما مختلف. وفسّر كيف يمكنك جمع هذين الحدين.

٣٢) **اكتب:** صف بالخطوات كيف تضرب عبارتين جذريتين يتكون كل منهما من حدين، واكتب مثالاً يوضّح ذلك.

تدريب على اختبار

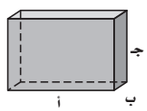
٣٣) **إجابة قصيرة:** إذا كان عدد سكان مدينة ١٣٠٠٠٠ نسمة ويتزايدون بمقدار ٢٥٠٠ شخص في السنة، فإنه يمكن التعبير عن عدد سكانها بعد (س) سنة من ذلك بالمعادلة: ع = ١٣٠٠٠٠ + ٢٥٠٠س. بعد كم سنة يصبح عدد سكان المدينة ١٤٥٠٠٠؟ ٦ سنوات

٣٤) أيّ ممّا يأتي يكافئ العبارة: ٨ (٣–ص) + ٥(٣–ص)؟ جـ

أ) ٣٩ – ص　　جـ) ١٣(٣ – ص)

ب) ٤٠(٣٠ – ص)　　د) ١٣(٦ – ٢ص)

٣٥) **هندسة:** أي عبارة مما يأتي تمثّل مجموع أطوال الاثني عشر حرفًا للمنشور الرباعي (متوازي المستطيلات) أدناه؟ جـ



أ) ٢(أ + ب + جـ)　　جـ) ٤(أ + ب + جـ)

ب) ٣(أ + ب + جـ)　　د) ١٢(أ + ب + جـ)

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩ - ١)

٣٦) $\sqrt{١٨} \cdot \sqrt{٣}$　　٣٧) $\sqrt{٢٤} \cdot \sqrt{٦}$　　٣٨) $\sqrt{٦٠} \cdot \sqrt{١٥}$

٣٩) $\sqrt{٥٠أ^{٣}ب^{٥}} \cdot \sqrt{٢أ ب^{٢}}$　　٤٠) $\sqrt{١٦٩س^{٤}ص^{٧}} \cdot \sqrt{١٣س^{٢}ص^{٣}}$　　٤١) $\sqrt{٦٣جـ^{٣}د^{٤}ف^{٥}} \cdot \sqrt{٧جـف^{٢}}$ ٣|جـ|د^٢ف

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي: (الدرس ٧ - ٢)

٤٢) $س^{٢} + ١٢س + ٢٧$ (س + ٣)(س + ٩)

٤٣) $ص^{٢} + ١٣ص + ٣٠$ (ص + ١٠)(ص + ٣)

٤٤) $ب^{٢} - ١٧ب + ٧٢$ (ب – ٨)(ب – ٩)

٤٥) $س^{٢} + ٦س - ٧$ (س – ١)(س + ٧)

٤٦) $ص^{٢} - ص - ٤٢$ (ص – ٧)(ص + ٦)

٤٧) $-٧٢ + ٦و + و^{٢}$ (و + ١٢)(و – ٦)

حُلّ كل معادلة فيما يأتي مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر: (الدرس ١ - ٣)

٤٨) $-٤جـ - ١,٢ = ٠,٨$ $-٠,٥$

٤٩) $-٢,٦ك - ٣٣,٧ = ٨٤,١$ $-٤٥,٣$

٥٠) $٠,٣م + ٤ = ٩,٦$ $١٨,٧$

٥١) $-١٠ - \frac{ن}{٥} = ٦$ -٨٠

٥٢) $\frac{-٤هـ - (-٥)}{٧-} = ١٣$ ٢٤

٥٣) $٣,٦ت + ٦ - ٢,٥ت = ٨$ $١,٨$

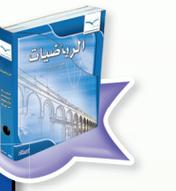
إجابات:

٣٠) $(أ\sqrt{ب} + جـ\sqrt{ف})(أ\sqrt{ب} - جـ\sqrt{ف})$
$= أ^{٢}\sqrt{ب^{٢}} - أ جـ\sqrt{ب ف} + أجـ\sqrt{ب ف} - جـ^{٢}\sqrt{ف^{٢}}$
$= أ^{٢}ب - جـ^{٢}ف$
إجابة ممكنة: هذا النمط هو فرق بين مربعين.

٣١) إجابة ممكنة: $\sqrt{١٢} + \sqrt{٢٧} = \sqrt{٣٥}$، بما أن تبسيط $\sqrt{١٢}$، هو $٢\sqrt{٣}$ وتبسيط $\sqrt{٢٧}$ هو $٣\sqrt{٣}$، وبما أن $٢\sqrt{٣}$، $٣\sqrt{٣}$ لهما ما تحت الجذر نفسه؛ إذن يمكنك جمعهما.

٣٢) إجابة ممكنة: يمكنك استعمال طريقة (التوزيع بالترتيب). عن طريق ضرب كلٍّ من: الحدين الأولين، والحدين في الطرفين، والحدين الأوسطين، والحدين الأخيرين، ثم جمّع الحدود المتشابهة وتبسيط الجذور. فعلى سبيل المثال:
$(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} + \sqrt{٧}) =$
$\sqrt{١٠} + \sqrt{١٤} + \sqrt{١٥} + \sqrt{٢١}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٩ - ٢

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٠) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٢ تدريبات إعادة التعليم

العمليات على العبارات الجذرية

جمع العبارات الجذرية وطرحها، عند جمع العبارات الجذرية وطرحها، استعمل خاصيتي التجميع والتوزيع لتبسيطها، وإذا لم تكن في أبسط صورة، فاكتبها في أبسط صورة.

مثال ١ بسّط $\sqrt{١٠} - \sqrt{٦} + ٣\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٦} + \sqrt{٤}$

$= \sqrt{١٠} - \sqrt{٦} + ٣\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٦} + \sqrt{٤}$ خاصيتا التجميع والتوزيع

$= \sqrt{١٠} - \sqrt{٦} + ٣\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٦} + ٢$ بسّط

$= \sqrt{١٠} - ٤\sqrt{٦} + ٣\sqrt{٥} + ٢$ بسّط

مثال ٢ بسّط $\sqrt{٣} + \sqrt{١٢} + \sqrt{٧٥}$

$= \sqrt{٣} + \sqrt{١٢} + \sqrt{٧٥}$ بسّط

$= \sqrt{٣} + \sqrt{٤ \times ٣} + \sqrt{٢٥ \times ٣}$ بسّط

$= \sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٣}$ بسّط

$= ٨\sqrt{٣}$ خاصية التوزيع

تمارين

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٥}$

٢) $٤\sqrt{٦} - ٦\sqrt{٦} - ٢\sqrt{٦}$

٣) $٧\sqrt{٢} - ٨\sqrt{٢} + ٧\sqrt{٢}$

٤) $٣\sqrt{٥} + ٧\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

٥) $٧\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} + ٢٠\sqrt{٥}$

٦) $٢\sqrt{٦} + ٣\sqrt{٦} - ٥\sqrt{٦} - ٣\sqrt{٦} + ٢\sqrt{٦}$

٧) $٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٥} + ١٢\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٥}$

٨) $٢\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٦} + ٢٤\sqrt{٣} + ٥٠\sqrt{٦} - ٢٧\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٣}$

٩) $١٢\sqrt{٦} + ١٢\sqrt{٥} - ١٨\sqrt{٢}$

١٠) $٢٤\sqrt{٥} + ٥٤\sqrt{٥}$

١١) $\frac{٣}{٤}\sqrt{٢} + \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$

١٢) $\frac{١}{٣}\sqrt{٣} + ١٢\sqrt{٣}$

١٣) $\frac{١}{٦}\sqrt{٥٤} - \frac{٦\sqrt{١٧}}{٦}$

١٤) $٢٠\sqrt{٣} - ٨٠\sqrt{٣}$

١٥) $\frac{٣}{٨}\sqrt{٥٠} + ٧\sqrt{١٨} - ٧\sqrt{٧٥} + ٧\sqrt{٢٧}$

١٦) $\frac{١}{٢}\sqrt{٤} - ٢\sqrt{٣} + \frac{٢}{٣}\sqrt{٢٤} - ٤\sqrt{٣}$

١٧) $\frac{١}{٥}\sqrt{١٢٥} - ٢\sqrt{\frac{١}{٣}} + \frac{٢٣}{٥}\sqrt{\frac{٣}{٢}} - \frac{٣\sqrt{٨}}{٣}$

١٨) $\frac{٣}{٢}\sqrt{\frac{٥}{٢}} + ٣\sqrt{\frac{٢}{٣}} - \frac{١}{١٢}\sqrt{٧٣} + \frac{٧\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٧}}{٢}$

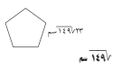
تدريبات حل المسألة (١٢) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٢ تدريبات حل المسألة

العمليات على العبارات الجذرية

١) **هندسة،** أوجد محيط المضلّع الخماسي المنتظم أدناه، إذا كان طول ضلعه $\sqrt{١٤٩}$ سم، مستعملًا عبارة جذرية في إجابتك.

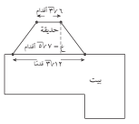


$١١٥\sqrt{٧}$ سم

٢) **الأرض،** صيغة مساحة سطح الكرة هي م = ٤ط نق٢، حيث نق طول نصف قطرها. افترض أنّ الأرض كروية، وأنّ مساحة سطحها تساوي ٥,١ × (١٠)٨ كيلومتر مربع تقريبًا، فما طول نصف قطرها إلى أقرب ١٠ كيلومتر؟

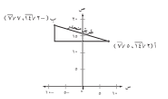
٦٣٧٠ كيلومترًا

٣) **هندسة،** يمكنك إيجاد مساحة شبه المنحرف بضرب ارتفاعه في متوسط طولَي قاعدتيه. أوجد مساحة حديقة على شكل شبه منحرف مجاورة لبيت سلطان، كما هو مبيّن أدناه، مستعملًا عبارة جذرية في إجابتك.



$٦٢\sqrt{١٥}$ قدمًا مربعة

٤) **ميل منحدر،** حسّب ماجد ميل طريق منحدر، مستعملًا جهازًا رقميًا متصلًا بحاسوب. وقد حدّد النموذج الحاسوبي إحداثيات نقطتَي القمّة والقاع للمنحدر، كما في الشكل أدناه. أوجد ميل الطريق المنحدر، مستعملًا عبارة جذرية في إجابتك.



$\frac{٢\sqrt{٧}}{٤}$

٥) **سقوط حر،** افترض أنّ كرة أُسقطت من نافذة غرفة مبنى مرتفع لمسافة ٨٠٠ قدم في الهواء، وأنّ كرة ثانية أُسقطت في الوقت نفسه من نافذة غرفة ارتفاعها ٢٨٨ قدمًا. يمكنك أن تجد الزمن ن بالثواني لتقطع الكرة مسافة ف (بالأقدام)، مع إهمال مقاومة الهواء، باستعمال الصيغة: ن = $\frac{١}{٤}\sqrt{ف}$.

أ) ما الزمن الذي يمضي بين اصطدام الكرة الأولى واصطدام الكرة الثانية بالأرض؟ اكتب إجابتك مستعملًا عبارة جذرية.

$٢\sqrt{٥}$ ث

ب) أي الكرتين تصل إلى الأرض أوّلًا؟

الكرة الساقطة من ارتفاع ٢٨٨ قدمًا تصل إلى الأرض أوّلًا.

جـ) قرّب إجابة الفرع (أ) إلى أقرب جزء من عشرة.

٢,٨ ث تقريبًا

التدريبات الإثرائية (١٣) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

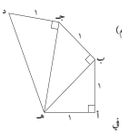
٩-٢ التدريبات الإثرائية

عجلة ثيودورس

اهتمّ علماء الرياضيات الإغريق بمسائل متعلقة بتمثيل الأعداد المختلفة والعبارات، باستعمال إنشاءات هندسية. يقال: إنّ الفيلسوف الإغريقي ثيودورس (عام ٤٢٥ ق. م) قد اكتشف طريقة لإنشاء المتتابعة:

$\sqrt{١}$، $\sqrt{٢}$، $\sqrt{٣}$، $\sqrt{٤}$، ...

يبيّن الشكل المجاور بداية هذا الإنشاء الهندسي. ابدأ بمثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول ضلعه وحدة واحدة.



اكتب طول كلٍّ من القطع المستقيمة الآتية من الشكل أعلاه، مستعملًا عبارة جذرية في أبسط صورة:

١) $\overline{أهـ}$ $\sqrt{١}$

٢) $\overline{بجـ}$ $\sqrt{٢}$

٣) $\overline{جـد}$ $\sqrt{٣}$

٤) $\overline{دهـ}$ $\sqrt{٤}$

٥) بيّن كيفية إضافة مثلث جديد إلى الشكل.

ارسم ضلعًا جديدًا طوله وحدة واحدة بعاد آخر وتر، ثم ارسم الوتر الجديد.

٦) طول وتر المثلث الأول $\sqrt{٢}$، وطول وتر المثلث الثاني $\sqrt{٣}$. اكتب عبارة تمثّل طول وتر المثلث الذي ترتيبه ن.

$\sqrt{ن+١}$

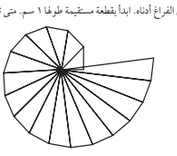
٧) بيّن أنّ طريقة الإنشاء الهندسي ستُنتج باستمرار العدد التالي في المتتابعة.

(إرشاد: أوجد عبارة تمثّل طول وتر المثلث الذي ترتيبه ن + ١)

$(\sqrt{ن})^٢ + ١^٢ = \sqrt{ن+١}^٢$

٨) أنشئ عجلة ثيودورس في الفراغ أدناه. ابدأ بقطعة مستقيمة طولها ١ سم. متى تبدأ العجلة في التداخل؟

بعد الطول $\sqrt{١٨}$



كتاب التمارين (٢٢) — دون ضمن فوق

٩ - ٢ العمليات على العبارات الجذرية

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $٣٠\sqrt{٧} - ٣٠\sqrt{٤}$

٢) $٥\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٧} - ٥\sqrt{٥}$

٣) $٣\sqrt{١٣}س - ١٤\sqrt{١٣}س + ٢\sqrt{١٣}س$

$٣٠\sqrt{٤}$ $-١٠\sqrt{٥}$ $-٥\sqrt{١٣}س$

٤) $٢\sqrt{٤٥} + ٣٠\sqrt{٤} - ٥\sqrt{١٤}$

٥) $٤٠\sqrt{٧} - ١٠٧ + ٩٠\sqrt{٧} + ١٠\sqrt{٧}$

٦) $٣٢\sqrt{٢} + ٥٠\sqrt{٣} - ١٨\sqrt{٣} + ٣\sqrt{١٤}$

٧) $٧٧\sqrt{٧} + ١٨\sqrt{٧} + ٣٠٧\sqrt{٧}$

٨) $٣٠٦\sqrt{٣} + ٨٧٥ - ٣٣٧$

٩) $\frac{٢}{٧}\sqrt{٧} - \frac{١٤٧}{٧}$

$٣\sqrt{١٣} + ٣\sqrt{٦}$ $٥\sqrt{٦} + ٣\sqrt{٦}$

١٠) $\frac{١}{٢}\sqrt{٥٠٧} - ٣٢\sqrt{٧}$

١١) $٥\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٧٥} - ٨\sqrt{٧}$

١٢) $١٢\sqrt{٧} - ٤٠\sqrt{٧} - ٧٥\sqrt{٧} + ١٠\sqrt{٧٣}$

$\frac{٢٧\sqrt{١٧}}{٢}$ -١٠٧٣ $-٣\sqrt{٧٣}$

١٣) $٧\sqrt{(٧+١٥٧)}$

١٤) $(٧-١٥٧)^٢$

١٥) $(٧+٢٠٧)(٧-٣٠٧)(١٨٧-)$

$٢٠\sqrt{١٣} + ٢٥\sqrt{٧}$ $٤٠ - ١٥\sqrt{٧}$ $٣\sqrt{٤}$

١٦) $(٧\sqrt{٧} + ١٢٧)(٤٨٧ + ١٨٧)$

١٧) $(٣\sqrt{٧} + ٨٧٧)(٣\sqrt{٧} - ٥٧)$

١٨) $(٣\sqrt{٤} - ٣\sqrt{٧})(٣\sqrt{٥} + ٢٠٧٣)(٢\sqrt{٥} + ٦٧)$

$٣٦\sqrt{٧} + ١٤\sqrt{٧}$ $١٠٧٥ - ٣٧٣٠$ $٢٧٣٠ + ٣٠٧٢$

١٩) **سرعة الصوت،** تُمثّل المعادلة ع = ٢٠ $\sqrt{٢٧٣ + ت}$ سرعة الصوت (ع) بالمتر/ثانية قرب سطح الأرض، حيث (ت) درجة حرارة السطح السيليزية.

أ) ما سرعة الصوت قرب سطح الأرض عند الدرجتين ١٥° س، ٢٠° س في أبسط صورة؟

$٢٤٠\sqrt{٢}$ م/ث، $١١\sqrt{١٠٠}$ م/ث

ب) بكم تزيد سرعة الصوت عند الدرجة ١٥° س عليها عند الدرجة ٢° س؟

$٢٤٠ - ٢\sqrt{١٠٠} = ١١\sqrt{٧,٧٥}$ م/ث

٢٠) **هندسة،** مستطيل طوله $(٥\sqrt{٧} + ٢)$ مترًا، وعرضه $(٦\sqrt{٧} - ٣)$ مترًا.

أ) أوجد محيط المستطيل في أبسط صورة.

$(٢٢\sqrt{٧} - ٢)$م

ب) أوجد مساحة المستطيل في أبسط صورة.

$(٢١\sqrt{٣} - ١٩٢)$م^٢

ملحوظات المعلم

٩ - ٣ المعادلات الجذرية

فيما سبق

درست جمع عبارات جذرية وطرحها وضربها.

والآن

- أحلّ معادلات جذرية.
- أحلّ معادلات جذرية تتضمن حلولاً دخيلة.

المفردات

المعادلات الجذرية
الحلول الدخيلة

obeikaneducation.com

لماذا ؟

طول غاطس القارب الشراعي هو طول الخط الذي يصنعه مع حافة الماء عندما يكون حاملًا أقصى حمولته.

ويمكن تقدير أقصى سرعة للقارب بالكيلومتر/ ساعة باستعمال المعادلة: ع = ٤,٥ √ل، حيث (ل) تمثّل طول غاطس القارب بالأمتار.

المعادلات الجذرية: المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر، مثل ع = ٤,٥ √ل تُسمى **معادلات جذرية**. ولحل مثل هذه المعادلات اجعل المتغير الذي تريد إيجاد قيمته في طرف من المعادلة أولاً، ثم ربِّع طرفي المعادلة؛ للتخلص من الجذر.

مفهوم أساسي خاصية تربيع طرفي المساواة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا ربّعت طرفي معادلة صحيحة، فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة.

الرموز: إذا كانت أ = ب، فإن: $أ^{٢} = ب^{٢}$.

مثال: إذا كانت $\sqrt{س} = ٤$، فإن $(\sqrt{س})^{٢} = ٤^{٢}$

مثال ١ من واقع الحياة متغير تحت الجذر

إبحار: يبحر إدريس وموسى في قارب شراعي، سرعته ١٦,٦٥ كلم/ ساعة. أوجد طول الغاطس إلى أقرب عُشر من المتر.

افهم: تعلم سرعة القارب في رحلته والتي لها علاقة بطول غاطس القارب.

خطّط: يسير القارب بسرعة ١٦,٦٥ كم/ ساعة ومعادلة السرعة هي: ع = ٤,٥ √ل.

حل:

ع = ٤,٥ √ل	معادلة سرعة القارب
١٦,٦٥ = ٤,٥ √ل	عوّض ع = ١٦,٦٥
$\frac{١٦,٦٥}{٤,٥} = \frac{٤,٥\sqrt{ل}}{٤,٥}$	اقسم على ٤,٥
٣,٧ = √ل	بسّط
$(٣,٧)^{٢} = (\sqrt{ل})^{٢}$	ربّع طرفي المعادلة
١٣,٦٩ = ل	بسّط

طول الغاطس يساوي ١٣,٧ مترًا تقريبًا.

تحقق: تحقق بتعويض الحل في المعادلة الأصلية.

ع = ٤,٥ √ل	معادلة سرعة القارب
١٦,٦٥ ≟ ٤,٥ √١٣,٧	عوّض ع = ١٦,٦٥، ل = ١٣,٧
١٦,٦٥ ≈ ١٦,٦٥٠٧٩٩ ✓	اضرب

٩ - ٣ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٩ - ٣

جمع عبارات جذرية وطرحها وضربها.

الدرس ٩ - ٣

حل معادلات جذرية.

حل معادلات جذرية تتضمن حلولًا دخيلة.

ما بعد الدرس ٩ - ٣

تطبيق المعادلات الجذرية في حساب المثلثات.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمّ اسأل:

- إذا علمت قيمة (ع)، فما الذي تحتاجه لحل المعادلة؟ √ل
- كيف يتم ذلك؟ أقسم كل طرف على ٤,٥
- كيف تحذف إشارة الجذر؟ بتربيع طرفي المعادلة.

مصادر الدرس ٩- ٣

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٣٢)	• تنويع التعليم ص (١٣٢)	• تنويع التعليم ص (١٣٤)
كتاب التمارين	ص (٢٣)	ص (٢٣)	ص (٢٣)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) • تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦) • التدريبات الإثرائية، ص (١٧)

المعادلات الجذرية

المثال ١ يُبيّن طريقة حل مسألة من واقع الحياة بمتغيّرات تحت الجذر.

المثال ٢ يُبيّن طريقة حل معادلة جذرية تتضمّن عبارة جبرية تحت الجذر.

التقويم التكويني

استعمل تمارين «تحقّق من فهمك» بعد كل مثال؛ للتحقّق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ سقوط حر: أُسقط جسم من ارتفاع غير معروف، ووصل إلى الأرض خلال ٥ ثوانٍ. استعمل المعادلة $ن = \frac{\sqrt{ل}}{٤}$، حيث (ن) الزمن بالثواني، (ل) الارتفاع بالأقدام؛ لإيجاد الارتفاع الذي أُسقط منه الجسم. ٤٠٠ قدم.

٢ حُلَّ المعادلة:

$\sqrt{س - ٣} + ٨ = ١٥$ ٥٢

حلول دخيلة

المثال ٣ يُبيّن طريقة تحديد الحلول الدخيلة عند حل المعادلة الجذرية بمتغير في كل طرف من إشارة المساواة.

مثال إضافي

٣ حل المعادلة: $\sqrt{٢ - ص} = ص$ وتحقق من صحة حلك. ١

المحتوى الرياضي

حلول المعادلات الجذرية:
من الأهمية عند حل المعادلات الجذرية، التحقّق دائمًا من الحلول جميعها، بتعويضها في المعادلة الأصلية، حيث يمكن أن يكون حلٌّ أو أكثر من هذه الحلول دخيلًا.

تحقق من فهمك

١) **قيادة:** تمثّل المعادلة $ع = \sqrt{٢١,٣}$ نق السرعة القصوى بالكيلومتر/ ساعة التي يمكن أن تسير بها سيارة بأمان على طريق منحنٍ غير محدد الجانبين، حيث (نق) نصف قطر المنحنى بالأمتار. فإذا صُمّم الطريق لسرعة قصوى مقدارها ١٠٥ كلم/ ساعة، فما طول نصف قطر المنحنى؟
٥١٨ مترًا تقريبًا

لحل المعادلات الجذرية: اجعل الجذر في طرف من المعادلة أولاً، ثم ربّع طرفيها.

تنبيه!
تربيع الطرفين
تذكّر أنه عند تربيع طرفي المعادلة، يجب تربيع كل طرف منها وإن كان يتكون من أكثر من حد واحد.

مثال ٢ حل المعادلة الجذرية

حل المعادلة: $\sqrt{أ + ٥} + ٧ = ١٢$.

$\sqrt{أ + ٥} + ٧ = ١٢$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{أ + ٥} = ٥$	اطرح ٧ من الطرفين
$(\sqrt{أ + ٥})^{٢} = ٢٥$	ربّع الطرفين ، وبسّط
$أ + ٥ = ٢٥$	بسّط
$أ = ٢٠$	اطرح ٥ من الطرفين

تحقق من فهمك

٢أ) $\sqrt{جـ - ٣} + ٤ = ٢$ ٣٩ ٢ب) $٤ + \sqrt{هـ + ١} = ١٤$ ٩٩

حلول دخيلة: ينتج عن تربيع طرفي المعادلة أحيانًا حلّ لا يحقق المعادلة الأصلية. وهذه الحلول تُسمى **حلولًا دخيلة**؛ لذا عليك التحقق من الحلول كلها في المعادلة الأصلية.

مثال ٣ حلّ المعادلة التي تحتوي متغيرًا في كلا طرفيها

حل المعادلة: $\sqrt{ك + ١} = ك - ١$. وتحقق من صحة الحل.

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{ك + ١})^{٢} = (ك - ١)^{٢}$	ربّع الطرفين
$ك + ١ = ك^{٢} - ٢ك + ١$	بسّط
$٠ = ك^{٢} - ٣ك$	اطرح ك ، ١ من الطرفين
$٠ = ك(ك - ٣)$	حلّل
$ك = ٠$ أو $ك - ٣ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$ك = ٠$ أو $ك = ٣$	حل

تحقق:

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$	المعادلة الأصلية	$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{٠ + ١} \stackrel{؟}{=} ٠ - ١$	عوّض ك = ٠	$\sqrt{٣ + ١} \stackrel{؟}{=} ٣ - ١$	عوّض ك = ٣
$\sqrt{١} \stackrel{؟}{=} -١$	بسّط	$\sqrt{٤} \stackrel{؟}{=} ٢$	بسّط
$١ \neq -١$ ✗	خطأ	$٢ = ٢$ ✓	صحيح

وبما أن الصفر لا يحقق المعادلة الأصلية؛ لذا فإن ٣ هو الحل الوحيد.

تحقق من فهمك

٣أ) $\sqrt{ت + ٥} = ت + ٣$ -١ ٣ب) $س - ٣ = \sqrt{س - ١}$ ٥

تنويع التعليم:

دون ضمن

إذا كان بعض الطلاب يجيدون استعمال الحاسبات البيانية،

فقم واطلب إليهم تمثيل المعادلة في المثال٣ للتحقّق من الحل. واطلب إليهم طرح ك − ١ من طرفي المعادلة، ثم إدخال المعادلة على الصورة: ص١ = $\sqrt{س + ١}$ − س + ١، وذلك بالضغط على المفاتيح 2:Add Graphs ثم كتابة المعادلة، ولحساب نقطة الصفر أو المقطع السيني في التمثيل، للضغط على المفاتيح 3:Intersection Point(s) 7:Points & Lines menu ، ثم الضغط على المحور السيني، ثم على المنحنى للحصول على إحداثيات المقطع السيني.

تأكد

مثال ١ ١) **هندسة:** ما طول نصف قطر كرة سلة إذا كانت معادلة مساحة سطحها هي م = ٤ ط نق^{٢}. $نق = \sqrt{\frac{م}{٤ط}}$

المثالان ٢، ٣ حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٢) $\sqrt{١٠هـ} + ١ = ٢١$ ٤٠ ٣) $\sqrt{٧ر + ٢} + ٣ = ٧$ ٢ ٤) $٥ + \sqrt{جـ - ٣} = ٦$ ٤

٥) $\sqrt{٣س - ٥} = س - ٥$ ١٠ ٦) $\sqrt{٢ن + ٣} = ن$ ٣ ٧) $\sqrt{أ - ٢} + ٤ = أ$ ٦

تدرب وحل المسائل

مثال ١ ٨) **تمرين:** يمكن استعمال الدالة ع = ط $\sqrt{\frac{٩,٨ل}{٧}}$ ، لتقريب أقصى سرعة يمكن أن يركض بها شخص، حيث (ع) السرعة بالمتر/ ثانية، (ل) طول ساق الشخص بالأمتار.

أ) ما أقصى سرعة يركض بها شخص طول ساقه ١,٥ متر إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟ ٣,٩ م/ ث

ب) ما طول الساق لشخص سرعته القصوى ٢,٧ م/ ث إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟ ٠,٥ م

جـ) هل تزيد السرعة القصوى أم تنقص بزيادة طول الساق؟ انظر الهامش

المثالان ٢، ٣ حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٩) $\sqrt{أ} + ١١ = ٢١$ ١٠٠ ١٠) $\sqrt{ن - ٣} = ٦$ ٣٩ ١١) $\sqrt{ك + ٧} = ٣\sqrt{٢}$ ١١

١٢) ص = $\sqrt{١٢ - ص}$ ٣ ١٣) $\sqrt{ر + ٣} = ر - ٣$ ٦ ١٤) $\sqrt{٥أ - ٣} + ٤ = ١٤$ ٧

١٥) $\sqrt{س^{٢} + ٩س + ١٥} = س + ٥$ ١٦) $\sqrt{\frac{٥ك}{٤}} - ٣ = ٠$ $\frac{١}{٥}$ ١٧) $\sqrt{٥س^{٢} - ٩} = ٢س$ ٣

١٥) لايوجد حل

١٨) **بندول:** يُطلق على الزمن (ن) بالثواني الذي يستغرقه بندول ساعة لعمل دورة كاملة الزمن الدوري. ويُعبَّر عنه بالمعادلة: ن = ٢ ط $\sqrt{\frac{ل}{٣٢}}$ ، حيث (ل) طول البندول بالأقدام.

أ) ما طول بندول ساعة زمنه الدوري ٨ ثوانٍ؟ قرّب إلى أقرب قدم؟ ٥٢ قدمًا

ب) هل زيادة طول البندول تزيد السرعة أم تنقصها؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش

١٩) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في حل المعادلة $\sqrt{٢س - ٧} = س - ٧$ طرائق متنوعة للحل.

أ) بيانيًا: افتح شاشة جديدة، ثم أدخل الطرف الأيمن من المعادلة على صورة ص$_{١}$ = $\sqrt{٢س - ٧}$. وأدخل الطرف الأيسر على صورة ص$_{٢}$ = س − ٧، ثم اضغط مفتاح 2:Add Graphs .

ب) بيانيًا: مثّل ما يظهر على الشاشة. انظر أعمال الطلاب.

جـ) تحليليًا: استعمل مفتاح المقطع من قائمة 3:Intersection Point(s) ، لإيجاد نقطة التقاطع. انظر الهامش

د) تحليليًا: حُلّ المعادلة الجذرية جبريًا، وكيف يمكن مقارنة حلك بالحل الناتج بيانيًا؟ ١٠,٣٨ تقريبًا؛ الحلان متساويان

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ٧؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تمثيلات متعدّدة: يستعمل الطلاب في السؤال ١٩ حل معادلة جذرية جبريًّا و بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية لمقارنة الحلول.

تنبيه لحل سؤال

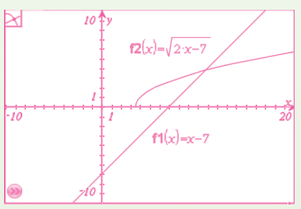
التمثيل البياني: يحتاج السؤال ١٩، إلى توافر ورقة مربعات لدى الطلاب.

إجابات:

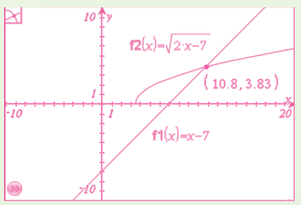
٨جـ) تزيد: إجابة ممكنة: كلما ازداد طول الساق، ازدادت قيمة ما تحت الجذر أيضًا.

١٨ب) تزيد: إجابة ممكنة: إذا كان الطول أكبر، فإن ناتج القسمة سيكون عددًا أكبر من السابق، وكذلك جذر ناتج القسمة سيكون أكبر من سابقه أيضًا.

١٩أ)



١٩جـ)



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١١ – ١٦، ٢٥ – ٣٧
ضمن ضمن المتوسط	١٢ – ١٩، ٢١ – ٢٣، ٢٥ – ٣٧
فوق فوق المتوسط	١٧ – ٣٧

٢٠) **تغليف:** حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتمترًا مكعبًا. تستعمل المعادلة نق = $\sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (ح) حجم العلبة، وَ (ع) ارتفاعها.

أ) إذا كان نصف قطر العلبة ٢,٥ سم، فأوجد ارتفاعها إلى أقرب جزء من مئة. ٨,٢٥ سم

ب) إذا كان ارتفاع العلبة ١٠ سم، فأوجد نصف قطرها إلى أقرب جزء من مئة. ٢,٢٧ سم

مسائل مهارات التفكير العليا

٢١) **تبرير:** بيّن الاختلاف في حل المعادلتين الآتيتين: ٥ = $\sqrt{س}$ + ١ ، ٥ = $\sqrt{س + ١}$. ٢١–٢٣) انظر الهامش

٢٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة جذرية تحتوي متغيرًا في كلا طرفيها، ثم حُلَّ المعادلة.

٢٣) **تبرير:** هل المعادلة الآتية صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ فسّر إجابتك.

$$\sqrt{(س - ٢)^{٢}} = س - ٢$$

٢٤) **تحدٍّ:** حل المعادلة: $\sqrt{س + ٩} = \sqrt{٣} + \sqrt{س}$ ٣

٢٥) **اكتب:** بعض القواعد العامة المتعلقة بحل المعادلات الجذرية، موضِّحًا هذه القواعد من خلال حل معادلات جذرية. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٢٦) ما حل المعادلة:
$\sqrt{س + ٣} - ١ = س - ٤$؟ د

أ) ١، ٦ ج) -١، -٦
ب) ١ د) ٦

٢٧) أي العبارات الآتية تكافئ $\sqrt{\frac{٣٦}{٢٧}}$ ؟ ب

أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ج) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$
ب) $\frac{\sqrt{٣ ٢}}{٣}$ د) $\frac{\sqrt{٣ ٢}}{٢}$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-١)

٢٨) $\sqrt{٧} \times \sqrt{٣} \sqrt{٢} \times \sqrt{٦}$ $\sqrt{٤٢}$ ٢

٢٩) $\sqrt{\frac{٢٧}{٢ أ}}$ $\frac{\sqrt{٣ أ}}{|أ|}$

٣٠) $\sqrt{\frac{٥ جـ^{٥}}{٤ د^{٥}}}$ $\frac{جـ^{٢} \sqrt{٥ جـ د}}{٢ |د^{٣}|}$

٣١) **فيزياء:** قُذف جسم إلى الأعلى من مستوى الأرض حسب المعادلة ع = ٦٩ن – ١٦ ن^{٢} ، حيث (ع) تمثّل ارتفاعه بالأقدام، بعد (ن) من الثواني. أوجد قيم ن عندما يكون ارتفاع الجسم ٩٦ قدمًا. (الدرس ٨-٤) ١,٣ ثانية و ٤,٧ ثوانٍ تقريبًا

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب «أولية». (الدرس ٧-٤) ٣٢) (٢س + ٥)(س + ١) ٣٣) (٢ب + ٣)(٣ب – ٢)

٣٢) ٢س^{٢} + ٧س + ٥ ٣٣) ٦ب^{٢} + ٥ب – ٦ ٣٤) ٨ك^{٢} – ١٩ك + ٩ أولية

حدّد العبارات الوحيدة الحد فيما يأتي، واكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك: (الدرس ٦-١) انظر الهامش

٣٥) ١٢ ٣٦) ٤س^{٣} ٣٧) أ – ٢ب

٤ التقويم

تعلّم سابق: اطلب إلى الطلاب توضيح كيف ساعد الدرس السابق حول العمليات على العبارات الجذرية على فهم درس اليوم حول المعادلات الجذرية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين (٩– ٢، ٩– ٣) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٢)، ص (٦٨)

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: **اطلب إلى الطلاب الكتابة في مدوّنة الصف المحمية عن الحلول الدخيلة، واطلب إليهم تفسير معنى الحلول الدخيلة، وكيف يمكن التحقّق من الحلول الدخيلة بكلتا الطريقتين الجبرية والبيانية.**

إجابات:

٢١) إجابة ممكنة: في المعادلة الأولى، يتعين عليك وضع الجذور في طرف أولًا، وذلك بطرح ١ من الطرفين. ثم تربيع الطرفين لإيجاد قيمة س، أما في المعادلة الثانية، فإن الجذر في طرف وحده؛ لذا ربّع الطرفين أولًا، ثم اطرح ١ من كلّ طرف لحل المعادلة وإيجاد قيمة س.

٢٢) إجابة ممكنة: $\sqrt{٢س - ١} = س$ ؛ ١

٢٣) أحيانًا: المعادلة صحيحة لقيم س ≤ ٢، وخطأ عندما س > ٢.

٢٥) إجابة ممكنة: جمع أو طرح العبارات التي ليست تحت الجذر في كل طرف. ضرب أو قسمة القيم التي ليست تحت الجذر لكل طرف. ربّع طرفي المعادلة. وحُلّ لإيجاد المتغيّر كما عملت سابقًا. انظر أمثلة الطلاب.

٣٥) نعم؛ ١٢ عدد حقيقي فهو وحيدة حد.

٣٦) نعم؛ ٤س^{٣} هو ضرب عدد في متغير مضروبًا في نفسه ثلاث مرات.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: بيّن للطلاب أن الوسط الهندسي لعددين موجبين، هو الجذر التربيعي الموجب لحاصل ضربهما، واطلب إليهم إيجاد عددين صحيحين زوجيَّين وموجبين وسطهما الهندسي ٤ $\sqrt{٥}$. وبما أن: $\sqrt{٤ ٥} = \sqrt{س (س+٢)}$ ، إذن س = ٨ أو –١٠، وبما أن العددين موجبان، إذن فالحل هو ٨ فقط، فتكون س+ ٢ = ١٠ والعددان هما ٨، ١٠.

٣٧) لا؛ أ –٢ب فيه طرح، وليس ضرب أعداد ومتغيرات فقط.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٩ - ٣

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٤)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٣ تدريبات إعادة التعليم
المعادلات الجذرية

المعادلات الجذرية، المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر تُسمّى معادلات جذرية. ويمكنك حلّ هذه المعادلات باستعمال الخطوتين الآتيتين:

الخطوة ١، اجعل المتغير الذي تريد إيجاد قيمته في طرف من المعادلة.

الخطوة ٢، ربّع كل طرف من المعادلة للتخلص من الجذر.

مثال ١

حلّ المعادلة $\sqrt{\text{س}} = ١٦$.

$\sqrt{\text{س}} = ١٦$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{\text{س}})^{٢} = (١٦)^{٢}$	اضرب الطرفين في ٢
$\text{س} = ٢٥٦$	بتبسط
$(٢٥٦)^{\frac{١}{٢}} = (\sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}}$	ربّع الطرفين
$\text{س} = ١٠٢٤$	بتبسط

الحلّ هو ١٠٢٤، وهو يحقق المعادلة الأصلية عند تعويضه فيها.

مثال ٢

حلّ المعادلة $\sqrt{٤\text{س} - ٧} + ٢ = \text{س}$.

$\sqrt{٤\text{س} - ٧} = \text{س} - ٢$	المعادلة الأصلية
$٤\text{س} - ٧ = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤$	اطرح ٢ من الطرفين
$٠ = \text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١١$	بتبسط
$٠ = (\text{س} - ١)(\text{س} - ١١)$	حلّل
$\text{س} = ١$ أو $\text{س} = ١١$	خاصية الضرب الصفري

الحلّ هو ٨، وهو يحقق المعادلة الأصلية عند تعويضه فيها.

تمارين

حلّ كلّ معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحلّ:

١) $\sqrt{\text{ب}} = ٨$ ، ٦٤
٢) $\sqrt{\text{ر}} + ٦ = ٣٢$ ، ٦٧٦
٣) $\sqrt{\text{ن}} - ٢ = ٦$ ، ١٦
٤) $\sqrt{\text{ن} - ٢٦} = ٧$ ، ٢٣
٥) $\sqrt{\text{ر}} - ٦ = ٣$ ، ٣٦
٦) $\sqrt{\text{ر}} - ٣ = ٣$ ، ± ٣
٧) $\sqrt{\text{ر}} - ٣ = ٣$ ، ١٢
٨) $\sqrt{٣\text{ر} - ٢} = ٧$ ، $٦\frac{٢}{٣}$
٩) $\sqrt{\text{س} - ٤} = ٦$ ، ٤٠
١٠) $\sqrt{٢\text{م} + ٣} = ٥$ ، ١١
١١) $\sqrt{٣\text{ب} - ٢} + ١٩ = ٢٤$ ، ٩
١٢) $\sqrt{٤\text{س} - ١} = ٣$ ، $\frac{٥}{٢}$
١٣) $\sqrt{٣\text{ر} + ٢} = ٣\sqrt{٢}$ ، $\frac{١٠}{٣}$
١٤) $\sqrt{\frac{\text{ب}}{٣}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$
١٥) $\sqrt{\frac{\text{ب}}{٨}} = ٤$ ، ١٢٨
١٦) $\sqrt{٦\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} = ٢$ ، $-\frac{١}{٤}$
١٧) $\sqrt{\frac{\text{ب}}{٣}} + ٨ = ٦$ ، ١٢
١٨) $٢\sqrt{\frac{\text{ب}}{٥}} + ٣ = ١١$ ، $٢٦\frac{٢}{٣}$

تدريبات حل المسألة (١٦)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٣ تدريبات حل المسألة
المعادلات الجذرية

١) **غواصات**، تعطى المسافة التقريبية ف بالأميال التي يستطيع منظار غواصة كشفها على سطح الماء بالمعادلة: $ف = ٢٢ ، ١\sqrt{ع}$ ، حيث ع الارتفاع بالأقدام فوق سطح الماء. كم يجب أن يكون ارتفاع منظار غواصة فوق الماء لتحديد مكان سفينة تبعد ٦ أميال؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.
٢٤,٢ قدما

٢) **هندسة**، أوجد قيمة س إذا كان محيط المثلث أدناه يساوي ٢٥ مترًا.

س = ٨

٣) **صناعة الأخشاب**، يقدّر قانون (دويل) كمية الخشب ك (بوحدة حجم لوح طوله ١ قدم، وعرضه ١ قدم وارتفاعه ١ بوصه) التي يمكن استخلاصها من جذوع الأشجار بالمعادلة $ك = ل(\frac{ق - ٤}{٢٥})^{٢}$، حيث ل طول الخشب (بالأقدام)، ق طول قطر الجذع (بالبوصات). افترض أن شاحنة تحمل ٢٠ جذعًا متساوية الأقطار، طول كلٍّ منها ٢٥ قدمًا، وأن كمية الأخشاب الناتجة عنها تساوي ٦٠٠٠ وحدة، فقدّر قطر الجذع إلى أقرب بوصة مفترضًا أن الجذوع كلها أسطوانية منتظمة.
١٨ بوصة

٤) **مكافحة حرائق**، يمكن حساب معدّل انسياب الماء لإخماد حريق من خرطوم ماء بالمعادلة: $م = ٢٦,٩\sqrt{ض}$، حيث م معدّل انسياب الماء (بالجالون لكل دقيقة)، ض ضغط فوهة الخرطوم (بالباوند لكل بوصة مربعة)، ق طول قطر الخرطوم (بالبوصات). ولإخماد حريق بفاعلية، يجب أن يكون معدّل انسياب الماء من خرطومين ٢٤٣٠ جالونًا في الدقيقة الواحدة. فإذا كان طول قطر كل خرطوم ٣ بوصات، وضغط فوهة أحدهما يساوي ٤ أمثال ضغط فوهة الخرطوم الثاني، فما ضغط فوهة كلٍّ منهما؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.
١١,٢ باوند لكل بوصة مربعة، ٤٤,٨ باوند لكل بوصة مربعة.

٥) **هندسة**، صيغة المساحة الجانبية لمخروط دائري قائم هي: $م = ط نق\sqrt{ن^{٢} + ع^{٢}}$
حيث نق طول نصف قطر القاعدة، ع الارتفاع.

أ) إذا كانت المساحة الجانبية للمبنى على شكل مخروط دائري قائم هي ١٢٧,٥٤ سم^{٢}، وطول نصف قطره ٣,٥ سم، فأوجد ارتفاعه إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر.
١١,١ سم

ب) ما مساحة فوهة المبنى أو قاعدة المخروط؟
٣٨,٥ سم^{٢}

التدريبات الإثرائية (١٧)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٣ التدريبات الإثرائية
أكثر من جذر تربيعي واحد

تعلّمتَ بأنه للتخلص من الجذر التربيعي في معادلة، تحتاج أوّلًا إلى وضع الجذر التربيعي في طرف، ثم تربيع الطرفين، وأخيرًا حلّ المعادلة الناتجة.

وعلى أيّ حال، توجد معادلات تحتوي كل منها على أكثر من جذر تربيعي واحد. والتربيع مرة واحدة فقط لا يكفي للتخلص من جميع هذه الجذور التربيعية.

مثال

حلّ المعادلة: $\sqrt{\text{س} + ٧} = \sqrt{\text{س}} + ١$

$\sqrt{\text{س} + ٧} = \sqrt{\text{س}} + ١$	أحد الجذرين في طرف
$(\sqrt{\text{س} + ٧})^{٢} = (\sqrt{\text{س}} + ١)^{٢}$	ربّع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي
$\text{س} + ٧ = \text{س} + ٢\sqrt{\text{س}} + ١$	بتبسط، وربّع الطرف الأيسر مستعملًا طريقة التوزيع
$\text{س} + ٧ - \text{س} - ١ = ٢\sqrt{\text{س}}$	بتبسط
$٦ = ٢\sqrt{\text{س}}$	بتبسط، وضع الجذر التربيعي في طرف
$٣ = \sqrt{\text{س}}$	اقسم الطرفين على ٢
$٩ = \text{س}$	ربّع الطرفين

تحقق، عوّض في المعادلة الأصلية للتأكد من صحة إجابتك.

$\sqrt{٩ + ٧} = \sqrt{٩} + ١$	عوّض عن س = ٩
$\sqrt{١٦} = ٣ + ١$	بتبسط
$٤ = ٤$ ✓	

لذا فإنّ ٩ هو الحلّ.

تمارين

حلّ كلّ معادلة فيما يأتي:

١) $\sqrt{\text{س} + ١٣} - ٢ = \sqrt{\text{س} + ١}$ ، ٣
٢) $\sqrt{\text{س} + ١١} = \sqrt{\text{س} + ٣} + ٢$ ، -٢
٣) $\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣ = \sqrt{\text{س} - ٦}$ ، ٧
٤) $\sqrt{\text{س} + ٢١} = \sqrt{\text{س}} + ٣$ ، ٤
٥) $\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣ = \sqrt{\text{س} + ٢٠} + ٢$ ، ١٦
٦) $\sqrt{\text{س} - ٦} + ٦ = \sqrt{\text{س} + ١} + ٥$ ، ١٥

كتاب التمارين (٢٣)　دون ضمن فوق

٩ - ٣ المعادلات الجذرية

حلّ كلّ معادلة فيما يأتي، وتحقّق من صحة الحلّ.

١) $\sqrt{\text{ب}} - ٨ = -٦٤$
٢) $\sqrt{\text{ر}} - ٣\sqrt{٤} = ٤٨$
٣) $٢\sqrt{٤\text{ر}} + ٣ = ١١$ ، ٤
٤) $\sqrt{٢\text{ص}} - ٦ = -٢$ ، ٣٢
٥) $\sqrt{\text{ك} + ٢} - ٣ = ٧$ ، ٩٨
٦) $\sqrt{\text{م} - ٥} = ٣\sqrt{٤}$ ، ٥٣
٧) $\sqrt{٥\text{ن} + ١٢} = ٨\sqrt{٦}$ ، ٦٢
٨) $\sqrt{٣\text{جـ} - ١١} + ٢ = ٩$ ، ٢٠
٩) $\sqrt{٢\text{س} + ١٥} + ٥ = ١٨$ ، ٧٧
١٠) $\sqrt{\frac{٣\text{ت}}{٥}} - ٤ = ٢$ ، ٦٠
١١) $٦\sqrt{\frac{٣\text{ص}}{٣}} - ٣ = ٠$ ، $\frac{١}{٤}$
١٢) $٦\sqrt{\frac{٢\text{ن}}{٥}} + ٦ = -٢$ ، $\varnothing$
١٣) ص $= \sqrt{\text{ص} + ٦}$ ، ٣
١٤) $\sqrt{١٥ - ٢\text{س}} = \text{س}$ ، ٣
١٥) $\sqrt{\text{و} + ٤} = \text{و} + ٤$ ، -٤ ، -٣
١٦) $\sqrt{-١٧ - \text{ك}} = \text{ك} - ٥$ ، ٨
١٧) $\sqrt{٥\text{م} - ١٦} = \text{م} - ٢$ ، ٥ ، ٤
١٨) $\sqrt{٢٤ + \text{ك}٨} = \text{ك} + ٣$ ، ٥ ، -٣
١٩) $\sqrt{٤\text{ت} + ١٧} - \text{ت} - ٣ = ٠$ ، ٢
٢٠) $\sqrt{٤\text{م}٣ + ٢٨} = \text{م} - ٤$ ، -١
٢١) $٢\sqrt{٣\text{س}^{٢} - ٩} = \text{س}$ ، ٣

٢٢) **كهرباء**، بحسب فرق الجهد في دائرة كهربائية بالمعادلة $ف = \sqrt{\text{قد} \times \text{م}}$، حيث (قد) تمثّل القدرة الكهربائية بالواط، (م) تمثّل المقاومة بالأوم.

أ) إذا كان فرق الجهد لدائرة كهربائية ١٢٠ فولت، وتُنتج الدائرة ١٥٠٠ واط، فما مقاومة الدائرة؟ ٩,٦ أوم

ب) إذا صُمّم جهاز كهربائي يعمل على فرق جهد ١١٠ فولت، ومقاومته ١٠ أوم، فما قدرة الجهاز؟ ١٢١٠ واط

٢٣) **سقوط حر**، على افتراض أنه لا توجد مقاومة للهواء، فإنه يمكن استعمال المعادلة $ن = \sqrt{\frac{ع}{١٦}}$ في حساب الزمن (ن) بالثواني الذي يستغرقه جسم ليسقط من ارتفاع (ع) قدم.

أ) إذا قفز مظلي من طائرة في الهواء لمدة ١٠ ثوانٍ قبل أن يفتح مظلته، فكم قدمًا قطع في أثناء ذلك؟ ١٦٠٠ قدم

ب) لنفترض أن مظليًّا آخر قفز سقوطًا حرًّا لمدة ٦ ثوانٍ، فكم قدمًا قطع في أثناء ذلك في الهواء؟ ٥٧٦ قدمًا

ملحوظات المعلم

٩-٤ نظرية فيثاغورس

لماذا ؟

تُقاس أجهزة التلفاز بطول شاشاتها، حيث يمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد قياس القطر إذا كان ارتفاع الشاشة وعرضها معلومين.

نظرية فيثاغورس: يُسمّى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم **وترًا**، وهو أطول الأضلاع في المثلث ويسمّى كلٌّ من الضلعين الآخرين **ساقًا**.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أحل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس.
- أحدّد إذا كان المثلث المُعطى قائم الزاوية أم لا.

المفردات

الوتر
الساق
المعكوس
ثلاثية فيثاغورس

obeikaneducation.com

مفهوم أساسي — نظرية فيثاغورس

أضف إلى مطويتك

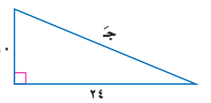
التعبير اللفظي: إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي ضلعيه (ساقيه).

الرموز: $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

مثال ١ — إيجاد طول ضلع في مثلث قائم

أوجد طول الضلع المجهول في كل مما يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

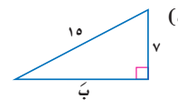
أ)



$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$	نظرية فيثاغورس
$جـ^٢ = ١٠^٢ + ٢٤^٢$	أ = ١٠، ب = ٢٤
$جـ^٢ = ١٠٠ + ٥٧٦$	ربّع
$جـ^٢ = ٦٧٦$	بسّط
$جـ = \pm\sqrt{٦٧٦}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$جـ = \pm ٢٦$	$(\pm ٢٦)^٢ = ٦٧٦$

بما أن طول الضلع لا يكون سالبًا؛ لذا فإن طول الضلع المجهول هو ٢٦ وحدة.

ب)

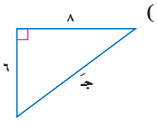


$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$	نظرية فيثاغورس
$١٥^٢ = ٧^٢ + ب^٢$	جـ = ١٥، أ = ٧
$٢٢٥ = ٤٩ + ب^٢$	ربّع
$١٧٦ = ب^٢$	بسّط
$ب = \pm\sqrt{١٧٦}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$ب \approx \pm ١٣,٢٧$	استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt{١٧٦}$

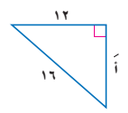
فيكون الطول المجهول هو ١٣,٢٧ وحدة تقريبًا.

تحقق من فهمك

ا أ) ١٠



ا ب) ١٠,٥٨



إرشادات للدراسة

في المثلث أ ب جـ يُرمز للضلع المقابل للزاوية أ بالرمز أ، والمقابل للزاوية ب بالرمز ب، والمقابل للزاوية جـ بالرمز جـ.

٩-٤ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٩ - ٤

حل المعادلات التربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

الدرس ٩ - ٤

حل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس.

تحديد ما إذا كان المثلث المعطى قائم الزاوية أم لا.

ما بعد الدرس ٩ - ٤

استعمال قانون المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثمَّ اسأل:

- ما شكل معظم شاشات التلفاز؟ مستطيلات
- أي قياسات التلفاز الآتية أطول: طوله، أم عرضه، أم قطره؟ قطره
- إذا رسمت مثلثًا لتمثيل ارتفاع التلفاز وعرضه وقطره، فأيٌّ منها يقابل الزاوية القائمة؟ القطر

مصادر الدرس ٩- ٤

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (١٣٨)	• تنويع التعليم ص (١٣٦، ١٣٨)
كتاب التمارين	ص (٢٤)	ص (٢٤)	ص (٢٤)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) • التدريبات الإثرائية، ص (٢١)

نظرية فيثاغورس

المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم.

المثال ٢ يُبيّن طريقة استعمال نظرية فيثاغورس لحل مسائل من واقع الحياة.

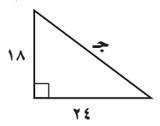
التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقّق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

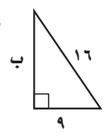
مثالان إضافيان

١ **أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ ممَّا يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

أ) ٣٠ وحدة



ب) ١٣,٢٣ وحدة



٢ **تلفاز:** قطر شاشة تلفاز ٣٢ بوصة، وعرضها ٢١ بوصة. أوجد طول الشاشة. ٢٤,١٥ بوصة تقريبًا

المثلثات القائمة الزاوية

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال معكوس نظرية فيثاغورس؛ لتحديد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

مثال إضافي

٣ حدِّد ما إذا كانت الأطوال "٧، ١٢، ١٥" يمكن أن تشكل مثلثًا قائم الزاوية أم لا.

لا. $٧^٢ + ١٢^٢ \neq ١٥^٢$

الزورق النهري زورق شراعي يتوسطه صارٍ عمودي على سطحه يثبت تقريبًا في الثلث الأول من مقدمته. ويتصل بهذا الصاري أفقيًّا عمود آخر يسمى البومة يكوّن قاعدة للشراع المثلث على الصاري.

وللقارب شراعان: أمامي؛ وهو الصغير، وخلفي وهو الشراع الرئيسي.

الربط مع الحياة

مثال ٢ من واقع الحياة إيجاد طول ضلع في مثلث قائم

إبحار: يكون شراع الزورق النهري على صورة مثلثٍ قائم الزاوية كما في الشكل المجاور، أوجد ارتفاع هذا الشراع.

$٦^٢ = ع^٢ + ٣^٢$	نظرية فيثاغورس
$٣٦ = ع^٢ + ٩$	ربّع
$٢٧ = ع^٢$	اطرح ٩ من كلا الطرفين
$ع \approx \pm ٥,٢$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$ع \approx ٥,٢$	استعمل القيمة الموجبة

ارتفاع الشراع ٥,٢ أمتار تقريبًا.

تحقق من فهمك

٢) لنفرض أن طول أطول ضلع في الشراع ٩ م، وطول أقصر ضلع فيه ٤ م. فأوجد ارتفاع الشراع. ١,٨ أمتار تقريبًا

المثلث القائم الزاوية: إذا استُبدل الفرض والنتيجة أحدهما مكان الآخر في العبارة الشرطية (إذا كان فإن)، فإن نتيجة ذلك سيكون **معكوس** العبارة الأصلية. ويمكن استعمال معكوس نظرية فيثاغورس لتحديد إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

مفهوم أساسي معكوس نظرية فيثاغورس

أضف إلى مطويتك

إذا كانت الأطوال أ، ب، جـ لأضلاع مثلث تحقق المعادلة $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$، فإن المثلث قائم الزاوية.

وإذا كانت $جـ^٢ \neq أ^٢ + ب^٢$، لا يكون المثلث قائم الزاوية .

ثلاثية فيثاغورس: مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تحقق المعادلة $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$، حيث جـ أكبر هذه الأعداد. ومن الأمثلة على ذلك "٣، ٤، ٥"، "٥، ١٢، ١٣". وتحقق مضاعفات ثلاثيات فيثاغورس أيضًا معكوس نظرية فيثاغورس؛ لذا فإن "٦، ٨، ١٠" أيضًا من ثلاثيات فيثاغورس.

مثال ٣ التحقق من أن المثلث قائم الزاوية

حدّد إذا كانت الأطوال "٩، ١٢، ١٦" يمكن أن تشكِّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا.

بما أن طول الضلع الأكبر ١٦، فإن جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢.

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$	نظرية فيثاغورس
$١٦^٢ \stackrel{؟}{=} ٩^٢ + ١٢^٢$	عوّض جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢
$٢٥٦ \stackrel{؟}{=} ٨١ + ١٤٤$	ربّع
$٢٥٦ \neq ٢٢٥$	اجمع

بما أن $جـ^٢ \neq أ^٢ + ب^٢$، فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكّل مثلثًا قائم الزاوية.

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

٣أ) ٣٠، ٤٠، ٥٠ نعم؛ $٣٠^٢ + ٤٠^٢ = ٥٠^٢$ ٣ب) ٦، ١٢، ١٨ لا؛ $٦^٢ + ١٢^٢ \neq ١٨^٢$

تنويع التعليم

فوق

إذا أراد بعض الطلاب المزيد من الاستفادة من ثلاثيات نظرية فيثاغورس،

فقم واطلب إليهم استعمال الوسائل اليدوية بالأطوال المتساوية، ويمكن أن تتضمّن الوسائل اليدوية هذه قطع الجبر والقوالب وقضبان الأعداد الصحيحة أو المكعبات، بحيث تمثل كل مجموعة منها طول ضلع من أضلاع المثلث، فيكون العدد الأكبر فمثلًا لطول (جـ)، والعدد ان الآخران يمثلان طولي الضلعين الآخرين (أ، ب) ثم استخدام القاعدة: $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ، فإذا كانت: $جـ^٢ \neq أ^٢ + ب^٢$ ، فإن قياسات هذه الأضلاع لاتشكّل مثلثًا قائم الزاوية.

تأكد

مثال ١ أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث ممّا يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر.

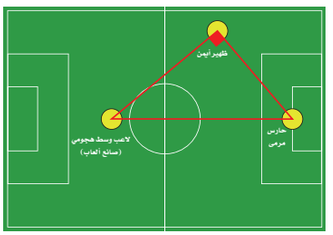
١) ٢٠,٦٢ — ٢١، ٤، بَ

٢) ١٨,٠٣ — أ، ٦، ١٩

٣) ١٤,٤٢ — ١٢، ٨، جـ

مثال ٢

٤) **كرة قدم:** يوضح الشكل المجاور ملعب كرة قدم مستطيل الشكل.



أ) إذا كان طول قطر الملعب ١٢٥م، وعرضه ٧٥م، فكم طوله؟ ١٠٠ م

ب) في لحظة معينة، كما في الشكل، مرَّر حارس المرمى الكرة إلى الظهير الأيمن الذي يبعد عنه مسافة ٣٠ م، فركلها مباشرة إلى لاعب الوسط الهجومي الذي يقف على مسافة ٧٢ م منه. فكم يبعد لاعب الوسط الهجومي عن حارس مرماه؟ ٧٨م

مثال ٣ حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

٥) ٨، ١٢، ١٦ لا

٦) ٧، ٢٤، ٢٥ نعم

٧) ١٥، ٢٥، ٤٥ لا

تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث ممّا يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئةٍ، إذا لزم الأمر:

٨) ٢، ١٢، بَ، ١١,٨٣

٩)

١٠) ٢٠,٢٧ — ٢٠، جـ، ١١٧

١١) ٥,٢٩ — جـ، ٥٧، ٢٣٧

١٢) ٢٤ — ٢٥، ٧، أ

١٣) ٥,٦٦ — أ، ٣٧، ٣٥٧

١٤) ٢٠,٤٩ — ١٦، بَ، ٢٦

مثال ٢

١٤) **تلفاز:** أراد مهند شراء طاولة مستطيلة يضع عليها تلفازًا، قطر قاعدته ٢٧ بوصة، فإذا كان بعدا الطاولة ٢٠ بوصة و٢٦ بوصة. فهل تناسب الطاولة التلفاز؟ فسّر إجابتك.

مثال ٣ حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا، ثم حدّد إذا كانت تشكّل ثلاثية فيثاغورس:

١٥) ٩، ٤٠، ٤١ نعم؛ نعم

١٦) ٣، ٢٧٠، ٢٧١ لا؛ لا

١٧) ٧، ٥٧، ١٤ لا؛ لا

١٨) ٨، ٣١,٥، ٣٢,٥ نعم؛ لا

١٩) ٦٥٧، ٢٧٦، ٩٧٧ لا؛ لا

٢٠) ١٧، ٣٣، ٩٨ لا؛ لا

١٤) نعم: إجابة ممكنة: قطر الطاولة ٣٢,٨ بوصة، لذا فهي مناسبة للتلفاز.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٨–١٣، ٣٦–٤٩
ضمن ضمن المتوسط	٨، ١١، ١٤، ١٥–٢١ (فردي)، ٣٢، ٣٣، ٣٦–٤٩
فوق فوق المتوسط	١٤–٤٩

المحتوى الرياضي

نظرية فيثاغورس:

يمكن استعمال نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد طول ضلع في المثلث القائم الزاوية، عندما يكون طولا الضلعين الآخرين للمثلث القائم الزاوية معلومين. ولإيجاد طول ضلع، اكتب معادلة فيثاغورس، بدلالة هذا الضلع. فمثلًا، لإيجاد طول الوتر، اكتب النظرية بدلالة (جـَ). $جـ = \sqrt{أ^2 + ب^2}$

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ٧؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

تجنّب الخطأ: بيّن للطلاب أن القيمة الكبرى في ثلاثية فيثاغورس هي الوتر، وأن القيمتين الأخريين هما الضلعان الآخران.

المعكوس: أخبر الطلاب أنه ليس ضروريًّا أن يكون معكوس النظرية صحيحًا، إلّا أن معكوس نظرية فيثاغورس صحيح.

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا الرقمية: اطلب إلى بعض الطلاب إحضار أشياء أو صور لأشياء لعرضها (مثل صورة شراع زورق نهري بشكل مثلث قائم). قس طولَي ضلعين فيه، واطلب إلى أحد الطلاب استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الضلع الثالث.

٤ التقويم

تعلم لاحق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا عن ارتباط درس اليوم بدرس الغد المتعلّق بقانون المسافة بين نقطتين، وقانون نقطة المنتصف.

التقويم التكويني

اختبر مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في النصف الأول من الفصل بإعطائهم:

اختبار منتصف الفصل، ص (٧٠)

إجابات:

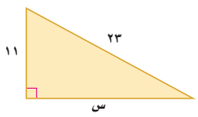
٢٨) أ = ٣٦، ب = ٧٧

٢٩) ب = ٣٥، جـ = ٣٧

٣٠) أ = ١٦، ب = ٦٣، جـ = ٦٥

٣١) أ = ٩، ب = ٤٠، جـ = ٤١

٢١) **هندسة:** أجب عن الأسئلة الآتية اعتمادًا على المثلث المجاور:

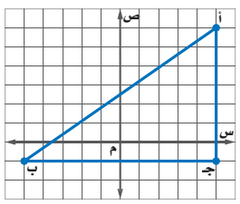


أ) ما قيمة س؟ ٢٠,٢٠ وحدة تقريبًا

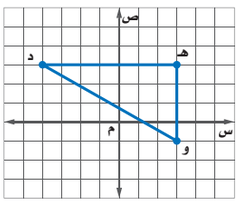
ب) ما مساحة المثلث؟ ١١١,١ وحدة مربعة تقريبًا

أوجد طول الوتر في المثلثين الآتيين وقرِّب الحل إلى أقرب جزء من مئة:

٢٢) ١٢,٢١

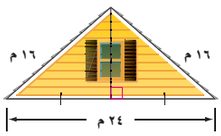


٢٣) ٨,٠٦

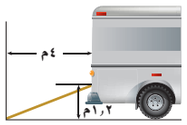


٢٤) **هندسة:** أوجد طول قطر مكعب طول ضلعه ٥ سم. ٥√٣ سم = ٨,٦٦ سم تقريبًا

٢٥) **منزل:** يمثّل الشكل المجاور الواجهة العلوية لمنزل عرضها ٢٤ مترًا، وطولا الضلعين المائلين لها ١٦ مترًا. أوجد ارتفاع الواجهة مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من المتر. ١٠,٦ أمتار



٢٦) **شاحنات:** صنع أحمد منحدرًا خشبيًّا لسحب مجموعة صناديق على عربة ذات عجلات من مخزنه إلى الشاحنة كما في الشكل. فما طول المنحدر؟ ٤,١٨ م تقريبًا



٢٧) **هندسة:** أوجد طول قطر مربع مساحته ٢٤٢ سم^{٢}. ٢٢ سم

إذا كان جـ يمثّل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث ممّا يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة إن كان ذلك ضروريًّا: انظر الهامش

٢٨) أ = س، ب = س + ٤١، جـ = ٨٥

٢٩) أ = ١٢، ب = س − ٢، جـ = س

٣٠) أ = س − ٤٧، ب = س، جـ = س + ٢

٣١) أ = س − ٣٢، ب = س − ١، جـ = س

٣٢) **هندسة:** طول أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية أقل بمقدار ٨ سم عن طول الضلع الآخر، وطول وتره ٣٠ سم. أوجد طول كلٍّ من ضلعيه. ٢٤,٨٣ سم تقريبًا، ١٦,٨٣ سم تقريبًا.

٣٣) **الكعبة المشرفة:** باب الكعبة المشرفة مصنوع من الذهب الخالص على هيئة مستطيل أبعاده التقريبية ٢,٣م، ١,٧م. فكم طول قطره؟ ٣,٦م تقريبًا

الربط مع الحياة

يقع باب الكعبة المشرفة في الجهة الشرقية منها، والباب الحالي هدية من الملك خالد بن عبدالعزيز، وصُنع من ٢٨٠ كيلوجرامًا من الذهب النقي عيار ٩٩,٩٩، ومفتاحه عند بني شيبة الذين يتولون سدانة الكعبة كما أوصى بذلك النبي صلى الله عليه وسلم.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أنه إذا كانت قيمة (س) أي عدد فردي، فإن: س، $\frac{١}{٢}$(س^{٢} − ١)، $\frac{١}{٢}$(س^{٢} + ١) تكوّن ثلاثيات فيثاغورس، واطلب إليهم استعمال هذه العبارات؛ لإيجاد مجموعات أخرى من ثلاثيات فيثاغورس غير المعطاة في الدرس، وأن يتحقّقوا من أنها تُشكّل ثلاثيات فيثاغورس بالفعل.

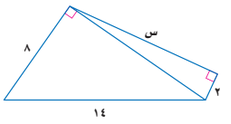
إجابة ممكنة: إذا كانت س = ١١، فإن ١١، ٦٠، ٦١ تُمثّل ثلاثية فيثاغورس

(٦١)^{٢} = (٦٠)^{٢} + (١١)^{٢}

٣٧٢١ = ٣٦٠٠ + ١٢١

٣٧٢١ = ٣٧٢١

مسائل مهارات التفكير العليا



٣٤) **تحدٍّ:** أوجد قيمة س في الشكل المجاور؟ $2\sqrt{8}$

٣٥) **تبرير:** أعطِ مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية:
"تتساوى مساحتا مثلثين قائمين إذا تساوى طولا وتريهما". انظر الهامش

٣٦) **اكتشف الخطأ:** يحاول حسام وحازم تحديد إن كانت الأعداد "٣٦، ٧٧، ٨٥" تشكّل ثلاثية فيثاغورس. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

حسام
$٣٦^{٢} + ٧٧^{٢} \stackrel{؟}{=} ٨٥^{٢}$
$١٢٩٦ + ٥٩٢٩ \stackrel{؟}{=} ٧٢٢٥$
$٧٢٢٥ = ٧٢٢٥$
نعم

حازم
$٣٦^{٢} + ٨٥^{٢} \stackrel{؟}{=} ٧٧^{٢}$
$١٢٩٦ + ٧٢٢٥ \stackrel{؟}{=} ٥٩٢٩$
$٥٩٢٩ \neq ٩٠٢١$
لا

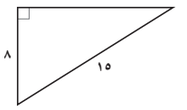
٣٦) حسام؛ يجب أن يساوي مربع العدد الأكبر مجموع مربعي العددين الآخرين، حيث تتحقق عندها ثلاثية فيثاغورس.

٣٧) **اكتب:** وضّح كيف تحدّد إن كانت أطوال ثلاث قطع مستقيمة تشكّل مثلثًا قائم الزاوية. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٣٨) **هندسة:** أوجد الطول المجهول في الشكل المجاور.

جـ



أ) -١٧ جـ) $\sqrt{١٦١}$

ب) $-\sqrt{١٦١}$ د) ١٧

٣٩) ما حل المعادلة: $س + ١ = \sqrt{س + ١}$ ب

أ) ٠, ٣ جـ) ٣

ب) صفر د) ليس لها حل

٤٠) **إجابة قصيرة:** يتقاضى سبّاك ٤٠ ريالاً عن الساعة الأولى إذا عمل خارج محله، بالإضافة إلى مبلغ ٨ ريالات عن كل $\frac{١}{٢}$ ساعة إضافية. فإذا عمل السبّاك ٤ ساعات، فكم ريالاً يتقاضى؟ ٨٨ ريالاً

مراجعة تراكمية

حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقَّق من صحة الحل: (الدرس ٩-٣)

٤١) $\sqrt{١٠س} = ١٠$ ١٠

٤٢) $\sqrt{س + ١} + ٢ = ٤$ ٣

٤٣) $\sqrt{س - ١٥} - ٣ = \sqrt{س}$ لايوجد حل

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-٢)

٤٤) $\sqrt{١٨} - ٢\sqrt{٤} - ٢\sqrt{}$

٤٥) $٣\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٩}$ $١٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٥}$

٤٦) $٤\sqrt{٣} + ٦\sqrt{١٢}$ $١٦\sqrt{٣}$

أوجد ناتج الضرب في كل ممّا يأتي: (الدرس ٦-٦)

٤٧) $(ب + ٨)(ب + ٢)$ $ب^{٢} + ١٠ب + ١٦$

٤٨) $(س - ٤)(س - ٩)$ $س^{٢} - ١٣س + ٣٦$

٤٩) $(ص + ٤)(ص - ٨)$ $ص^{٢} - ٤ص - ٣٢$

تنبيه!

اكتشف الخطأ في السؤال ٣٦، يتعين على الطلاب ملاحظة أن حسامًا وحازمًا طبّقا نظرية فيثاغورس بطريقتين مختلفتين؛ لذا اطلب إليهم اختيار الحل الصحيح، وتفسير سبب كونه صحيحًا.

إجابات:

٣٥) إجابة ممكنة: طول وتر المثلث القائم الزاوية الذي طولا ضلعيه ٣سم وَ ٤سم هو ٥ سم، ومساحته ٦ سم^{٢}. وطول وتر المثلث القائم الذي طولا ضلعيه ٢سم وَ $\sqrt{٢١}$سم هو ٥ سم أيضًا. إلّا أن مساحته $\sqrt{٢١}$ سم^{٢} والتي لا تكافئ ٦ سم^{٢}.

٣٧) إجابة ممكنة: بحسب معكوس نظرية فيثاغورس، إذا كان $أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$، فإن أ و ب و جـ تُشكّل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؛ لذا تحقّق ممَّا إذا كان مربع العدد الأكبر يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٩ - ٤

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٨)　دون

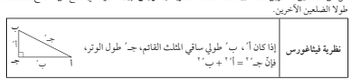
الاسم _____ التاريخ _____

٩-٤ تدريبات إعادة التعليم

نظرية فيثاغورس

نظرية فيثاغورس: يسمّى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم وتراً، وهو أطول الأضلاع في المثلث، ويسمّى كلٌّ من الضلعين الآخرين ساقاً. ويمكنك استعمال **نظرية فيثاغورس** لإيجاد طول أي ضلع من أضلاع المثلث القائم إذا عُلم طولا الضلعين الآخرين.

نظرية فيثاغورس	إذا كان أ، ب، طولي ساقي المثلث القائم، جـ طول الوتر، فإنّ $جـ^2 = أ^2 + ب^2$



مثال أوجد طول الضلع المجهول في الشكل المجاور.

$جـ^2 = أ^2 + ب^2$ نظرية فيثاغورس

$جـ^2 = 25 + (12)^2$ أ = ٥، ب = ١٢

$جـ^2 = 169$ بسّط

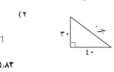
$جـ = \sqrt{169}$ أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$جـ = 13$

فيكون طول الوتر هو ١٣.

تمارين

أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ ممّا يأتي. وقرّب الحلّ إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

١)  ٥٠

٢) ٤٥.٨٣

٣) ٢٥.٣٦

٤) ١٦.١٢

٥) ٥.٥٧

٦) ٨

تدريبات حل المسألة (٢٠)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٤ تدريبات حل المسألة

نظرية فيثاغورس، تبسيط العبارات الجذرية

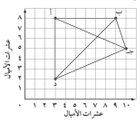
١) **هندسة،** أوجد طول القطر ق للمربع المظلل في الشكل أدناه، حيث طول ضلعه ٩٠ قدماً. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

١٢٧.٣ قدم

٢) **مثلثات،** صمّم كل طالب في الصف الثالث المتوسط في مدرسة ابن الهيثم مثلثًا قائم الزاوية خاصًا به، باستعمال عيدان من القش. ثم أنشأ أحد الجدول الآتي، وفيه أطوال أضلاع كل مثلث، لكنه أخطأ عند تسجيل نتيجة أحد الطلاب. من الطالب الذي سُجّلت نتيجته بطريقة خطأ؟ **سامر**

أطوال الأضلاع						
الطالب	أ	ب	جـ	الطالب	أ	ب	جـ
ماجد	٣	٤	٥	سامر	٨	١٤	١٦
سعيد	٧	٢٤	٢٥	لطفي	٥	١٢	١٣
فارس	٩	١٢	١٥				

٣) **خرائط،** أوجد المسافة بين الموقعين أ، جـ في الشكل الآتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر. **٢٦.٢ ميلا**

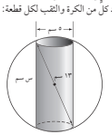


٤) **أجهزة تلفاز،** تُحدَّد قياسات أجهزة التلفاز بقياس قطر شاشة العرض. فمثلاً: تلفاز قياسه ٢٧ بوصة يعني أنّ طول قطر شاشته ٢٧ بوصة.

أكمل الجدول الآتي لإيجاد ارتفاع شاشة كل تلفاز إذا عُلم قياسه وعرض شاشته، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عدد كلّيّ:

قياس التلفاز	العرض (بالبوصات)	الطول (بالبوصات)
١٩ بوصة	١٥	**١٢ تقريبا**
٢٥ بوصة	٢١	**١٤ تقريبا**
٣٢ بوصة	٢٥	**٢٠ تقريبا**
٥٠ بوصة	٤٠	**٢٠ تقريبا**

٥) **تصنيع،** يعمل محمود في شركة لتصنيع قطع سيارات، ويتحدّد عمله في حفر ثقب في كرة فولاذية. يبيّن الشكل الآتي أبعاد كلٍّ من الكرة والثقب لكل قطعة:



أ) ما عمق الثقب؟ **١٢ سم**

ب) ما طول نصف القطر لكرة إذا كان عرض الثقب فيها ٧ سم، وعمقه ٢٤ سم؟ **١٢.٥ سم**

التدريبات الإثرائية (٢١)　فوق

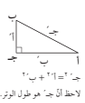
الاسم _____ التاريخ _____

٩-٤ التدريبات الإثرائية

ثلاثيات فيثاغورس

نذكّر نظرية فيثاغورس:

إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنّ مربع طول الوتر يساوي مجموع مربّعي طولي ضلعيه (ساقيه).



$جـ^2 = أ^2 + ب^2$

لاحظ أنّ جـ هو طول الوتر.

الأعداد الصحيحة ٣، ٤، ٥ تحقّق نظرية فيثاغورس، $٣^2 + ٤^2 = ٥^2$

ويمكن أن تشكّل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية. $٩ + ١٦ = ٢٥$

وبصورة عامة فإنّه لأي عدد صحيح موجب ن، $٢٥ = ٢٥$

تحقّق الأعداد ٣ن، ٤ن، ٥ن نظرية فيثاغورس. افترض ن = ٢، $٦^2 + ٨^2 = ١٠^2$

إذا حقّقت ثلاثة أعداد صحيحة موجبة نظرية فيثاغورس، $٣٦ + ٦٤ = ١٠٠$

تُسمّى هذه الأعداد ثلاثية فيثاغورس $١٠٠ = ١٠٠$

توجد طريقة سهلة لإيجاد ثلاثيات فيثاغورس.

تشكّل الأعداد أ، ب، جـ، ثلاثية فيثاغورس إذا كانت أ = م^2 − ن^2، ب = ٢م ن، جـ = م^2 + ن^2، حيث م، ن عددان صحيحان موجبان ليس لهما قاسم مشترك سوى ١، م > ن.

مثال اختر م = ٥، ن = ٢.

أ = م^2 − ن^2	ب = ٢م ن	جـ = م^2 + ن^2	تحقّق،
= ٥^2 − ٢^2	= ٢(٥)(٢)	= ٥^2 + ٢^2	$(٢٠)^2 + (٢١)^2 \stackrel{?}{=} (٢٩)^2$
= ٢٥ − ٤	= ٢٠	= ٢٥ + ٤	٤٠٠ + ٤٤١ $\stackrel{?}{=}$ ٨٤١
= ٢١		= ٢٩	٨٤١ = ٨٤١

تمارين

أوجد ثلاثيات فيثاغورس فيما يأتي، مستعملًا قيم م، ن المعطاة:

١) م = ٣، ن = ٢ — ٥، ١٢، ١٣

٢) م = ٤، ن = ١ — ٨، ١٥، ١٧

٣) م = ٥، ن = ٣ — ١٦، ٣٠، ٣٤

٤) م = ٦، ن = ٥ — ١١، ٦٠، ٦١

٥) م = ١٠، ن = ٧ — ٥١، ١٤٠، ١٤٩

٦) م = ٨، ن = ٥ — ٣٩، ٨٠، ٨٩

كتاب التمارين (٢٤)　دون ضمن فوق

٩ - ٤ نظرية فيثاغورس

أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث ممّا يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة إن كان ذلك ضروريًا.

١) ٦٨

٢) ١٥.٤٩

٣) ١١.٣١

حدد ما إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تُشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية، ثم حدّد إذا كانت تُشكّل ثلاثية فيثاغورس.

٤) ١١، ١٨، ٢١ لا، لا

٥) ٢١، ٧٢، ٧٥ نعم، نعم

٦) ٧، ٨، ١١ لا، لا

٧) ٩، ١٠، $\sqrt{١٦٧}$ لا، لا

٨) ٢، ٩، $\sqrt{١١٠}$ نعم، لا

٩) ٢، ٧، $\sqrt{٥٣}$ نعم، لا

١٠) **تخزين،** طول باب المخزن في منزل هاشم ٦ أقدام، وعرضه ٣ أقدام. ويريد أن يُخزّن فيه صندوقًا مربعًا طول ضلعه ٧ أقدام. هل يستطيع إدخال الصندوق فقط؟ وضّح إجابتك.

لا، لأن أكبر طول يمكن أن يدخل خلال الباب هو $\sqrt{٤٥}$ = ٦.٧١ أقدام

١١) **شاشة تلفاز،** يقاس حجم التلفاز بطول قطر شاشته.

أ) إذا كان بعدا شاشة تلفاز ٢٤ بوصة طولاً، و١٨ بوصة عرضًا، فما طول قطرها؟

٣٠ بوصة

ب) قالت هند لزميلتها مها: إنّ قطر التلفاز في منزلهم ٣٥ بوصة. فإذا كان طول الشاشة ٢١ بوصة، فما عرضها؟ ٢٨ بوصة

جـ) أخبرت مها زميلتها هند أن لديها تلفازًا صغيرًا قطره ٥ بوصات، وبعدا شاشته بوصتان في ٣ بوصات. فهل هذه الأبعاد تناسب قطر التلفاز؟ فسّر إجابتك. لا؛ إذا كان بعدا الشاشة ٢ × ٣ بوصات، فإن القطر يكون ٣,٦١ بوصات تقريبًا.

ملحوظات المعلم

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٩ - ٥

استعمال نظرية فيثاغورس.

الدرس ٩ - ٥

إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

وإيجاد نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس ٩ - ٥

تطبيق صيغ لمواقف من واقع الحياة، ومواقف رياضية تتضمّن مثلثات متشابهة.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثم اسأل:

- ما الذي يجب أن تعرفه لتستعمل نظرية فيثاغورس في تحديد المسافة بين النقطتين؟ طول ضلعي المثلث القائم الزاوية، لإيجاد طول الوتر.
- كيف تجد المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة؟ بإيجاد الفرق بين الإحداثيين الصاديين.
- كيف تجد المسافة بين المدينة المنورة والرياض؟ بإيجاد الفرق بين الإحداثيين السينيين.

٩ـ٥ المسافة بين نقطتين

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس.

والآن

- أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- أجد نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

المفردات

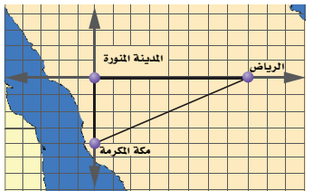
قانون المسافة بين نقطتين

نقطة المنتصف

قانون نقطة المنتصف

obeikaneducation.com

لماذا؟



تستعمل طائرة الإنقاذ المروحية نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) لحساب المسافة المباشرة بين موقعين. وتستطيع التحليق لمسافة ٩٠٠ كيلومتر قبل إعادة تزويدها بالوقود. إذا كانت مهمة الطائرة نقل شخص من مكة المكرمة إلى الرياض، و إذا افترضت أن المدينة المنورة هي نقطة الأصل، ومكة المكرمة عند النقطة (٠، -٤٠٠)، والرياض عند النقطة (٨٠٠، ٠). فهل يمكن للطائرة إكمال المهمة دون التزود بالوقود في أثناء الطريق؟

قانون المسافة بين نقطتين: يستعمل نظام تحديد المواقع العالمي(GPS) **قانون المسافة بين نقطتين** الذي يعتمد على نظرية فيثاغورس.

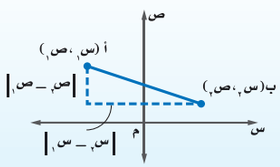
مفهوم أساسي المسافة بين نقطتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المسافة ف بين نقطتين إحداثياتها $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$ يُعبر عنها بالقانون :

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

النموذج:



يمكنك استعمال هذا القانون لإيجاد المسافة بين أي نقطتين على المستوى الإحداثي.

مثال ١ المسافة بين نقطتين

أوجد المسافة بين النقطتين (٥، ٣) ، (١، -٢).

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-٢ - ٣)^٢}$ $(س_١، ص_١) = (٥، ٣)$ ، $(س_٢، ص_٢) = (١، -٢)$

$= \sqrt{(-٤)^٢ + (-٥)^٢}$ بسّط

$= \sqrt{١٦ + ٢٥}$ ربّع

$= \sqrt{٤١} = ٦,٤$ تقريبًا بسّط

تحقق من فهمك

أ) $(٤، ٢)$، $(-٣، -١)$. $\sqrt{٥٨}$ **ب)** $(-٧، -٢)$ ، $(-٥، -٨)$ $٢\sqrt{١٠}$

مصادر الدرس ٩- ٥

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٤١)	• تنويع التعليم ص (١٤١)	• تنويع التعليم ص (١٤٤)
كتاب التمارين	ص (٢٥)	ص (٢٥)	ص (٢٥)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٢) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٤)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٤)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٤) • التدريبات الإثرائية، ص (٢٥)

قانون المسافة بين نقطتين

المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال قانون المسافة بين نقطتين، لإيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

المثال ٢ يُبيّن طريقة استعمال قانون المسافة بين نقطتين لحل مسائل من واقع الحياة.

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال قانون المسافة بين نقطتين؛ لتجد الإحداثي المجهول لنقطة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقّق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقّق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

١ أوجد المسافة بين النقطتين (١، ٢)، (−٣، ٠)

$٥\sqrt{٢} = ٤٫٤٧$ وحدة تقريبًا

٢ **رماية:** يتدرّب عمر على إصابة هدف يبعد عنه ٧م، فإذا انحرفت إحدى الرميات عن الهدف مسافة ٢م، فأوجد المسافة بينه وبين موضع الرمية؟

$٥٣\sqrt{}$ سم $= ٧٫٢٨$ سم تقريبًا

٣ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ)، إذا كانت المسافة بين النقطتين (٢، −١)، (أ، −٤) تساوي ٥ وحدات. −٢ أو ٦

المحتوى الرياضي

قانون المسافة بين نقطتين:

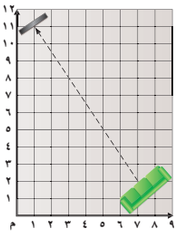
يمكنك استعمال قانون المسافة بين نقطتين:

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

لإيجاد المسافة بين أي نقطتين $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$ في المستوى الإحداثي، وترتيب النقطتين غير مهم؛ لأن الفروق تربّع.

مثال ٢ من واقع الحياة — استعمال قانون المسافة بين النقطتين

ترفيه: يمتلك صالح مسرحًا منزليًّا. ويوضع التلفاز والمقاعد عادة في ركنين متقابلين من الغرفة؛ حيث يوصي صانعو التلفاز المشاهدين بالجلوس بعيدًا عنه مسافة لا تقل عن ١٣ قدمًا من أجل السلامة. فإذا كان طول كل مربع في المستوى المجاور ١ قدم، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع التلفاز بداخلها؟



مقدمة شاشة التلفاز عند النقطة (١، ١١)، وأول مقعد عند النقطة (٧، ٢).

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ — قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(١ - ٧)^٢ + (١١ - ٢)^٢}$ — عوّض $(س_١، ص_١) = (١، ١١)$، $(س_٢، ص_٢) = (٧، ٢)$

$= \sqrt{(-٩)^٢ + ٦^٢}$ — بسّط

$= \sqrt{١١٧} = ١٠٫٨$ أقدام تقريبًا.

لا، اتساع الغرفة ليس كافيًا لهذا الجهاز.

تحقق من فهمك

نعم؛ المسافة $٢\sqrt{٧} = ٩٫٩$ أقدام تقريبًا

٢) يوصي صانعو مكبرات الصوت (الميكروفونات) بوضعها على مسافة لا تقل عن ٨ أقدام من مكان الجلوس. فإذا وضع ميكروفون في النقطة (٠، ٩)، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع الجهاز؟ فسّر ذلك.

يمكنك استعمال قانون المسافة بين نقطتين عند معرفة المسافة بينهما ومعرفة إحداثيات إحداهما لإيجاد الإحداثي المجهول للنقطة الأخرى.

مثال ٣ — إيجاد الإحداثي المجهول

أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٤، ٧)، (أ، ٣) تساوي ٥ وحدات.

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ — قانون المسافة بين نقطتين

$٥ = \sqrt{(أ - ٤)^٢ + (٣ - ٧)^٢}$ — $(س_١، ص_١) = (٤، ٧)$، $(س_٢، ص_٢) = (أ، ٣)$، $ف = ٥$

$٥ = \sqrt{(أ - ٤)^٢ + (-٤)^٢}$ — بسّط

$٥ = \sqrt{أ^٢ - ٨أ + ٣٢}$ — ربّع وبسّط

$٢٥ = أ^٢ - ٨أ + ٣٢$ — ربّع كلا الطرفين

$٠ = أ^٢ - ٨أ + ٧$ — اطرح ٢٥ من كلا الطرفين

$٠ = (أ - ١)(أ - ٧)$ — حلّل

$أ - ١ = ٠$ أو $أ - ٧ = ٠$ — خاصية الضرب الصفري

$أ = ١$ أو $أ = ٧$ — حل كل معادلة

تحقق من فهمك

٣) أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٢، أ)، (−٦، ٢) تساوي ١٠ وحدات. $أ = ٨$ أو $أ = -٤$

الربط مع الحياة

بدأ البث الرسمي لتلفزيون المملكة لأول مرة في التاسع من ربيع الأول ١٣٨٥ هـ (٧يوليو ١٩٦٥م) من مدينتي الرياض وجدة. ويبلغ عدد قنواته حاليًّا ٩ قنوات تغطي مجالات الثقافة المختلفة.

إرشادات للدراسة

قيمتان ممكنتان

عند إيجاد الإحداثي المجهول يكون أمامك خياران؛ لأن النقطة يمكن أن تكون لها البعد نفسه، ومن اتجاهين مختلفين.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا احتاج بعض الطلاب إلى تدريبات إضافية لإيجاد المسافة بين نقطتين،

فقم بتزويدهم بخريطة مدينتك أو قريتك في ورق مربعات، وتحقّق من أن إحداثيات أحد المواقع على الأقل على الخريطة أعداد كلية، واطلب إليهم إيجاد المسافة بين موقعين على الخريطة.

قانون نقطة المنتصف: تُسمى النقطة الواقعة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة وتنتمي إلى هذه القطعة **نقطة المنتصف**. ويمكنك إيجاد إحداثيي نقطة المنتصف باستعمال **قانون نقطة المنتصف**.

مفهوم أساسي — قانون نقطة المنتصف

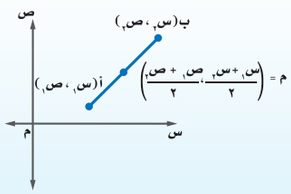
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يستعمل القانون:

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

لإيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتاها النقطتان:
(س١، ص١) وَ (س٢، ص٢).

النموذج:



تنبيه!

قانون نقطة المنتصف
انتبه إلى أنك تجمع ولا تطرح عند استعمال قانون نقطة المنتصف.

مثال ٤ — إيجاد نقطة المنتصف

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين: (−١، −٢)، (٣، −٤).

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$ قانون نقطة المنتصف

$$= \left(\frac{-١ + ٣}{٢}، \frac{-٢ + (-٤)}{٢}\right)$$ (س١، ص١) = (−١، −٢)، (س٢، ص٢) = (٣، −٤)

$$= \left(\frac{٢}{٢}، \frac{-٦}{٢}\right)$$ بسّط

= (١، −٣) بسّط

تحقق من فهمك

٤أ) (١٢، ٣)، (−٨، ٣) **ب)** (٢، ٣)٤ (٠، ٠)، (٥، ١٢) $\left(٦، \frac{٥}{٢}\right)$ **جـ)** (٦، ٨)، (٣، ٤) $\left(٦، \frac{٩}{٢}\right)$

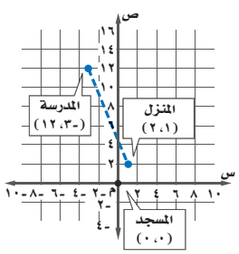
تأكد

مثال ١ أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١) (٦، −٢)، (١٢، ٨) $٣٤\sqrt{٢}$ ٢) (٤، ٨)، (−٣، −٦) $٥\sqrt{٧٧}$ ٣) (−٢، −٤)، (−٥، −٣) $١٠\sqrt{}$

مثال ٢

٤) **مسافات:** في المستوى الإحداثي المجاور، يقع منزل عمر عند النقطة (١ ، ٢)، والمدرسة عند النقطة (−٣ ، ١٢). فإذا كان المسجد يقع عند النقطة (٠ ، ٠)، وطول ضلع كل مربع في المستوى الإحداثي كيلومتر واحد، فأوجد:



٤أ) $٢\sqrt{٢٩}$ = ١٠,٧٧ كلم تقريبًا **أ)** المسافة بين منزل عمر والمدرسة.

ب) المسافة بين منزل عمر والمسجد. $٥\sqrt{}$ = ٢,٢٤ كلم تقريبًا

قانون نقطة المنتصف

المثال ٤ يُبيّن طريقة إيجاد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين معلومتين.

مثال إضافي

٤ أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين (٨، −٣)، (−٤، −١).
(٢، −٢)

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة: اطلب إلى الطلاب كتابة مدوّنة يشرحون فيها العلاقة بين نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين.

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ١٤؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

مثال ٣ في الأسئلة ٥–٨ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما.

٥) (–٥، أ)، (٣، ١)؛ ف = $\sqrt{٨٩}$ ٦ أو –٤

٦) (٦، أ)، (٥، ٠)؛ ف = $\sqrt{١٧}$ –٤ أو ٤

٧) (٥، ٨)، (أ، ٢)؛ ف = ٣$\sqrt{٥}$ ٢ أو ٨

٨) (أ، ٦)، (–٦، ٢)؛ ف = ٤$\sqrt{١٠}$ –١٨ أو ٦

مثال ٤ أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٩) (٥، –١٠)، (٥، ٨)

١٠) (٥، –١)، (٢، –٢)، (٦، ٢)

١١) (٤، ٠)، (٥، ٠)، (٠، ٣)

١٢) (٣، –١٧)، (٢، –٨)

١٣) (–٢، ٢)، (٤، ١٠)

١٤) (٦، ١)، (٣، ١٠)، (٣، ٣)

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية: بيّن للطلاب أن اعتبار إحدى النقطتين هي (س$_١$، ص$_١$)، وأيّتُهما (س$_٢$، ص$_٢$) لا يعتبر مشكلة عند إيجاد المسافة بين نقطتين.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١٥) (٥، ٨)، (٥، ٧)

١٦) (٦، –٩)، (٩، –٩)

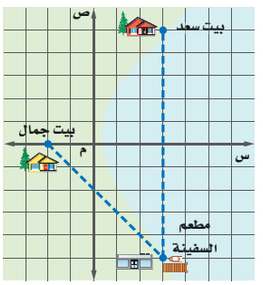
١٧) (٣، –٣)، (٧، ٢)

١٨) (–٧، ٨)، (٣، ١٠)

١٩) (–١١، ٩)، (٣، –٤)

٢٠) (–٣، ٥)، (٥، –٣)

مثال ٢ ٢١) **تحديد مواقع:** أراد سعد وجمال أن يلتقيا في مطعم السفينة. فاستعمل سعد قاربه للوصول إلى المطعم، في حين استعمل جمال سيارته، علمًا بأن طول ضلع كل مربع من المستوى الإحداثي يمثل كيلومترًا واحدًا.



أ) ما المسافة التي قطعها سعد؟ ١٠ كلم

ب) ما المسافة التي قطعها جمال؟ ٢$\sqrt{٥}$ = ٧,٠٧ كلم تقريبًا

جـ) ما النسبة بين المسافة التي قطعها سعد إلى المسافة التي قطعها جمال؟ ٢$\sqrt{}$ = ١,٤١ تقريبًا

مثال ٣ في الأسئلة ٢٢–٢٥ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ)، مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما:

٢٢) (–٩، –٢)، (أ، ٥)؛ ف = ٧ –٩

٢٣) (أ، –٦)، (–٥، ٢)؛ ف = ١٠ –١١ أو ١

٢٤) (أ، ٠)، (٣، ١)؛ ف = $\sqrt{٢}$ ٢ أو ٤

٢٥) (٤، أ)، (٨، ٤)؛ ف = ٢$\sqrt{٥}$ ٢ أو ٦

مثال ٤ أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٢٦) (٠، ٢)، (٧، ٣)

٢٧) $\left(\frac{٥}{٢}، \frac{٧}{٢}\right)$

٢٨) (٤، –٤)

(–٤، ١)

٢٩) (١٠، –٣)، (–٨، –٥)

٣٠) (–٥، ٥)، (٣، –٣)

٣١) (–١، ١)

٣٢) $٣\frac{١}{٣} = \frac{١٠}{٣}$

٣٣) $١\frac{٣}{١٠} = \frac{١٣}{١٠}$

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٣٢) (٤، ٢)، $\left(٦، -\frac{٢}{٣}\right)$

٣٣) $\left(-\frac{٤}{٥}، -١\right)$، $\left(٢، \frac{١}{٢}\right)$

٣٤) (٤$\sqrt{٥}$، ٧)، (٦، ١)

٢$\sqrt{١٤}$

٣٥) **هندسة:** أوجد محيط الشكل الرباعي أ ب جـ د الذي رؤوسه أ(–٣، –٤)، ب(–١، ٤)، جـ(٤، ٥)، د(٦، –٥)، ثم قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. $\sqrt{٦٨}$ + $\sqrt{٢٦}$ + $\sqrt{١٠٤}$ + $\sqrt{٨٢}$؛ ٣٢,٦ وحدات

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	١٥ – ٣١، ٤١ – ٤٨
ضمن ضمن المتوسط	١٦ – ٣٤ (زوجي)، ٣٥ – ٣٧، ٣٩، ٤١ – ٤٨
فوق فوق المتوسط	٣٢ – ٤٨

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب رسم قطع مستقيمة في ورقة مربعات، بحيث لا تكون رأسية أو أفقية، وإحداثيات طرفي كلٍّ منها أعداد كلية؛ واطلب إليهم استعمال قانون المسافة بين نقطتين، لإيجاد أطوال القطع المستقيمة التي رسموها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين (٩- ٤، ٩- ٥) بإعطائهم:

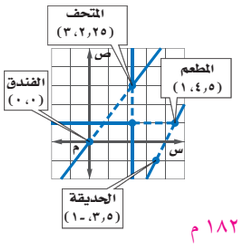
الاختبار القصير (٣)، ص (٦٩)

إجابات:

٤١) إجابة ممكنة: يتطلب قانون المسافة بين نقطتين تربيع القيم. وعند تعويض الإحداثيات والمتغير (أ) في القانون وتبسيطه، فإن النتيجة تكون معادلة تربيعية ينتج عن حلها قيمتان ممكنتان للمتغيّر (أ).

٤٢) إجابة ممكنة: لإيجاد المتوسط الحسابي لعددين، فإنك تجمعهما وتقسم الناتج على ٢، ولإيجاد إحداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين تجمع الإحداثيين السينيين، وكذلك الإحداثيين الصاديين، وتقسم ناتج كلٍّ من المجموعين على ٢، وبهذا فإنك تجد المتوسط الحسابي لكلٍّ من الإحداثيين السينين، والإحداثيين الصاديين.

٣٦) **سياحة:** يستعمل أحمد نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) للانتقال من الفندق إلى المتحف الوطني وإلى المطعم ثم إلى الحديقة العامة، ويمثّل طول ضلع كل مربع من المستوى الإحداثي ٥٠٠ م. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



أ) ما المسافة التي يقطعها من الفندق إلى المتحف؟ ١٨٧٥ م

ب) ما المسافة بين المتحف والمطعم؟ ١٥٠٥,٢٠ م

جـ) أوجد المسافة المباشرة من الحديقة العامة إلى الفندق؟ ١٨٢٠,٠٣ م

أوجد إحداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٣٧) (٢٥, ٤, ٥)، (٥, ٢, -٣) ٣٨) $\left(٥, -\frac{١}{٢}\right)$، $\left(-\frac{٥}{٢}, -٣\right)$ ٣٩) (١,١) $\left(-\frac{٢}{٥}, -\frac{١}{٥}\right)$، $\left(\frac{٥}{٢}, \frac{١}{٣}\right)$ $\left(\frac{٢٣}{٣٠}, \frac{١١}{٣٠}\right)$

٤٠) إجابة ممكنة: إحدى الطرق هي إيجاد الميل لكل ضلع. فإذا كان ميل أحدهما مقلوب سالب ميل الآخر فإن المثلث قائم الزاوية. أما الطريقة الأخرى فهي إيجاد المسافة بين كل زوج من النقاط، ثم تتحقق من إمكانية تطبيق معكوس نظرية فيثاغورس.

(٠,٢٥-, ٣,٣٧٥)

مسائل مهارات التفكير العليا

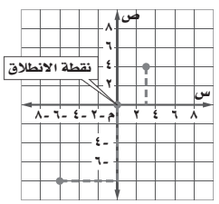
٤٠) **تحدٍّ:** إذا كانت أ (-٧، ٣)، ب (٤، ٠)، جـ (-٤، ٤) إحداثيات رؤوس مثلث، فناقش طريقتين مختلفتين لتحديد ما إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية أم لا.

٤١) **تبرير:** فسّر لماذا تكون هناك قيمتان ممكنتان عند البحث عن الإحداثي المجهول لنقطة عند إعطاء إحداثيات نقطتين والمسافة بينهما. انظر الهامش.

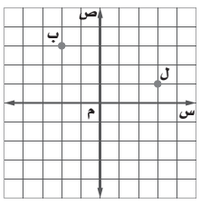
٤٢) **اكتب:** وضّح كيف يرتبط قانون نقطة المنتصف، بإيجاد المتوسط الحسابي. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٤٣) **إجابة قصيرة:** انطلق قاربان من الموقع نفسه وفي الوقت نفسه، فاتجه أحدهما شرقًا ثم شمالاً. أما الآخر فاتجه جنوبًا ثم غربًا. ما المسافة بينهما؟ ١٥ وحدة



٤٤) إذا كانت (ل) تمثل منارة، وَ(ب) سفينة، ويوجد قارب صيد في منتصف المسافة بين ل وَ ب. فأيّ الإحداثيات الآتية تمثّل موقع القارب؟ جـ



أ) $\left(٢, \frac{١}{٢}\right)$

ب) $\left(١, \frac{١}{٢}\right)$

جـ) $\left(\frac{١}{٢}, ٢\right)$

د) $\left(٥, \frac{١}{٢}\right)$

مراجعة تراكمية

إذا كان جَـ يمثّل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس ٩-٤)

٤٥) أ = ١٦، ب = ٦٣، جـ = ؟ ٦٥ ٤٦) ب = ٣، أ = $\sqrt{١١٢}$، جـ = ؟ ١١ ٤٧) جـ = ١٤، أ = ٩، ب = ؟ ١٠,٧٢

٤٨) **طيران:** يمكن تمثيل العلاقة بين طول طائرة (ل) بالأقدام، والوزن المناسب لأجنحتها (ب) بالأرطال بالمعادلة ل=$\sqrt{ك ب}$ ، حيث (ك) ثابت التناسب، أوجد قيمة (ك) لهذه الطائرة إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس ٩-٣) ٠,٠٦

تنويع التعليم

فوق

توسّع: بيّن للطلاب أن الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى الإحداثي التي تبعد بعدًا متساويًا عن نقطة معلومة، ثم اكتب: (س- هـ)^٢+ (ص- ك)^٢= نق^{٢}على السبورة، وأخبر الطلاب أن (هـ ، ك) في المعادلة تُمثّل مركز الدائرة، وأن (س، ص) تُمثّل أي نقطة على الدائرة، و(نق) طول نصف قطر الدائرة، ثم اطلب إليهم مقارنة معادلة الدائرة بقانون المسافة بين نقطتين.

إجابة ممكنة: تبدو معادلة الدائرة اشتقت من قانون المسافة بين تقطتين (س- هـ)^٢+ (ص- ك)^٢= نق^٢، والتي يمكن كتابتها في الصورة: نق =$\sqrt{(س-هـ)^٢ + (ص- ك)^٢}$ ، والتي تشبه كثيرًا: ف =$\sqrt{(س_٢-س_١)^٢ +(ص_٢-ص_١)^٢}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٩ - ٥

دون المتوسط — ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٢٢) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٥-٩ تدريبات إعادة التعليم

المسافة بين نقطتين

قانون المسافة بين نقطتين: بتحديد قانون المسافة بين نقطتين على نظرية فيثاغورس، كما هو مبيّن أدناه. ويمكنك استعمال هذا القانون لإيجاد المسافة بين أي نقطتين على المستوى الإحداثي.

المسافة بين نقطتين	المسافة بين نقطتين إحداثياتها (س، ص)، (س، ص) يُعبّر عنها بالقانون:
	ف = $\sqrt{(\text{س}-\text{س})^{٢} + (\text{ص} - \text{ص})^{٢}}$

مثال ١ أوجد المسافة بين النقطتين (− ٥، ٢)، (٤، ٥).

ف = $\sqrt{(\text{س}-\text{س})^{٢}+(\text{ص}-\text{ص})^{٢}}$ قانون المسافة بين نقطتين

= $\sqrt{(٤-(-٥))^{٢} + (٥ - ٢)^{٢}}$ (س، ص) = (− ٥، ٢)، (س، ص) = (٤، ٥)

= $\sqrt{٩^{٢} + ٣^{٢}}$ بتبسيط

= $\sqrt{٨١ + ٩}$ برفع

= $\sqrt{٩٠}$ بتبسيط

المسافة هي $\sqrt{٩٠}$ أو ٩,٤٩ وحدات تقريبًا.

مثال ٢ رسم جيل قطعة مستقيمة من النقطة (١، ٤) إلى النقطة (٤٩,٩٨، ٤٩,٩٨) على شاشة الحاسوب. فما طول القطعة؟

ف = $\sqrt{(\text{س}-\text{س})^{٢}+(\text{ص}-\text{ص})^{٢}}$

= $\sqrt{(٤٩,٩٨ - ١)^{٢}+(٤٩,٩٨ - ٤)^{٢}}$

= $\sqrt{٤٩^{٢}+٤٥^{٢}}$

= $\sqrt{٢٤٠١ + ٢٠٢٥}$

= $\sqrt{٤٥٢٦}$

طول القطعة المستقيمة هو ١٠٦,٩٣ وحدات تقريبًا.

تمارين

أوجد المسافة بين كلّ نقطتين فيما يأتي:

١) (٥،١)، (٣،١) — ٢) (٠،٠)، (٦،٨) — ٣) (−٢،−٨)، (٧،−٣) — ٤) (٦،−٧)، (−٢،٨)

٥) (٥،١)، (−٨،٨) — ٦) (٣،−٤)، (−٤،−٤) — ٧) (−١،٤)، (٣،٣) — ٨) (٠،٠)، (−٥،٣)

٩) (٣،−٦)، (٧،١) — ١٠) (−٢،−٥)، (٨،٠) — ١١) (٤،٣)، (٠،٠) — ١٢) (٣،−٤)، (−٤،−١٦)

أوجد القيم الممكنة للمتغير أ، مستعملًا إحداثيات كلّ نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما:

١٣) (١،أ)، (٣،−٢)؛ ف = $\sqrt{٥}$ — ١٤) (٠،٠)، (أ،٤)؛ ف = ٥

١٥) (٢،−١)، (أ،٣)؛ ف = ٥ — ١٦) (١،−٣)، (أ،٢١)؛ ف = ٢٥

١٧) (١،أ)، (−٤،٤)؛ ف = ٣ — ١٨) (٣،−٤)، (−٤،أ)؛ ف = $\sqrt{٦٥}$

تدريبات حل المسألة (٢٤) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٥-٩ تدريبات حل المسألة

المسافة بين نقطتين

١) **لعبة الشطرنج:** تقع آخر قطعتين متبقّيتين مع سمير من قطع لعبة الشطرنج عند مركزي المربعين الواقعين عند الركنين المتقابلين لرقعة الشطرنج، كما في الشكل أدناه. فإذا كان طول ضلع رقعة الشطرنج هذه ٨ بوصات، فما المسافة بين هاتين القطعتين؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

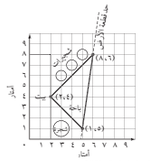
٩,٩ بوصات

٢) **هندسة:** رسم سالم مربعًا دائريًا على خطط في إطار خطة لتطوير الحي. فإذا كانت النقطة (− ١، − ١) تقع عند مركز الميدان في مخطط الرسم، وكانت النقطة (٣،٢) تقع على الحد الخارجي للميدان، فما طول نصف قطر الميدان؟

٥ وحدات

٣) **منظر طبيعي:** رسمت سعاد باحة مثلثة الشكل بجوار بيت، على مخطط قطعة أرض، كما هو مبيّن أدناه. ما طول السياج الذي يحتاج إليه لفصل المثلث المحاذي لحد قطعة الأرض؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

٧,١ م



٤) **شبكة توزيع الكهرباء:** قامت إحدى شركات الكهرباء بتركيب أعمدة وأسلاك كهربائية في منطقة خالية من المباني، حيث وضعت عمودًا عند النقطة (٣، ١٤)، وعمودًا ثانيًا عند النقطة (٧، − ٨). فإذا أرادت الشركة وضع عمود ثالث عند نقطة منتصف المسافة بين العمودين السابقين، فما إحداثيا هذه النقطة؟

(٢,٥،٥)

٥) **تشكيلات رياضية:** قامت فرقة تابعة لأحد النوادي الرياضية بإجراء تشكيلات رياضية في ملعب النادي بمناسبة اليوبيل الفضي لتأسيسه، وكانت تلجأ أحيانًا إلى استعمال الإحداثيات (بالأمتار) لضبط مجريات التشكيلات في الملعب. وفيما يأتي واحد من هذه التشكيلات الذي تمثّل فيه كل نقطة أحد أعضاء الفرقة.

أ) ما المسافة بين قائد الفرقة ومساعده؟

١٢,٤ م

ب) إذا كان سعيد أحد أعضاء الفرقة، وموقعه عند النقطة (٠,٠ ٢٦)، فما المسافة بينه وبين مساعد القائد؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

٢٣,٩ م

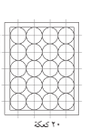
التدريبات الإثرائية (٢٥) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٥-٩ التدريبات الإثرائية

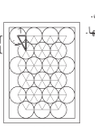
تقليل الفراغات

يبيّن الشكلان المجاوران طريقتين مختلفتين لترتيب قطع الكعك على طبق طوله ٤٠ سم وعرضه ٣٢ سم. طول قطر الكعكة الواحدة بعد إخراجها من الفرن مجبوزة هو ٨ سم. تطبق مراكز قطع الكعك في الترتيب الموجود في الشكل الأول على رؤوس المربعات، في حين تنطبق مراكز قطع الكعك في الترتيب الموجود في الشكل الثاني على رؤوس مثلثات متطابقة الأضلاع.



أي الترتيبين أفضل اقتصاديًا؟

الترتيب في الشكل الثاني، أي الترتيب ذي المثلثات، أفضل اقتصاديًا؛ لأنه يحتوي على كعكة واحدة إضافية زيادة عما يحتويه الترتيب ذي المربعات في الشكل الأول. توضع الصفوف في الترتيب ذي المربعات في الشكل الأول على بعد ٨ سم عن بعضها. ما المسافة بين الصفوف المتتالية في الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني؟



لاحظ المثلث القائم الذي أطوال أضلاعه أ′، ب′، جـ′. الضلع أ′ هو طول نصف قطر الكعكة، ويساوي ٤ سم، في حين أنّ طول الوتر جـ′ هو مجموع طولَي نصف القطر، ويساوي ٨ سم. أوجد ب′، أي المسافة بين كلّ صفين متتاليين، مستعملًا نظرية فيثاغورس.

جـ′^{٢} = أ′^{٢} + ب′^{٢}

٨^{٢} = ٤^{٢} + ب′^{٢}

٦٤ − ١٦ = ب′^{٢}

٤٨ = ب′^{٢}

ب′ = $\sqrt{٤٨}$

ب′ = ٤ $\sqrt{٣}$

لذا فإن المسافة بين كلّ صفين متتاليين هي ٦,٩٣ سم تقريبًا.

حلّ كلّ مسألة مما يأتي:

١) افترض أنه استُعملت طريقة الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني لقطع الكعك، طول قطر كلٍّ منها ١٠ سم. ما المسافة بين كلّ صفين متتاليين؟ **٨,٦٦ سم**

٢) إذا استُعملت طريقة الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني لقطع الكعك، وكانت المسافة بين كلّ صفين متتاليين تساوي ٣ $\sqrt{٣}$، فأوجد طول قطر الكعكة الواحدة. **٦ سم**

٣) صف تطبيقات عملية أخرى يمكنك أن تستعمل فيها طريقة الترتيب ذي المثلثات، لتقليل الفراغات بين الأشياء المتماثلة عند ترتيبها. **إجابة ممكنة: ترتيب علب معلّبات في صناديق.**

كتاب التمارين (٢٥) — دون ضمن فوق

٥ - ٩ المسافة بين نقطتين

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١) (٤،٧)، (٣،١) — ٢) (٩،٠)، (−٧،−٢) — ٣) (٢،٦)، (٤،$\frac{١}{٢}$)

٥ — $\sqrt{١٧٠٧}$ ≈ ١٣,٠٤ — $\frac{٥}{٢}$ أو ٢,٥

٤) (−٧،١)، (٦،$\frac{١}{٢}$) — ٥) (٣،٣$\sqrt{٣}$)، (٥،٣$\sqrt{٣}$) — ٦) (٣$\sqrt{٢}$،−١)، (٣$\sqrt{٣}$،٣)

$\frac{٥}{٣}$ ≈ ١,٦٧ — $\sqrt{٧}$ ≈ ٢,٦٥ — ٣$\sqrt{٣}$ = ٤,٢٤

في الأسئلة ٧ − ١٢، أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ)، مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما.

٧) (٤،−١)، (أ،٥)، ف = ١٠ — أ = −٤ أو ١٢ — ٨) (٠،−٢)، (أ،٧)، ف = ١٥ — أ = −٧ أو ١١

٩) (٦،−٧)، (أ،−٤)، ف = $\sqrt{١٨٥}$ — أ = ٣ أو ٩ — ١٠) (−٤،١)، (أ،٨)، ف = $\sqrt{٥٠٧}$ — أ = −٥ أو −٣

١١) (٨،−٥)، (أ،٤)، ف = $\sqrt{٨٥٧}$ — أ = ٦ أو ١٠ — ١٢) (−٧،٩)، (أ،٥)، ف = $\sqrt{٣٩٧}$ — أ = −١٤ أو −٤

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين مما يأتي:

١٣) (٤،−٦)، (٣،−٩) — ١٤) (−٣،−٨)، (٢،٧−) — ١٥) (٠،−٤)، (٣،٢)

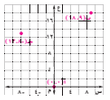
(٧،٥−،٣) — (٥−،٣−) — (٢،٥−،١)

١٦) (−١٣،−٩)، (−١،−٥) — ١٧) (−٢،$\frac{١}{٢}$)، (١،$\frac{١}{٢}$) — ١٨) ($\frac{٣}{٢}$،−١)، (٢،$\frac{١}{٢}$)

(٧−،٧−) — (٠،١$\frac{١}{٢}$) — (−١،$\frac{١}{٢}$)

١٩) **كرة السلة:** يقف ثلاثة لاعبين على النحو الآتي: عادل على بُعد ٩ أمتار إلى يمين أحمد، ومتقدّمًا عنه بمسافة رأسية مقدارها ١٨ مترًا. وسمير على بُعد ٨ أمتار إلى يسار أحمد، ومتقدّمًا عنه بمسافة رأسية مقدارها ١٣ مترًا.

أ) ارسم نموذجًا على ورقة الرسم البياني يُمثّل هذا الوضع. وافترض أن اللاعب أحمد يقف في (٠،٠).



ب) ما المسافة بين أحمد، وكل من عادل وسمير، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة؟ ١٥,٣، ٢٠,١ مترًا

جـ) ما المسافة بين عادل وسمير؟ ١٧,٧ م

٢٠) **خواط:** تسكن هيا وفاطمة في حيين متجاورين، وعند تمثيل مواقع سكنهم في مستوى إحداثي طول ضلع كل مربع فيه كيلومتر واحد، كانت هيا عند النقطة (٩ − ١، ٩) وفاطمة عند النقطة (٥ − ٤، ٥). فما المسافة بين موقعيهما؟ ١٤,٩ كم

ملحوظات المعلم

٩-٦ المثلثات المتشابهة

لماذا ؟

لقياس ارتفاع سارية علم المدرسة يحتاج فهد إلى قياس طول ظله وطول ظل السارية، ثم استعمال المثلثات المتشابهة والقياسات غير المباشرة.

المثلثات المتشابهة: تسمى المثلثات التي لها الشكل نفسه **المثلثات المتشابهة**، إلا أنه ليس من الضروري أن تكون لها أطوال الأضلاع نفسها. والرمز ~ يُستعمل ليشير إلى مثلثين متشابهين. وتُكتب رؤوس المثلثات المتشابهة عادة بالترتيب للدلالة على الأجزاء المتناظرة.

فيما سبق

درست حل التناسبات.

والآن

- أحدّد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا.
- أجد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين.

المفردات

المثلثات المتشابهة

obeikaneducation.com

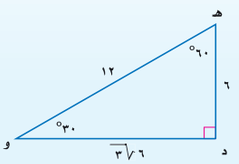
مفهوم أساسي — المثلثات المتشابهة

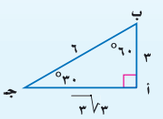
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تشابه مثلثان، فإن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثال: إذا كان △ أ ب جـ ~ △ د هـ و، فإن ق ∠ أ = ق ∠ د، ق ∠ جـ = ق ∠ و، ق ∠ ب = ق ∠ هـ.

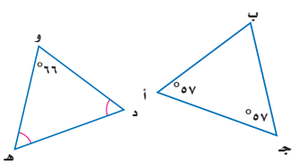
$$\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}} = \frac{١}{٢}$$





مثال ١ — تحديد المثلثين المتشابهين

حدد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرِّر إجابتك:



قياس ∠ ب = ١٨٠ − (٥٧ + ٥٧) = ٦٦°.

في △ د هـ و، يتساوى ق ∠ د، مع ق ∠ هـ

ولتكن س = ق ∠ د = ق ∠ هـ

س + س + ٦٦ = ١٨٠	مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠
٢س = ١١٤	اطرح ٦٦ من كلا الطرفين
س = ٥٧	اقسم كلا الطرفين على ٢

ولذا فإن ق ∠ د = ٥٧°، ق ∠ هـ = ٥٧°. وبما أن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، فإن △ هـ و د ~ △ أ ب جـ.

تحقق من فهمك

١) حدّد ما إذا كان △ أ ب جـ الذي فيه ق ∠ أ = ٦٨°، ق ∠ ب = ق ∠ جـ يشابه △ د هـ ف حيث ق ∠ هـ = ق ∠ ف = ٥٤°، وبرّر إجابتك. لا؛ لا تتساوى قياسات الزوايا المتناظرة.

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٩ - ٦

حل التناسبات.

الدرس ٩ - ٦

تحديد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا.

إيجاد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين.

ما بعد الدرس ٩ - ٦

استعمال النسب المثلثية لحل المسائل.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثم اسأل:

- لنفترض أن طول ظل سارية العلم ٥ أمثال طول ظل فهد. فكم مرة يساوي ارتفاع سارية العلم طول فهد؟ ٥ مرات
- كيف تصف هذه الفكرة باستعمال النسب؟ النسبة بين طولي الظلَّين، هي نفسها النسبة بين طول سارية العلم وطول فهد.
- ماذا تُسمّى المعادلة التي تنص على تساوي نسبتين؟ تُسمَّى تناسبًا

مصادر الدرس ٩- ٦

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٤٧)	• تنويع التعليم ص (١٤٧، ١٤٩)	• تنويع التعليم ص (١٤٩)
كتاب التمارين	ص (٢٦)	ص (٢٦)	ص (٢٦)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٦) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٨) • التدريبات الإثرائية، ص (٢٩)

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: اطلب إلى الطلاب أن ينظروا بشكل دقيق إلى كلٍّ من زوايا وأضلاع المثلثين؛ لتحديد ما إذا كان المثلثان متشابهين. في المثال١، لم توضع إشارات تدل على الزوايا المتطابقة في المثلثين، إلّا أنه يوجد معلومات كافية لمعرفة الزوايا المتطابقة.

المثلثات المتشابهة :

المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال الزوايا؛ لتحديد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا.

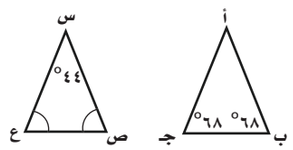
المثال ٢ يُبيّن طريقة استعمال التناسب؛ لتحديد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقّق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقّق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

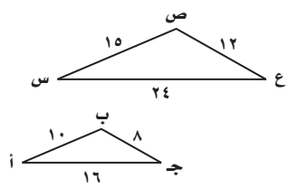
مثالان إضافيان

١ حدّد ما إذا كان المثلثان أدناه متشابهين أم لا. برّر إجابتك.



بما أن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، إذن المثلثان متشابهان.

٢ حدّد ما إذا كان المثلثان أدناه متشابهين أم لا، وبرر إجابتك.



بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، إذن المثلثان متشابهان .

إيجاد قياسات العناصر المجهولة

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال التناسب؛ لإيجاد قياسات العناصر المجهولة لأضلاع المثلثات المتشابهة.

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال المثلثات المتشابهة؛ لحل مسائل من واقع الحياة.

يمكنك أيضًا استعمال المقارنة بين نسب أطوال الأضلاع المتناظرة؛ لتحديد إن كان المثلثان متشابهين.

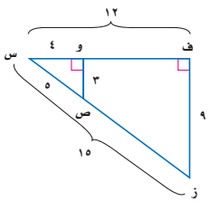
قراءة الرياضيات

قياس الزاوية

ق ∠ أ يُقرأ: قياس الزاوية أ.

مثال ٢ تحديد المثلثين المتشابهين

حدّد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:



إذا كان △ ف س ز، △ و س ص متشابهين، فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

$\frac{ف\ س}{و\ س} = \frac{١٢}{٤} = ٣$ ، $\frac{س\ ز}{س\ ص} = \frac{١٥}{٥} = ٣$، $\frac{ف\ ز}{و ص} = \frac{٩}{٣} = ٣$

بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن △ ف س ز ~ △ و س ص.

تحقق من فهمك

٢) حدّد ما إذا كان △ أ ب جـ والذي فيه أب = ٦، ب جـ = ١٦، أ جـ = ٢٠ يشابه △ ع ك ل، حيث ع ك = ٣، ك ل = ٨، ع ل = ٩. وفسّر إجابتك. لا؛ الأضلاع المتناظرة غير متناسبة.

إيجاد قياسات العناصر المجهولة : يمكنك استعمال التناسب لإيجاد قياسات العناصر المجهولة، عندما تكون بعض أطوال أضلاع المثلثات المتشابهة معلومة.

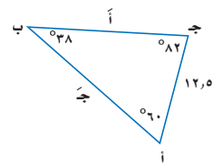
إرشادات للدراسة

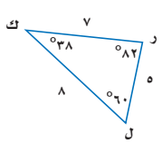
المثلثات المتداخلة

في المثلثين المتداخلين يمكنك رسم كل منهما على حدة، مع التأكد من كون العناصر المتناظرة في الموقع نفسه، وضع إشارات لتوضيح الزوايا والأضلاع المتناظرة.

مثال ٣ إيجاد قياسات العناصر المجهولة

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:





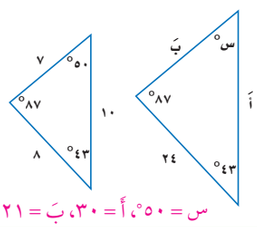
الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة	
$\frac{أب}{ل\ ك} = \frac{أجـ}{ل\ ر}$	
$\frac{جَ}{٨} = \frac{١٢,٥}{٥}$	أب = جَ، أجـ = ١٢,٥، ل ك = ٨، ل ر = ٥
٥ جَ = ١٠٠	اضرب تبادليًا
جَ = ٢٠	اقسم على ٥

الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة	
$\frac{ب\ جـ}{ك\ ر} = \frac{أجـ}{ل\ ر}$	
$\frac{أَ}{٧} = \frac{١٢,٥}{٥}$	ب جـ = أَ، أجـ = ١٢,٥، ك ر = ٧، ل ر = ٥
٥ أَ = ٨٧,٥	اضرب تبادليًا
أَ = ١٧,٥	اقسم على ٥

قياسات العناصر المجهولة ٢٠ ، ١٧,٥ .

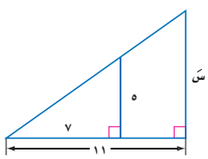
تحقق من فهمك

٣أ)



س = ٥٠°، أَ = ٣٠، بَ = ٢١

٣ب)



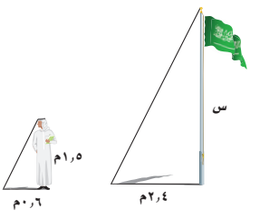
$\frac{٥٥}{٧}$

إرشادات للمعلم الجديد

قراءة الرياضيات: تُستعمل الأقواس عادة عند رسم المثلثات؛ للإشارة إلى الزوايا المتساوية القياس. فالقوس الواحدة على زاويتين، تدل على أنهما متساويتان، والقوسان على زاويتين، تدلان على أنهما متساويتان. وهكذا...

مثال ٤ من واقع الحياة — القياسات غير المباشرة

ظل: أراد سلطان قياس ارتفاع سارية العلم، فوقف بجانبها. إذا علمت أن طول سلطان متر و٥٠ سنتمترًا، وطول ظله ٦٠ سنتمترًا، وطول ظل السارية في تلك اللحظة مترا و٤٠ سنتمترًا، فما ارتفاع السارية؟



افهم: أوجد ارتفاع سارية العلم.

خطّط: ارسم شكلاً للموقف.

حل: أشعة الشمس تشكّل مثلثات متشابهة. اكتب تناسبًا يقارن بين ارتفاعات الأجسام وأطوال ظلالها.

لتكن س= ارتفاع سارية العلم

طول السارية ← $\frac{\text{س}}{١,٥}$ = $\frac{٢,٤}{٠,٦}$ ← ارتفاع ظل السارية

طول سلطان ← ← طول ظل سلطان

$٠,٦ \text{ س} = ٣,٦$

س= ٦ فيكون ارتفاع سارية العلم يساوي ٦ أمتار.

تحقق: $\frac{٦}{١,٥} \stackrel{؟}{=} \frac{٢,٤}{٠,٦}$ عوّض عن س بـ ٦.

$٣,٦ = ٣,٦$ ✓

تحقق من فهمك

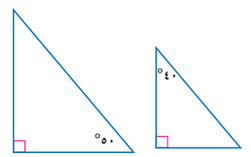
٤) **خرائط:** استعمل على خريطة المملكة مقياس رسم فيه كل ١ سم تمثّل ٢٥٠ كلم، إذا كانت المسافة بين جدة والمدينة المنورة على الخريطة ١,٦٨ سم تقريبًا. فكم المسافة الحقيقية بينهما؟ ٤٢٠ كلم

تأكد

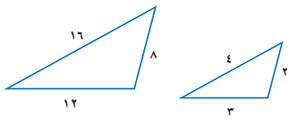
المثالان ١، ٢

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

١)



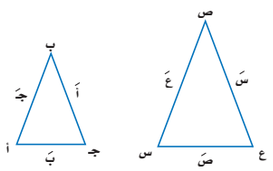
٢)



١) نعم، الزوايا المتناظرة متساوية في القياس.
٢) نعم، الأضلاع المتناظرة متناسبة.

مثال ٣

في الأسئلة ٣-٦، إذا كان △ أ ب جـ ~ △ س ص ع، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:



٣) أ = ٤، ب = ٦، جـ = ٨، س = ٦ ص = ٩، ع = ١٢

٤) س = ٩، ص = ١٥، ع = ٢١، جـ = ٧ أ = ٣، ب = ٥

٥) أ = ٢، ب = ٥، س = ١٠، ع = ٣٠ جـ = ٦، ص = ٢٥

٦) ب = ٦، جـ = ١٠، س = ٣٠، ص = ١٥ أ = ١٢، ع = ٢٥

مثال ٤

٧) **أشجار:** ترغب مريم في إيجاد ارتفاع شجرة في حديقتها، طول ظلها مترا و٦٥ سنتمترًا. فإذا كان طول مريم متر و٥٠ سنتمترًا، وطول ظلها في تلك اللحظة ٧٥ سنتمترًا. فما ارتفاع الشجرة؟ ٥,٣ م

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا كان لدى بعض الطلاب اهتمام بدراسة الحياة النباتية

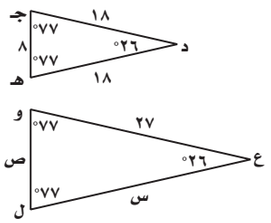
فقم واطلب إليهم استعمال طريقة المثال ٤؛ لإيجاد ارتفاعات الأشجار المجاورة لمنزل كلٍّ منهم، وتحقّق من أنهم يسجّلون موقع كل شجرة ونوعها بالإضافة إلى ارتفاعها. سيحتاج الطلاب إلى مسطرة مترية، وأن يجدوا القياسات في يوم مشمس.

المحتوى الرياضي

المثلثات المتشابهة:
للمثلثات المتشابهة الشكل نفسه، إلَّا أنه ليس ضروريًّا أن تكون لأضلاعهما القياسات نفسها. والأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة، والزوايا المتناظرة متساوية القياس.

مثالان إضافيان

٣ أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:



س = ٢٧، ص = ١٢

٤ ظلال: يقف قاسم بجانب شجرة طول ظلِّها ٥,٥ م، إذا كان طول قاسم ١,٦ م، وطول ظلِّه في تلك اللحظة ٨٠ سم، فما ارتفاع الشجرة؟ ١١ م

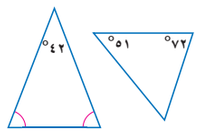
٣ التدريب

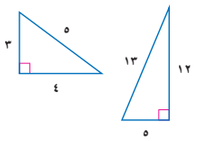
التقويم التكويني

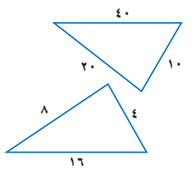
استعمل الأسئلة ١ – ٧؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

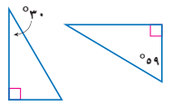
تدرب وحل المسائل

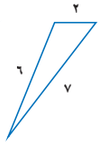
المثالان ١ ، ٢ حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

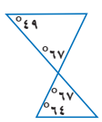
٨) 

٩) 

١٠) 

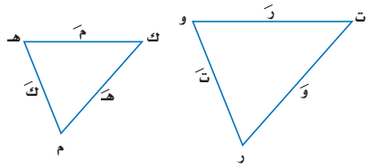
١١) 

١٢) 

١٣) 

٨) لا؛ قياسات الزوايا غير متساوية.
٩) لا؛ الأضلاع غير متناسبة.
١٠) نعم؛ الأضلاع متناسبة.
١١) لا؛ قياسات الزوايا غير متساوية.
١٢) لا؛ الأضلاع غير متناسبة.
١٣) نعم، قياسات الزوايا متساوية.

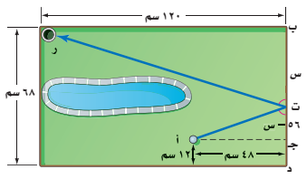
مثال ٣ في الأسئلة ١٤–١٨، إذا كان △ م ك هـ ~ △ ر ت و ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة: ١٤–١٨ انظر الهامش



١٤) مَ = ٢، كَ = ٧، هـَ = ٦، رَ = ٤
١٥) رَ = ٥, ٧، وَ = ١٥، تَ = ٢٠، هـَ = ٦
١٦) مَ = ٥, ٣، كَ = ٩، تَ = ٥, ١٣، وَ = ٩, ٧٥
١٧) مَ = ٤, ١، هـَ = ٨, ٢، وَ = ٥٦, ٠، تَ = ٨٤, ٠
١٨) مَ = ٢√٧، كَ = √٧، تَ = √١٤٧، وَ = √١٠٧

مثال ٤ ١٩) **ألعاب:** يستعمل تصميم نموذج المركبات المقياس ١ سم: ٢٤, ٠ م من الطول الفعلي للمركبة. إذا كان للمركبة الأصلية نافذة على شكل مثلث قائم الزاوية. ارتفاعها ٧٦, ٠ م فكم سيكون ارتفاع النافذة على النموذج؟ ٣, ٢ سم تقريبًا.

٢٠) **جولف:** يلعب حمد لعبة جولف مصغرة كما في الشكل المجاور، ويريد قذف الكرة من النقطة أ إلى النقطة ت لترتد وتدخل الحفرة ر. استعمل تشابه المثلثات لتحديد بعد نقطة الارتداد عن الرأس ب. ٤٠سم



الربط مع الحياة

حقّق لاعب ومدرب المنتخب السعودي للجولف علي بلحارث بطولة الكأس الوطنية لدولة الباكستان للجولف التي نُظِّمت في ربيع الثاني ١٤٣١ هـ في نادي ديراب للجولف في الرياض بمشاركة ١٠٠ لاعب.

٢١) **خرائط:** يظهر مقياس رسم لخريطة المملكة أن ٥, ٢ سم على الخريطة تمثّل ١٠٠ كيلومتر في الواقع. فإذا كانت المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة على الخريطة ٨سم، فما البعد الحقيقي بينهما؟ ٣٢٠ كيلومترًا.

٢٢) **مشروع المدرسة:** خطّط معلم التاريخ لعمل نموذج للكعبة المشرفة على مقياس رسم ٥ سم: ٦, ٠ م. فإذا كان الارتفاع الفعلي للكعبة المشرفة ١٤م، فكم سيكون ارتفاع النموذج؟ ١١٦, ٦٧ سم تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: استعمل برمجيات هندسية لرسم مثلث وقياس أطوال أضلاعه. ارسم مثلثًا مشابهًا له، وأخبر الطلاب أنه يمكنهم قياس طول ضلع واحد فقط للمثلث. ضع الأضلاع المتناظرة في أزواج، واطلب إلى الطلاب استعمال التناسب لإيجاد أطوال الأضلاع الأخرى، كرّر العملية على مثلثات مختلفة.

إجابات:

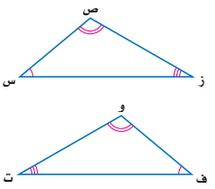
١٤) وَ = ١٢، تَ = ١٤
١٥) مَ = ٣، كَ = ٨
١٦) هـَ = ٦, ٥، رَ = ٢٥, ٥
١٧) كَ = ٤, ٢، رَ = ٢٨, ٠
١٨) هـَ = √٥٧، رَ = ٢

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٨ – ١٩ ، ٢٣ ، ٢٥–٣٨
ضمن ضمن المتوسط	٩– ١٩(فردي) ٢٠–٢٣ ، ٢٥–٣٨
فوق فوق المتوسط	٢٠–٣٨

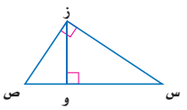
مسائل مهارات التفكير العليا

٢٣) اكتشف الخطأ: قارنت رهف وبيان بين المثلثين المتشابهين المجاورين. فأيّهما كانت مقارنتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.



رهف	بيان
ق ∠ س = ق ∠ ت	ق ∠ س = ق ∠ و
ق ∠ ص = ق ∠ و	ق ∠ ص = ق ∠ ف
ق ∠ ز = ق ∠ ف	ق ∠ ز = ق ∠ ت
△ س ص ز ~ △ ت و ف	△ س ص ز ~ △ و ف ت

٢٤) تحدٍّ: المثلث س ص ز يشبه المثلثين المتشابهين المكوّنين من القطعة المستقيمة العمودية الواصلة بين ز والقطعة المستقيمة س ص.
اكتب ثلاث عبارات تتعلق بهذين المثلثين، ولمَ تتشابه؟



٢٥) تبرير: حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسّر إجابتك.
"إذا ضربت أطوال أضلاع مثلث في ٣، فإن زوايا المثلث بعد تكبيره لها نفس قياسات زوايا المثلث الأصلي".

٢٦) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثًا وسمِّه أ ب جـ، ثم ارسم المثلث المشابه له وسمّه و ك ر، على أن تكون مساحته ٤ أمثال مساحة أ ب جـ. واشرح استراتيجيتك. انظر الهامش

٢٧) اكتب: لخِّص كيف تحدد أن المثلثين متشابهان؟ وكيف تجد القياسات المجهولة فيهما؟ انظر الهامش

إرشادات حل المسألة

رسم مخطط
ارسم الشكل عندما يتطلب حل المسألة تبريرًا مكانيًّا أو شكلاً هندسيًّا. فمثلاً في السؤال ٢٤ ارسم كل مثلث وحده ليساعدك على الحل.

تدريب على اختبار

٢٨) أوجد المسافة بين النقطتين (٢، −٤)، (−٥، ٨). د

أ) ٥ ب) ٧ جـ) $\sqrt{95}$ د) $\sqrt{193}$

٢٩) أي المعادلات الآتية تمثِّل مستقيمًا مقطعه الصادي −٤، وميله ٦؟ أ

أ) ص = ٦س − ٤ ب) ص = −٤س + ٦ جـ) ص = −٦س + ٤ د) ص = ٦س + ٤

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي: (الدرس ٩-٥)

٣٠) (٠، ٣)، (٩، ١) $\sqrt{37}$ ٣١) (−٢، ٤)، (٥، ١٣) $\sqrt{130}$ ٣٢) (١، −٥)، (−١، −٥) ٢

حدّد ما إذا كانت مجموعة من الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم. (الدرس ٩-٤)

٣٣) ٣، ٤، ٥ نعم ٣٤) ٨، ١٠، ١٢ لا ٣٥) ١٠، ٢٤، ٢٦ نعم

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٦)

٣٦) ٤ك^{٢} − ١٠٠ ٤(ك − ٥)(ك + ٥) ٣٧) س^{٢} + ٦س − ٩ أولي

٣٨) ٩ت^{٣} + ٦٦ت^{٢} − ٤٨ت ٣ت(٣ت − ٢)(ت + ٨)

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أن النسبة بين مساحتَي المثلثين المتشابهين، تساوي مربع النسبة بين ضلعين متناظرين فيهما. اكتب القاعدة الآتية على السبورة: $\frac{م_{١}}{م_{٢}} = \frac{(ض_{١})^{٢}}{(ض_{٢})^{٢}}$، وأخبرهم أن م$_{١}$ وَ م$_{٢}$ تدلّان على مساحتَي المثلثين (الأول والثاني) على الترتيب، وأن ض$_{١}$ وَ ض$_{٢}$ يدلان على طولي ضلعين متناظرين. اطلب إلى الطلاب استعمال هذا التناسب؛ لإيجاد النسبة بين مساحتي مثلثين، والنسبة بين طولَي ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣.

$\frac{م_{١}}{م_{٢}} = \frac{٢^{٢}}{٣^{٢}} = \frac{٤}{٩}$

تنبيه!

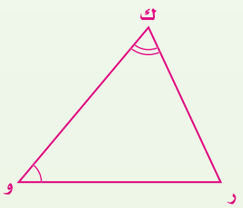
تجنّب الأخطاء: في السؤال ٢٣، ذكّر الطلاب ووجههم جيدًا للأقواس التي تُشير إلى الزوايا المتطابقة.

٤ التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب كتابة التناسبات التي يمكن تكوينها من المثلثين المتشابهين ب ك ر، ر س ت .

إجابات:

٢٦) طول قاعدة △ و ك ر مثلا طول قاعدة △ أب جـ، وارتفاع △ و ك ر مثلا ارتفاع △ أ ب جـ، المثلثان متشابهان؛لأن زواياهما المتناظرة متطابقة. مساحة △ و ك ر تساوي ٤ أمثال مساحة △ أ ب جـ .



٢٧) يكون المثلثان متشابهين، إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة. وإذا كان المثلثان متشابهين، فإنه يمكن استعمال التناسب لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة. وإذا كانت الزوايا مجهولة، فحدّد قياس زاوية في أحد المثلثين المتشابهين، فيكون للزاوية المناظرة لها من المثلث الآخر القياس نفسه .

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٩ - ٦

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٢٦) — دون

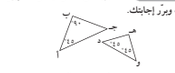
الاسم _____ التاريخ _____

٩-٦ تدريبات إعادة التعليم
المثلثات المتشابهة

المثلثات المتشابهة: Δل م ن، Δس ص ع في الشكل المجاور متشابهان.
قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

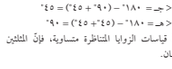
المثلثات المتشابهة	إذا تشابه مثلثان، فإنّ قياسات زواياهما المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة.	Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$

مثال ١ حدّد إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك.



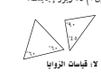
بما أن قياسات الزوايا المتناظرة ليست متساوية، فإنّ المثلثين غير متشابهين.

مثال ٢ حدّد إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك.



قياس ∠جـ = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°
قياس ∠هـ = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°
بما أنّ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، فإنّ المثلثين متشابهان.

تمارين
حدّد إذا كان كل مثلثين مما يأتي متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

١) 
نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

٢)
لا؛ قياسات الزوايا المتناظرة غير متساوية.

٣)
نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

٤)
نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

٥)
نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

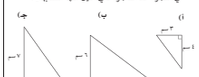
٦)
لا؛ قياسات الزوايا المتناظرة غير متساوية.

تدريبات حل المسألة (٢٨) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٦ تدريبات حل المسألة
المثلثات المتشابهة

١) **حرف يدوية:** تريد ليلى شراء مجموعة مغانط متشابهة لتضعها على باب الثلاجة، فوجدت المغانط المتبقية أدناه، في متجر أحد المتاجر. فأيّ اثنين منها متشابهان؟



أ، ب

٢) **معارض:** عُرضت أطول شمعة في العالم عام ١٨٩٧م في معرض ستوكهولم. افترض أنّ أحد قاس طول ظل هذه الشمعة في أحد الأيام عند الساعة ١١:٠٠ صباحًا، فكان ١٢ قدمًا، وفي الوقت نفسه كان طول ظل عمود خيمة مجاورة ٥ أقدام. فإذا كان ارتفاع عمود الخيمة ٢٥ قدمًا، فما ارتفاع أطول شمعة في العالم؟
٦٠ قدمًا

٣) **نماذج:** يبيّن الشكل أدناه نموذجًا للمنظر الأمامي للجزء العلوي لمنزل، إذا كان مقياس رسم النموذج ١ بوصة: ١ قدم، فما الارتفاع الحقيقي لهذا الجزء من المنزل؟
١٤ قدمًا

٤) **مسح الأراضي:** يستعمل المساحون تشابه المثلثات لإيجاد مسافات مجهولة. أوجد المسافة المجهولة س عبر البحيرة في الشكل أدناه، مستعملًا الأبعاد المعطاة.
٨٠ م

٥) **الغاز:** بيّن الشكل أدناه لغزًا صينيًا قديمًا يُسمّى (تانجرام)، حيث توجد ٧ قطع يمكن إعادة تشكيلها للحصول على عدد لانهائي من التصاميم والصُّور.

افترض أن طول ضلع مربع هذا التانجرام يساوي $\sqrt{٢}$ سم. أجب عمّا يأتي، مع تبسيط العبارات الجذرية:

أ) ما أطوال أضلاع المثلثين ١، ٢؟
١ سم، ١ سم، $\sqrt{٢}$ سم

ب) ما أطوال أضلاع المثلث ٧؟
$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ سم، $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ سم، ١ سم

جـ) ما أطوال أضلاع المثلثين ٣، ٥؟
$\frac{١}{٢}$ سم، $\frac{١}{٢}$ سم، $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ سم

التدريبات الإثرائية (٢٩) — فوق

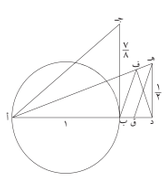
الاسم _____ التاريخ _____

٩-٦ التدريبات الإثرائية
إنشاء هندسي طريف

اهتمّ الكثير من علماء الرياضيات بطرائق الإنشاءات الهندسية لتمثيل النسبة التقريبية ط. وبيّن الشكل المجاور إحدى هذه الإنشاءات.

Δ أ ب جـ ≅ Δ د هـ قائما الزاوية، وطول $\overline{\text{أجـ}}$ يساوي طول $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{ف ب}}$ يوازي $\overline{\text{هـ ق}}$.

يعطي طول $\overline{\text{ب ق}}$ تقريبًا عشريًا للجزء الكسري لقيمة النسبة التقريبية ط لسبع منازل عشرية.



اتبع الخطوات الآتية لإيجاد طول $\overline{\text{ب ق}}$، وقرّب إلى أقرب سبع منازل عشرية:

١) استعمل طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ونظرية فيثاغورس لإيجاد طول $\overline{\text{أجـ}}$.
أجـ = $\sqrt{(١)^٢ + (\frac{١}{٨})^٢}$ = $\frac{\sqrt{٦٥}}{٨}$ = ١,٢٢٨٧٦٨٢

٢) أوجد طول $\overline{\text{أد}}$.
أد = أ جـ = ١,٢٢٨٧٦٨٢

٣) أوجد طول $\overline{\text{أهـ}}$، مستعملًا طول $\overline{\text{أد}}$ ونظرية فيثاغورس.
أ هـ = $\sqrt{(\text{أد})^٢ + (\frac{١}{٤})^٢}$ = ١,٤١٧٧٣٧١

٤) أطوال أضلاع المثلثين المتشابهين Δ ف هـ د، Δ د هـ أ متناسبة. لذا فإنّ $\frac{\text{ف هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{٥}{٧}$. أوجد طول $\overline{\text{ف هـ}}$.
ف هـ = $\frac{٥}{٧}$ × $\frac{١}{\sqrt{٤}(\text{أهـ})}$ = ٠,١٧٦٠٩٠٢

٥) أوجد $\overline{\text{أف}}$.
أف = أ هـ − ف هـ = ١,٢٤٣٦٣٩

٦) أطوال أضلاع المثلثين المتشابهين Δ أ ف ب، Δ أ هـ ق متناسبة. لذا فإنّ $\frac{\text{أ ف}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ق}}$. أوجد طول $\overline{\text{أق}}$.
أ ق = $\frac{\text{أب} \times \text{أهـ}}{\text{أف}}$ = $\frac{\text{أهـ}}{\text{أق}}$ = ١,١٤١٥٩٢٩

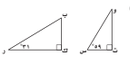
٧) أوجد طول $\overline{\text{ب ق}}$.
ب ق = أ ق − أ ب = أ ق − ١ = ٠,١٤١٥٩٢٩

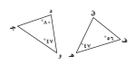
٨) قيمة ط لسبعة منازل عشرية هي ٣,١٤١٥٩٢٧. قارن الجزء الكسري لقيمة ط بطول $\overline{\text{ب ق}}$.
٠,١٤١٥٩٢٩ − ٠,١٤١٥٩٢٧ = ٠,٠٠٠٠٠٠٢ = ٢؛ الخطأ أصغر من جزء من مليون.

كتاب التمارين (٢٦) — دون ضمن فوق

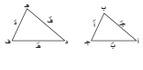
٩ - ٦ المثلثات المتشابهة

حدّد إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤالين الآتيين متشابهًا أم لا. وبرّر إجابتك.

١) 
نعم؛ ∠ك = ∠ت = ٩٠°
∠ب = ١٨٠° − (٩٠° + ٣١°) = ٥٩° = ∠س
∠و = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٩°) = ٣١° = ∠ر
بما أن المثلثين متشابهان، لذا فإن قياساتهما المتناظرة متشابهة.

٢) 
لا؛ ∠جـ = ١٨٠° − (٤٧° + ٨٠°) = ٥٣°
بما أن قياسات الزوايا المتناظرة غير متساوية، لذا فإن المثلثين غير متشابهين

في الأسئلة ٣–١٠، إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ ف، فأوجد قياسات العناصر المجهولة.



٣) جـَ = ٤، ∠د = ١٢، هـَ = ١٦، ∠ف = ٨ أَ = ٦، بَ = ٨
٤) هـَ = ٢٠، أَ = ٢٤، بَ = ٣٠، جـَ = ١٥ ∠د = ١٦، ف = ١٠
٥) أَ = ١٠، بَ = ١٢، جـَ = ٦، ∠د = ٤ هـَ = ٨، ٤، ف = ٢، ٤
٦) أَ = ٤، ٦، هـَ = ٤، ٤، ف = ٣ جـَ = ٢، بَ = $\frac{٣}{٢}$
٧) بَ = ١٥، ∠د = ٦، هـَ = ٢٠، ف = ١٠ أَ = ١٢، جـَ = $\frac{١٥}{٢}$
٨) أَ = ١٦، بَ = ٢٢، جـَ = ١٢، ف = ٨ ∠د = $\frac{٣٣}{٣}$، هـَ = $\frac{٤٤}{٣}$
٩) أَ = $\frac{٥}{٢}$، بَ = ٣، ف = $\frac{١١}{٢}$، هـَ = ٧ جـَ = $\frac{٣٣}{١٤}$، ∠د = $\frac{٣٥}{١٤}$
١٠) جـَ = ٤، ∠د = ٦، هـَ = ٥,٦٢٥، ف = ١٢ أَ = ٢، بَ = ١,٨٧٥

١١) **قياس:** إذا كان طول ظل بناية ٢٠ م، وطول ظلك ٩٠ سنتمترًا في تلك اللحظة، وطولك متر و٨٠ سنتمترًا، فما ارتفاع البناية؟ **٤٠ م**

١٢) **نماذج:** يستعمل المهندسون أشكالًا مثلثية لتدعيم أحد الجسور. فإذا عمل مراد نموذجًا للجسر مقياس الرسم فيه ١ سم لكل ١,٢ م، وكان ارتفاع المثلث في النموذج ٤,٥ سم، فما ارتفاع المثلث في التصميم الحقيقي؟ **٥,٤ م**

ملحوظات المعلم

استكشاف ٧-٩

ملاحظات الدرس

١ التركيز

الهدف: استعمال المثلثات المتشابهة لاستقصاء النسب المثلثية.

المواد اللازمة

- مسطرة
- منقلة
- أوراق مربعات

سهولة عمل اليدويات

يسهل تدريس الجبر باستعمال اليدويات وورق مربعات.

إرشادات للدراسة

بيّن للطلاب أنه على الرغم من أن قياسات أطوال الأضلاع أو الزوايا قد لا تكون دقيقة، إلّا أن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة يجب أن تكون قريبة، وكذلك قياسات الزوايا المتناظرة. وإن لم تكن كذلك فليقم الطالب بالتحقّق من قياساته.

٢ التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب مجموعات ثنائية أو ثلاثية لتنفيذ لنشاط، واقترح عليهم توزيع المهام الآتية بينهم: رسم المثلثات، وقياس طول الوتر، وقياس الزوايا، وحساب البيانات وتسجيلها. وعلى الطلاب تبادل المهام باستمرار.

ثم اسأل:

- لماذا كانت المثلثات في النشاط متشابهة؟ لأن نسب أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية في المثلثات جميعها.
- إذا علمت النسبة بين طول الضلع الأقصر إلى الضلع الأطول، فما الزاوية التي يمكن إيجادها؟ قياسات الزوايا جميعها.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة ١–٣.

٣ التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال ١؛ لتقويم فهم الطلاب إلى أن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية، وقياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين المتشابهين متساوية.

من المحسوس إلى المجرد

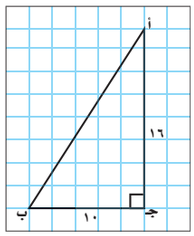
استعمل السؤال ٣؛ لتقويم فهم الطلاب إمكانية استعمال النسب بين أطوال أضلاع مثلث لإيجاد القياسات المجهولة للزوايا.

استكشاف ٧-٩ معمل الجبر

استقصاء النسب المثلثية

يمكنك استعمال ورقة المربعات لاستقصاء نسب أطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية.

اجمع البيانات:



الخطوة ١: استعمل مسطرة وورقة مربعات لرسم عدة مثلثات قائمة الزاوية النسبة بين ضلعي القائمة لكل منها ٥ : ٨. والجدول أدناه يتضمن مثلثات قائمة الزاوية طولا ساقي كل منها معلومان. ومثلثات قائمة أخرى مشابهة لهذه المثلثات الثلاثة. سمِّ الرؤوس أ، ب ، جـ ، حيث جـ هي الزاوية القائمة والرأس ب يقابل الضلع الأطول، والرأس أ يقابل الضلع الأقصر.

الخطوة ٢: انسخ الجدول أدناه، وأكمل الأعمدة الثلاثة الأولى بإيجاد طول الوتر (الضلع أ ب) في كل مثلث قائم مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ٣: احسب النسب وسجّلها في العمودين الأوسطين مقربة إلى أقرب جزء من مئة.

الخطوة ٤: استعمل المنقلة لقياس الزاويتين أ، ب بدقة، مقربًا إلى أقرب درجة، ثم سجل قياسات الزوايا في الجدول.

أطوال الأضلاع			النسب		قياسات الزوايا		
الضلع ب جـ	الضلع أ جـ	الضلع أ ب	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$	الزاوية أ	الزاوية ب	الزاوية جـ
٢,٥	٤	٤,٧	٠,٦٣	٠,٥٣	٣٢°	٥٨°	٩٠°
٥	٨	٩,٤	٠,٦٣	٠,٥٣	٣٢°	٥٨°	٩٠°
١٠	١٦	١٨,٩	٠,٦٣	٠,٥٣	٣٢°	٥٨°	٩٠°
١٥	٢٤	٢٨,٣	٠,٦٣	٠,٥٣	٣٢°	٥٨°	٩٠°
٢٠	٣٢	٣٧,٧	٠,٦٣	٠,٥٣	٣٢°	٥٨°	٩٠°
٢٥	٤٠	٤٧,٢	٠,٦٣	٠,٥٣	٣٢°	٥٨°	٩٠°

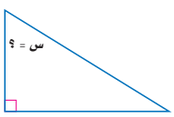
حلّل النتائج:

١) تفحّص قياسات الزوايا في الجدول والنسب بين أطوال الأضلاع. ماذا تلاحظ ؟ اكتب جملة أو جملتين لوصف أي نمط تراه.
جميع النسب وقياسات الزوايا في الجدول متساوية لكل المثلثات القائمة والنسبة بين ضلعي كلٍّ منها ٥ : ٨.

خَمّن:

٢) ما النسبة بين طولي أقصر وأطول ضلع في مثلث قائم الزاوية ومشابه للمثلثات التي رسمتها هنا؟ ٥ : ٨

٣) إذا كانت نسبة طول أقصر ضلع إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية هي ٠,٥٣ تقريبًا. فما قياس الزاوية الحادة الكبرى في المثلث القائم الزاوية؟ ٥٨°



٩-٧ النسب المثلثية

لماذا ؟

يعني معدّل انحدار طريق بنسبة ٢٥٪ أن الطريق ترتفع أو تنحدر ٢٥ قدمًا لكل ١٠٠ قدم أفقيًّا. ويمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياس زاوية ارتفاع الطريق أو انحدارها.

النسب المثلثية : **حساب المثلثات** هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. **والنسبة المثلثية** هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم. والنسب المثلثية الثلاث الأكثر شيوعًا هي **الجيب**، و**جيب التمام**، و**الظل** ، وهي موضحة في الجدول أدناه:

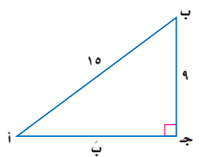
مفهوم أساسي — النسب المثلثية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	النموذج
جيب الزاوية أ = الضلع المقابل للزاوية أ / الوتر	جا أ = أَ / جَ	
جيب تمام الزاوية أ = الضلع المجاور للزاوية أ / الوتر	جتا أ = بَ / جَ	
ظل الزاوية أ = الضلع المقابل للزاوية أ / الضلع المجاور للزاوية أ	ظا أ = أَ / بَ	

مثال ١ — إيجاد نسب الجيب وجيب التمام، والظل

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.



الخطوة ١: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد أ جـ .

$أَ^٢ + بَ^٢ = جَـ^٢$ نظرية فيثاغورس

$٩^٢ + بَ^٢ = ١٥^٢$ أ = ٩ ، جـ = ١٥

$٨١ + بَ^٢ = ٢٢٥$ بسّط

$بَ^٢ = ١٤٤$ اطرح ٨١ من كلا الطرفين

$بَ = ١٢$ أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة ٢: استعمل أطوال الأضلاع لكتابة النسب المثلثية.

جا أ = المقابل / الوتر = ٩/١٥ = ٣/٥ جتا أ = المجاور / الوتر = ١٢/١٥ = ٤/٥ ظا أ = المقابل / المجاور = ٩/١٢ = ٣/٤

تحقق من فهمك

١) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب. جا ب = ٤/٥ ؛ جتا ب = ٣/٥ ؛ ظا ب = ٤/٣

فيما سبق
درست استعمال نظرية فيثاغورس.

والآن
- أجد النسب المثلثية للزوايا.
- أستعمل حساب المثلثات لحل المثلثات.

المفردات
حساب المثلثات
النسب المثلثية
الجيب
جيب التمام
الظل
حل المثلث
معكوس الجيب
معكوس جيب التمام
معكوس الظل

obeikaneducation.com

٩-٧ ملاحظات الدرس

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ٩ - ٧
استعمال نظرية فيثاغورس.

الدرس ٩ - ٧
إيجاد النسب المثلثية للزوايا.
استعمال حساب المثلثات لحل المثلثات.

ما بعد الدرس ٩ - ٧
استعمال النسب المثلثية؛ لإيجاد قياس زوايا الارتفاع والانخفاض.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

ثم اسأل:

- افترض أنك رسمت مثلثًا قائم الزاوية لتمثيل طريقٍ معدّل انحداره ٨%، فأي ضلع يمثل المسافة الأفقية التي طولها ١٠٠ قدم؟ الضلع الأطول.
وأي ضلع يُمثّل ارتفاع الطريق ٨ أقدام؟ الضلع الأقصر.
- ما الضلع الذي يجاور الزاوية التي يرتفع عندها الطريق أو يهبط؟ الضلع الأطول.
وأي ضلع يقابل هذه الزاوية؟ الضلع الأقصر.
- ما النسبة التي ستستعملها لإيجاد قياس الزاوية؟ نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول الضلع المجاور لها.

مصادر الدرس ٩- ٧

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٥٢)	• تنويع التعليم ص (١٥٢، ١٥٦)	• تنويع التعليم ص (١٥٦)
كتاب التمارين	ص (٢٧)	ص (٢٧)	ص (٢٧)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٣٠) • تدريبات حل المسألة، ص (٣٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (٣٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (٣٢) • التدريبات الإثرائية، ص (٣٣)

النسب المثلثية

المثال ١ يُبيّن طريقة إيجاد النسب المثلثية الثلاث لزاوية من زوايا مثلث قائم الزاوية.

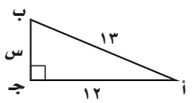
المثال ٢ يُبيّن طريقة استعمال الحاسبة لإيجاد قيمة عبارة مثلثية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين «تحقّق من فهمك» بعد كل مثالٍ؛ للتحقّق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ أوجد قيمة النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب .



جا ب = $\frac{١٢}{١٣}$، جتا ب = $\frac{٥}{١٣}$، ظا ب = $\frac{١٢}{٥}$

٢ استعمل الحاسبة لإيجاد ظا ٥٢° إلى أقرب جزء من ألف. ١,٢٨٠

استعمال النسب المثلثية

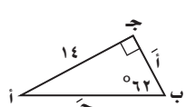
المثال ٣ يُبيّن طريقة حل المثلث القائم.

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال النسب المثلثية لحل مسألة من واقع الحياة.

المثال ٥ يُبيّن طريقة استعمال معكوس الدالة المثلثية؛ لإيجاد الزاوية المجهولة.

مثال إضافي

٣ حُلّ المثلث القائم الزاوية أدناه، مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.



ق ∠ أ = ٢٨°، أ ≈ ٧,٤، جـ ≈ ١٥,٩

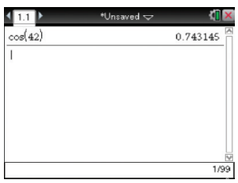
تنبيه !

وضع الآلة الحاسبة (mode)

كن متأكدًا من وضع الآلة الحاسبة (mode) للعمل بالدرجات.

مثال ٢ استعمال الحاسبة لإيجاد قيم العبارات

استعمل الحاسبة لإيجاد جتا ٤٢° إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.



اضغط على المفاتيح:

on 1 New Document

1:Add Calculator trig cos 42 enter

قرّب إلى أقرب جزء من ألف.

جتا ٤٢° ≈ ٠,٧٤٣١.

تحقق من فهمك

٢أ) جا ٣١°. ٠,٥١٥ **٢ب)** ظا ٧٦° ٤,٠١٠٨ **٢جـ)** جتا ٥٥° ٠,٥٧٣٦

استعمل النسب المثلثية: عندما تجد القياسات المجهولة لأضلاع المثلث القائم وزواياه، فإنك تكون بذلك قد قمت **بحل المثلث**، ويمكنك إيجاد القياسات المجهولة إذا علمت طولي ضلعين في المثلث، أو طول ضلع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين.

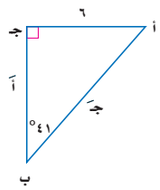
إرشادات للدراسة

تذكّر رموز أطوال أضلاع المثلث

يُرمز إلى طول الضلع المقابل للرأس أ في المثلث أ ب جـ بالرمز أ، وإلى طول الضلع المقابل للرأس ب بالرمز بَ، وإلى طول الضلع المقابل للرأس جـ بالرمز جَـ.

مثال ٣ حل المثلث

حُلّ المثلث القائم الزاوية مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة ١: أوجد قياس ∠ أ. ق ∠ أ = ١٨٠° − (٩٠° + ٤١°) = ٤٩°

قياس ∠ أ = ٤٩°.

الخطوة ٢: أوجد أ. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الضلع المجاور للزاوية ب، فاستعمل نسبة الظل.

ظا ٤١° = $\frac{٦}{أ}$ تعريف الظل

أ ظا ٤١° = ٦ اضرب كلا الطرفين في أ

أ = $\frac{٦}{\text{ظا } ٤١°}$ = ٦,٩ تقريبًا اقسم الطرفين على ظا ٤١°، استعمل الحاسبة

لذا يكون أ = ب جـ = ٦,٩ تقريبًا.

الخطوة ٣: أوجد جَـ. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الوتر، فاستعمل نسبة الجيب.

جا ٤١° = $\frac{٦}{جـ}$ تعريف الجيب

جَـ جا ٤١° = ٦ اضرب كلا الطرفين في جَـ

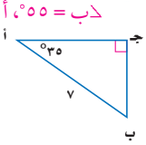
جَـ = $\frac{٦}{\text{جا } ٤١°}$ = ٩,١ تقريبًا اقسم الطرفين على جا ٤١°، استعمل الحاسبة

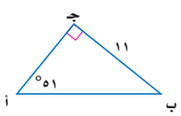
ولذا فإن جَـ = أ ب = ٩,١ تقريبًا.

تحقق من فهمك

٣أ) ∠ب = ٥٥°، أ جـ ≈ ٥,٧؛ ب جـ ≈ ٤,٠

٣ب) ∠ب = ٣٩°، أ جـ ≈ ٨,٩؛ أ ب ≈ ١٤,٢





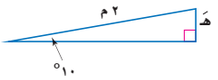
تنويع التعليم: دون ضمن

إذا وجد بعض الطلاب صعوبة في تذكر النسب المثلثية،

فقم واطلب إليهم العمل في مجموعات؛ لإجراء عصف ذهني للأفكار التي تساعدهم على تذكّرها. زوّد الطلاب بمقترحات مثل البطاقات، أو الأنماط اللغوية، ثم اطلب إلى المجموعات مشاركة طلاب الصف في أفكارهم.

مثال ٤ من واقع الحياة إيجاد طول الضلع المجهول

تمرين: يضع المدرِّب جهاز التمرين الرياضي مائلاً بمقدار ١٠°، فإذا كان طول سطح السير على الجهاز ٢ م، فكم يجب رفع نهايته عن الأرض بالسنتمترات تقريبًا؟



جا ١٠° = هـ/٢ — تعريف الجيب

٢ × جا ١٠° = هـ — اضرب كلا الطرفين في ٢

هـ ≈ ٠,٣٥ — استعمل الحاسبة

فتكون قيمة هـ بالأمتار تساوي ٠,٣٥، اضرب ٠,٣٥ في ١٠٠ لتحويل الأمتار إلى سنتمترات.

يرفع المدرب الجهاز ٣٥ سم تقريبًا.

تحقق من فهمك

٤) **لوح التزلج:** ما طول لوح تزلج يصنع مع سطح الأرض زاوية قياسها ٢٥°، ويرتفع طرفه ٢ م؟ ٤,٧ م

الربط مع الحياة

للتمتع بصحة مثالية يجب على جميع الأشخاص من العمر ١٦ –٦٥، التدرب لمدة ٣٠ دقيقة على الأقل على نشاط متوسط الشدة لمدة خمسة أيام في الأسبوع.

يُعبر عن قاعدة الدالة المثلثية عادة باستعمال النسب المثلثية، وإذا علمت الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة، فيمكنك إيجاد قياسها باستعمال معكوس الدالة المثلثية.

مفهوم أساسي معكوس الدوال المثلثية

أضف إلى مطويتك

إذا كانت ∠ أ زاوية حادة، وكان:

التعبير اللفظي: جا أ = س فإن **معكوس جيب** س ورمزه جا$^{-1}$ س يساوي قياس ∠ أ.

الرموز: إذا كان جا أ = س، فإن جا$^{-1}$ س = ق ∠ أ.

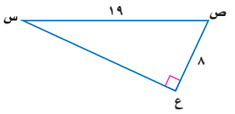
التعبير اللفظي: جتا أ يساوي س، فإن **معكوس جيب تمام** س ورمزه جتا$^{-1}$ س يساوي قياس ∠ أ.

الرموز: إذا كان جتا أ = س، فإن جتا$^{-1}$ س = ق ∠ أ.

التعبير اللفظي: ظا أ يساوي س، فإن **معكوس ظل** س ورمزه ظا$^{-1}$ س يساوي قياس ∠ أ.

الرموز: إذا كان ظا أ = س، فإن ظا$^{-1}$ س = ق ∠ أ.

مثال ٥ إيجاد قياس الزاوية المجهولة



أوجد ق ∠ ص إلى أقرب درجة.

تعلم طول الضلع المجاور للزاوية ص وقياس الوتر.

استعمل نسبة جيب التمام.

جتا ص = ٨/١٩ — تعريف جيب التمام

استعمل الحاسبة البيانية ودالة جتا$^{-1}$ [$\cos^{-1}$] لإيجاد قياس الزاوية.

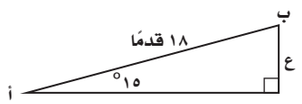
اضغط على المفاتيح: 65.098937 enter) 19 ÷ 8 (trig $\cos^{-1}$ لذا فإن ق ∠ ص = ٦٥°.

تحقق من فهمك

٥) أوجد ق ∠ س مقربًا إلى أقرب درجة إذا كان س ص = ١٤، ص ع = ٥ . ٢١°

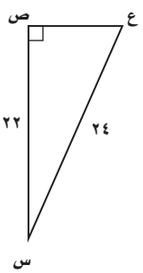
مثالان إضافيان

٤ الحزام الناقل: يعمل الحزام الناقل على نقل المواد المراد تدويرها من المحطة (أ) إلى المحطة (ب). إذا كانت الزاوية التي يشكلها الحزام الناقل مع الأرض عند المحطة (أ) ١٥°، وطول الحزام الناقل ١٨ قدمًا، كما هو موضح في الشكل أدناه، فما الارتفاع المناسب لأرض المحطة (ب) عن المحطة (أ)؟



٤,٧ أقدام تقريبًا

٥ أوجد ق ∠ س إلى أقرب درجة. ٢٤°



التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مثلثًا قائم الزاوية على السبورة التفاعلية، واكتب على كل ضلع قياس طوله. ولكتابة النسب المثلثية، حرّك القياس من الضلع في المثلث إلى النسبة.

المحتوى الرياضي

النسب المثلثية:

تتضمّن النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام والظل، وكذلك القاطع وقاطع التمام وظل التمام، والتي سيتعلمها الطلاب في المرحلة الثانوية. وتُعبّر النسب المثلثية عن نسب أطوال أضلاع المثلثات القائمة بالنسبة لزواياها. وتُستعمل النسب لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة. ويُستعمل معكوس النسب المثلثية؛ لإيجاد قياسات الزاوية المجهولة.

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ١٤؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير: وجِّه الطلاب وانصحهم ألّا يخلطوا إشارة معكوس دوال النسب المثلية بالإشارات المستعملة في الأسس السالبة، فمثلًا جتا$^{-١}$ س $\neq \frac{١}{\text{جتا س}}$.

إجابات:

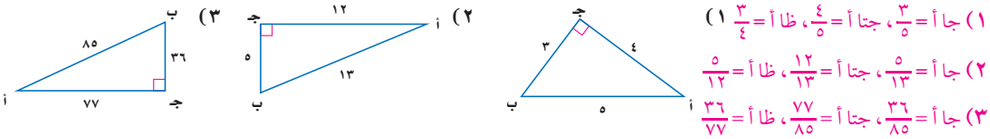
١٥) جا ب = $\frac{١٥}{١٧}$، جتا ب = $\frac{٨}{١٧}$، ظا ب = $\frac{١٥}{٨}$

١٦) جا ب = $\frac{٥}{١٣}$، جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$، ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$

١٧) جا ب = $\frac{\sqrt{١٥}}{٤}$، جتا ب = $\frac{١}{٤}$، ظا ب = $\sqrt{١٥}$

تأكد

مثال ١ أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ في كل مما يأتي:



١) جا أ = $\frac{٣}{٥}$، جتا أ = $\frac{٤}{٥}$، ظا أ = $\frac{٣}{٤}$

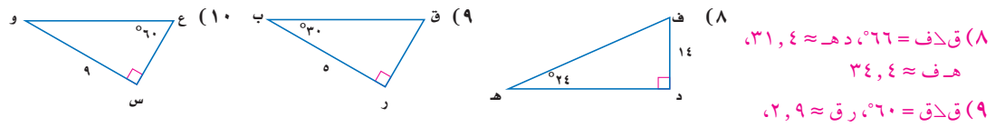
٢) جا أ = $\frac{٥}{١٣}$، جتا أ = $\frac{١٢}{١٣}$، ظا أ = $\frac{٥}{١٢}$

٣) جا أ = $\frac{٣٦}{٨٥}$، جتا أ = $\frac{٧٧}{٨٥}$، ظا أ = $\frac{٣٦}{٧٧}$

مثال ٢ استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كل مما يأتي:

٤) جا ٣٧° ٠,٦٠١٨ ٥) جتا ٢٣° ٠,٩٢٠٥ ٦) ظا ١٤° ٠,٢٤٩٣ ٧) جتا ٨٢° ٠,١٣٩٢

مثال ٣ حُلّ كلّ مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:



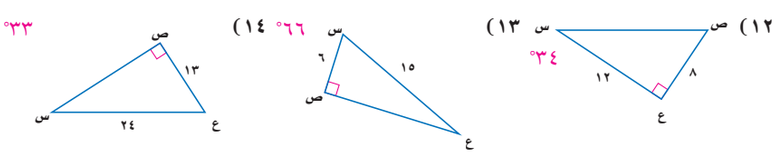
٨) ق∠ف = ٦٦°، د هـ ≈ ٣١,٤، هـ ف ≈ ٣٤,٤

٩) ق∠ق = ٦٠°، ر ق ≈ ٢,٩، ب ق ≈ ٥,٨

١٠) ق∠و = ٣٠°، س ع ≈ ٥,٢، و ع ≈ ١٠,٤

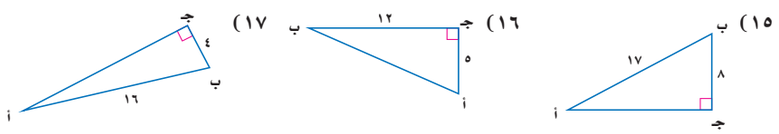
مثال ٤ ١١) **تزلج على الجليد:** في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسي ١٠٠٠ م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض ١٨°، قدّر طول (ر). ٣٢٣٦,١م

مثال ٥ أوجد ق ∠ س لكل مثلث فيما يأتي مقربًا إلى أقرب درجة:



تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب في كلٍّ مما يأتي: ١٥–١٧ انظر الهامش.



مثال ٢ استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

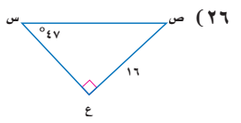
١٨) ظا ٢° ٠,٠٣٤٩ ١٩) جا ٨٩° ٠,٩٩٩٨ ٢٠) جتا ٤٤° ٢١٠,٧١٩٣ ٢١) ظا ٤٥° ١

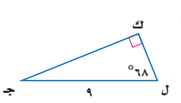
٢٢) جا ٧٣° ٠,٩٥٦٣ ٢٣) جتا ٩٠° ٠ ٢٤) جا ٣٠° ٠,٥ ٢٥) ظا ٦٠° ١,٧٣٢١

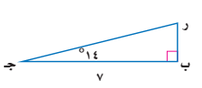
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون	١٥–٣٢، ٤٠–٥١
ضمن	١٦–٣٢ (زوجي)، ٢٩، ٣٣–٣٧، ٤٠–٥١
فوق	٣٣–٥١

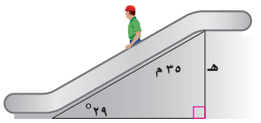
مثال ٣ حُلّ كل مثلث قائم فيما يأتي مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة: ٢٦–٢٨ انظر الهامش.

٢٦) 

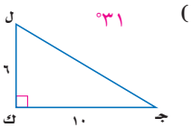
٢٧) 

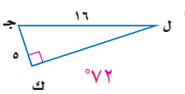
٢٨) 

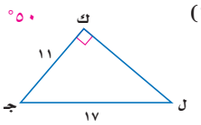
مثال ٤ ٢٩) **سلّم كهربائي:** يبلغ طول السلّم الكهربائي في أحد الأسواق الكبيرة ٣٥ مترًا، وقياس الزاوية التي يكوّنها مع الأرض ٢٩°، أوجد ارتفاع السلم. ١٧ متر تقريبًا.



مثال ٥ أوجد ق ∠ جـ لكل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرّبًا إلى أقرب درجة:

٣٠) 

٣١) 

٣٢) 

٣٣) **وقف الملك عبدالعزيز:** يصل ارتفاع أبراج وقف الملك عبد العزيز المطلة على المسجد الحرام إلى ٤٠٠ متر. ينظر عمار إلى أعلى الأبراج بزاوية ٥٥°. فما بُعد عمار عن قاعدة الأبراج؟ ٢٨٠ مترًا تقريبًا

٣٤) **غابات:** يقدّر حارس غابة ارتفاع شجرة بنحو ٥٠ مترًا. فإذا كان الحارس يقف على بعد ٣٠ مترًا من قاعدة الشجرة، فما مقياس الزاوية التي يشكّلها مع قمة الشجرة؟ ٥٩° تقريبًا

الربط مع الحياة

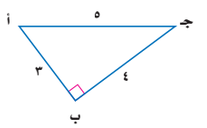
يبلغ طول أطول شجرة معمّرة نحو ١١٥ مترًا. وهناك نحو ١٣٥ شجرة من هذا النوع يزيد طولها على ١٠٧ أمتار.

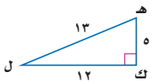
في السؤالين ٣٥–٣٦، افترض أن ∠ أ زاوية حادة في المثلث القائم أ ب جـ، ثم أوجد: ٣٥–٣٦ انظر الهامش

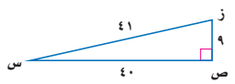
٣٥) جا أ، ظا أ إذا كان جتا أ = $\frac{٣}{٤}$.

٣٦) ظا أ، جتا أ إذا كان جا أ = $\frac{٢}{٧}$.

٣٧) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة العلاقة بين دوال الجيب ودوال جيب التمام.







أ) جدوليًا: انقل الجدول الآتي وأكمله مستعملًا المثلثات أعلاه: انظر ملحق الإجابات

المثلث	النسب المثلثية		جا^٢	جتا^٢	جا^٢ + جتا^٢ =
أ ب جـ	جا أ =	جتا أ =	جا^٢ أ =	جتا^٢ أ =	
	جا جـ =	جتا جـ =	جا^٢ جـ =	جتا^٢ جـ =	
هـ ك ل	جا هـ =	جتا هـ =	جا^٢ هـ =	جتا^٢ هـ =	
	جا ل =	جتا ل =	جا^٢ ل =	جتا^٢ ل =	
س ص ز	جا س =	جتا س =	جا^٢ س =	جتا^٢ س =	
	جا ز =	جتا ز =	جا^٢ ز =	جتا^٢ ز =	

ب) لفظيًا: خمّن علاقة مجموع مربعي دالتي الجيب وجيب التمام لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.

٣٧ ب) مجموع مربعي جيب الزاوية الحادة وجيب تمامها في مثلث قائم الزاوية يساوي ١.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ٣٧، يستعمل الطلاب الأشكال والمعلومات المنظمة في الجدول، والتحليل اللفظي لاستقصاء العلاقة بين دالة الجيب ودالة جيب التمام.

إجابات:

٢٦) ق ∠ ص = ٤٣°، س ص ≈ ٢١,٩؛ س ز ≈ ١٤,٩

٢٧) ق ∠ ي = ٢٢°، ج ك ≈ ٨,٣، ك ل ≈ ٣,٤

٢٨) ق ∠ ر = ٧٦°، ك ر ≈ ٧,٢، ب ر ≈ ١,٧

٣٥) جا أ = $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$، ظا أ = $\frac{\sqrt{٧}}{٣}$

٣٦) ظا أ = $\frac{٥\sqrt{٢}}{١٥}$، جتا أ = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء: لحل الأسئلة ٣٣– ٣٤، اقترح على الطلاب رسم المثلثات القائمة التي تناسب الوصف في الأسئلة وكتابة القياسات المعلومة عليها؛ ممّا يساعدهم على رؤية واضحة للموقف وإيجاد القياس الصحيح.

٤ التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة جملة توضّح كيف ساعد درس نظرية فيثاغورس، على فهم درس النسب المثلثية.

التقويم التكويني

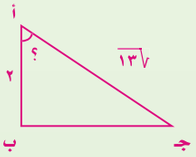
تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين (٩– ٦، ٩– ٧) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٤)، ص (٦٩)

إجابات:

٤٠) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \frac{\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}}{\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \times \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} =$ ظا أ

٤١) أوجد قياس الزاوية المجهولة.



٤٣) تُستعمل الزاوية المعطاة وقياس طول الضلع في المثلث القائم الزاوية، في كتابة إحدى النسب المثلثية، حيث تستعمل نسبة الجيب، الضلع المقابل والوتر، وتستعمل نسبة جيب التمام، الضلع المجاور والوتر، وتستعمل نسبة الظل، الضلع المقابل والضلع المجاور. اكتب النسبة الملائمة، ثم حُلّ المثلث لإيجاد القيم المجهولة.

تنويع التعليم

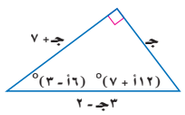
ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب إيجاد قيم (جا أ، جتا أ، ظا أ) لعدة قيم للزاوية أ، وتخمين قيمة النسبة $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$

القيمة تساوي دائمًا ظا أ.

٣٨) **غوّاصات:** إذا نزلت غوّاصة مسافة ٣ أميال قطريًّا بزاوية مقدارها ١٠° مع قاع محيط. فكم أصبح بعدها عن سطح الماء؟ ٠,٥ ميل تقريبًا

مسائل مهارات التفكير العليا



٣٩) **تحدّ:** حلّ المثلث في الشكل المجاور. أ = ٤,٧٨؛ جـ = ٥

٤٠) **تبرير:** استعمل تعريف نسب الجيب وجيب التمام في تعريف نسبة الظل. انظر الهامش.

٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب مسألة تستعمل فيها نسبة جيب التمام لإيجاد قياس زاوية مجهولة في مثلث قائم الزاوية، ثم حلّها.

٤١) إجابة ممكنة: أوجد قياس ∠ أ في المثلث. ق∠ أ ≈ ٥٦°. انظر الهامش للمثلث.

٤٢) **تبرير:** إذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين، فماذا تستنتج عن المثلث؟

٤٢) المثلث متطابق الضلعين وقائم الزاوية، إذن فالضلعان متساويان.

٤٣) **اكتب:** وضّح كيف يمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في مثلث عُلِمَ فيه قياس زاوية حادة وطول أحد الأضلاع. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٤٤) أيّ المتباينات الآتية تعبّر عن التمثيل البياني أدناه؟ أ

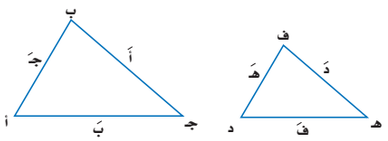
أ) $-٢ \geq س \geq ٤$ جـ) $س \leq ٤$ أو $س \geq -٢$

ب) $-٢ > س > ٤$ د) $س > ٤$ أو $س > -٢$

٤٥) **إجابة قصيرة:** يتقاضى مندوب مبيعات ٦٤٠٠٠ ريال راتبًا سنويًّا، إضافة إلى ٥٪ من قيمة مبيعاته. ما قيمة المبيعات التي عليه بيعها ليزيد دخله السنوي على ٩٠٠٠٠ ريال؟ أكثر من ٥٢٠٠٠٠ ريال.

مراجعة تراكمية

في الأسئلة ٤٦–٤٨، إذا كان △ أ ب جـ ~ △ د ف هـ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة: (الدرس ٩-٦)



٤٦) أ = ١٦، ب = ١٢، جـ = ٨، ف = ٦ هـ = ٤؛ د = ٨

٤٧) د = ٩، ف = ٦، هـ = ٤، ب = ١٨ أ = ٢٧؛ جـ = ١٢

٤٨) أ = ٣٦، ب = ٢١، هـ = ١١، ف = ١٤ جـ = ١٦,٥؛ د = ٢٤

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي: (الدرس ٩-٥)

٤٩) (٥، ٣)، (١١، ٩) (٨، ٦) ٥٠) (٨، ٢)، (٦، ٤) (٧، ٣) ٥١) (-١، ٧)، (-٣، ١٣) (٦، ٢)

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ٩ - ٧

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٣٠)　دون

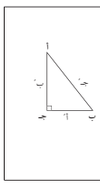
الاسم _____ التاريخ _____

٩-٧ تدريبات إعادة التعليم

النسب المثلثية

النسب المثلثية، حساب المثلثات هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. والنسب الثلاث الأكثر شيوعًا هي الجيب وجيب التمام، والظل.

جيب $\angle أ$ = الضلع المقابل للزاوية أ / الوتر	جا أ = أ ب / ب جـ
جيب $\angle ب$ = الضلع المقابل للزاوية ب / الوتر	جا ب = أ جـ / ب جـ
جيب تمام $\angle أ$ = الضلع المجاور للزاوية أ / الوتر	جتا أ = أ جـ / ب جـ
جيب تمام $\angle ب$ = الضلع المجاور للزاوية ب / الوتر	جتا ب = أ ب / ب جـ
ظل $\angle أ$ = الضلع المقابل للزاوية أ / الضلع المجاور للزاوية أ	ظا أ = أ ب / أ جـ
ظل $\angle ب$ = الضلع المقابل للزاوية ب / الضلع المجاور للزاوية ب	ظا ب = أ جـ / أ ب



مثال أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.

الخطوة ١، استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ب جـ

أ ب^{٢} + ب جـ^{٢} = أ جـ^{٢}	نظرية فيثاغورس
٨^{٢} + ب جـ^{٢} = ١٠^{٢}	بسّط
٦٤ + ب جـ^{٢} = ١٠٠	بسّط
ب جـ^{٢} = ٣٦	اطرح ٦٤ من كلا الطرفين
ب جـ = ٦	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة ٢، استعمل أطوال الأضلاع لكتابة النسب المثلثية.

جا أ = المقابل / الوتر = ٦/١٠ = ٣/٥، جتا أ = المجاور / الوتر = ٨/١٠ = ٤/٥، ظا أ = المقابل / المجاور = ٦/٨ = ٣/٤

تمارين

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ في كلٍّ مما يأتي:

١)

٢)

٣)

جا أ = ١٥/١٧، جتا أ = ٨/١٧، ظا أ = ١٥/٨　　جا أ = ٤/٥، جتا أ = ٣/٥، ظا أ = ٤/٣　　جا أ = ٧/٢٥، جتا أ = ٢٤/٢٥، ظا أ = ٧/٢٤

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة النسبة المثلثية إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كلٍّ مما يأتي.

٤) جا ٤٠°　٠,٦٤٢٨　　٥) جتا ٢٥°　٠,٩٠٦٣　　٦) ظا ٨٥°　١١,٤٣٠١

تدريبات حل المسألة (٣٢)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٧ تدريبات حل المسألة

النسب المثلثية

١) **أبراج**، يحاول ياسر تحديد ارتفاع البرج في الشكل أدناه. إذا كانت المسافة بين النقطتين أ، جـ تساوي ٢٥٥ مترًا، وكان قياس الزاوية بين الأرض وقمة البرج عند النقطة أ يساوي ٣٦°، فأوجد ارتفاع البرج إلى أقرب قدم.

١٨٥ مترًا

٢) **طائرات**، أقلع طيار بطائرته من مدرج المطار، براوية مائلة عن الأفق قياسها ٢٠°، حتى وصلت إلى ارتفاع ٢٥٠٠ قدم. فما المسافة الأفقية التي قطعتها الطائرة عند هذا الارتفاع؟

٦٨٦٩ قدمًا تقريبًا

٣) **سلّم شاحنة**، تستعمل إحدى شركات ترحيل الأثاث سلّمًا طوله ٤ أمتار لتنزيل الأثاث من شاحنة. إذا كان السطح السفلي لصندوق الشاحنة يرتفع مترًا واحدًا عن الأرض، فما قياس زاوية ميل السلّم إلى أقرب درجة؟

٩٤°

٤) **مثلثات خاصة**، لاحظت سلوى عند استقصاء المثلث القائم الزاوية ك ل م، أنّ جتا م = جا م، فما قياس الزاوية م؟

٤٥°

٥) **أجهزة تلفاز**، تُحدَّد قياسات أجهزة التلفاز بقياس قطر شاشة العرض. والقياس الشائع للشاشة العريضة لتلفاز البلازما يساوي ٤٢ بوصة.

أ) إذا كانت نسبة العرض ل إلى الارتفاع ع لشاشة تلفاز هي ١٦ : ٩، فإنّ العرض يساوي $\frac{16}{9}$ مرة من الارتفاع. اكتب معادلة لإيجاد الارتفاع (بالبوصات) لشاشة تلفاز، مستعملًا نظرية فيثاغورس، ثم أوجد قيمة الارتفاع.

ل^{٢} + ع^{٢} = (٤٢)^{٢} ، $\left(\frac{16}{9}ع\right)^{2}$ + ع^{٢} = (٤٢)^{٢} ؛ ع = ٢٠,٦ بوصة

ب) حلّ المثلث القائم أ ب جـ مستعملًا المعلومات الواردة في الفرع أ.

العرض = ٢٦,٦ بوصة ، ق∠ أ = ٢٩° ، ق∠ ب = ٦١°

جـ) ما قياس الزاوية أ لتلفاز نسبة عرض شاشته إلى ارتفاعه ٤ : ٣؟

٣٧°

التدريبات الإثرائية (٣٣)　فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٩-٧ التدريبات الإثرائية

المزيد من النسب المثلثية

يوجد ثلاث نسب مثلثية أخرى شائعة، إضافة إلى الجيب، وجيب التمام، والظل. وهذه النسب هي **القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام**.

قاطع $\angle أ$ = الوتر / الضلع المجاور للزاوية أ	قا أ = أ ب / أ جـ
قاطع $\angle ب$ = الوتر / الضلع المجاور للزاوية ب	قا ب = ب جـ / أ ب
قاطع تمام $\angle أ$ = الوتر / الضلع المقابل للزاوية أ	قتا أ = ب جـ / ب أ
قاطع تمام $\angle ب$ = الوتر / الضلع المقابل للزاوية ب	قتا ب = ب جـ / أ جـ
ظل تمام $\angle أ$ = الضلع المجاور للزاوية أ / الضلع المقابل للزاوية أ	ظتا أ = أ جـ / ب أ
ظل تمام $\angle ب$ = الضلع المقابل للزاوية ب / الضلع المجاور للزاوية ب	ظتا ب = ب أ / أ جـ

مثال أوجد القاطع وقاطع التمام وظل التمام للزاوية أ في الشكل المجاور.

قا أ = الوتر / المجاور = ١٥/١٢ = ٥/٤　　ظا أ = المقابل / المجاور = ٩/١٢ = ٣/٤　　ظتا أ = المجاور / المقابل = ١٢/٩ = ٤/٣

تمارين

أوجد القاطع وقاطع التمام وظل التمام للزاوية أ في كلٍّ مثلث مما يأتي:

١)

٢)

٣)

قا أ = ١٧/٨، قتا أ = ١٧/١٥، ظتا أ = ٨/١٥　　قا أ = ٥/٣، قتا أ = ٥/٤، ظتا أ = ٣/٤　　قا أ = ٢٥/٢٤، قتا أ = ٢٥/٧، ظتا أ = ٢٤/٧

٤) ما العلاقة بين قاطع تمام الزاوية وجيبها؟ وما العلاقة بين قاطع التمام وجيب تمامها؟ وما العلاقة بين ظل تمام الزاوية وظلها؟ قا أ = ١/جتا أ، قتا أ = ١/جا أ، ظتا أ = جتا أ/جا أ

أوجد كلّ نسبة مثلثية فيما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف، مستعملًا العلاقات التي وجدتها في السؤال ٤ والآلة الحاسبة:

٥) قا ١٧°　١,٠٤٥٧　　٦) قتا ٤٩°　١,٣٢٥٠　　٧) ظتا ٨١°　٠,١٥٨٤

كتاب التمارين (٢٧)　دون ضمن فوق

٩ - ٧ النسب المثلثية

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ فيما يأتي:

١)

جا أ = ٦٥/٩٧، جتا أ = ٧٢/٩٧، ظا أ = ٦٥/٧٢

٢)

جا أ = ٢٣/٣٤، جتا أ = ١٥/٣٤، ظا أ = ٢٣/١٥

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

٣) ظا ٢٦°　٠,٤٨٧٧　　٤) جا ٥٣°　٠,٧٩٨٦　　٥) جتا ٨١°　٠,١٥٦٤

حلّ كل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.

٦)

ب = ٢٣°، أ ب = ٩,٢، أ جـ = ٩,٣

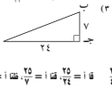
٧)

ب = ٦١°، أ ب = ١٠,٣، ب جـ = ٥,٠

أوجد ق ∠ جـ لكل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرّبًا إلى أقرب درجة.

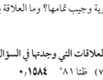
٨)

٩٤°

٩) 

٤٢°

١٠) **مسح**، إذا كان بعد النقطة أ عن قاعدة الشجرة يساوي ١٧ مترًا، والزاوية المحصورة بين الأرض عند النقطة أ وقمة الشجرة ٢٥°، فأوجد ارتفاع الشجرة. ٧,٩ م

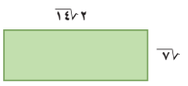


ملحوظات المعلم

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $5\sqrt{36}$ ٣٠
٢) $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ $-3-3\sqrt{2}$
٣) $2\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ $9\sqrt{3}$
٤) $3\sqrt{6}(5\sqrt{2})$ $30\sqrt{3}$

٥) **هندسة:** أوجد مساحة المستطيل. أ



أ) $14\sqrt{2}$
ب) $98\sqrt{2}$
جـ) ١٤
د) $7\sqrt{2}$

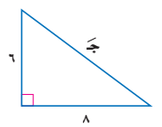
حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٦) $10\sqrt{س}=20$ ٤٠
٧) $4\sqrt{س-3}=6-س$ ٣

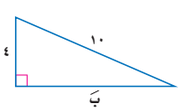
٨) **تغليف:** حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتمترًا مكعبًا. وتستعمل المعادلة نق$=\sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (نق) نصف قطر الأسطوانة، (ع) ارتفاعها، (ح) حجمها. فإذا كان ارتفاع الأسطوانة ٨,٢٥ سنتمترات، فأوجد نصف قطرها. ٢,٥ سم تقريبًا

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر: ٩) ١٠ ١٠) ٩,٢

٩)



١٠)



أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١١) (٢، ٣)، (٣، ٥) $\sqrt{5}\approx 2,2$
١٢) (−٣، ٤)، (−٢، −٣) $\sqrt{2}\sqrt{5}\approx 7,1$
١٣) (−١، −١)، (٣، ٢) ٥
١٤) (−٤، −٦)، (−٧، ١) $\sqrt{58}\approx 7,6$

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

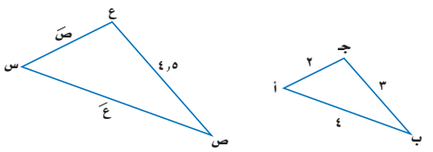
١٥) (٢، ٣)، (٣، ٥) $\left(٤، \frac{5}{2}\right)$
١٦) (−٣، ٤)، (−٢، −٣) $\left(-\frac{1}{2}، -\frac{5}{2}\right)$
١٧) (−١، −١)، (٣، ٢) $\left(١، \frac{1}{2}\right)$
١٨) (−٤، −٨)، (١٠، −٦) (٣، −٧)

١٩) **خدمة التوصيل:** يقدم أحد مطاعم الوجبات السريعة خدمة توصيل مجانية إلى أي موقع ضمن دائرة نصف قطرها ١٠ كلم من المطعم. فقطع الشخص الذي سيوصل الوجبات ٣٢ شارعًا شمالًا، ثم ٤٥ شارعًا إلى الشرق لإيصال الطلب، علمًا بأن البعد بين كل شارعين في هذه المدينة هو $\frac{1}{6}$ كلم.

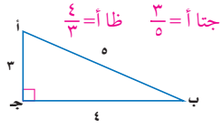
أ) هل الموقع خارج نطاق الخدمة المجانية؟ فسّر ذلك.
لا؛ المسافة نحو ٥٥ شارعًا، أو نحو $9\frac{1}{6}$ كلم.

ب) صف موقعين للتوصيل يكون البعد بينهما ١٠ كلم تقريبًا.
انظر الهامش.

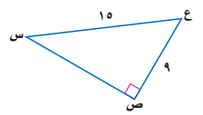
٢٠) إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع، فأوجد أطوال الأضلاع المجهولة. صَ = ٣؛ عَ = ٦



٢١) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.
جا أ $=\frac{4}{5}$ جتا أ $=\frac{3}{5}$ ظا أ $=\frac{4}{3}$



٢٢) أوجد ق ∠ س مقرّبًا إلى أقرب درجة. ٣٧°



مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط	المستوى ٢	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على ٢٥٪ تقريبًا من التمارين،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ تقريبًا من التمارين،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس ٩-١، ٩-٢، ٩-٣، ٩-٤، ٩-٥، ٩-٦، ٩-٧	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل ص (١١٨)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

المعالجة

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلاب.

إجابة:

١٩ب) إجابة ممكنة: ٤٠ شارع إلى الجنوب و ٤٥ شارع إلى الغرب، ٣٨ شارع إلى الشمال و٤٧ شارع إلى الغرب.

الفصل ١٠

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (١٥٩)

	الدرس ١٠-١ حصتان	الدرس ١٠-٢ حصتان	الدرس ١٠-٣ حصتان
العنوان	تصميم دراسة مسحية.	تحليل نتائج الدراسة المسحية.	إحصائيات العينة ومعالم المجتمع.
الأهداف	• تصميم دراسة مسحية. • تعرف الطرق المختلفة لاختيار العينة.	• تلخيص نتائج الدراسة المسحية. • تقويم نتائج الدراسة المسحية.	• استعمال إحصائيات العينة لتحليل نتائج الدراسة المسحية. • تحليل البيانات باستعمال إحصائيات العينة.
المفردات	العينة المجتمع الدراسة المسحية الدراسة القائمة على الملاحظة التجربة العينة المتحيزة العينة العشوائية العينة العشوائية البسيطة العينة العشوائية الطبقية العينة العشوائية المنتظمة	مقاييس النزعة المركزية البيانات الكمية البيانات النوعية	الإحصاء الاستدلالي الإحصائي المعلمة البيانات الوحيدة المتغير مقاييس التشتت الانحراف المتوسط الانحراف المعياري التباين
التمثيلات المتعددة	ص (١٦٤)	ص (١٧٠)	
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٨) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٩) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٨) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٢) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٣) فوق **كتاب التمارين** • ص (٢٩) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) دون • تدريبات حل المسألة، ص (١٦) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (١٧) فوق **كتاب التمارين** • ص (٣٠) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	نظام استجابة ص (١٦١)	السبورة التفاعلية ص (١٦٧)	السبورة التفاعلية ص (١٧٤)
تنويع التعليم	ص (١٦٢، ١٦٤)	ص (١٦٩، ١٧٠)	ص (١٧٣)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الإحصاء والاحتمال

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(١١) حصة	(٣) حصص	(١٤) حصة

الدرس ١٠-٤	حصتان	الدرس ١٠-٥	٣ حصص
التباديل والتوافيق		احتمالات الحوادث المركبة	
• استعمال التباديل. • استعمال التوافيق.		• إيجاد احتمال حادثتين مستقلتين أو حادثتين غير مستقلتين. • إيجاد احتمال حادثتين متنافيتين أو حادثتين غير متنافيتين.	
فضاء العينة التبديل المضروب التوافيق		الحادثة المركبة الحادثتان المستقلتان الحادثتان غير المستقلتين الحادثتان المتنافيتان	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢١) فوق **كتاب التمارين** • ص (٣١) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٢) دون • تدريبات حل المسألة، ص (٢٤) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (٢٥) فوق **كتاب التمارين** • ص (٣٢) دون ضمن فوق	
		السبورة التفاعلية ص (١٨٤)	
ص (١٧٩ ، ١٨٢)		ص (١٨٥ ، ١٨٨)	

التقويم الختامي
- اختبار الفصل ص (١٨٩)
- اختبار تراكمي٢ ص (١٩٠- ١٩١)

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل ١٠**	
	التهيئة للفصل ١٠ ، ص (١٥٩)	مخطط المعالجة، ص (١٥٨ جـ).
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تدريبات المهارات، الفصل ١٠
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ١٠
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة ٤، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (٨٧،٨٨)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (٨٩)	تدريبات المهارات، الفصل ١٠
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ١٠
		www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	اختبار الفصل، ص (١٨٩)	تدريبات المهارات، الفصل ١٠
	www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ١٠
		www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل ١٠**	
	اختبار الفصل، النماذج ١، ٢أ، ٢ب، ص (٩١-٩٦)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل ١٠
	اختبار الفصل، النموذج ٣ ، ص (٩٧،٩٨)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (٩٠)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (٩٩)	
	اختبار تراكمي ، ص (١٠٠-١٠٢)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

الفصل ١٠

تنويع التعليم

البديل ١ جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: اطلب إلى الطلاب كتابة الأرقام من الصفر إلى ٩ في بطاقات فهرسة، واطلب إليهم ترتيب البطاقات بطرق مختلفة؛ لمساعدتهم على تصوّر قانون التباديل وعلاقتها بالبطاقات، ومقارنة نتائجهم بالحسابات في المثال ٥ (الدرس ١٠ – ٤)

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة، وأخبرهم أنهم سيجرون مسحًا للموقف الآتي:

إذا كنت تملك شركة تُصمّم ألعابًا لمدينة ألعاب، وتريد أن تعرف أنواع الألعاب التي يُفضّلها الأطفال ليرتادوا مدن الألعاب فإنه.

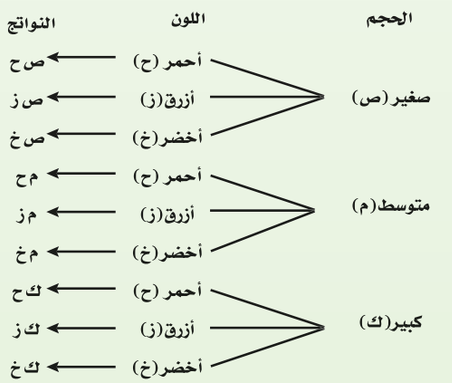
يجب أن ينتج عن الدراسة نتائج صحيحة، تتضمّن ما يأتي:

- طريقة إجراء المسح.
- حجم العينة، ولماذا هي ممثّلة للمجتمع كاملًا.
- نوع العينة (أو العينات) المستعملة في المسح.
- السؤال (أو الأسئلة) المطروحة في المسح.

اطلب إلى المجموعات مناقشة طرق عرض نتائج المسح، وكيف يمكنهم استعمالها بوصفهم أصحاب شركات.

البديل ٢ دون المتوسط دون

راجع مع الطلاب طريقة عرض فضاء العينة باستعمال الرسم الشجري، واشرح لهم أن النتائج تُبيّن النواتج الممكنة، وأنها يمكن أن تساعدك على حساب احتمال حادثة، إلَّا أنها ليست طريقة مفيدةً أو عمليةً، عندما يكون فضاء العينة كبيرًا جدًّا.



البديل ٣ فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب تصميم تجاربهم الخاصة بهم لإيجاد الاحتمال التجريبي؛ مثل: إيجاد احتمال إلقاء كأس ورقية في سلة المهملات، أو احتمال أن يقرأ الطالب أكثر من ١٠ كلمات في ١٠ ثوانٍ وغيرها.

الفصل ١٠

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل ١٠

مواضيع ذات علاقة بما قبل الصف الثالث المتوسط

- إيجاد احتمالات حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة.
- استعمال الاحتمال النظري والنتائج التجريبية؛ للتوصّل إلى تنبؤات واتخاذ قرارات.
- تقويم طرق المعاينة؛ لتحديد صحة الاستدلال المبني على مجموعة من البيانات.
- تعرّف أشكال المعلومات العددية أو الممثلة بيانيًّا، وتقويم التنبؤات والاستنتاجات المبنية على تحليل البيانات.

الفصل ١٠

مواضيع ذات علاقة من الصف الثالث المتوسط

- تحديد أساليب المعاينة المختلفة، والتعرّف إلى العينة المتحيزة.
- إيجاد عدد النواتج باستعمال مبدأ العد الأساسي.
- استعمال التباديل والتوافيق في حساب الاحتمالات.
- إيجاد احتمال حادثتين مستقلتين أو حادثتين غير مستقلتين، واحتمال حادثتين متنافيتين أو حادثتين غير متنافيتين.

ما بعد الفصل ١٠

الإعداد للمرحلة الثانوية

- يُعزّز هذا الفصل المهارات اللازمة لدراسة الإحصاء في المستوى المتقدّم.

ملخص الدروس

١٠-١ تصميم الدراسة المسحية

العيِّنة جزء من مجموعة كبيرة تُسمّى المجتمع، والعينة العشوائية هي العينة التي يتم اختيارها دون تفضيل مجموعة على أخرى. وهناك أنواع من العينات العشوائية:

- العينة العشوائية البسيطة، التي يتم اختيار أفرادها من المجتمع عشوائيًّا.
- العينة العشوائية الطبقية، حيث يقسم المجتمع أولًا إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم يتم اختيار عدد من الأفراد من كل فئة عشوائيًّا.
- العينة العشوائية المنتظمة، يتم اختيار أفرادها باتباع نمطٍ معيّن، ويمكن أن تكون العينات متحيّزةً أو غير متحيّزة. فعندما تُعطى أفضلية لفئة أو أكثر من فئات المجتمع على فئة أخرى، تكون العينة متحيّزةً.

١٠-٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

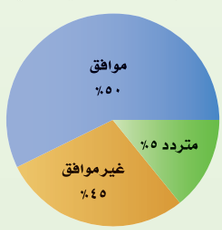
بعد الانتهاء من جمع البيانات، نحتاج إلى تلخيصها بشكل يجعلها قابلة للتحليل. ويمكن استعمال مقاييس النزعة المركزية الآتية في ذلك:

- المتوسط الحسابي: مجموع البيانات مقسومًا على عددها.
- الوسيط: العدد الأوسط في البيانات المرتبة، أو متوسط العددين الأوسطين.
- المنوال: العدد (الأعداد) الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.

ويوجد نوعان من البيانات: بيانات كمّية (يُعبّر عنها بقيم عددية)، وبيانات نوعية (لا يمكن التعبير عنها بقيم عددية، مثل الجنس).

يجب تحديد مصداقية تقرير الدراسة المسحية، وتحليل الطريقة التي تُعرض بها نتائج المسح؛ لكشف الطرق المضلّلة. فالتمثيل بالقطاعات الدائرية الآتي مضلّل؛ لأن تظليل القطاعات لم يكن منسجمًا مع النسب المئوية المعطاة.

مثال: هل يجب أن يلبس الموظفون الزي الرسمي في مكاتبهم؟



١٠-٣ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

الإحصائي مقياس يصف خصائص العينة، في حين أن المعلمة مقياس يصف خاصية للمجتمع. ويتغير الإحصائي من عينة إلى أخرى، في حين أن المعلمة ثابتة لا تتغير.

تُسمّى البيانات التي تتضمّن متغيّرًا واحدًا، بيانات وحيدة المتغيّر، ويمكن تمثيل هذا النوع من البيانات بالمتوسط الحسابي والوسيط والمنوال، إضافة إلى مقاييس التشتت التي تتضمّن المدى والربيع والمدى الربيعي بالإضافة إلى المقاييس الثلاثة الآتية:

- الانحراف المتوسط: متوسط القيم المطلقة للفرق بين المتوسط الحسابي، وكل قيمةٍ في مجموعة البيانات.
- الانحراف المعياري: قيمة تُشير إلى مدى تباعد البيانات عن متوسطها الحسابي ويُرمز له بـ ع.
- التباين: مربع الانحراف المعياري.

١٠-٤ التباديل والتوافيق

التبديل هو قائمة أو تنظيم، يكون فيه الترتيب أو الموقع مهمًّا.

- يمكن حساب عدد التباديل باستعمال القانون $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن}-\text{ر})!}$، حيث (ن) عدد العناصر التي يتم الاختيار منها، و(ر) عدد العناصر المختارة في كل مرة. ويُرمز لعدد التباديل بالرمز: ن ل ر أو ل (ن ، ر).

التوافيق هي تنظيمات ليس للترتيب أو الموقع فيها أهمية.

- ويمكن حساب عدد التوافيق باستعمال القانون $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن}-\text{ر})!\,\text{ر!}}$، حيث (ن) عدد العناصر التي يتم الاختيار منها، و(ر) عدد العناصر المختارة في كل مرة. ويُرمز لعدد التوافيق بالرمز: ن ق ر

١٠-٥ احتمالات الحوادث المركبة

الحادثة البسيطة هي حادثة واحدة، بينما تتكوّن الحوادث المركّبة من حادثتين بسيطتين أو أكثر.

- إذا وقعت حادثتان بشكل منفصل، ولم تؤثّر نتيجة إحداهما في نتيجة الأخرى يُقال: إن الحادثتين مستقلتان. ونجد احتمال الحادثتين المستقلتين، بضرب احتمال الحادثة الأولى في احتمال الحادثة الثانية: ح(أ) × ح(ب).
- إذا أثّرت نتيجة إحدى الحادثتين في نتيجة الأخرى يُقال: إن الحادثتين غير مستقلتين. ولإيجاد احتمال حادثتين غير مستقلتين، نضرب احتمال الحادثة الأولى في احتمال الحادثة الثانية بعد وقوع الحادثة الأولى: ح(أ) × ح(ب بعد أ).
- الحادثتان المتنافيتان هما حادثتان لا يمكن وقوعهما في آنٍ واحدٍ معًا، وإذا كانت الحادثتان أ، ب متنافيتين، فإن احتمال وقوع الحادثة (أ) أو الحادثة (ب) يساوي: ح(أ) + ح(ب).
- الحادثتان غير المتنافيتين، هما حادثتان يمكن أن تقعا في آنٍ واحدٍ معًا، وإذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير متنافيتين، فإن احتمال وقوع (أ) أو وقوع (ب) يساوي: ح(أ) + ح(ب) – ح(أ وَ ب).

مشروع الفصل

استبانة أولياء الأمور

- اسأل الطلاب: ما النقاط الأساسية التي يودّ ولي أمرك الاستفسار عنها في المدرسة؟
- قسّم الطلاب مجموعات، بحيث تحوي كل مجموعة ٥– ٦ طلاب.
- اطلب إلى كل مجموعة تجهيز استبانة؛ لمعرفة رأي أولياء الأمور حول بعض الأمور المرتبطة بالمدرسة، ومستوى الطالب الدراسي، والأنشطة التي تُقام في المدرسة ومدى فعاليتها،... .
- ضمّن الاستبانة فقرات تكون إجابتها "أوافق" أو "لا أوافق"، وفقرات تكون إجابتها نسبًا مئوية، وفقرة للمقترحات.
- ضمّن الاستبانة فقرة:
تضمين الأنشطة الطلابية رحلات خارج المدينة:
○ أوافق ○ لا أوافق
- إذا كان عدد أولياء الأمور ٢٠٠، وعدد الموافقين منهم ٩٠، فأوجد الاحتمال النظري لموافقة أولياء الأمور.
- اطلب إلى كل مجموعة من الطلاب توزيع الاستبانة على ١٥ ولي أمر، ومنحهم يومين للإجابة عنها، ثم جمّع الاستبانات.
- اطلب إلى كل مجموعة تلخيص النتائج وعرضها واستخدام ما يلزم لذلك (جداول، أعمدة، ... إلخ).
- اطلب إلى الطلاب حساب الاحتمال التجريبي للفقرة التي حسبوا الاحتمال النظري لها، ومقارنة الاحتماليين.
- اطلب إلى الطلاب جمع وتلخيص المقترحات المعقولة التي قدّمها أولياء الأمور، والتي تُسهم في تحسين مستوى المدرسة، وقدّمها في تقرير يُرفع إلى إدارة المدرسة.

المفردات قدِّم مفردات الفصل باستعمال النمط الآتي:

التعريف: العينة العشوائية هي العينة التي يتم اختيارها دون إعطاء أفضلية لأي عنصر على آخر، وتكون ممثّلة للمجتمع كاملًا.

مثال: اختِير ثلاثة طلاب عشوائيًّا من صف يتكوّن من ٣٠ طالبًا؛ للإجابة على استبانة.

اسأل: إذا تم اختيار ثلاثة طلاب لأسباب محدّدة، فهل تكون هذه العينة عشوائية؟ اشرح وبرّر إجابتك. لا، تكون العينة عشوائية، إذا تم اختيارها دون إعطاء أفضلية لأي عنصرٍ على آخر.

المطويات منظم أفكار

غرضها: يكتب الطلاب في مطوياتهم ملاحظاتهم حول الإحصاء والاحتمالات في أثناء دراستهم لهذا الفصل.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو مبيّن في تعليمات إعداد المطوية، وكتابة التعاريف والأمثلة لكل درس في الصفحات المناسبة.

وقت استعمالها: شجّع الطلاب على أن يضيفوا ملاحظاتهم إلى مطوياتهم في أثناء دراستهم الفصل، وأن يستعملوها في المراجعة؛ استعدادًا لاختبار الفصل.

الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

فيما سبق

درست إيجاد قيم احتمالات لحوادث بسيطة.

والآن

- أصمّم دراسات مسحية وأقوّم نتائجها.
- أحلّ مسائل باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد احتمالات حوادث مركّبة.

لماذا؟

مدارس: تطلب إدارة المدرسة عادة إلى أعضاء مجلس الآباء والمعلمين تعبئة استبانة حول بعض القضايا التي تهم الطلاب، ثم تحليل بياناتها باستعمال الطرق الإحصائية؛ بهدف تعزيز التعاون بين البيت والمدرسة.

المطويات منظم أفكار

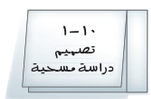
الإحصاء والاحتمال: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الإحصاء والاحتمال، مبتدئًا بست أوراق A4 .

١ **اطوِ** كل ورقة من المنتصف. وقصَّ شريطًا طوليًّا بعرض ٢,٥ سم من الحافة اليمنى حتى خط الطي، ثم افصل الشريط عن خط الطي.

٢ **سمِّ** خمسة من هذه الأوراق بأرقام الدروس وعناوينها.

٣ **اكتب** على جزأي كل ورقة من الداخل: "تعريفات" و"أمثلة".

٤ **رتّب** الأوراق بعضها فوق بعض، وثبّتها من طرفها الأيمن، واكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، واكتب ملاحظاتك على جزأي الورقة من الداخل.



التهيئة للفصل ١٠

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية:

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

إذا اخترت عشوائيًّا مكعبًا واحدًا من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء و٣ زرقاء ومكعبًا واحدًا أخضر، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

١) ح (أحمر) $\frac{٣}{٧}$ ٢) ح (أزرق) $\frac{٣}{١٤}$

٣) ح (ليس أحمر) $\frac{٤}{٧}$ ٤) ح (أبيض) ٠

٥) إذا ألقى سعد مكعب أرقام مرة واحدة، فما احتمال ظهور الرقم ٥؟ $\frac{١}{٦}$

٦) أدار محمود مؤشر قرص دوّار مقسّم إلى ٨ قطاعات متساوية، بألوان مختلفة أحدها باللون الأزرق. ما احتمال أن يستقر المؤشر على القطاع الأزرق؟ $\frac{١}{٨}$

أوجد ناتج الضرب واكتبه في أبسط صورة:

٧) $\frac{٥}{٤}\times\frac{٢}{٣}$ $\frac{٥}{٦}$ ٨) $\frac{٤}{١٩}\times\frac{٧}{٢٠}$ $\frac{٧}{٩٥}$

٩) $\frac{٤}{٣٢}\times\frac{٧}{٣٢}$ $\frac{٧}{٢٥٦}$ ١٠) $\frac{٥}{١٢}\times\frac{٦}{١١}$ $\frac{٥}{٢٢}$

١١) $\frac{٥٦}{١٠٠}\times\frac{٢٤}{١٠٠}$ $\frac{٨٤}{٦٢٥}$ ١٢) $\frac{٩}{٣٤}\times\frac{١٧}{٢٧}$ $\frac{١}{٦}$

اكتب كل كسر من الكسور الآتية على صورة نسبة مئوية، مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة:

١٣) $\frac{١٤}{١٧}$ ٪٨٢,٤ ١٤) $\frac{٧}{٨}$ ٪٨٧,٥

١٥) $\frac{١٠٧}{١٢٥}$ ٪٨٥,٦ ١٦) $\frac{٦٢٥}{١٠٢٤}$ ٪٦١,٠

١٧) **تسوّق:** زار ٢٠٠٠ متسوق مركزًا تجاريًّا، ٧٠٠ منهم دون سن ٢١. فما النسبة المئوية لمن هم دون سن ٢١ من بين المتسوقين؟ ٪٣٥

مراجعة سريعة

مثال ١

إذا اخترت عشوائيًّا مكعبًا واحدًا من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء ومكعبًا واحدًا أخضر، فما احتمال أن يكون أخضر اللون؟

يوجد في الكيس مكعب واحد أخضر من بين ١١ مكعبًا.

$$\frac{\text{عدد المكعبات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للمكعبات}}=\frac{١}{١١}$$

إذن، احتمال اختيار مكعب أخضر هو $\frac{١}{١١}$.

مثال ٢

أوجد ناتج ضرب $\frac{٤}{٥}\times\frac{٣}{٤}$ في أبسط صورة.

$\frac{٣\times٤}{٤\times٥}=\frac{٣}{٤}\times\frac{٤}{٥}$ اضرب البسطين، اضرب المقامين

$=\frac{١٢}{٢٠}$ بسّط

$=\frac{٣}{٥}$ اكتب الكسر في أبسط صورة

مثال ٣

اكتب الكسر $\frac{٣٣}{٨٠}$ على صورة نسبة مئوية، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

$\frac{٣٣}{٨٠}\approx ٠,٤١٣$ بسّط وقرّب

$٠,٤١٣\times ١٠٠ = ٤١,٣$ اضرب الكسر العشري في ١٠٠

إذن، $\frac{٣٣}{٨٠}\approx ٤١,٣$٪.

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com .

المعالجة

استعمل نتائج اختبار التهيئة ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، كما تساعدك العبارة «إذا ... فقم» في المخطط أدناه على تحديد المستوى المناسب، وتقترح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى ١ — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب فيما لايزيد عن ٢٥٪ تقريبًا من التمارين،

فقم بمراجعة الاحتمالات ، وضرب الكسور وتبسيطها ، وكتابتها في صورة نسبة مئوية.

وزيارة الموقع:
www.obeikaneducation.com

المستوى ٢ — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ من التمارين،

فقم بتحديد أخطائهم، وضَعْ أنشطة علاجية لذلك .

وزيارة الموقع:
www.obeikaneducation.com

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ١٠-١

تنظيم البيانات باستعمال الجداول التكرارية.

الدرس ١٠-١

تصميم دراسة مسحية.

تعرّف الطرق المختلفة لاختيار العينة.

ما بعد الدرس ١٠-١

تحليل البيانات المتجمّعة من الدراسة المسحية.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا"؟ .

ثم اسأل:

- ماذا تمثل الملابس الرياضية المنتجة جميعها؟ المجتمع
- افترض أن المصنع ينتج ٢٠٠ قطعة يوميًّا. إذا أخذت أول ٥٠ قطعة عينة، وتم فحصها للكشف عن عيوب، فهل يُشكّل ذلك عينة عشوائية؟ لا؛ يجب أن يكون لكل قطعة فرصة الاختيار نفسها كأي قطعة أخرى.
- كيف يمكن للمصنع أن يختار عينة عشوائية؟ إجابة ممكنة: يختار كل عاشر قطعة يتم إنتاجها.

تصميم دراسة مسحية

فيما سبق

درست تنظيم البيانات باستعمال الجداول التكرارية.

والآن

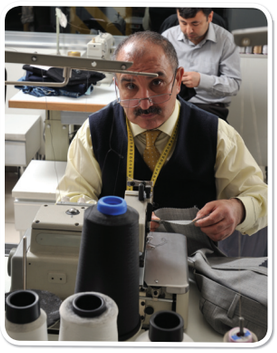
- أصمّم دراسة مسحية.
- أتعرّف الطرق المختلفة لاختيار العينة.

المفردات

العينة
المجتمع
الدراسة المسحية
الدراسة القائمة على الملاحظة
التجربة
العينة المتحيزة
العينة العشوائية
العينة العشوائية البسيطة
العينة العشوائية الطبقية
العينة العشوائية المنتظمة

obeikaneducation.com

لماذا ؟



عند صناعة الملابس الرياضية يجب التحقق من عدة أمور لضمان الجودة؛ مثل: فحص نوع القماش، ومدى مناسبته للرياضة المعنيّة، والألوان، والأعمال الفنية المطبوعة عليه وغيرها. وستكون التكلفة عالية جدًّا إذا فُحص كل زيّ يتم إنتاجه في المصنع؛ لذا فإنه يتم فحص عدد محدود من تلك الملابس بدلًا من ذلك.

وجميع الملابس الرياضية المنتجة تشكّل المجتمع، بينما تشكّل الملابس الرياضية التي يتم فحصها عينة من هذا المجتمع. ويتوصل الفاحصون إلى استنتاجات حول العينة ويعمّمونها على المجتمع كله.

تصميم الدراسة المسحية: تُعدّ **العينة** جزءًا من مجموعة أكبر تُسمى **المجتمع**. وحيث إن فحص كل عنصر في المجتمع أمر غير عملي، يتم اختيار عينة لتمثل هذا المجتمع. وبعد تحليل النتائج الخاصة بالعينة يمكن التوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملًا. وكلما كان حجم العينة أكبر أو استعملت عينات أكثر كانت النتائج أكثر تمثيلاً للمجتمع.

وللتوصل إلى استنتاجات صحيحة من البيانات التي تجمع من العينة، تحتاج أن تحدد أولاً أفضل أسلوب لجمع البيانات.

مفهوم أساسي أساليب جمع البيانات

أضف إلى مطويتك

الأسلوب	التعريف/ الاستعمال	مثال
الدراسة المسحية	• تؤخذ البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع.	لتحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالبًا عن رأيهم في فقرات الإذاعة.
الدراسة القائمة على الملاحظة	• تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة. • لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع.	تراقب شركة لصناعة الدمى بعض الأطفال وهم يلعبون، وتلاحظ نوع الدمى التي يفضلونها أكثر. ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر السنتين يفضلون الدمى التي تصدر أصواتًا على تلك التي لا تصدر أصواتًا.
التجربة	• تُسجّل البيانات بعد تغيير العينة. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثةٍ ما.	يقوم مراقب ضبط الجودة بتشغيل آلة بسرعة معينة عشر مرات، فإذا وجد أن المنتج يكون معيبًا في كل مرة فإنه يستنتج أن المنتج سيكون معيبًا في كل مرة تدور فيها الآلة بهذه السرعة.

مصادر الدرس ١٠ - ١

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٦٢)	• تنويع التعليم ص (١٦٢، ١٦٤)	• تنويع التعليم ص (١٦٤)
كتاب التمارين	ص (٢٨)	ص (٢٨)	ص (٢٨)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٦) • تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨)	• تدريبات حل المسألة، ص (٨) • التدريبات الإثرائية، ص (٩)

تصميم دراسة مسحية

المثال ١ يُبيّن طريقة تصنيف أساليب جمع البيانات.

المثال ٢ يُبيّن طريقة تحديد العينة المتحيّزة والعينة غير المتحيّزة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ **تجارة:** تختار إحدى المؤسسات التجارية عشوائيًّا رجلًا وامرأة يوميًّا من بين الزبائن في كل فرع من فروع المؤسسة، وعددها ٥٧ فرعًا وتوجِّه لهم أسئلة مسحيةً تتعلّق بعاداتهم في التسوق.

أ) حدِّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه. العينة ٥٧ رجلًا و ٥٧ امرأة تم اختيارهم عشوائيًّا من فروع المؤسسة. المجتمع: الزبائن جميعهم في فروع المؤسسة.

ب) صنّف أسلوب جمع البيانات الذي استعملته هذه المؤسسة. دراسة مسحية

٢ **حدّد في كلٍّ ممّا يأتي ما إذا كانت العينة متحيّزةً أم غير متحيّزةٍ، وفسّر إجابتك:**

أ) استطلاع: استُطلِعت آراء طلاب الصف الثالث المتوسط حول برنامج اليوم المفتوح في المدرسة. متحيّزة؛ لأنها اشتملت على طلاب فصلٍ واحدٍ فقط من طلاب المدرسة.

ب) مدرسة: استطلعت المدرسة رأي والد كل خامس طالب فيها؛ لتُقرّر ما إذا كانت المدرسة ستقيم احتفالًا بمناسبة انتهاء العام الدراسي. غير متحيّزة؛ لأنه تم اختيار الآباء عشوائيًّا، وكان لهم جميعًا فرصة الاختيار نفسها.

إرشادات للدراسة

إحصاء السكان

إحصاء السكان هو مسح لجميع أفراد المجتمع. لذا لا تستعمل الإحصاءات السكانية أسلوب العينة، وقد أجري آخر إحصاء في المملكة عام ١٤٣١هـ.

مثال ١ تصنيف أساليب جمع البيانات

تبرّع: ترغب جمعية خيرية في تعرّف رغبة الناس في تقديم التبرعات للجمعيات الخيرية. فوزّعت ١٠٠٠ استبانة على سكان أحد الأحياء.

أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

العينة: الأشخاص الذين تسلموا الاستبانات، وعددهم ١٠٠٠ شخص.

أمّا المجتمع: فجميع سكان ذلك الحي.

ب) صنّف أسلوب جمع البيانات الذي استعملته هذه الجمعية.

هذا هو أسلوب الدراسة المسحية، حيث تؤخذ البيانات من استجابات أفراد العينة نحو الاستبانة.

تحقق من فهمك

حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل في كلٍّ مما يلي:

١أ) بحوث: قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من الفئران تجاه السكر.

المجموعة ١
طعام فيه سكر

المجموعة ٢
طعام بلا سكر

١ب) إعادة التدوير: يرغب مجلس بلدي في أن يبدأ بمشروع إعادة تدوير، فأرسل لمجموعة من السكان اختيروا عشوائيًّا ١٠٠٠ استبانة تضمنت سؤالاً حول المواد التي يرغبون في إعادة تدويرها.

١أ) العينة: مجموعة الفئران الموجودة في مركز البحوث. المجتمع: هو جميع الفئران، وأسلوب جمع البيانات هو التجربة.

١ب) العينة: ١٠٠٠ من سكان المدينة تم اختيارهم عشوائيًّا؛ المجتمع: جميع سكان المدينة؛ أسلوب جمع البيانات هو الدراسة المسحية.

هناك عوامل تؤثر في جمع البيانات والاستنتاجات التي يتم التوصل إليها. فإذا كانت طريقة اختيار العينة تعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى فإن العينة تكون **عينة متحيزة**، والبيانات المأخوذة منها متحيزة، وتكون العينة غير متحيزة إذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار، وتُسمى **عينة عشوائية**.

مثال ٢ تحديد تحيز العينة

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

أ) فضائيات: سُئل كل خامس شخص يدخل إلى متجر عن القناة الفضائية التي يفضلها.

غير متحيزة؛ لأن هذه العينة تتكون من أشخاص اختيروا عشوائيًّا.

ب) هوايات: سئل كل خامس شخص يدخل مكتبة عن هوايته المفضلة.

متحيزة؛ لأن الهواية الأكثر تفضيلاً للأشخاص الموجودين في المكتبة هي المطالعة.

تحقق من فهمك

٢أ) مدرسة: سُئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

٢ب) مطاعم: يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يخدمون الزبائن بأسلوب جيد، فراقب أحد العاملين مدة ساعة في اليوم.

٢أ) غير متحيزة؛ لأن هذه العينة اختيرت عشوائيًّا.

٢ب) متحيزة؛ لأن المدير راقب عاملاً واحدًا من بين العاملين مدة ساعة واحدة فقط.

المحتوى الرياضي

العينة والمجتمع: من خلال أخذ عينة من المجتمع، يمكنك تقدير خصائص المجتمع، والتوصّل إلى تنبؤات بناءً على خصائص العينة.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة: قدم للطلاب قائمة بعدة مواقف لجمع البيانات، واطلب إليهم أن يُحدّدوا ما إذا كان كل موقف منها دراسة مسحية أم تجربة أم دراسة قائمة على الملاحظة. ويمكن عمل الأمر ذاته مع أساليب المعاينة المختلفة. وسيساعدك هذا على متابعة استيعاب الطلاب هذه المفاهيم الجديدة.

أساليب المعاينة

المثال ٣ يُبيّن طريقة تصنيف العينة العشوائية.

مثال إضافي

٣ **مدينة** قُسّمت إحدى المدن إلى أحياء سكنية، ثم اختير ٣٠ شخصًا عشوائيًّا من سكان كل حي؛ لاستطلاع آرائهم حول أوقات عمل المراكز الصحية في المدينة.

أ) عيّن العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

العينة: ٣٠ شخصًا من سكان كل حي.

المجتمع: كل سكان المدينة.

ب) صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. وفسّر إجابتك. طبقية؛ لأن المدينة قسمت إلى أحياء سكنية قبل اختيار العينة العشوائية.

٣أ) العينة: الأطباء الذين يتم اختيارهم. المجتمع: جميع أطباء المستشفى. نوع العينة: طبقية لأنه يتم أولاً تقسيم الأطباء في مجموعات حسب الأقسام، ثم يتم الاختيار.

٣ب) العينة: الفطائر التي يتم فحصها كل ٢٠ دقيقة. المجتمع: جميع الفطائر التي تُعد في المطعم. نوع العينة: منتظمة؛ لأنه يتم فحص الفطائر في فترات زمنية محددة.

٣جـ) العينة: الأطباق التي تحمل الملصقات. المجتمع: الأطباق كلها. نوع العينة: بسيطة، لأنه لكل فرد الفرصة أن يكون الملصق على طبقه.

الربط مع الحياة

افتتح مستشفى الدمام المركزي عام ١٣٨٣هـ بسعة ٥٠ سريرًا، واستمر في التطور وزيادة الأقسام والعيادات حتى أصبح مجمعًا طبيًّا متكاملًا باسم مجمع الدمام الطبي، يقدم خدماته إلى سكان مدينة الدمام والمنطقة الشرقية من المملكة.

أساليب المعاينة: تُستعمل بيانات العينة لتقدير إحدى سمات المجتمع كاملًا. وتُختار العينة العشوائية من المجتمع على أن تكون ممثلة له دون إعطاء أفضلية لفئة معينة على أخرى. ويعرض الجدول الآتي ثلاثة أنواع من العينات العشوائية:

مفهوم أساسي — **العينات العشوائية**

أضف إلى مطويتك

النوع	التعريف	مثال
العينة العشوائية البسيطة	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأي عينة أخرى من المجتمع.	سحب أرقام مئة طالب من كيس، وإخضاع هؤلاء الطلاب لدراسة مسحية.
العينة العشوائية الطبقية	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.	يختار الباحث عينات من صفوف مختلفة من الطلاب بناءً على النسبة المئوية لهذه الصفوف في المدرسة؛ ليعكس التنوع في صفوف المدرسة.
العينة العشوائية المنتظمة	العينة التي يُختار أفرادها تبعًا لزمن معين أو فترة زمنية محددة.	تُفحص قطعة من خط إنتاج كل عشر دقائق، أو تُفحص قطعة من كل ٥٠ قطعة.

مثال ٣ تصنيف العينات العشوائية

حديقة الحيوانات: **وزّعت الحيوانات في إحدى الحدائق إلى مجموعات تبعًا لموطنها، ثم اختير زوج من كل مجموعة بصورة عشوائية لفحص دمه.**

أ) **حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.**

تتكون العينة من أزواج الحيوانات التي تم اختيارها من كل مجموعة. والمجتمع هو جميع الحيوانات الموجودة في الحديقة.

ب) **صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك.**

هذه العينة طبقية؛ حيث قُسّمت الحيوانات إلى فئات قبل الاختيار العشوائي.

تحقق من فهمك

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك:

٣أ) مستشفى: اعتمادًا على المعلومات المبينة إلى اليمين، وفي ندوة تعريفية، يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائيًّا ليقدم نبذة عن الخدمات التي يوفرها المستشفى في قسمه.

٣ب) طعام: يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة بدءًا بوقتٍ يُحدّد عشوائيًّا.

٣جـ) احتفالات: تلصق نجمة في أحد الاحتفالات أسفل ثلاثة أطباق، وتقدم هدايا للضيوف الذين تكون هذه الأطباق من نصيبهم.

تنويع التعليم: دون ضمن

إذا احتاج بعض الطلاب إلى المزيد من التدريب لفهم أنواع العينات العشوائية،

فقم بتوزيع الطلاب مجموعات صغيرة، وأعطِ كل مجموعة عددًا مختلفًا من الخرز الملّون لتقوم مقام المجتمع، ثم اطلب إليهم نمذجة الأنواع المختلفة من العينات العشوائية بواسطة هذا الخرز.

فعلى سبيل المثال، لتمثيل عينة طبقية، يُقسّم الطلاب الخرز مجموعات، بحسب ألوانها، ثم يختارون عينة عشوائية من كل مجموعة. اطلب إلى الطلاب وصف طريقة اختيار العينة العشوائية المنتظمة.

تأكد

مثال ١ حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

١) **مجلات:** يريد القائمون على إعداد مجلة المدرسة اختيار تصميم لغلافها من بين خمسة تصاميم؛ لذا فقد اختير عشرة من طلاب المدرسة عشوائيًّا للانتقاء من بين هذه التصاميم.

٢) **رياضة:** يريد مدير نادٍ رياضي أن يحدّد شعارًا للنادي، فسأل ١٠٠ شخص من مشجعي النادي اختيروا عشوائيًّا عن آرائهم. انظر الهامش

مثال ٢ حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسِّر إجابتك:

٣) **هوايات:** يقف عدد من الطلاب عند مدخل المدرسة ويسألون كل عاشر طالب يدخلها عن هوايته المفضلة.

٤) **تسوق:** سُئل كل خامس عشر متسوِّق في متجر ملابس عن نوع الهدية التي يودّ أن تُقدم له. انظر الهامش

مثال ٣ حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، مفسِّرًا إجابتك:

٥) **بطاقات مصوّرة:** وزّع أحمد بطاقات الصور التي التقطها في مجموعات بحسب المدن التي تمثّلها هذه البطاقات، ثم اختار بطاقتين عشوائيًّا من كل مجموعة.

٦) **تلفزة:** تود محطة تلفزة أن تحدد أكثر برامجها مشاهدة، فأرسلت استبانةً إلى عدة أشخاص اختيروا عشوائيًّا من أنحاء المملكة كافة. انظر الهامش

تدرب وحل المسائل

مثال ١ عيّن فيما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

٧) **صحف:** يريد محل بيع صحف أن يعرف عدد النسخ التي يطلبها من كل صحيفة يومية، فأرسل رسائل إلى جميع بيوت أحد الأحياء يسألهم فيها عن الصحيفة التي يطالعونها.

٨) **رحلات:** سألت وكالة سياحية جميع زبائنها الذين تعاملوا معها خلال السنتين الماضيتين عن الأماكن الأكثر تفضيلاً والأقل تفضيلاً. انظر الهامش

مثال ٢ حدّد في كل مما يأتي إن كانت كل العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسِّر إجابتك:

٩) **مكتبة:** سأل أمين مكتبة كل من يستعير كتابًا إن كان يستعمل الحاسب الموجود في المكتبة. انظر الهامش

١٠) **ملابس:** يعطي محل بيع ملابس كل زبونٍ بطاقة يمكنه أن يعيدها بالبريد، يسأله فيها عن نوع الثياب التي يفضّلها. انظر الهامش

مثال ٣ حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك:

١١) **توظيف:** صنّفت شركة طلبات التوظيف لديها في مجموعات بحسب مناطق سكن مقدميها، ليتم فرزها لاختيار طلبات الشباب.

١٢) **تسوق:** يقدم مركز تجاري هدية للزبون رقم ٥٠ من بين كل خمسين زبونًا. انظر الهامش

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١-٦؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

٢) العينة: ١٠٠ شخص من مشجِّعي النادي.
المجتمع: مشجِّعي النادي جميعهم.
أسلوب جمع البيانات: دراسة مسحية.

٤) متحيّزة؛ لأن هؤلاء الأشخاص موجودون في متجر الملابس، فسيكون الاحتمال الأكبر أن تكون إجاباتهم "الملابس".

٦) العينة: الأشخاص الذين تسلّموا الاستبانة من المحطة.
المجتمع: مشاهدو المحطة من كافة أنحاء المملكة.
نوع العينة: عشوائية بسيطة؛ فقد تم اختيار الأشخاص عشوائيًّا.

٨) العينة: الزبائن جميعهم الذين تعاملوا مع الشركة خلال السنتين الماضيتين.
المجتمع: الزبائن السابقون جميعهم.
أسلوب جمع البيانات: دراسة مسحية.

٩) متحيّزة؛ لأنه يسأل الأشخاص الذين يستعيرون الكتب فقط.

١٠) غير متحيّزة؛ لأنه لكل زبون فرصة الاختيار نفسها.

١٢) العينة: كل زبون رقمه ٥٠، من بين كل ٥٠ زبونًا.
المجتمع: زبائن المركز التجاري جميعهم.
نوع العينة: منتظمة؛ لأنه يتم اختيار الزبائن على فترات منتظمة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٧ – ١٢ ، ١٦ – ٢١
ضمن ضمن المتوسط	٧ – ١١ (فردي) ، ١٣ – ٢١
فوق فوق المتوسط	١٣–٢١

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ١٤، يستعمل الطلاب الكتابة والتحليل، والبيانات المعروضة في جدول، والبيانات المنظمة في تمثيل بياني؛ لعرض نتائج الدراسة المسحية.

٤ التقويم

بطاقة مكافأة: اكتب مثالًا لكل نوع من أنواع العينات العشوائية، وأعطِ كل طالب واحدًا من هذه الأمثلة، واطلب إليهم أن يُحدّدوا العينة، والمجتمع الذين اختيرت منه، وأن يصنّفوا العينة ويسلّموا أوراق الإجابة قبل مغادرتك الصف.

إجابات:

١٣ أ) العينة: الزبائن الذين خضعوا للدراسة المسحية.
المجتمع: الزبائن جميعهم.

١٣جـ) غير متحيّزة؛ لأن لكل زبون الفرصة نفسها؛ ليكون من بين المختارين في العينة.

١٥) إجابة ممكنة: هذه الأساليب جميعها، تُقدّم معلومات يمكن من خلالها التوصّل إلى استنتاجات حول المجتمع. تطرح الدراسة المسحية عدة أسئلة، وترصد الدراسة القائمة على الملاحظة ردود فعل على أمرٍ أو موقفٍ ما، وترصد التجربة نتائج أو رد فعلٍ لموقفٍ مصطنعٍ.

١٦) إجابة ممكنة: تريد إحدى الشركات المنتجة لألعاب الأطفال أن تقارن بين منتجاتها ومنتجات مشابهة للشركات المنافسة، ولهذا الغرض تُعِدّ غرفة تضع فيها لعبة من إنتاجها، وثلاثة ألعاب من إنتاج شركات منافسة، وتلاحظ أي الألعاب يختارها أفراد العينة.

الربط مع الحياة

حمل الحقيبة المدرسية بطريقة صحيحة يجعل الظهر مشدودًا، ولا يسبب تقوّس العمود الفقري، بشرط توزيع ثقلها على الكتفين، ووجود مسند مناسب له على الظهر، وعدم تحميلها بأشياء كثيرة وغير ضرورية، وألّا يتعدّى وزنها الإجمالي ١٠٪ من وزن الطالب.

١٣) **حقائب:** أجرت شركة لصناعة الحقائب دراسة على زبائنها حول تصميم الحقيبة، وذلك عن طريق تسجيل شكل ولون الحقيبة التي يشتريها الزبون.

أ) حدّد العينة، والمجتمع الذي اختيرت منه. انظر الهامش

ب) صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل. الدراسة القائمة على الملاحظة

جـ) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش

د) إذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. منتظمة

١٤) **تمثيلات متعددة:** سوف تقوم في هذه المسألة بتصميم وتنفيذ دراسة مسحية خاصة بك.

أ) **كتابيًا:** اكتب سؤالاً ذا معنى تريد إجابته من خلال دراسة مسحية، ، ثم صف الطريقة التي ستستعملها في جمع البيانات، واشرح سبب اختيارك إياها. انظر إجابات الطلاب

ب) **تحليليًا:** صمم طريقة لتنفيذ دراستك باستعمال عينة غير متحيزة. فسّر سبب اختيارك للعينة.

جـ) **تطبيقيًا:** نفّذ دراستك.

د) **جدوليًا:** سجّل نتائج الدراسة في جدول.

هـ) **بيانيًا:** استعمل التمثيل البياني (بالخطوط، أو بالقطاعات الدائرية، أو بالمدرج التكراري)، أو أي طريقة بصرية أو بيانية؛ لعرض نتائج الدراسة على طلاب الصف.

مسائل مهارات التفكير العليا

١٥) **تبرير:** قارن بين أوجه شبه وأوجه اختلاف أساليب جمع البيانات الثلاثة التي عَرضها الدرس. انظر الهامش

١٦) **مسألة مفتوحة:** صف مثالاً من واقع الحياة لدراسة قائمة على الملاحظة. انظر الهامش

١٧) **اكتب:** فسّر أهمية الدراسات المسحية المضبوطة للشركات، وكيف يمكن للشركات استعمالها. انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

١٨) **إجابة قصيرة:** تزيد فترة الاحتراق الأولى لصاروخ مقدار ٢٨ ثانية على الفترة الثانية. فإذا كانت مدة الاحتراق كاملة ١٥٢ ثانية فكم ثانية مدة الفترة الأولى؟ ٩٠ ثانية

١٩) **هندسة:** ثُني سلك طوله ٤٢ سنتمترًا ليكون مستطيلاً طوله يساوي مِثْلَي عرضه. أوجد بُعدي المستطيل. ب

أ) ٥ سم، ١٢ سم
جـ) ٩سم، ١٦سم
ب) ٧سم، ١٤ سم
د) ١١سم، ١٨سم

مراجعة تراكمية

٢٠) **علوم طبيعية:** في تجربة إلقاء جسم من ارتفاع ٥م ، قام الطلاب بتسجيل ارتفاع الجسم عن الأرض، والزمن الذي استغرقه، فكانت كالآتي: (الدرس ٢ - ١) انظر ملحق الإجابات

الزمن (ثانية)	٠	٠,٢	٠,٤	٠,٦	٠,٨	١
الارتفاع (سم)	٥٠٠	٤٨٠	٤٢٢	٣٢٤	١٨٦	١٠

مثّل العلاقة بين ارتفاع الجسم والزمن بيانيًّا.

٢١) **هندسة:** إذا كانت مساحة المستطيل المجاور $٦س^{٢} + ١٩س - ٧$ وحدة مربعة، فما عرضه؟ (الدرس ٢ - ٢)

$٢س + ٧$

$٣س - ١$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: وزّع على الطلاب أمثلة لدراسات مسحية مأخوذة من المجلات أو الصحف اليومية، واطلب إليهم تحديد العينة والمجتمع الخاص بكل دراسة. ثم اطلب إليهم وصف الطريقة التي يمكن أن يتأكّد من خلالها القائمون على الدراسة أن العينة غير متحيزة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ١٠ - ١

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٦) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

١٠-١ تدريبات إعادة التعليم
تصميم دراسة مسحية

العينة المتحيزة، العينة المتحيزة هي العينة التي تعطي طريقة اختيارها تفضيلًا لمجموعة معيّنة على مجموعة أخرى. وتكون العينة غير متحيزة إذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار.

ومن أمثلة العينات المتحيزة **العينات الملائمة** وهي التي تشمل أفراد المجتمع الذين يسهل الوصول إليهم. وتعدّ العينة **التطوعية** نوعًا آخر من العينات المتحيزة، وتشمل الأفراد الذين يرغبون في الانضمام إلى العينة.

مثال **مدرسة**: أراد مدير مدرسة ثانوية أن يعرف إذا كان الطلاب راضين عن طريقة متابعة الدوام في المدرسة، فقرر أن يسأل الطلاب الموجودين في قاعة المطالعة في الحصة الثالثة إن كانوا راضين عن هذه الطريقة، علمًا بأنّ أقل من ربع طلاب المدرسة يذهبون إلى قاعة المطالعة.

أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اخترت منه.

تشمل العينة الطلاب الموجودين في قاعة المطالعة في الحصة الثالثة. والمجتمع هو طلاب المدرسة جميعهم.

ب) صنّف هذه العينة إلى ملائمة أو تطوعية.

هذه عينة ملائمة، حيث يسهل اختيار طلاب في قاعة المطالعة خلال حصة معينة في اليوم.

تمارين

حدّد العينة والمجتمع الذي اخترت منه في كلٍّ ممّا يأتي، ثم صنّف العينة إلى ملائمة أو تطوعية:

١) **مدرسة**، أرادت إدارة مدرسة ثانوية أن تقيّم فعاليات يوم النشاط المدرسي، فسألت كل طالب في الصف الثالث الثانوي في لجنة الأنشطة إن كان راضيًا عن فعاليات يوم النشاط.

طلاب الصف الثالث الثانوي المشاركون في لجنة الأنشطة؛ طلاب المدرسة جميعهم؛ عينة ملائمة.

٢) **صناعات**، أراد مدير مصنع للألبسة أن يتأكد من ضبط الجودة لمنتجات المصنع، فقرر اختيار كل رابع قطعة يفحصها المراقب س، علمًا بأنه يوجد في المصنع ١٠ مراقبين.

كل رابع قطعة فحصها المراقب س؛ إنتاج المصنع بكامله؛ عينة ملائمة.

٣) **مدرسة**، أرسل المرشد الطلابي في مدرسة ثانوية استبانة لطلاب الصف الثالث الثانوي يسألهم عن خططهم للدراسة الجامعية، ولاحظ أنّ بعض الطلاب لا يخططون للالتحاق بالجامعات، وقد أعاد ٤٠٪ من طلاب الصف الثالث الثانوي الاستبانات معبأة.

٤٠٪ من طلاب الصف الثالث الثانوي؛ طلاب الصف الثالث الثانوي جميعهم؛ عينة تطوعية.

٤) **تجارة**، طُلب من مجموعة تعمل في مجال التسويق أن تجمع بيانات حول فعالية الإعلانات الخاصة بالأدوات المنزلية في كافة مناطق المملكة. قررت المجموعة أن تنفذ دراساتها في المحالّ التجارية الكبرى، فسأل الباحث كل من يمر من جانبه في محلٍّ تجاري عن رغبته في المشاركة في دراسة حول الأدوات المنزلية.

المتسوقون في المحل التجاري؛ سكان المملكة؛ عينة ملائمة.

تدريبات حل المسألة (٨) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

١٠-١٠ تدريبات حل المسألة
تصميم دراسة مسحية

حدّد في الأسئلة ١ – ٤ العينة والمجتمع الذي اخترت منه، ثم بيّن إذا كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة. وإن لم تكن متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. وإن كانت متحيزة فصنّفها إلى ملائمة أو تطوعية، وفسّر إجابتك.

١) **مدرسة**، يختار معلّم أربعة طلاب كل يوم لتوزيع كراسة الواجبات على جميع طلاب الصف. فهو يكتب أسماء طلاب الصف وعددهم ١٨ على قصاصات من الورق، ويضعها في كأس، ويخلطها جيدًا، ثم يسحب أربعة منها لتحديد أسماء الطلاب الأربعة الذين سيوزعون الكراسات على زملائهم.

العينة: ٤ طلاب؛ المجتمع: جميع طلاب الصف وعددهم ١٨؛ غير متحيزة؛ عينة عشوائية بسيطة

٢) **امتحانات مدرسية**، افترض أنّ طالبات إحدى المدارس الثانوية اختارت رئيسة اللجنة الاجتماعية في المدرسة من خلال الاقتراع. وللحصول على نتائج مبكرة، وقفت إحدى طالبات اللجنة الإعلامية عند مدخل قاعة الاقتراع، وسألت أكبر عدد ممكن من الطالبات عن الطالبة التي انتخبنها.

العينة: الطالبات اللواتي سألتهن عضو اللجنة الإعلامية؛ المجتمع: طالبات المدرسة الثانوية ؛ متحيزة؛ عينة ملائمة

٣) **أمراض**، تستعمل مؤسسة صحية شبكة لتأسر طيورًا قرب محمية طبيعية. وتفحص الطيور التي تسقط في هذه الشباك للكشف عن وجود فيروس أنفلوانزا الطيور.

العينة: الطيور التي تسقط في الشبكة
المجتمع: كل الطيور في المنطقة؛ متحيزة؛ عينة ملائمة

٤) **تربة**، يفحص مهندس التربة في موقع لإنشاء مشروع إسكان، وذلك بتقسيم الموقع إلى ١٢ منطقة مستطيلة، وملء كأس من تربة كل منطقة لفحصها، للكشف عن وجود مواد كيميائية ضارة.

العينة: ١٢ كأسًا من تراب مناطق الموقع.
المجتمع: كل التربة في الموقع ؛ غير متحيزة؛ طبقية

٥) **سلامة الأطفال**، فحصت مؤسسة للسلامة العامة مقاعد الأطفال المستعملة في السيارات في إحدى المناطق، لكل من رغب في إجراء هذا الفحص المجاني. وقد وجدت أنّ ٧٪ فقط من ١٠٠٠ مقعد استُعملت استعمالًا صحيحًا. بيّن التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه النسب المئوية التقريبية لنتائج فحص سلامة المقعد:

نتائج فحص مقاعد الأطفال

أ) اكتب عبارة تصف أسلوب المعاينة.

العينة متحيزة؛ حيث إنها تطوعية.

ب) هل من المناسب القول أن ٢٣٪ من الأطفال الذين أُجري فحص المقاعد في منطقتهم، لم يُثبتوا في مقاعدهم بصورة سليمة؟ اشرح إجابتك.

لا؛ لم تكن العينة عشوائية؛ لذا لا يمكن تعميم نتائجها على المجتمع . فلا توجد معلومات عن طريقة استعمال المقاعد في السيارات التي تم تفحص.

التدريبات الإثرائية (٩) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

١٠-١٠ التدريبات الإثرائية
الشعار أو الكتابة

هناك تحيز في ظهور الشعار أو الكتابة إثر سقوط قطعة نقود معدنية عند وضعها متزنة على حافتها على طاولة وهزّ الطاولة قليلًا. ويعتمد ذلك على طريقة صنع بعض القطع النقدية. تُبَثّ عادة قطع نقود من فئة عشرة هللات المسكوكة في السنة نفسها، على حوافها على طاولة، ثم هزّ الطاولة بلطف بحيث تسقط قطع النقود على أوجهها على الطاولة.

١) ما النسبة المئوية لقطع النقود التي تتوقع ظهور الشعار في كلٍّ منها؟

إجابة ممكنة: ٥٠٪

٢) ما النسبة المئوية لقطع النقود التي ظهر الشعار في كلٍّ منها فعلًا؟

انظر إجابات الطلاب؛ ولكن ينبغي أن تكون نسبة الشعار أكبر من نسبة الكتابة.أعد التجربة مرة أخرى.

٣) هل كانت النتائج مماثلة لنتائج المحاولة السابقة؟

انظر إجابات الطلاب؛ وينبغي أن تكون متماثلة.

٤) كوّن تخمينًا حول السبب الذي يجعل النسبة المئوية الفعلية لظهور أحد الوجهين مختلفة عن النسبة المئوية المتوقعة.

إجابة ممكنة: وزن أحد الأوجه أكبر؛ الأخاديد الموجودة على القطعة.

تُشطَّبُ قطع النقود قليلًا عند صناعتها، بحيث يكون ظهور الشعار عند سقوطها أكثر احتمالًا. ويبدو أن هناك فروقات بحسب سنة الصنع .أعد هذه التجربة مع قطع نقدية مصنوعة في سنوات مختلفة.

٥) هل كانت النتائج مماثلة تقريبًا للنتائج السابقة؟ اشرح الأسباب.

انظر إجابات الطلاب.

وبسبب هذا التحيز، فإنّ استعمال تجربة رمي قطعة النقود على الأرض أو الطاولة لتحديد الفائز طريقة غير عادلة، حيث إن ظهور الشعار أكثر احتمالًا.

٦) كيف يمكنك أن تعدّل في تجربة رمي قطعة النقود بحيث يكون احتمال ظهور الشعار مساويًا لاحتمال ظهور الكتابة؟

إجابة ممكنة: إمساك القطعة قبل سقوطها على الأرض؛ إيجاد قطعة نقود متوازنة.

أعد هذه التجربة مع قطع نقود من فئات أخرى لترى إن كان هناك تحيز في صناعة هذه القطع.

٧) اشرح ما يحدث عند إجراء هذه التجربة مع قطع نقود من الفئات: ٥٠ هللة، ٢٥ هللة، ٥ هللات.

انظر إجابات الطلاب.

كتاب التمارين (٢٨) — دون ضمن فوق

الفصل العاشر: الإحصاء والاحتمال
١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اخترت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل.

١) **علم النباتات**، لتحديد مدى إصابة أشجار غابة بأحد أمراض الأوراق، قسّم مهندس زراعي الغابة إلى ١٠ أقسام، واختار عشوائيًا مربعًا طوله ٢٠٠ قدم في كل قسم، وفحص جميع الأشجار في تلك المربعات.
العينة: الأشجار في المربعات المختارة؛ المجتمع : أشجار الغابة جميعها؛ التجربة.

٢) **مالية**، لتحديد مدى انتشار الخدمات البنكية عبر الإنترنت في السعودية، قامت مؤسسة أبحاث بإرسال استبانة بالبريد إلى ٥٠٠٠ من المتعاملين مع البنوك؛ لمعرفة ما إذا كانوا يتعاملون مع بنوكهم عبر الإنترنت أم لا، وإن كانوا يتعاملون، فما عدد التعاملات في الشهر؟
العينة: ٥٠٠٠ شخص؛ المجتمع جميع المتعاملين مع البنوك؛ الدراسة المسحية.

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيّزة أم غير متحيّزة، وفسّر إجابتك.

٣) **أحذية**، أراد مصنع أحذية أن يتحقّق من جودة الأحذية التي ينتجها. فقام بسحب ٢٠ زوجًا من الأحذية من خط التجميع في كل ٢٠ دقيقة لفحصها. غير متحيّزة؛ لأن أزواج الأحذية اختيرت بطريقة العينة العشوائية المنتظمة.

٤) **أعمال**، لمعرفة أهم الامتيازات في نظر موظفي شركة كبيرة، طُلب إلى جهاز حاسب آلي أن يختار ٥٠ موظفًا عشوائيًا. ثم أُجريت لهم مقابلة في قسم شؤون الموظفين. غير متحيّزة؛ لأن كل موظف له الفرصة نفسها لأن يكون من العينة العشوائية البسيطة.

في السؤال الحاسم حدّد العينة والمجتمع الذي اخترت منه. ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة ، وفسّر إجابتك:

٥) **أعمال**، يقوم مكتب خدمات عامة بفحص الطلب من مضاعفات العدد ١٠٠ من جملة الطلبات المقدمة إليه؛ لضمان إنجاز الطلبات بصورة سليمة حسب الأصول. العينة: كل طلب أُعطي رقمًا من مضاعفات العدد ١٠٠ من جملة الطلبات المقدمة؛ المجتمع: جميع الطلبات المقدمة لمكتب الخدمات العامة؛ عشوائية منتظمة؛ لأنه يتم الاختيار ضمن فترة محددة.

٦) **بيئة**، افترض أنك أردت أن تتحقّق إذا كان أحد المصانع يلوّث بفضلاته بحرًا قريبًا منه، صف طريقة غير متحيّزة لفحص المياه، للتأكّد من وجود ملوّثات. إجابة ممكنة: أخذ عينات من المياه مقدارها ١٠ أونصات في أوقات مختلفة من اليوم لفحصها، ومقارنة نتائج الفحوصات؛ لمعرفة إذا كانت فضلات المصنع تلوّث المياه.

٧) **مدارس**، افترض أنك أردت معرفة القضايا الأكثر أهمية للمدرسين في إدارة التعليم في منطقتك، صف طريقة غير متحيّزة لإجراء مسح لهذه الغاية. إجابة ممكنة: أحصل على قائمة أسماء المدرسين، وأحدد رقمًا لكل مدرس من مدرسي المنطقة، وأختار ١٠ أرقام عشوائيًا، وأقابل كل واحد من المدرسين الذين تم اختيارهم.

ملحوظات المعلم

٢-١٠ تحليل نتائج الدراسة المسحية

فيما سبق

درست تصميم الدراسات المسحية.

والآن

- ألخص نتائج الدراسة المسحية.
- أقوّم نتائج الدراسة المسحية.

المفردات

مقاييس النزعة المركزية
البيانات الكمية
البيانات النوعية

obeikaneducation.com

لماذا؟

ترغب الشركات عادة في استعمال الدراسات المسحية للحصول على تغذية راجعة حول أدائها في مجالات عملها بدءًا من المبيعات وانتهاءً بمواقعها الإلكترونية. وقد حصلت شركة على النتائج المبينة في الشكل المجاور في استطلاع حول موقعها الإلكتروني.

ماذا تعني هذه القيم؟ وما الطريقة التي جمعت بها هذه البيانات؟ وهل تمثل العينة زبائن الشركة بدقة؟

تلخيص نتائج الدراسة المسحية: بعد جمع البيانات من الدراسة المسحية، فإنها تحتاج إلى تلخيصها كي تكون ذات معنى. ويمكن تلخيص بيانات الدراسات المسحية باستعمال مقاييس النزعة المركزية.

ملخص المفهوم — مقاييس النزعة المركزية

أضف إلى مطويتك

النوع	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسومًا على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.	عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

بعض البيانات لا يمكن تحليلها باستعمال الطرق الإحصائية، لكن **البيانات الكمية** التي تُعطى بصورة قيم عددية يمكن تحليلها. مثّل درجات الاختبارات أو ساعات الدراسة، أو أوزان الأجسام. بينما **البيانات النوعية** لا يمكن أن تأخذ قيمة عددية، ومن أمثلتها: الجنس أو الجنسية أو البرنامج التلفزيوني المفضل. ويمكن أحيانًا أن تكون البيانات كمية ولا نستطيع أن نجد مقاييس النزعة المركزية، ويحدث هذا عندما تمثل البيانات أشياء مختلفة؛ أي لا تكون الأعداد أو النسب للشيء نفسه.

مثال ١ — اختيار طريقة تلخيص البيانات

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

الخضراوات	السعرات	الخضراوات	السعرات
بصل أخضر	١٤	قرنبيط	١٠
فاصولياء	٣٠	خيار	١٧
فلفل	٢٠	ذرة	٦٦
باذنجان	٢٥	خس	٩
ملفوف	١٧	سبانخ	٩
جزر	٢٩	كوسا	١٧

أ) تغذية: يبيّن الجدول المجاور السعرات الحرارية في الطبق لكل نوع من الخضراوات.

رتّب هذه القيم تصاعديًّا: ٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٩، ٣٠، ٦٦.

تلاحظ وجود قيمة أكبر كثيرًا من سائر القيم وهي ٦٦، ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات. وهناك مجموعتان فقط من الأعداد المتماثلة؛ لذا فالوسيط هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات.

{٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٩، ٣٠، ٦٦}

الوسيط ١٧ سُعرًا.

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ١٠-٢

تصميم دراسة مسحية.

الدرس ١٠-٢

تلخيص نتائج الدراسة المسحية.
تقويم نتائج الدراسة المسحية.

ما بعد الدرس ١٠-٢

استعمال مقاييس التشتت لتحليل البيانات.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا"؟ .

ثم اسأل:

- ماذا تستنتج من المتوسط الكلي؟
  إجابة ممكنة: التقدير الذي متوسطه ٢,٢ من ٤، يدل على خبرة متواضعة في الموقع الإلكتروني.
- ماذا يمكن أن نقول عن أعداد المشاركين في الدراسة؟
  إجابة ممكنة: لا يمكن تحديد عدد المشاركين.
- هل تعتقد أنه تم جمع البيانات باستعمال عيّنةٍ عشوائيةٍ؟ فسّر إجابتك.
  إجابة ممكنة: لا؛ يبدو أن البيانات التي تم جمعها كانت تطوعيةً.

مصادر الدرس ١٠ - ٢

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (١٦٩، ١٧٠)	• تنويع التعليم ص (١٦٩، ١٧٠)
كتاب التمارين	ص (٢٩)	ص (٢٩)	ص (٢٩)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٠) • تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٢) • التدريبات الإثرائية، ص (١٣)

تلخيص نتائج الدراسة المسحية

المثال ١ يُبيّن طريقة اختيار مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات (إن وجد).

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

١ أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب، لتمثيل البيانات في كلٍّ ممَّا يأتي؟ برّر إجابتك ثم احسب قيمة ذلك المقياس.

أ) هواتف نقالة: سجَّل محل لبيع الهواتف النقّالة أسعار الأجهزة التي باعها في يوم واحد فكانت: ٣٤٠ ريالًا، ٢٠٠ ريال، ٤٥٠ ريالًا، ٣٢٠ ريالًا، ٢٩٠ ريالًا، ٢٢٠ ريالاً، ٢٧٠ ريالًا، ٤٦٠ ريالًا، ٣٦٠ ريالًا، ٢٢٠ ريالًا، ٣٨٠ ريالًا، ٢٤٠ ريالًا.

المتوسط الحسابي؛ لا يوجد قيم متطرّفة، وتوجد قيمة واحدة فقط تكررت مرتين؛ ٣١٢,٥ ريالًا.

ب) نشاطات مدرسية: سأل المشرف على النشاطات في مدرسة ثانوية ٥٠٠ طالب عن تاريخ آخر مشاركة لهم في المراكز الصيفية.

النتائج	
الاستجابة	النسبة المئوية
قبل ٦ سنواتٍ على الأقل	٣٠٪
قبل ٣ – ٦ سنواتٍ	١٠٪
قبل ١ – ٣ سنواتٍ	٢٥٪
خلال السنة الماضية	٣٥٪

لا يوجد؛ لأن كل نسبة مئوية في الجدول تُمثّل شيئًا مختلفًا.

ب) عمرة: أجرت وكالة سفريات دراسة مسحية على ١٠٠٠ شخص حول الزمن الذي مضى على آخر عُمْرَة لكل منهم والنتائج يوضحها الجدول المجاور.

النتائج	
الاستجابة	النسبة المئوية
٣ سنوات على الأقل	٨
سنة إلى أقل من ٣ سنوات	١٥
٦ شهور إلى أقل من سنة	٤٥
أقل من ٦ شهور	٣٢

لا يمكن حساب مقياس نزعة مركزية لهذه المجموعة من البيانات؛ لأن كل نسبة مئوية في الجدول تمثل شيئًا مختلفًا.

فعلى سبيل المثال، أجاب ١٥٪ من الأشخاص بأنه قد مضى من سنة إلى أقل من ٣ سنوات على أدائهم العمرة، بينما ذكر ٣٢٪ منهم أنهم أدّوا آخر عمرة قبل أقل من ٦ شهور. فالوسيط لهذه البيانات وهو ٢٣,٥٪ ليس له أي معنى في هذه الحال.

تحقق من فهمك

١أ) تسوُّق: سجَّل أحد محال بيع الأجهزة الإلكترونية عدد الزبائن في كل ساعة عمل في أحد الأيام كما هو موضح في الجدول المجاور.

عدد الزبائن			
٨٦	٧٩	٧١	٨٦
٨٦	٨٨	٣٢	٧٩
٧٠	٧١	٦٩	٨٢
٨٦	٨٥	٨١	٨٦

١ب) كتب: في دراسة مسحية لمصادر أبحاث عدد من طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المناطق التعليمية كانت الاستجابات على النحو الآتي: من المعلم: ٤٢٠؛ من مكتبة المدرسة: ١٣٢٠؛ من المكتبة العامة: ١٠٢٠؛ من متاجر الكتب: ١٠٢٠؛ من المكتبة المنزلية: ٧٢٠؛ من الإنترنت: ٥٤٠؛ من الأصدقاء: ٥٤٠.

١أ) المنوال؛ تحتوي مجموعة البيانات أعدادًا متكررة؛ المنوال= ٨٦

١ب) لا يمكن حساب مقياس نزعة مركزية لها؛ لأن قيم البيانات تمثل أشياء مختلفة.

تقويم نتائج الدراسات المسحية: بعد تنفيذ الدراسة المسحية يتم تلخيص البيانات، ويُعد تقرير حول نتائج الدراسة واستنتاجاتها. ومع ذلك فقد يؤدي التحيز أحيانًا إلى أخطاء في البيانات فضلاً عن أخطاء في طريقة تفسيرها وفي التقرير المكتوب عنها؛ لذا يجب أن تكون قادرًا على الحكم على مصداقية هذه التقارير من خلال التحقق من أن العينة عشوائية وكبيرة وممثِّلة للمجتمع تمثيلًا جيدًا، وأن مصدر البيانات موثوق به.

تنبيه!

النسبة المئوية

تحقق دائمًا من أن الدراسة المسحية التي تعطي بياناتها على صورة نسب مئوية تدل على حجم العينة.

وغالبًا ما تقدم الصحف اليوميّة والمجلات والتقارير المتلفزة نتائج دراسات مسحيّة، تحتاج إلى الحكم على مصداقيتها قبل اتخاذ قرار يعتمد عليها، ويمكن أن تطرح بعض الأسئلة على نفسك من أجل ذلك مثل:

- ما مجتمع الدراسة؟ وما العينات المختارة منه؟ وهل أستطيع تحديدها بسهولة؟ وهل هي متحيزة؟
- ما مصدر البيانات؟ وهل هو موثوق به؟ وهل يمكن أن يكون متحيزًا؟
- هل تدعم البيانات الاستنتاجات فعليًّا؟

مثال ٢ تقويم دراسة مسحية

كتاب الجامعة السنوي: إذا أُعطيت الجزء الآتي من تقرير دراسة مسحية، فحدّد صحة المعلومات والاستنتاجات.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
إلكترونيًا فقط	٦٧٪
ورقيًا فقط	٢٢٪
إلكترونيًا وورقيًا	٩٪
لا تفضيل	٢٪

السؤال: هل يجب أن تعدّ الجامعة كتابها السنوي إلكترونيًّا هذا العام؟

العينة: وضعت استبانات على مقاعد الطلاب بصورة عشوائية.

الاستنتاج: يجب أن تعدّ الجامعة هذا العام الكتاب السنوي إلكترونيًّا فقط.

ذكر التقرير أن اختيار الطلاب كان عشوائيًّا، ولم يذكر عددهم، كما أن النتائج أُعطيت بنسب مئوية؛ فالنسبة ٦٧٪ قد تعني ٣٤ من ٥٠، وهذه ليست عينة كافية لتمثل جامعة كبيرة.

المحتوى الرياضي

المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال: يمكن أن يكون للمتوسط الحسابي والوسيط القيمة نفسها، أو أن تكون قيمتاهما متقاربتين. وذلك عندما تكون قيم البيانات موزّعة بانتظام من أصغر قيمة إلى أكبر قيمة، وقد يختلفان كثيرًا إذا وجدت قيم متطرّفة في مجموعة البيانات. وقد يوجد منوال واحد أو أكثر، وقد لا يوجد منوال للبيانات، ويعتمد ذلك على عدد مرات تكرار قيمةٍ ما، وعدد القيم في مجموعة البيانات.

٢) إن حجم العينة مناسب ولكنها قد تكون متحيزة. لأن الأشخاص الذين استجابوا لهذا المسح كانوا في مدينة الألعاب، أيْ أنهم مستعدون وراغبون في دفع ثمن بطاقة الدخول.

تحقق من فهمك

٢) مدينة ألعاب: طلب من كل عاشر زائر من بين ٥٠٠٠ زائر لمدينة ألعاب في أحد الأيام أن يجيب عن سؤال الاستبانة الآتي:

السؤال: هل ترى أن أسعار بطاقات الدخول لمدينة الألعاب معقولة؟

الاستنتاج: أسعار التذاكر معقولة، ويجب أن تبقى كما هي.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
معقولة جدًا	٥٦
معقولة	١٨٥
معقولة نوعًا ما	١٣٢
غير معقولة	٦٩
غيرمعقولة أبدًا	٥٨

يمكن أن تؤثر طريقة عرض نتائج الدراسة المسحية في طريقة تفسير نتائجها. وهذه بعض العوامل المؤثرة:

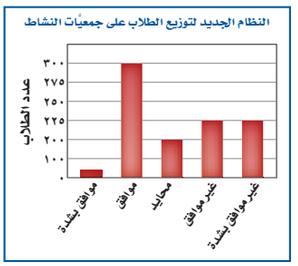
- إذا كانت أطوال فترات التدريج في التمثيل البياني بالخطوط أو بالأعمدة أو بالمدرّجات التكرارية كبيرة، فإن التغيرات تبدو بسيطة على الرغم من أنها قد تكون حقيقة مهمة. أما إذا كانت أطوال الفترات قصيرة، فإنها ستضخم التغيرات الطفيفة في التمثيل البياني.

وهذه بعض خصائص تمثيل النتائج التي يمكن أن تؤثر في الاستنتاج:

- يجب أن تكون أطوال فترات التدريج في التمثيل البياني ثابتة.
- قد يعطي استعمال النسب المئوية بدلاً من القيم الفعلية لمجموعة البيانات نتيجة مضلّلة، ومع هذا يُفضل استعمال النسب المئوية إذا كان حجم العينة كبيرًا.
- يجب أن يكون لكل الأعمدة في التمثيل بالأعمدة أو المدرج التكراري العرض نفسه؛ فقد يؤدي تغيير عرض الأعمدة إلى تضخيم الاختلافات.
- عند تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية أو بالأعمدة أو بالمدرج التكراري بدرجات لون واحد مختلفة قد تختلط المجموعات بصريًّا وتؤثر في طريقة تفسير النتائج.

مثال ٣ **نتائج مضللة**

جمعيات النشاط: يفكر مدير مدرسة ثانوية كبيرة في تطبيق نظام جديد لتوزيع الطلاب على جمعيات النشاط، فوزّع استبانة على الطلاب يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.



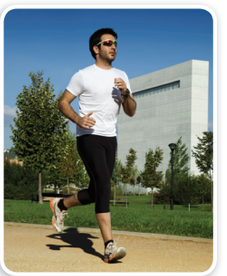
السؤال: ما رأيك في تطبيق النظام الجديد لتوزيع الطلاب على جمعيّات النشاط؟

الاستنتاج: لن ينزعج الطلاب من تطبيق نظام توزيع الطلاب على جمعيّات النشاط.

حدّد، إذا كان التمثيل بالأعمدة يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.

يبدو للوهلة الأولى أن معظم الطلاب موافقون على تطبيق النظام الجديد، ومع ذلك فإن أطوال فترات التدريج غير ثابتة. وإذا ألقينا نظرة فاحصة نجد أن نحوًا من ٤٥٠ طالبًا غير موافقين أو غير موافقين بشدة على هذا النظام الجديد، وأن عدد الموافقين يزيد قليلاً على ٣٠٠ طالب فقط.

لذا فإن التمثيل البياني المعروض مضلّل، والاستنتاج غير صادق.



الربط مع الحياة

أثبتت الدراسات أن النشاط التربوي والحركي يزيد حيوية الطلاب ويشيع رغباتهم، ويحسّن العمليات العقلية، ويركّز انتباههم، ويزيد قدرتهم على التحصيل الدراسي والمشاركة والاندماج مع أقرانهم.

تقويم نتائج الدراسة المسحية

المثال ٢ يُبيّن طريقة تقويم نتائج دراسة مسحية، وهل هي متحيّزة أم غير متحيّزة.

المثال ٣ يُبيّن طريقة تحديد ما إذا كانت طريقة عرض نتائج الدراسة المسحية صحيحةً أم مضلّلةً.

مثال إضافي

٢ صحف: إذا أعطيت الجزء الآتي من تقرير دراسة مسحية، فحدّد صحة المعلومات والاستنتاج.

السؤال: ما مصدرك الرئيس للأخبار المحلية؟

العينة: عينة عشوائية مكوّنة من ٢٠٠٠ أسرة في مدينة القريات.

الاستنتاج: يجب أن توسّع الصحف المحلية حضورها الإلكتروني في هذه المدينة.

النتائج	
الاختيار	العدد
الصحف المطبوعة	٢٨٤
الصحف الإلكترونية	٥٧٥
أخبار إلكترونية أخرى	٣١٩
التلفاز	٨٢٢

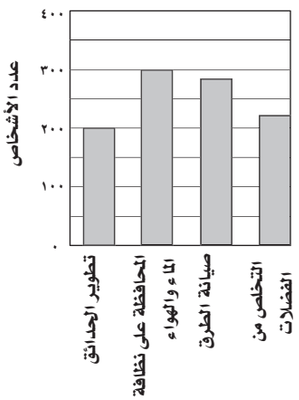
إجابة ممكنة: العينة عشوائية، ويبدو أنها ممثّلة للمجتمع، والبيانات تؤيد الاستنتاج؛ لذا فإن هذه الدراسة المسحية والاستنتاج صادقان.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب مجموعة من القيم على السبورة، وحرّكها لترتّبها من الأصغر إلى الأكبر، ثم احصر النصف الأدنى من البيانات، وأبعده عن النصف الأعلى منها، ولا تحرّك القيمة الواقعة في الوسط، إذا كان عدد المفردات فرديًّا، وسمِّ العدد الأوسط الوسيط.

مثال إضافي

٣ **البيئة:** يريد المجلس البلدي في مدينة الجبيل، أن يُحدّد القضايا البيئية التي يجب أن يهتم بها أولًا، فأرسل استبانات إلى ١٠٠٠ مواطن من سكان المدينة، والرسم البياني أدناه يُبيّن نتائج الدراسة المسحية.



السؤال: ما القضية البيئية التي يجب الاهتمام بها أولًا؟

الاستنتاج: تطوير الحدائق هو القضية البيئية الأقل اهتمامًا من قبل المجلس البلدي.

حدّد ما إذا كان العرض يُعطي صورة صحيحة لنتائج المسح، ويؤيد الاستنتاج أم لا. يبدو أن العرض صحيح، ويؤيد النتائج.

٣ التدريب

التقويم التكويني

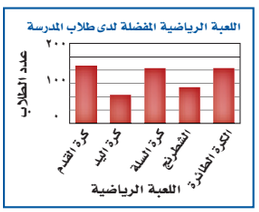
استعمل الأسئلة ١–٦؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تحقق من فهمك

٣) يوضح التمثيل بالأعمدة المجاور نتائج استطلاع أجراه مدرس التربية الرياضية لمعرفة اللعبة الرياضية التي يفضلها طلاب المدرسة.

السؤال: ما اللعبة الرياضية التي تفضلها؟

الاستنتاج: كرة اليد هي اللعبة الأقل شيوعًا بين الألعاب الرياضية المفضلة.



٣) التمثيل والاستنتاج صحيحان.

حدّد ما إذا كان التمثيل بالأعمدة يقدم صورة صادقة أم لا لنتائج الدراسة المسحية. وفسّر إجابتك.

تأكد

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

١) **إعادة تدوير:** ترغب شركة في إعادة تدوير الأوراق الزائدة، فجمعتها في رزم ارتفاع الواحدة منها ٥٠سم، وقد أحصى خالد عدد الرزم في نهاية كل شهر من السنة فكانت: ١٥، ١٢، ١٤، ١٥، ١٨، ١٥، ١٣، ١٤، ١٣، ١٢، ١٥، ١٨.

المنوال؛ لأن مجموعة البيانات تتضمن قيمًا متكررة؛ ١٥

٢) لا يمكن حساب مقياس للنزعة المركزية؛ لأن النسب المئوية المعطاة تمثّل أشياء مختلفة.

٢) **سياحة:** تريد إحدى وكالات السياحة التي تعمل عبر الإنترنت أن تنظم رحلات للعائلات، فأجرت مسحًا حول المكان المفضل لها لقضاء الإجازة. وقد كانت الأماكن الخمسة الأولى هي: الشواطئ ٢٥٪؛ المتنزهات ٢٢٪؛ البر ٢١٪؛ المواقع الأثرية التاريخية ١٧٪؛ الجبال ١٥٪.

حدِّد صحة المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحيّة فيما يأتي:

٣) **تلفاز:** تريد محطة تلفزيونية أن تغير نشاطها ، فأرسلت ١٠٠٠ استبانة بالبريد إلى أشخاص تمّ اختيارهم عشوائيًّا تقع ضمن منطقة بثها وتلقت ٧٥٠ ردًّا.

السؤال: ما نوع البرامج التلفزيونية التي تفضلها؟

الاستنتاج: يجب أن تتحول المحطة إلى محطة إخبارية.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
رياضية	٢٦٪
دينية	٣٢٪
إخبارية	٣٩٪
تعليمية	٣٪

٤) **رياضة:** استطلعت إدارة التعليم في إحدى المناطق آراء ٣٥٨٥ طالبًا عن رياضتهم المفضلة.

السؤال: ما الرياضة التي تفضل المشاركة فيها؟

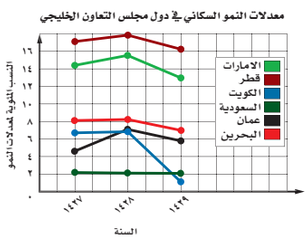
النتائج: كرة الطائرة ٢٧١، كرة القدم ٥٧٠، كرة السلة ٤٣٦، التايكوندو ٢٧٩، المصارعة ١٩٧، جري التتابع ٢٠٩، السباحة ٣١٩، الجمباز ١٩٧، كرة اليد ٢٨٩، التنس ٢٠٢، رياضات أخرى ٦١٦.

الاستنتاج: كرة القدم هي الرياضة التي يفضل الطلاب المشاركة فيها.

حدّد إذا كانت طريقة تمثيل النتائج تعطي صورة صحيحة حول نتائج كل من الدراسات المسحية الآتية، وفسّر إجابتك:

٥) **معدلات نمو:** أجريت دراسة حول معدلات النمو السكاني في دول مجلس التعاون الخليجي في ثلاث سنوات متتالية، وقسمت النتائج بحسب الدولة، وعرضت في التمثيل البياني المجاور.

الاستنتاج: أكبر نمو سكاني كان في دولة قطر.



٥) البيانات المعروضة في التمثيل تؤيد الاستنتاج، فطريقة العرض صحيحة.

مثال ١

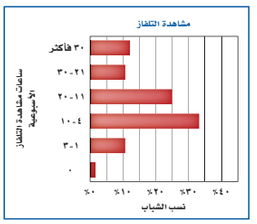
٣) غير صحيح. بسبب عدم ذكر نوع المحطة التي نفذت الدراسة. يحتمل أن يكون الأشخاص الذين استجابوا للدراسة هم من الأشخاص الذين يشاهدون تلك المحطة أو المحطات المشابهة.

مثال ٢

٤) إجابة ممكنة: ليس هناك دليل على التحيز في هذه البيانات، ويبدو أن المصدر موثوق، والبيانات تؤيد الاستنتاج. وكذلك يبدو أن كلا من الدراسة المسحية والاستنتاج صحيحان.

مثال ٣

٦) **تلفاز:** أجرت شبكة إعلامية دراسة حول عدد الساعات التي يقضيها الشباب في مشاهدة التلفاز في الأسبوع الواحد، وعرضت النتائج بالتمثيل البياني المجاور.



ليس هناك استنتاج لنرى إن كانت البيانات تؤيده أم لا، لذا لا يمكن الحكم على صحة طريقة العرض.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

٧) **كتب:** أجرى متجر كتب مسحًا لمعرفة موضوع الكتب المفضلة لزبائنه، وكانت النتائج على النحو الآتي: الثقافية ٢١٪، الروايات ١٩٪، المغامرات ١٢٪، العلمية ١٧٪، الدينية ١٨٪، التاريخية ١٣٪.

٧) لا يمكن حساب مقياس للنزعة المركزية؛ لأن قيم البيانات تمثل أشياء مختلفة.

٨) **أنشطة صيفية:** أُجريت دراسة حول الأنشطة الصيفية المفضلة التي يمارسها الطلاب، وعُرضت نتائجها في الجدول المجاور.

الأنشطة الصيفية			
السباحة	٦٥٠	المخيمات	٤٣٢
الرحلات	٨٨٥	المطالعة	٢٨١
الرياضة	١١٢٣	أخرى	٥١٤

٨) لا يمكن حساب مقياس للنزعة المركزية؛ لأن قيم البيانات تمثل أشياء مختلفة.

مثال ٢

حدّد صحة كلٍّ من المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:

٩) **قيادة:** أجرت صحيفة استطلاعًا شمل ٧٥٠ شخصًا من سكان إحدى المدن.

السؤال: هل تتحدث عبر الهاتف الجوّال في أثناء قيادة السيارة؟

النتائج: لا ٧, ٢٠٪؛ بضع مرات ٧, ٤٨٪؛ على الأكثر ١, ٥٪؛ دائمًا ٥, ٢٥٪.

الاستنتاج: سائقو هذه المدينة غير حريصين.

٩) إجابة ممكنة: البيانات لا تؤيد، والاستنتاج غير صحيح.

١٠) **مطالعة:** أجرت مجلة نسائية استطلاعًا طلبت فيه من الطلاب والطالبات ذكر سبب المطالعة.

النتائج: للاستمتاع ٢٥٪، لتعلم أشياء جديدة ٢٤٪، لتلبية طلبات المدرسة ١٨٪، بسبب الملل وعدم وجود شيء آخر ١٧٪، لأن أصدقاءهم يحبون القراءة ويتحدثون عن الكتب ١٦٪.

الاستنتاج: يقرأ الطلاب والطالبات الكتب لأسباب متعددة.

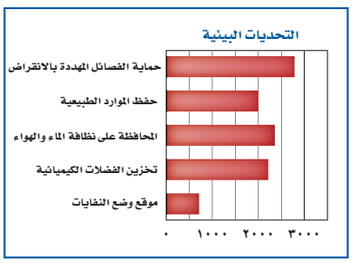
١٠) إجابة ممكنة: لأن المصدر مجلة نسائية فقد تكون معظم العينة من الفتيات، وعندئذ لا يمكن التوصل إلى استنتاج غير متحيز بالنسبة للشباب بصورة عامة.

حدِّد ما إذا كانت طريقة تمثيل النتائج تعطي صورة صحيحة حول نتائج كل من الدراسات المسحية الآتية، وفسّر إجابتك.

١١) **بيئة:** أجرت مجلة بيئية دراسة مسحية شملت ١٠٠٠٠ شخص تم اختيارهم عشوائيًّا.

السؤال: ما التحدي البيئي الأكبر في القرن الحادي والعشرين؟

الاستنتاج: إيجاد مكان لوضع النفايات أمر غير مهم.



١١) إجابة ممكنة: الاستنتاج واسع جدًّا بالنسبة للبيانات المقدمة.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: ذكّر الطلاب بأنه من الأسهل تحديد مقياس النزعة المركزية الأنسب عند ترتيب قيم البيانات من الأصغر إلى الأكبر، وذكّرهم بأن القيم المتطرّفة هي القيم التي تزيد أو تقل كثيرًا عن معظم القيم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٧ – ١١ ، ١٣ – ٢١
ضمن ضمن المتوسط	٧ – ١١ (فردي)، ١٢ – ٢١
فوق فوق المتوسط	١٢ – ٢١

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون: قدّم لبعض الطلاب النتائج الآتية لدراسة مسحية حول الوقت الذي يقضيه الطلاب يوميًّا في حل الواجبات المنزلية: ٠ – ٢٩ دقيقة: ١٩، ٣٠ – ٥٩ دقيقة: ٢٤؛ ٦٠ – ٨٩ دقيقة: ٢٨؛ ٩٠ – ١١٩ دقيقة: ٢٢؛ ١٢٠ – ١٤٩ دقيقة؛ ١٧، ثم اطلب إليهم تكوين مدرّجين تكراريين يبدأ تدريج المحور الرأسي في أحدهما من الصفر، ويبدأ الآخر من ١٥ . ما الانطباع الذي يقدمه المدرّج الثاني؟ تبدو الفروقات مضخّمة.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال ١٣، يستعمل الطلاب النماذج الحسية والتمثيل بالنقاط والتحليل الإحصائي لتقويم توزيع إحصائي.

٤ التقويم

فهم الرياضيات: قدّم للطلاب مجموعة بيانات، واطلب إليهم شرح طريقة تعيين مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل هذه البيانات، ثم تعيين هذا المقياس وحساب قيمته.

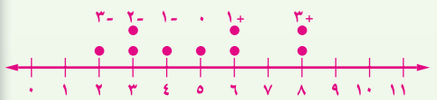
التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين (١٠-١، ١٠-٢) بإعطائهم:

الاختبار القصير (١)، ص (٨٧)

إجابات:

١٣ب)



(٣، ٢، ٢، ١، ٠، ١، ١، ٣، ٣)

١٥) إجابة ممكنة. أرغب في إجراء دراسة مسحية حول حفل المدرسة الختامي، سأختار لذلك عينة عشوائية طبقية مكوّنة من ٥٠ طالبًا من فصول الصف الأول المتوسط، و٥٠ طالبًا من فصول الثاني المتوسط، و٥٠ طالبًا من فصول الصف الثالث المتوسط. وأطرح عدة أسئلة على عينة الطلاب؛ لتقويم اتجاهاتهم نحو الحفل الختامي للمدرسة، وأعرض النتائج باستعمال التمثيل بالأعمدة، حيث يكون لكل سؤال لوحة أعمدة خاصة به.

١٦) قد ترغب بعض الشركات في خداع الجمهور بإظهار أن منتجهم هو الأفضل، وذلك من خلال عرض تمثيلات مضلّلة، وقد يتم ذلك من خلال تمثيل البيانات بالأعمدة باستعمال تدريج كبير، وترتيب البيانات فيه من الأصغر إلى الأكبر.

الربط مع الحياة

تعمل جمعية الهلال الأحمر السعودي على نقل المرضى والمصابين والجرحى، وتوفير الإسعافات العاجلة الطارئة، وعمل الدورات التدريبية في برامجها المختلفة، وتقديم الخدمات والمساعدات الطبية لحجاج بيت الله الحرام ورعايتهم صحيًا.

١٢) **تدريبات السلامة:** يعقد الهلال الأحمر دورات في السلامة مخصَّصة لطلاب المدارس المتوسطة والثانوية. سجَّل ٧٤٪ من المشاركين في برنامج السلامة البحرية، ١٠٪ في برنامج رعاية الأطفال، ١٦٪ في برنامج الإسعافات الأولية.

السؤال: هل يجب أن يستمر الهلال الأحمر في طرح برنامج رعاية الأطفال؟ استعمل البيانات في كتابة استنتاج عن دورات السلامة. انظر إجابات الطلاب وناقشها معهم.

١٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة طريقة أخرى لتحليل البيانات.

أ) حسيًا: تجد أدناه توزيعًا لقطع نقود في مجموعات غير متساوية. ضع قطع نقود على الطاولة في مجموعات مماثلة للصورة. انظر إجابات الطلاب.

ب) بيانيًا: مثّل هذه المجموعات بالنقاط، واكتب فوق كل عمود من النقاط الفرق بين عدد القطع في العمود والمتوسط الحسابي لعدد القطع في المجموعة الواحدة، ثم أوجد القيمة المطلقة لهذه الفروق. انظر الهامش

جـ) تحليليًا: حرّك القطع لتجعل المجموعات متساوية، بحيث تحرك قطعة واحدة كل مرة، وتحرك القطعة مرة واحدة فقط، وعُدّ الحركات. فيوضِّح ذلك مدى اختلاف المجموعات في الوضع الأصلي عنها في الوضع الجديد. ٨ حركات

د) تحليليًا: أوجد متوسط القيم المطلقة، وصف ما تمثّله هذه القيمة، ووضِّح معناها في هذه الحالة.

١٣د) ١,٧٨؛ متوسط الفرق المطلق للقيم عن المتوسط الحسابي (٥) يساوي ١,٧٨.

مسائل مهارات التفكير العليا

إجابة ممكنة: ٤، ٥، ٩

١٤) **تحدٍّ:** أوجد مجموعة من الأعداد يكون المتوسط الحسابي لها أكبر من الوسيط.

١٥) **مسألة مفتوحة:** صف دراسة مسحية ترغب في أن تجريها. وحدّد العينة والمجتمع والأسئلة وكيفية عرض النتائج. انظر الهامش

١٦) **اكتب:** اشرح لماذا قد تعرض إحدى الشركات نتائج الدراسة المسحية بصورة غير دقيقة. وأعطِ مثالاً للطريقة التي يمكن أن يتم بها ذلك. انظر الهامش

تدريب على اختبار

١٧) **إجابة قصيرة:** بيعت ١٠٠٠ تذكرة في مهرجان. ثمن التذكرة ١٥ ريالاً للكبار، و٨ ريالات للأطفال، فكانت حصيلة المبيعات ١٢٩٠٠ ريال، فما عدد تذاكر الأطفال المبيعة؟ ٣٠٠

١٨) إذا كانت ٤,٥ كيلومترات تعادل ٢,٨ ميل تقريبًا، فكم ميلًا تقريبًا يساوي ٦,١ كيلومترات؟ جـ

أ) ٣,٢ أميال
جـ) ٣,٨ أميال
ب) ٣,٦ أميال
د) ٤,٠ أميال

مراجعة تراكمية

غير متحيزة، منتظمة.

١٩) **كتب:** للتحقق من جودة الكتب التي تتمّ طباعتها يتم فحص الكتاب الخمسين من كل خمسين كتابًا تُطبع في المطبعة. حدّد العينة والمجتمع الذي اخترت منه، وهل هي متحيزة أم غير متحيزة؟ وإذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. (الدرس ١٠-١)

في السؤالين ٢٠-٢١ افترض أن ∆ أ ب جـ قائم الزاوية حادة في المثلث أ ب جـ، ثم أوجد: (الدرس ٩-٧)

٢٠) جتا أ، ظا أ إذا كان جا أ = $\frac{١}{٤}$

٢١) جا أ، جتا أ إذا كان ظا أ = $\frac{٥}{١٢}$ ٢٠-٢١ انظر إجابات الطلاب

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب مناقشة العوامل المقصودة وغير المقصودة التي يمكن أن تؤدي إلى أشكال عرض مضلّلة، ثم اطلب إليهم أن يدعموا ذلك بأمثلة لعروض مضللة، تحقق من أعمال الطلاب.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ١٠ - ٢

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٠) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٢-١٠ تدريبات إعادة التعليم
تحليل نتائج الدراسة المسحية

تلخيص نتائج الدراسة المسحية، لابد من تلخيص بيانات الدراسة المسحية كي تكون أكثر فائدة. ويمكنك تلخيص بيانات الدراسة المسحية باستعمال مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

النوع	الوصف	متى يفضّل استعماله
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسومًا على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد قيمات كثيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.	عندما يوجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

مثال أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وُجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلٍّ ممّا يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

أ) **مطاعم:** عدد الأشخاص الذين يطلبون الحساء على الغداء في كل يوم في أحد المطاعم على مدار ٦ أيام هو: ٢٥، ٢٦، ٣٠، ٣٢، ٢٧، ٢٨.

رتّب الأعداد تصاعديًا: ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٣٠، ٣٢. لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات، ولا توجد قيم متكررة. لذا فإن المتوسط الحسابي هنا هو مقياس النزعة المركزية الأنسب، لتمثيل هذه المجموعة من البيانات.

المتوسط الحسابي = $\frac{٢٥ + ٢٦ + ٢٧ + ٢٨ + ٣٠ + ٣٢}{٦}$

المتوسط الحسابي لهذه البيانات هو ٢٨

ب) **كرة قدم:** رصد فريق كرة قدم عدد الأهداف التي سجّلها في كل مباراة لعبها، فكانت:

٢، ٣، ١، ٢، ٤، ١، ٣، ٤، ٣، ١، ٣، ٤.

رتّب الأعداد تصاعديًا: ١، ١، ٢، ٢، ٣، ٣، ٣، ٣، ٤، ٤. تتكوّن مجموعة البيانات من أربع مجموعات من الأعداد المكررة. لذا فإنّ المنوال هو الأنسب لتمثيل هذه المجموعة من البيانات. ومنوال هذه البيانات هو ٣ لأنه الأكثر تكرارًا.

تمارين

أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وُجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلٍّ ممّا يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

١) **قطع معيبة:** عدد الوحدات المعيبة في الإنتاج اليومي لمصنع أثاث على مدار أسبوع هي:
٨، ١٤، ١٠، ٨، ٩، ١٢، ٧. **المتوسط الحسابي: ٩,٧ تقريبًا**

٢) **اختبارات علوم:** رصد معلم درجات طلاب الفصل في اختبار العلوم الأخير، فكانت:
٩٤، ٨٨، ٨٨، ٨٨، ٩٤، ٩٤، ٨٤، ٩٤، ٨٨، ٨٨، ٩٤، ٩٤. **المنوال: ٩٤**

٣) **مواليد:** رصد مستشفى ولادة أوزان المواليد بالكيلوجرامات في أحد الأيام، فكانت:
١، ٨، ٤، ٣، ٥، ٣، ٦، ٣، ٠، ٣، ٥، ٣، ٦، ٣، ٠، ٣، ٥، ٤، ٨، ١. **الوسيط: ٣,٦**

٤) **وسائل نقل،** أجرت صحيفة دراسة عن طريق هاتف لمعرفة وسيلة النقل التي يستعملها الناس للوصول إلى أعمالهم يوميًا:
الحافلة: ٢٢ سيارة الأجرة: ١١٧ سيارة الشركة: ١١٨ السير على الأقدام: ١١٥ السيارة الخاصة: ٢٢٤ **الوسيط: ١١٨**

تدريبات حل المسألة (١٢) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٢-١٠ تدريبات حل المسألة
تحليل نتائج الدراسة المسحية

١) **فواتير،** يسجّل ربّ أسرة المبالغ التي يدفعها شهريًا للفواتير الماء والكهرباء والهاتف. وقد بلغت قيمة هذه الفواتير للأشهر الستة الأولى من أحد الأعوام على النحو الآتي: ٧٦٨ ريالًا، ٧٦٨ ريالًا، ٨٢٢ ريالًا، ٧٦٨ ريالًا، ٧٦٨ ريالًا، ٨٢٢ ريالًا.

أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وُجدت) هو الأنسب لتمثيل هذه البيانات؟ برّر إجابتك، ثم احسب ذلك المقياس.

المنوال: توجد قيم متكررة كثيرة: ٧٦٨ ريالًا.

٢) **أسعار البنزين،** افترض أنّ إحدى الصحف أجرت دراسة شملت ١٥٣٤ شخصًا اختيروا عشوائيًا من أنحاء المملكة، وطُرح عليهم السؤال الآتي: هل ستقلّل استعمالك لسيارتك إذا ارتفعت أسعار البنزين؟ وقد أجاب ٦٧٪ من الأشخاص الذين يقل دخلهم السنوي عن ٥٠٠٠٠ ريال أنه سوف يقلّ استعمالهم لسياراتهم، في حين أجاب ٣٠٪ بأنهم لن يقللوا استعمالهم لسياراتهم. وبناء على هذه النتائج خلصت الصحيفة إلى استنتاج أنّ أفراد المجتمع مستعدون لترشيد استعمال سياراتهم إذا ارتفعت أسعار البنزين. حدّد صحة كلّ من المعلومات والاستنتاج لتقرير الدراسة.

قد لا تكون المعلومات صحيحة. لأن التقرير لا يذكر عدد هؤلاء الذين يقل دخلهم عن ٥٠٠٠٠ ريال من بين المشاركين في الدراسة. فقد يكون حجم العينة صغيرًا جدًا، وقد لا يكون الاستنتاج صحيحًا أيضًا لعدم وجود بيانات عن المجتمع عمومًا.

٣) **رياضة،** رصد عدّاء المسافات التي ركضها كل يوم على مدار أسبوع، استعدادًا للمشاركة في منافسة دولية، فكانت: ٩ كلم، ٨ كلم، ٦ كلم، ٥ كلم، ١١ كلم، ٧ كلم، ١٠ كلم.

أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وُجدت) هو الأنسب لتمثيل هذه البيانات؟ برّر إجابتك، ثم احسب ذلك المقياس.

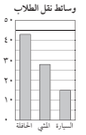
المتوسط الحسابي: لا توجد قيم متطرفة: ٨ كلم

٤) **وسائط نقل،** أجرت إدارة التعليم في إحدى المناطق استطلاعًا شمل ٨٦ طالبًا عن الطريقة التي يصل بها الطلاب إلى مدارسهم.

السؤال: ما واسطة النقل التي استعملتها للذهاب إلى المدرسة هذا اليوم؟

الاستنتاج: يستقلّ معظم الطلاب الحافلة للذهاب إلى المدرسة كل يوم.

وسائط نقل الطلاب



أ) حدّد صحة المعلومات.

قد لا يكون حجم العينة كافيًا لتمثيل المجتمع بصدق.

ب) حدّد صحة الاستنتاج.

بين التمثيل البياني أنّ الذين يسيرون على أقدامهم أو يستقلون السيارة أكثر من الذين يستقلون الحافلة، وإضافة إلى ذلك فليس واضحًا إذا كان الطلاب الذين استقلوا الحافلة لم ذلك اليوم يستقلونها كل يوم.

جـ) اكتب استنتاجًا صحيحًا من عندك، مستعملًا البيانات لتؤيد إجابتك.

ستتنوع الإجابات.

التدريبات الإثرائية (١٣) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٢-١٠ التدريبات الإثرائية
هامش الخطأ

من المهم عند إجراء دراسة مسحية أن تعرف مدى دقة البيانات التي تجمعها. ستتعرف فيما يأتي على دقة الدراسة المسحية بحساب **هامش الخطأ** أو الحد الأقصى لعدم التأكد في نتائج الدراسة. يجب تحديد مستوى الثقة أوّلًا عند حساب هامش الخطأ. يبيّن مستوى الثقة مدى صحة النسب المئوية المعطاة في الدراسة المسحية، على افتراض أن الأخطاء الموجودة هي أخطاء إحصائية فقط (أي أنه لا يوجد تحيز). تستعمل معظم الدراسات المسحية مستوى الثقة ٩٥٪، بمعنى أنه من المؤكد بنسبة ٩٥٪ أن تكون النسبة الصحيحة أكبر من النسبة المعطاة في الدراسة المسحية، أو أقل منها بمقدار لا يزيد على هامش الخطأ.

هامش الخطأ (عند مستوى الثقة ٩٠٪) = $\frac{١}{\sqrt{ن}}$

هامش الخطأ (عند مستوى الثقة ٩٥٪) = $\frac{٠,٩٨}{\sqrt{ن}}$

هامش الخطأ (عند مستوى الثقة ٩٩٪) = $\frac{٠,٨٢}{\sqrt{ن}}$

ن = عدد أفراد العينة

تفترض الحسابات السابقة أن عدد أفراد العينة ن أصغر من عدد أفراد المجتمع بدلالة إحصائية.

مثال **استطلاع آراء،** أظهرت دراسة مسحية لاستطلاع آراء ٣٠٠ من التجار المسجلين في إحدى المدن أنّ رئيس الغرفة التجارية الحالي متقدم على منافسه في انتخابات رئاسة الغرفة التجارية بفارق ٥٢٪ إلى ٤٨٪.

أوجد هامش الخطأ في هذا الاستطلاع عند مستوى الثقة ٩٥٪.

هامش الخطأ = $\frac{٠,٩٨}{\sqrt{ن}}$ صيغة هامش الخطأ عند مستوى الثقة ٩٥٪

= $\frac{٠,٩٨}{\sqrt{٣٠٠}}$ ن = ٣٠٠

= ٠,٠٥٧ بتبسط

هامش الخطأ في هذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٥٪ هو ٠,٠٥٧ أو ٥,٧٪، وهذا يعني أنه من المرجح بنسبة ٩٥٪ أن يكون التأييد لرئيس الغرفة التجارية الحالي بين ٤٦,٣٪ و ٥٧,٧٪.

١) **تذاكر،** أظهرت دراسة مسحية شملت ٦٠٠ من الشباب أنّ ٦٥٪ من أفراد العينة يعارضون زيادة أسعار تذاكر دخول حديقة الحيوانات. أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٠٪. **٥,٢٪**

٢) **إجازات،** أظهرت دراسة مسحية شملت ١١٠٠ شخص أنّ ٣٤٪ من أفراد العينة يخططون للسباحة الداخلية في هذا الصيف. أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٩٪. **٢,٥٪**

٣) **تعليم،** أظهرت دراسة مسحية شملت ٧٦٥ طالبًا في الصف الثالث الثانوي في إحدى المناطق التعليمية أنّ ٤٧٪ من أفراد العينة يخططون لمتابعة الدراسة الجامعية.

أ) أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٥٪. **٣,٥٪**

ب) اكتب المدى الذي تقع ضمنه نسبة الطلاب الذين يخططون لمتابعة الدراسة الجامعية في تلك المنطقة عند مستوى الثقة ٩٥٪ بصورة متباينة. **٤٣,٥٪ ≤ س ≤ ٥٠,٥٪**

٤) ما العدد التقريبي للأشخاص الذين يجب أن تشملهم الدراسة حتى يكون هامش الخطأ ± ١٪ عند مستوى الثقة ٩٥٪؟ **٩٦٠٤ أشخاص**

كتاب التمارين (٢٩) — دون ضمن فوق

١٠ - ٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية

أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هي الأنسب لتمثيل البيانات في كل ممّا يأتي؟ فسّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس.

١) **آلات حاسبة،** عدد الآلات الحاسبة البيانية مع طلاب الفصول المختلفة هي:
١٩، ٢٠، ٢٠، ١٨، ٢٠، ١٩، ١٨، ٢٠، ١٩، ١٨. **المنوال: ٢٠**

٢) **ميزانية،** سجّلت إحدى العائلات قيمة فواتير الكهرباء لعدد من الأشهر فكانت:
١٣٤ ريالًا، ١٢٢ ريالًا، ١٢٨ ريالًا، ١٢٧ ريالًا، ١٣٦ ريالًا، ١٢٠ ريالًا، ١٢٩ ريالًا.
المتوسط الحسابي: ١٢٨ ريالًا

٣) **صراف آلي،** تابع أحد البنوك عدد مستخدمي الصراف الآلي في كل ساعة، فكان:
٣٩، ٤٢، ٤٤، ١٢٠، ٥٤، ٤٨، ٤٣. **الوسيط: ٤٤**

حدّد صحة كلٍّ من المعلومات والاستنتاجات لتقرير كلّ دراسة مسحية فيما يأتي:

٤) **واجبات منزلية،** سأل مشعل ١٦ طالبًا من زملائه في قاعة المكتبة.
السؤال: هل يكلّف معلمو المدرسة الطلاب حل واجبات كثيرة؟
النتائج: نعم: ٩٤٪؛ لا: ٦٪.
الاستنتاج: يجب على معلمي المدرسة تقليل الواجبات التي يحددونها للطلاب. العينة ليست عشوائية؛ فقد تكون النتائج غير صحيحة، ويرد الطلاب أن تظهر النتائج بهذا الشكل، لذا قد تكون البيانات متحيزة

٥) **تدخين،** استطلعت صحيفة آراء ٥٠٠ من البالغين الذين تم اختيارهم عشوائيًا في منطقة الرياض.
السؤال: هل تؤيد منع التدخين في المطاعم والأماكن العامة المغلقة في منطقة الرياض؟
النتائج: نعم ٥٨٪، لا: ٤١٪، غير متأكد: ١٪
الاستنتاج: يجب منع التدخين في الأماكن العامة المغلقة في المملكة العربية السعودية.
تبدو البيانات صحيحة، وقد لا يكون الاستنتاج صحيحة؛ لأن الاستطلاع شمل منطقة واحدة فقط في المملكة.

حدّد إذا كانت طريقة تمثيل النتائج تعطي صورة صحيحة حول نتائج الدراسات المسحية، الآتية. وفسّر إجابتك.

٦) **دوام وظيفي،** أجرت مؤسسة إعلامية استطلاعًا شمل ٦٠٠ شخص تم اختيارهم عشوائيًا من موظفي القطاع العام.
السؤال: هل تؤيد أم تعارض تأخير بدء دوام الموظفين مدة ساعة؟
الاستنتاج: يؤيد موظفو القطاع العام تأخير بداية الدوام مدة ساعة.
التمثيل البياني مضلّل؛ لأن القطاعين معارض بشدة، ومؤيد بشدة، لهما اللون نفسه تقريبًا، وفي الحقيقة أكثر الموظفين يعارضون تأخير بدء الدوام لمدة ساعة.

٧) **طيور الزينة،** استطلع سعيد آراء مجموعة من الطلاب تم اختيارهم عشوائيًا من بين طلاب مدرسته، حول عدد طيور الزينة التي يملكونها. وسجّل النتائج، ومثّلها بالتمثيل البياني المجاور. استعمل البيانات في كتابة استنتاج حول عدد طيور الزينة التي يملكها الطلاب.
تتنوع الإجابات.

ملحوظات المعلم

٣-١٠ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

لماذا ؟

في بداية حصة الرياضيات طلب المدرس من كل طالب في الصف سحب ٩ قطع نقدية عشوائيًّا من وعاء فيه ١٠٠٠ قطعة نقد من فئة النصف ريال، ثم إعادتها للوعاء بعد حساب متوسط تواريخ إصدار هذه العينة من قطع النقد.

ما وجه المقارنة بين متوسط تواريخ إصدار القطع التسع ومتوسط إصدار جميع القطع النقدية الألف الموجودة في الوعاء؟

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع: تُستعمل في هذا الموقف إحصائيات العينة للتوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملًا. وهو ما يُسمى **الإحصاء الاستدلالي**. وفي الموقف المذكور أعلاه يسحب كل طالب عينة من قطع النقد من الوعاء، حيث تمثل قطع النقود الألف المجتمع. و**الإحصائي**: مقياس يصف إحدى خصائص العينة. أما **المَعْلَمَة** فهي مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع. ويتم تقدير معالم المجتمع بناءً على إحصائيات عينة عشوائية ممثلة. وتتغير قيمة الإحصائي عادة من عينة إلى أخرى إلا أن معلمة المجتمع تبقى ثابتة؛ لأنها تمثّل المجتمع كاملًا.

مثال ١ تعيين إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

عيّن العينة والمجتمع في كل من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع.

أ) اختيرت عينة عشوائية من إحدى الجامعات مكوّنة من ٤٠ من طالبي المنح الدراسية، ثم حُسب متوسط درجاتهم.

العينة : مجموعة الطلاب الأربعين المتقدمين بطلبات المنح الدراسية .
المجتمع : جميع الطلاب طالبي المنح الدراسية .
إحصائي العينة : متوسط درجات الطلاب الأربعين .
مَعْلَمة المجتمع : متوسط درجات جميع طالبي المنح الدراسية .

ب) اختيرت عينة عشوائية طبقية من الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الشرقية والغربية والوسطى، ثم حُسب وسيط رواتب هؤلاء الممرضين.

العينة : الممرضون الذين تم اختيارهم عشوائيًّا من جميع مستشفيات المناطق الثلاث.
المجتمع : جميع الممرضين العاملين في هذه المستشفيات في المناطق الثلاث.
إحصائي العينة : وسيط رواتب الممرضين في العينة.
مَعْلَمة المجتمع : وسيط رواتب جميع الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الثلاث.

تحقق من فهمك

١) **أغذية:** يتم اختيار عبوة عشوائيًّا من خط إنتاج أحد الأغذية المحفوظة، ثم يُؤخذ بدءًا من تلك العبوة، العبوات التي أرقامها من مضاعفات ٥٠، وتُوزن ويُحسب المنوال لعينة أوزان الإنتاج اليومي.

انظر ملحق الإجابات.

فيما سبق
درست تنظيم نتائج الدراسة المسحية وتلخيصها.

والآن
- أستعمل إحصائيات العينة لتحليل نتائج الدراسة المسحية.
- أحلّل البيانات باستعمال إحصائيات العينة.

المفردات
الإحصاء الاستدلالي
الإحصائي
المَعْلَمَة
البيانات الوحيدة المتغير
مقاييس التشتت
الانحراف المتوسط
الانحراف المعياري
التباين

obeikaneducation.com

ملاحظات الدرس ٣-١٠

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ١٠-٣
تنظيم نتائج الدراسة المسحية وتلخيصها.

الدرس ١٠-٣
استعمال إحصائيات العينة لتحليل نتائج الدراسة المسحية.
تحليل البيانات باستعمال إحصائيات العينة.

ما بعد الدرس ١٠-٣
نمذجة البيانات باستعمال منحنيات التوزيع.

٢ التدريس

أسئلة البناء
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا"؟ .

ثم اسأل:
- هل يختلف متوسط تواريخ إصدار عينات قطع النقد المختلفة التي يختارها الطلاب؟ اشرح إجابتك.
نعم؛ بما أن العينات عشوائية، فسوف يكون في كل عينة مجموعة مختلفة من تواريخ إصدار قطع النقد.
- كيف يختلف متوسط تواريخ إصدار عينة قطع النقد عن متوسط تواريخ إصدار قطع النقد جميعها؟
متوسط تواريخ إصدار العينات متغيّر، بينما متوسط تواريخ إصدار القطع النقدية جميعها ثابت لا يتغيّر.

مصادر الدرس ١٠ - ٣

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٧٣)	• تنويع التعليم ص (١٧٣)	
كتاب التمارين	ص (٣٠)	ص (٣٠)	ص (٣٠)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٤) • تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦)	• تدريبات حل المسألة، ص (١٦) • التدريبات الإثرائية، ص (١٧)

الإحصائيات ومعالم المجتمع

المثال ١ يُبيّن طريقة تعيين إحصائي العينة ومعلمة المجتمع.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

١ **عيّن العينة والمجتمع في كلٍّ من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع.**

أ) اختار مدير أحد المطاعم عينةً عشوائيةً مكوّنةً من ٥٠ طلبًا من طلبات التوصيل المجاني في أحد الأيام، وحسب الوسيط لقيم هذه الطلبات.

العينة: ٥٠ طلبًا من طلبات توصيل الطعام.

المجتمع: طلبات توصيل الطعام كلها في اليوم الذي اختيرت فيه العينة.

إحصائي العينة: وسيط قيم الطلبات في العينة.

معلمة المجتمع: وسيط قيم الطلبات جميعها في ذلك اليوم الذي اختيرت فيه العينة.

ب) اختيرت عينة عشوائية طبقية مكوّنة من شجرتين من كل نوع من الأشجار الموجودة في أحد المشاتل، وحُسب متوسط أطوال هذه الأشجار.

العينة: شجرتان من كل نوع من الأشجار الموجودة في المشتل.

المجتمع: الأشجار الموجودة في المشتل جميعها.

إحصائي العينة: متوسط أطوال أشجار العينة.

معلمة المجتمع: متوسط أطوال الأشجار الموجودة في المشتل جميعها.

التحليل الإحصائي: تُسمّى البيانات التي تتضمن متغيرًا واحدًا **بيانات وحيدة المتغير**. ويمكن التعبير عن هذه البيانات بمقاييس النزعة المركزية مثل المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. كما يمكن التعبير عنها أيضًا **بمقاييس التشتت** مثل المدى والربيعات والمدى الربيعي.

مفهوم أساسي — مقاييس التشتت — أضف إلى مطويتك

المقياس	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المدى	الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.	لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات.
الربيعات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.	لتحديد القيم الواقعة في الجزء الأعلى أو الجزء الأسفل من مجموع البيانات.
المدى الربيعي	مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات؛ وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.	لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات.

الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات. تذكّر أن القيمة المطلقة لعدد معين هي بعده عن الصفر على خط الأعداد.

مفهوم أساسي — الانحراف المتوسط — أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي.

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي.

الخطوة ٣: اقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات.

الربط مع الحياة

تؤكد الدراسات على أهمية قراءة الشباب للكتب المناسبة لمراحلهم العمرية، حيث تسهم في بناء معارفهم وتوسيع مداركهم، وتدريبهم على مهارات التواصل، وتنمي قدراتهم الإبداعيّة.

مثال ٢ — استعمال الانحراف المتوسط

قراءة: **سأل معلم طلابه عن عدد الكتب التي يقرؤونها أسبوعيًّا. وقد تلقّى الإجابات الآتية: ٢، ٢، ٣، ٤، ١٤. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.**

الخطوة ١: المتوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي ٥

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي.

$|٢ - ٥| + |٢ - ٥| + |٣ - ٥| + |٤ - ٥| + |١٤ - ٥| = ٣ + ٢ + ١ + ٩ = ١٨$

الخطوة ٣: اقسم المجموع على عدد القيم: $١٨ \div ٥ = ٣,٦$

تحقق من فهمك

٢) **تسويق:** رصد موزِّع عدد صناديق العصير اليومية التي بيعت فكانت: ١٢، ٣٢، ٣٦، ٤١، ٢٢، ٤٧، ٥١، ٣٣، ٣٧، ٤٩. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات. ٩

الانحراف المعياري هو القيمة التي تُحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. ويُرمز إليه بالرمز "ع". أما **تباين** مجموعة من البيانات فهو مربع الانحراف المعياري لتلك البيانات.

المحتوى الرياضي

مقاييس التشتت: تدل مقاييس التشتت على مدى انتشار البيانات، إذ يصف المدى انتشار القيم جميعها لمجموعة من البيانات، ويصف الربيعان والمدى الربيعي الانتشارَ في النصف الأوسط في مجموعة البيانات، ويصف الانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري الانتشارَ حول المتوسط الحسابي لمجموعة البيانات. وقد يكون لمجموعتين من البيانات المتوسط الحسابي والمدى نفساهما، ولكن انتشارهما حول المتوسط مختلف.

استعمل الطريقة المبينة أدناه لحساب التباين والانحراف المعياري.

إرشادات للدراسة

الرموز

يحسب المتوسط الحسابي للعينة وللمجتمع بالطريقة نفسها. وفي العادة يُرمز إلى متوسط العينة بالرمز $\overline{س}$، ولكن سوف يستعمل هذا الرمز في هذا الكتاب ليدل على متوسط المجتمع.

ملخص المفهوم — التباين والانحراف المعياري

أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$.

الخطوة ٢: أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لتحصل على التباين.

الخطوة ٣: أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

مثال ٣ — إيجاد التباين والانحراف المعياري

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة للأعداد ٣، ٦، ١١، ١٢، ١٣.

الخطوة ١: لإيجاد المتوسط الحسابي اجمع قيم البيانات، ثم اقسم المجموع على عددها.

$$\overline{س} = \frac{٣ + ٦ + ١١ + ١٢ + ١٣}{٥} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$

الخطوة ٢: لإيجاد التباين أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم.

$$ع^{٢} = \frac{(٣ - ٩)^{٢} + (٦ - ٩)^{٢} + (١١ - ٩)^{٢} + (١٢ - ٩)^{٢} + (١٣ - ٩)^{٢}}{٥}$$

$$= \frac{(-٦)^{٢} + (-٣)^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢}}{٥}$$

$$= \frac{٣٦ + ٩ + ٤ + ٩ + ١٦}{٥} = \frac{٧٤}{٥}$$

الخطوة ٣: الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$ع^{٢} = \frac{٧٤}{٥}$ — التباين

$ع = \sqrt{ع^{٢}} = \sqrt{\frac{٧٤}{٥}}$ — أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$ع \approx ٣,٨$ — استعمل الحاسبة

إذن المتوسط الحسابي ٩، والتباين $\frac{٧٤}{٥}$، والانحراف المعياري ٣,٨ تقريبًا.

تحقق من فهمك

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

أ) ٦، ١٠، ١٥، ١١، ٨ ٣,٠، ٩,٢، ١٠

ب) ٩٢، ٨٤، ٧١، ٨٣، ١٠٠ ٨٦، ٩٤، ٩,٧

إرشادات للدراسة

فئات البيانات

تُسمى البيانات الكمية باسم البيانات الناتجة عن القياس، وتُسمى البيانات النوعية باسم البيانات التصنيفية.

يمكن تفسير مدى انتشار البيانات من خلال الانحراف المعياري. فعلى سبيل المثال، إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ٣، فإن معظم قيم البيانات قريبة جدًّا من المتوسط الحسابي، أما إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ١٥، فإن هذه البيانات متباعدة ومنتشرة على مدى أوسع، وقد يكون من بينها قيم متطرفة.

التحليل الإحصائي

المثال ٢ يُبيّن طريقة إيجاد الانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات.

المثال ٣ يُبيّن طريقة إيجاد التباين والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات.

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال الحاسبة البيانية؛ لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة بيانات من واقع الحياة.

مثالان إضافيان

٢ أعمال خيرية: رصدت جمعية خيرية عدد العائلات التي قدّمت لها معونات مالية لعدد من الأشهر فكانت:

١٤، ١٨، ١٢، ١٧، ١٥، ٢٠

أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات. ٢,٣ تقريبًا

٣ أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري للأعداد:

٥، ٧، ٨، ١٤، ١٦

١٠؛ ١٨؛ ٢,٤ تقريبًا

تنويع التعليم:

دون ضمن

إذا أظهر الطلاب فهمًا لطريقة استعمال الانحراف المتوسط،

فاطلب إليهم وصف الطريقة التي يمكنهم بها استعمال الانحراف المتوسط للتنبؤ بالأخطاء. فعلى سبيل المثال، ماذا يعني أن يكون الانحراف المتوسط قيمةً صغيرةً أو قيمةً كبيرةً عند التنبؤ بعدد الكتب التي تشتريها مجموعة معينة من الناس في كل شهر؟ شجّع الطلاب على استعمال أمثلة لتبرير إجاباتهم.

مثال إضافي

٤ **رسائل إلكترونية:** رصد ناصر أعداد الرسائل الإلكترونية التي يرسلها كل شهر لمدة ٦ أشهر. أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة. حوالي ٨٤,١

الشهر	عدد الرسائل
المحرم	٩٨٥
صفر	١٠٠٥
ربيع الأول	١١٠٠
ربيع الآخر	٩٥٠
جمادى الأولى	١٢٠٠
جمادى الآخرة	١٠١٠

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١–٦؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

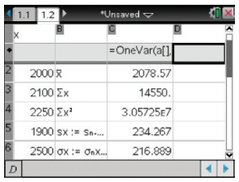
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: استعمل برمجية الجداول الإلكترونية أو أية برمجية أخرى لحساب الإحصائيات لمجموعة بيانات تم جمعها من دراسة مسحية. أبقِ هذه البيانات على السبورة في أثناء توضيح معناها وطريقة تفسيرها للطلاب.

مثال ٤ من واقع الحياة — التحليل الإحصائي

تغذية: يسجِّل خالد عدد السعرات الحرارية التي يتناولها كل يوم. أوجد الانحراف المعياري مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات الآتية:

اليوم	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد السعرات	١٨٠٠	٢٠٠٠	٢١٠٠	٢٢٥٠	١٩٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠



استعمل الآلة الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري. واضغط على المفاتيح (on) ثم أدخل كل قيمة من قيم البيانات في القائمة مع الضغط على (enter) بعد إدخال كل قيمة. ولإظهار قيمة الانحراف المعياري على الشاشة اضغط بالترتيب

(menu) ‹ 4:Statistics ‹ 1:Stat Calculations ‹ 1:One-Variable Statistics...،

فيكون الانحراف المعياري ٢١٦,٩ تقريبًا.

تحقق من فهمك

٤) رصد خالد استهلاكه من السعرات خلال أسبوع آخر فكان:

١٩٥٠، ٢٠٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠، ١٩٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠

أوجد الانحراف المعياري لاستهلاكه من السعرات في هذا الأسبوع. ٦٧,٨ تقريبًا

تأكد

مثال ١ **عيّن العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيين، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع:**

١) **تعليم:** اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة، وسُئلوا إن كانوا راغبين في دراسة الهندسة بالجامعة، ثم حُسبت النسبة المئوية للذين كانت إجاباتهم "نعم". انظر الهامش

٢) **كتب:** أُجريت دراسة شملت عينة مكوّنة من ١٠٠٠ طالب في الجامعات السعودية حول المبالغ التي ينفقونها في شراء الكتب الإضافية في كل عام، ثم حُسب المتوسط الحسابي لهذه المبالغ.

مثال ٢

٣) **عمل إضافي:** أحصى مدير أحد المصانع عدد ساعات العمل الإضافي لعمال أحد الأقسام في الأسبوع فكانت: ١٠، ١٢، ٠، ٦، ٩، ١٥، ١٢، ١٠، ١١، ٢٠. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة. ٣,٥

مثال ٣ **أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:**

٤) ٣، ٤، ١٨، ٢١، ١٧ ١٢,٦، ٠,٥٧، ٧,٦ ٥) ١٢، ١٥، ١٨، ٢١ ١٦,٥، ١١,٣، ٣,٤

مثال ٤

٦) **إلكترونيات:** أجرى محمود مسحًا لعدد الأجهزة الإلكترونية الموجودة في منزل كل واحد من زملائه في الفصل فكانت إجاباتهم: ٣، ١٠، ١١، ١٠، ٩، ١١، ١٢، ٨، ١١، ٨، ٧، ١٢، ١١، ١١، ٥. أوجد الانحراف المعياري مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات. ٢,٥

إجابات:

١) العينة ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة.
المجتمع: طلاب الصف الثالث الثانوي جميعهم في المدارس الثانوية في جدة.
إحصائي العينة: النسبة المئوية للطلاب الراغبين في دراسة الهندسة بالجامعة من طلاب العينة.
معلمة المجتمع: النسبة المئوية للطلاب الراغبين في دراسة الهندسة بالجامعة من كل طالب في الصف الثالث الثانوي في مدارس جدة الثانوية.

٢) العينة: ١٠٠٠ طالب من الجامعات السعودية.
المجتمع: طلبة الجامعات السعودية جميعهم.
إحصائي العينة: المتوسط الحسابي للمبالغ التي ينفقها طلبة العينة في شراء الكتب الإضافية.
معلمة المجتمع: المتوسط الحسابي للمبالغ التي ينفقها طلبة الجامعات السعودية في شراء الكتب الإضافية.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ عيّن العينة والمجتمع في كلٍّ من الموقفين الآتيتين، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع:

٧) اختيرت عينة عشوائية طبقية من طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير التعليمية، وسُئل أفراد العينة عن الوقت الذي يقضيه كلٌّ منهم في الأنشطة المنهجية الإضافية خلال الأسبوع.

٨) اختيرت عينة عشوائية طبقية مكوّنة من ٢٥٠٠ طالب من طلاب المدارس الثانوية في المملكة. وسُئل أفراد العينة عن المبلغ الذي ينفقه كلٌّ منهم في الشهر.

مثال ٢ أوجد الانحراف المتوسط مقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٩) **أقراص مدمجة:** طلب مدرس إلى طلاب الصف أن يحدِّدوا عدد الأقراص المدمجة التي يمتلكونها.

عدد الأقراص المدمجة					
٢٦	٣٩	٥	٨٢	١٢	١٤
٠	٣	١٥	١٩	٤١	٦
٢	٠	١١	١	١٩	٢٩

١٠) **مبيعات:** رصد صاحب محل عدد الأكياس التي تُباع في كل ساعة من أحد أنواع الحلوى، فكانت:
١٦، ٢٤، ١٥، ١٧، ٢٢، ١٦، ١٨، ٢٤، ١٧، ١٣، ٢٥، ٢١

مثال ٣ أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

١١) ٣، ٨، ٧، ١٢

١٢) ٧٦، ٧٨، ٨٣، ٧٤، ٧٥

مثال ٤ ١٣) **مزاد:** يرسم نجيب لوحات تحمل مناظر طبيعية ويعرضها للبيع في المزاد. فكان ثمن بيع بعض هذه اللوحات: ٣٢٥ ريالًا، ٤٥٠ ريالًا، ٥٠٠ ريالٍ، ٥٧٥ ريالًا، ٢٢٥ ريالًا، ٨٥٠ ريالًا، ٦٠٠ ريالٍ، ٣٥٠ ريالًا، ٤٥٠ ريالًا، ٥٠٠ ريالٍ. أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

١٤) **كرة السلة:** يبيِّن الجدول المجاور أطوال لاعبي فريق كرة السلة في أحد الأندية الرياضية بالسنتمترات.

أطوال لاعبي فريق كرة السلة				
٢٠٣	١٩٦	٢١١	١٨٨	١٩٨
٢٠٣	٢١١	١٨٨	٢١١	١٧٥
١٩٨	٢١٦	٢٠٦	٢٠٦	٢٠١

أ) أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للأطوال.

ب) إذا غيَّرنا اللاعب الذي طوله ١٧٥ سم بلاعب طوله متر وسبعون سنتمترًا، فأوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري. وصف أثر هذا التبديل في النتائج السابقة.

الربط مع الحياة

يبلغ طول أطول لاعبي كرة السلة في المملكة ٢٠٨ سم.

مسائل مهارات التفكير العليا

١٥) **اكتشف الخطأ:** تصف كلٌّ من سحر ورغد طريقة لزيادة دقة دراسة مسحية، فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سحر
يجب أن تشتمل الدراسة المسحية على أكبر عدد ممكن من أفراد المجتمع.

رغد
يجب اختيار عينة الدراسة المسحية عشوائيًا، ويجب أن تُؤخذ عدة عينات عشوائية.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: اطلب إلى الطلاب مناقشة العوامل التي تجعل الدراسة المسحية ممثّلة للمجتمع، ثم اطلب إليهم تحليل الوصفين اللذين قدمتهما سحر ورغد في السؤال ١٥. شجّع الطلاب على تقديم أسباب محدّدة لاعتقادهم أن الوصف الذي قدّمته الطالبتان يعمل أو لا يعمل على زيادة دقة الدراسة المسحية.

إجابات:

٧) العينة: عينة عشوائية طبقية من طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير التعليمية.
المجتمع: طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير جميعهم.
إحصائي العينة: الوقت الذي يقضيه أفراد العينة في الأنشطة المنهجية الإضافية.
معلمة المجتمع: الوقت الذي يقضيه كل طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير في الأنشطة المنهجية الإضافية.

٨) العينة: عينة عشوائية طبقية مكوّنة من ٢٥٠٠ طالب من طلاب المدارس الثانوية في المملكة.
المجتمع: طلاب المدارس الثانوية في المملكة جميعهم.
إحصائي العينة: المبلغ الذي ينفقه كل واحد من أفراد العينة في الشهر.
معلمة المجتمع: المبلغ الذي ينفقه كل طالب من طلاب المدارس الثانوية في المملكة في الشهر.

٩) أقراص مدمجة: ٤,٢ ≈ ٤,٢٠٠؛ ١١,٤ ≈ نقص المتوسط الحسابي وزاد الانحراف المعياري.

١٠) مبيعات: ٥,٣

١١) ٣، ٣، ٥، ٧، ٢، ١٠، ٢، ٣

١٢) ٢,٧٧، ٢,٢، ٣,٢

١٣) ١٦٤,٠

١٤) أ) ٢٠٠,٧؛ ١٠,٥ تقريبًا

ب) ٢٠٠,٧؛ ١٠,٥ تقريبًا

١٥) كلا الإجابتين صحيحة، إذْ إن الطريقة التي ذكرتها كل من سحر ورغد تؤدي إلى زيادة دقة الدراسة المسحية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٧ – ١٣، ١٥، ١٧ – ٢٥
ضمن ضمن المتوسط	٧ – ١٣ (فردي)، ١٤، ١٥، ١٧ – ٢٥
فوق فوق المتوسط	١٤ – ٢٣

٤ التقويم

تعلّم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة جملة توضّح كيف ساعدهم الدرس السابق حول تلخيص وتحليل نتائج الدراسات المسحية، على تعلّم الدرس الحالي عن إحصائيات العينة ومعالم المجتمع.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (١٠-٣) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٢)، ص (٨٧)

اختبر مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في النصف الأول من الفصل بإعطائهم:

اختبار منتصف الفصل، ص (٨٩)

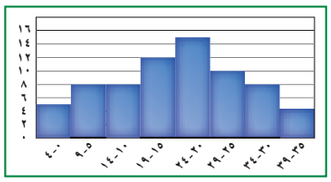
إجابات:

١٩) هما قيمتان إحصائيتان تُبيّنان درجة انحراف كل قيمة عن المتوسط الحسابي لمجموعة البيانات، ويُحسب الانحراف المتوسط بإيجاد متوسط القيم المطلقة للفروق بين كل عدد والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات. ولإيجاد الانحراف المعياري تُربّع كل الفروق، ثم يتم إيجاد الجذر التربيعي لمتوسط هذه المربعات.

١٧) غير صحيحة إطلاقًا. فإذا كانت العينات عشوائية حقًا فلن تحتوي عادة على العناصر نفسها، وكذلك سيكون المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة الأولى مختلفين عن نظيريهما للعينة الثانية.

١٨) إجابة ممكنة: لإيجاد متوسط دخل الأسرة في المملكة تؤخذ عينة عشوائية طبقية مكوّنة من ١٠٠٠ أسرة من مختلف مناطق المملكة.

١٦) **تحدٍّ:** أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجتمع البيانات الممثّلة بالمدرج التكراري المجاور. ٨,٧٥؛ ٣,٦



١٧) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا، وفسّر إجابتك:

"العينتان العشوائيتان المأخوذتان من المجتمع نفسه لهما المتوسط الحسابي والانحراف المعياري نفساهما".

١٨) **مسألة مفتوحة:** صف موقفًا من واقع الحياة يكون من المفيد فيه استعمال متوسط العينة لتقدير متوسط المجتمع. وصف طريقة اختيار عينة عشوائية من هذا المجتمع.

١٩) **اكتب:** قارن بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

٢٠) **إجابة قصيرة:** زارت مجموعة من الطلاب مبنى التلفزيون، فدخل ٢٠ طالبًا منهم إلى قسم الأخبار. فإذا شكّل هؤلاء الطلاب ١٦٪ من مجموعة الطلاب، فما عدد أفراد المجموعة؟ ١٢٥

٢١) أطوال أعلى ٧ أشجار في حديقة هي: ١٩، ٢٤، ١٧، ٢٦، ٢٤، ٢٠، ١٨ قدمًا. أوجد الوسيط لهذه الأطوال؟ ب

أ) ١٧ ج) ٢١

ب) ٢٠ د) ٢٤

مراجعة تراكمية

أيُّ مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلٍّ ممَّا يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة هذا المقياس: (الدرس ١٠-٢)

٢٢) **جمعيات النشاط:** كانت أعداد طلاب أحد الصفوف قد وُزِّعت على جمعيات النشاط على النحو الآتي:

٨، ١٢، ١٨، ٢٥، ٢١، ٥، ١٠، ١٤. الوسيط؛ لا يوجد فجوات كبيرة بين الأعداد؛ ١٣.

٢٣) **درجات اختبار:** كانت درجات بعض الطلاب في مادة الرياضيات على النحو الآتي: ٧٨، ٨١، ٨٥، ٨٦، ٨٨، ٨٥، ٩٠، ٩١، ٨٥، ٩٥، ٩٨. المنوال، تكررت قيمة واحدة؛ ٨٥

حدِّد في كلٍّ ممَّا يأتي، هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ وبرِّر إجابتك: (الدرس ١٠-١)

٢٤) **تسوّق:** طُلب إلى كل عاشر شخص يدخل إلى مجمع تجاري أن يُسمّي المتجر المفضل لديه.

غير متحيزة؛ يتم اختيار الأشخاص عشوائيًا، ولا يوجد دليل على التأثير.

٢٥) **رياضة:** سُئل كل خامس شخص في مهرجان رياضي عن القناة التلفزيونية التي يفضلها.

متحيزة؛ لأنهم موجودون في مهرجان رياضي، فالأكثر احتمالًا أن يختاروا قناة رياضية.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ١٠ - ٣

دون المتوسط — ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٤) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٣-١٠ تدريبات إعادة التعليم

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع: الإحصائي مقياس يصف إحدى خصائص العينة. والمُعْلَمة مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع. وتعتبر قيمة الإحصائي عادة من عينة إلى أخرى، إلا أنّ معلمة المجتمع تبقى ثابتة لأنها تمثل المجتمع كاملًا.

مثال عيّن العينة والمجتمع في كلٍّ من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومُعْلَمة المجتمع:

أ) اختبرت عينة عشوائية مكوّنة من ٥٠ متسوقًا في سوق تجاري، ثم حُسب الوسيط للمبالغ التي أنفقها أفراد العينة في ذلك السوق.

العينة: المجموعة المكوّنة من ٥٠ متسوقًا.

المجتمع: جميع المتسوقين الموجودين في السوق التجاري.

إحصائي العينة: وسيط المبالغ التي أنفقها أفراد العينة في السوق التجاري.

معلمة المجتمع: وسيط المبالغ التي أنفقها جميع المتسوقين الموجودين في السوق التجاري.

ب) تُوخذ أريكة من خط الإنتاج كل ٢٠ دقيقة في مصنع لإنتاج الأثاث، وتُفحص للكشف عن العيوب، ثم يُحسب المتوسط الحسابي لعدد الأرائك المعيبة في الإنتاج اليومي للمصنع.

العينة: الأرائك التي تُفحص للكشف عن العيوب.

المجتمع: جميع الأرائك التي ينتجها المصنع.

إحصائي العينة: المتوسط الحسابي لعدد الأرائك المعيبة في العينة.

معلمة المجتمع: المتوسط الحسابي لعدد الأرائك المعيبة من إنتاج المصنع كاملًا.

تمارين

عيّن العينة والمجتمع في كلٍّ من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومُعْلَمة المجتمع:

١) **مطقس،** جهزت دائرة الأرصاد الجوية عشر محطات رصد لقياس كميات الأمطار الساقطة في مواقع مختلفة في إحدى المناطق، ثم حُسب الوسيط لكميات الأمطار السنوية في هذه المواقع.

العينة: ١٠ محطات رصد؛ المجتمع: جميع مواقع المحطات؛ إحصائي العينة: وسيط كميات الأمطار السنوية في محطات الرصد العشرة؛ معلمة المجتمع: وسيط كميات الأمطار السنوية في جميع مواقع المحطات.

٢) **علم النبات،** اختار عالِمٌ ٢٠ شجرة عشوائيًا في غابة، ثم حسب المتوسط الحسابي لارتفاعات هذه الأشجار العشرين.

العينة: ٢٠ شجرة؛ المجتمع: جميع الأشجار في الغابة؛ إحصائي العينة: متوسط ارتفاع أشجار العينة؛ معلمة المجتمع: متوسط ارتفاع أشجار الغابة.

٣) **بحوث،** أجرى باحث امتحانًا في الرياضيات لطلاب الصف الثالث المتوسط في ٢٥ مدرسة في منطقة الرياض، ثم حسب المتوسط الحسابي لعدد الناجحين في هذا الامتحان في المدارس الخمسة والعشرين.

العينة: طلاب الثالث المتوسط في المدارس الخمسة والعشرين المختارة.

المجتمع: جميع طلاب الثالث المتوسط في منطقة الرياض التعليمية.

إحصائي العينة: متوسط عدد الناجحين في الامتحان في كافة المدارس التي يوجد فيها الصف الثالث المتوسط في منطقة الرياض.

تدريبات حل المسألة (١٦) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٣-١٠ تدريبات حل المسألة

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

١) **العمرة،** يخطط صالح لأداء العمرة. وقد اختار ٥ شركات عشوائيًا من الشركات التي تنقل المعتمرين برًا، حيث استفسر منها عن تكلفة رحلة العمرة، ثم حسب الوسيط للأسعار التي حددتها هذه الشركات الخمس.

أ) عيّن العينة والمجتمع في هذا الموقف.

العينة: الشركات الخمسة التي اختيرت؛ المجتمع: جميع الشركات التي تنقل المعتمرين برًا.

ب) صف إحصائي العينة ومُعْلَمة المجتمع.

إحصائي العينة: وسيط أسعار تكلفة رحلة العمرة للشركات الخمس.

معلمة المجتمع: وسيط أسعار تكلفة رحلة العمرة لجميع الشركات التي تنقل المعتمرين برًا.

٢) **إجازة صيفية،** أجريتْ دراسة مسحية شملت طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المدارس حول خططهم في الإجازة الصيفية، ومُثلت النتائج بالقطاعات الدائرية الآتية:

أوجد الانحراف المتوسط لنتائج هذه الدراسة.

١٦,٤

٣) **كرة قدم،** رصد فريق كرة قدم عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة لعبها، فكانت: ٢، ٤، ٣، ٠، ٢، ٧.

أ. أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

$\bar{س} = ٣$ ، $\sigma^٢ = \frac{٤٦}{٦} = ٧,٦٦$ ، $\sigma \approx ٢,٧٦$

٤) **اكتشف الخطأ،** يدرس ماجد وسلطان استعدادًا لامتحان الإحصاء. يقول ماجد إنّ التباين لمجموعة من البيانات يكون دائمًا أكبر من الانحراف المعياري لها، ولكنّ سلطان لا يوافقه على ذلك، ويقول إنّ الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات قد يكون أكبر من تباين هذه المجموعة. فأيهما على صواب؟ اشرح إجابتك.

سلطان؛

إجابة ممكنة: عندما تكون مفردات البيانات قريبة جدًا بعضها من بعض فإنّ الانحراف المعياري يكون أكبر من التباين. فمثلًا، التباين للأعداد: ٠,٥، ٠,٥، ٠,٥، ٠,٥، ٠,٥ يساوي ٠,٠ والانحراف المعياري يساوي ٠,٠

٥) **مراكز لياقة،** اختار أحد مراكز اللياقة ٨ أشخاص عشوائيًا من بين المشتركين الدائمين، لمعرفة نوع الأجهزة التي يتعين عليه شراؤها في المستقبل، وسجّل عدد الدقائق التي يقضيها كل منهم على جهاز الجري، فكانت: ٣٠، ٣٠، ٤٥، ٢٠، ٦٠، ٣٠، ٣٠، ١٥.

ثم حسب المتوسط الحسابي لهذه الأزمنة.

أ) عيّن العينة والمجتمع في هذا الموقف، ثم صف إحصائي العينة ومُعْلَمة المجتمع.

العينة: ٨ أشخاص من المشتركين الدائمين في المركز الذين يستعملون جهاز الجري؛ المجتمع: جميع المشتركين الدائمين الذين يستعملون جهاز الجري؛ إحصائي العينة: المتوسط الحسابي للأزمنة التي يقضيها أفراد العينة على جهاز الجري؛ معلمة المجتمع: المتوسط الحسابي للأزمنة التي يقضيها جميع المشتركين الدائمين على جهاز الجري.

ب) أوجد إحصائي العينة الوارد في الفرع (أ).

٢٢,٥ دقيقة

جـ) أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات.

١٠

د) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

$\sigma^٢ = ٤٠٧٥$ ، $\sigma \approx ١٣,٢٣$

التدريبات الإثرائية (١٧) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٣-١٠ التدريبات الإثرائية

الخطأ المعياري وحدود فترات الثقة

لقد تعلمت الانحراف المعياري الذي يقيس بصورة أساسية مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. كما يوجد مقياس أساسي آخر في الإحصاء وهو **الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي**، ويصف مدى عدم التأكد من تمثيل المتوسط الحسابي للعينة للمتوسط الحسابي للمجتمع. ويُعطى بالمعادلة الآتية:

$خ_{\bar{س}} = \frac{خ}{\sqrt{ن}}$ ، حيث خ الانحراف المعياري، ن عدد أفراد العينة.

وتشير معادلة الخطأ المعياري إلى أنه كلما كان حجم العينة أكبر، كان الخطأ المعياري أصغر. ويُعطى الخطأ المعياري غالبًا بصورة نسبتين مئويتين تُسمّيان حدّي فترة الثقة.

حدّا فترة الثقة عند المستوى ٩٥٪ هما: $\bar{س} \pm ١,٩٦ \, خ_{\bar{س}}$

حدّا فترة الثقة عند المستوى ٩٩٪ هما: $\bar{س} \pm ٢,٥٨ \, خ_{\bar{س}}$

مثال **الانحراف المعياري لأوزان حبات التفاح في إحدى المزارع يساوي ٠,٨ أونصة. والمتوسط الحسابي لأوزان حبات التفاح في عينة من ٢٥ تفاحة يساوي ٥,٢ أونصة. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند المستوى ٩٩٪.**

أولًا، أوجد الخطأ المعياري.

$خ_{\bar{س}} = \frac{خ}{\sqrt{ن}} = \frac{٠,٨}{\sqrt{٢٥}} = ٠,١٦$

ثم استعمل معادلة فترة الثقة السابقة.

حدّا فترة الثقة عند المستوى ٩٩٪ هما: $\bar{س} \pm ٢,٥٨ \, خ_{\bar{س}}$

$= ٥,٢ \pm ٢,٥٨ \times (٠,١٦) = ٥,٢ \pm ٠,٤١٢٨$

لذا فترة الثقة عند المستوى ٩٩٪ تكون من ٤,٧٨٧٢ إلى ٥,٦١٢٨ أونصة. وهذا يعني أننا متأكدون بنسبة ٩٩٪ من أنّ المتوسط الحسابي للمجتمع يقع في هذه الفترة.

أوجد الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي لكلٍّ من مجموعات البيانات الآتية:

١) {٣١٥,٣٢٦,٢٩٣,٣٠١,٣١٣,٣٠٦} ٢) ٠,٥٠، ٠,٤٣، ٠,٢٧، ٠,٦٤، ٠,٦٢، ٠,٦٠

٤,٢١ تقريبًا **٠,٠٥٢ تقريبًا**

٣) **جينة،** يحفظ أحد المتاجر عبوات الجبنة الطازجة في صناديق مبرّدة، وأوزان ٩ من هذه العبوات (بالأونصات) هي: ١٤، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧، ١٢، ١٦، ١٤، ١٩، ١٥

أ) أوجد الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات. **٠,٧٢ تقريبًا**

ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند المستوى ٩٥٪. **من ١٣,٥٩ إلى ١٦,٤١ تقريبًا**

٤) **حضانة أطفال،** الانحراف المعياري لأعمار الأطفال في إحدى الحضانات يساوي ١,٢ سنة، والمتوسط الحسابي لأعمار عينة مكوّنة من ٩ أطفال في هذه الحضانة يساوي ٧,٤ سنوات.

أ) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند مستوى الثقة ٩٥٪. **من ٦,٦١٦ إلى ٨,١٨٤ تقريبًا**

ب) ما عدد الأطفال الذين يجب أن تشملهم العينة حتى نكون متأكدين بنسبة ٩٥٪ من أنّ الخطأ في تقدير المتوسط هو ±٠,٥ سنة؟ **٢٣ طفلًا على الأقل**

كتاب التمارين (٣٠) — دون ضمن فوق

١٠ - ٣ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

عيّن العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيين، ثم صف إحصائي العينة و معلمة المجتمع:

١) **هندسة،** اختار مهندس مدني عشوائيًا ٥ تقاطعات عليها إشارات ضوئية في مدينة الدمام،وحسب وسيط مدة الضوء الأحمر على هذه التقاطعات.

العينة: ٥ تقاطعات عليها إشارة ضوئية. المجتمع: تقاطعات المدينة جميعها التي عليها إشارات ضوئية

إحصائي العينة: وسيط مدة الضوء الأحمر في العينة؛ المعلم: وسيط مدة الضوء الأحمر في كل تقاطعات المدينة.

٢) **كرة قدم،** اختارت مؤسسة بحثية ١٠ مباريات من مباريات دوري أبطال آسيا التي لعب فيها أحد الفرق المشهورة. وحسب الوسيط لعدد الحضور في هذه المباريات العشر.

العينة: المباريات العشر التي تم اختيارها.

المجتمع: المباريات جميعها التي لعب فيها هذا الفريق المشهور.

إحصائي العينة: وسيط عدد الحضور في المباريات العشرة المعلم: وسيط عدد الحضور للمباريات جميعها التي لعبها هذا الفريق.

أوجد الانحراف المتوسط، لكل مجموعة من البيانات الآتية:

٣) **كرة سلة،** سُجّلت النقاط التي أحرزها أحد فرق كرة السلة فكانت:

٧٨، ٨١، ٨٦، ٧٧، ٧٥. ٣,٢٨

٤) **طقس،** سجّل راصد جوي عدد العواصف الرعدية التي وقعت في كل شهر في إحدى المناطق فكانت:

٤٠، ٧، ١، ٣٥، ٢٠٥. ١,٨٨ تقريبًا

أوجد المتوسط الحسابي، والتباين، والانحراف المعياري مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة، لكل من مجموعات البيانات الآتية:

٥) {٦، ١١، ١٦، ٩} $\bar{س} = ١٠,٥$ ، $\sigma^٢ = \frac{٣٢}{٤}$ ، $ع = ٢,٨$

٦) {٤، ١١، ٨، ٥، ٢} $\bar{س} = ٦$ ، $ع^٢ = ١٠$ ، $ع \approx ٣,١٦$

٧) {٤، ٢٣، ٨، ١٦، ٧، ٩، ١، ٢٢} $\bar{س} = ١٠,٨$ ، $ع^٢ = ٢٩,٠٧٥$ ، $ع \approx ٥,٣٩$

٨) {١، ٠، $\frac{٥}{٤}$، ٤٤، $\frac{١١}{٤}$، ١، ٣٠} $\bar{س} = ٢,٧٥$ ، $ع^٢ = \frac{١٢٩}{١٨}$ ، $ع \approx ١,٧٠$

٩) {١٤٥، ١٦٦، ١٧١، ١٥٠، ٨٨} $\bar{س} = ١٤٤,٠$ ، $ع^٢ = ٨٧٧,٢$ ، $ع \approx ٢٩,٦٢$

١٠) {١٣، ٢٤، ٢٢، ١٧، ١٤، ٢٩، ١٥، ٢٢} $\bar{س} = ١٩,٥$ ، $ع^٢ = ٢٧,٧٥$ ، $ع \approx ٢,٥٧$

ملحوظات المعلم

التباديل والتوافيق

لماذا ؟

أخبر المدرّبُ نوافَ أنه سيكون خامس لاعب يضرب ركلة الترجيح، إذا انتهت المباراة إلى ضربات الترجيح.

واعتمد المدرب الترتيب الأبجدي أساسًا في تشكيل الفريق؛ لترتيب من يقوم بركلات الترجيح.

التباديل: تُسمى قائمة جميع الأشخاص أو الأشياء في مجموعة معينة **فضاء العينة**. وعندما تُنظّم العناصر، بحيث يكون ترتيبها مهمًّا، وتُكتب جميع التراتيب الممكنة لهذه العناصر، يُسمَّى كلٌّ من هذه التراتيب **تبديلًا**.

إذا كان في ذهن المدرب ٤ لاعبين لضرب ركلات الترجيح الأربع الأولى، فإنه يمكن استعمال مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد التباديل الممكنة لهؤلاء الأربعة. فإذا اختير لاعب معين ليكون أول من يضرب، فلن يكون اسمه مطروحًا عند اختيار اللّاعب الثاني؛ لأنه لا يمكن أن يضرب اللاعب ركلة الترجيح مرتين.

عدد التباديل		عدد خيارات اللاعب الأول		عدد خيارات اللاعب الثاني		عدد خيارات اللاعب الثالث		عدد خيارات اللاعب الرابع
ل	=	٤	×	٣	×	٢	×	١

= ٢٤

هناك ٢٤ طريقة ممكنة لترتيب أول أربعة لاعبين.

مثال ١ من واقع الحياة — التباديل

رحلات: تخطّط وكالة سياحة وسفر لرحلة سياحية، يزور المسافرون خلالها ٥ مدن في المملكة. بكم طريقة يمكن أن ترتب الوكالة المدن الخمس في خطة الرحلة؟

عدد طرق ترتيب المدن = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

هناك ١٢٠ طريقة ممكنة لترتيب المدن الخمس.

تحقق من فهمك

١) **محاضرات:** دخل ناصر وخمسة من أصدقائه قاعة محاضرات. فبكم طريقة مختلفة يمكنهم أن يجلسوا جميعًا على ٦ مقاعد خالية في صفٍّ واحدٍ؟ ٧٢٠

يمكنك أن تكتب العبارة المستعملة في المثال ١؛ لحساب عدد التباديل للمدن الخمس (٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١) في صورة ٥! وتُقرأ "مضروب العدد خمسة".

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **مضروب** العدد الصحيح الموجب (ن)، هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن (ن) أو تساويه.

الرموز: ن! = ن (ن – ١) (ن – ٢) (ن – ٣) × ... × ١، ن ≤ ١، أيضاً ٠! = ١

فيما سبق

درست استعمال مبدأ العد الأساسي.

والآن

- أستعمل التباديل.
- أستعمل التوافيق.

المفردات

فضاء العينة
التبديل
المضروب
التوافيق

obeikaneducation.com

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ١٠-٤

استعمال مبدأ العد الأساسي.

الدرس ١٠-٤

استعمال التباديل.

استعمال التوافيق.

ما بعد الدرس ١٠-٤

إيجاد احتمالات الحوادث المركّبة.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ثم اسأل:

- هل يمكن أن يُكتب اسم اللاعب مرتين في تسلسل الذين يضربون ركلات الترجيح؟ لا
- عندما يختار المدرب مجموعة من اللاعبين للعب في مباراة معينة، فهل يكون ترتيب اختيارهم مهمًّا؟ لا

مصادر الدرس ١٠ - ٤

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٧٩)	• تنويع التعليم ص (١٧٩، ١٨٢)	• تنويع التعليم ص (١٨٢)
كتاب التمارين	ص (٣١)	ص (٣١)	ص (٣١)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (١٨) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٠) • التدريبات الإثرائية، ص (٢١)

إذا كان في ذهن المدرب ٥ لاعبين لضرب ركلات الترجيح الثلاث الأولى، فإنه يمكنك استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد التباديل.

طرق اختيار اللاعب الأول		طرق اختيار اللاعب الثاني		طرق اختيار اللاعب الثالث	
٥	×	٤	×	٣	= ٦٠ تبديلًا

لاحظ أن: $٥ \times ٤ \times ٣ = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢}$؛ ويمكنك تعميم هذه العلاقة بالقانون الآتي:

قراءة الرياضيات

رموز

يمكن كتابة عدد التباديل لعناصر عددها ن، مأخوذة راءً في كل مرة بالرمز ${}^{ن}ل_{ر}$ أو ل(ن، ر).

مفهوم أساسي — قانون التباديل

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: عدد التباديل لعناصر عددها (ن) مأخوذة (ر) عنصرًا في كل مرة هو ناتج قسمة ن! على (ن – ر)!

الرموز: ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

مثال ٢ من واقع الحياة — استعمال قانون التباديل

مكتبة: يريد أمين المكتبة أن يعرض ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة على رفٍّ. فبكم طريقة يمكنه ذلك؟

${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$	قانون التباديل
${}^{١٠}ل_{٦} = \frac{!١٠}{(١٠ - ٦)!}$	ن= ١٠، ر=٦
$= \frac{!١٠}{!٤}$	بسّط
$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$	اقسم على العوامل المشتركة
= ١٥١٢٠٠	بسّط

تحقق من فهمك

٢) **لوحات:** رسم فنان ١٥ لوحة فنية. فبكم طريقة يمكنه اختيار ١٠ لوحات منها لعرضها في معرض فني. ١٠٨٩٧٢٨٦٤٠٠

التوافيق: يُسمّى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية **التوافيق**. ولإيجاد التوافيق المكوّنة من حرفين من بين الحروف أ، ب، جـ يجب أن تكتب جميع التراتيب التي يتكون كلٌّ منها من حرفين وهي:

أ ب ب أ أ جـ جـ أ ب جـ جـ ب

وبما أن الترتيب غير مهم في التوافيق، فإن أب وَ ب أ يمثّلان الاختيار نفسه. أيْ أن هناك ٢! طريقة لكتابة الحرفين من دون ترتيب؛ لذا اقسم عدد التباديل ${}^{ن}ل_{ر}$ على ٢! لحذف عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها.

إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

إذا كان الترتيب مهمًّا في المجموعة، فإنها تمثّل تبديلًا. وإذا لم يكن الترتيب مهمًّا في المجموعة فإنها تمثّل توفيقًا.

التباديل

المثال ١ يُبيّن طريقة استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد التباديل.

المثال ٢ يُبيّن طريقة استعمال قانون التباديل لإيجاد عدد التباديل.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

١ **رموز:** تتكوّن كلمة المرور التي يستعملها خليل للدخول إلى بريده الإلكتروني من الأعداد الزوجية (٢، ٤، ٦، ٨)، ويستعمل كل رقم منها مرة واحدة فقط. ما عدد كلمات المرور التي يمكن أن يكوّنها خليل؟ ٢٤

٢ **رموز:** تتطلّب إحدى برمجيات معالجة النصوص من المستخدم، إدخال رمز تسجيل مكوّن من ٥ أرقام يتم اختيارها من الأرقام (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧) على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط. فما عدد رموز التسجيل الممكنة؟ ٢٥٢٠

المحتوى الرياضي

التباديل: التبديل تنظيم أو تسلسل لمجموعة من العناصر يكون ترتيبها مهمًّا. فعلى سبيل المثال إذا نُظّمت مجموعة من الكتب على رفٍّ هجائيًّا، فإن الترتيب يكون مهمًّا وتُسمّى هذه الحالة تبديلًا. ويُرمز لعدد التباديل بالرمز ل(ن، ر) أو ${}^{ن}ل_{ر}$، حيث يُمثّل (ن) عدد العناصر التي يتم الاختيار منها (ر) عنصرًا في كل مرّة. ولإيجاد عدد التباديل يُستعمل القانون ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$.

الربط مع الحياة

إن تشجيع الأبناء على المشاركة في الأعمال المنزليّة له دور كبير في تكوين الشخصية، وتعويدهم تحمّل المسؤولية، كما يقوي الروابط والصلات بين أفراد الأسرة.

مثال ٣ من واقع الحياة — التوافيق

أعمال منزلية: تطلب أم إلى أبنائها الخمسة القيام ببعض الأعمال المنزلية كل أسبوع. بكم طريقة يمكن اختيار اثنين منهم لتنظيف ساحة المنزل؟

بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمًّا، فيجب أن نجد عدد توافيق ٥ أبناء، اختير اثنان منهم كل مرة.

$$ن\,ق_{ر} = \frac{\text{عدد التباديل}}{\text{عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها}}$$

أوجد عدد التباديل أولًا.

$$٥\,ل_{٢} = \frac{٥!}{٣!} = ٢٠ \qquad ن = ٥،\ ر = ٢$$

وبما أننا نختار اثنين في كلِّ مرةٍ، فإن عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها هو ٢! = ٢.

إذن $٥\,ق_{٢} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

أيْ أنّ هناك ١٠ طرق ممكنة لاختيار اثنين من الأبناء.

تحقق من فهمك

٣) **اختبار:** تقدّم سعيد لاختبار في التاريخ، طلب فيه الإجابة عن ١٠ أسئلة من بين ١٢ سؤالًا. بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟ ٦٦

يمكنك التوصُّل من خلال ذلك إلى قانون التوافيق.

مفهوم أساسي — قانون التوافيق

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذة (ر) عنصرًا كل مرة، يساوي ناتج قسمة ن! على (ن − ر)! ر!

الرموز: $ن\,ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\,ر!}$

مثال ٤ من واقع الحياة — استعمال قانون التوافيق

وظائف: أعلنت شركة عن ٥ وظائف شاغرة لديها، فتقدم للإعلان ٨ أشخاص. بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمس؟

$$ن\,ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\,ر!}$$ قانون التوافيق

$$= \frac{٨!}{(٨ - ٥)!\,٥!}$$ ن = ٨، ر = ٥

$$= \frac{٨!}{٣!\,٥!}$$ بسّط

$$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= \frac{٣٣٦}{٦} = ٥٦$$ هناك ٥٦ طريقة لشغل الوظائف

تحقق من فهمك

٤) **كتب:** أراد أربعة طلاب أن يختاروا كتبًا يقرؤونها من بين ١٨ كتابًا مختلفًا، تتكون من ٤ روايات، و٦ كتب علمية، و٨ كتب إسلامية. بكم طريقة يمكنهم اختيار الكتب الأربعة؟ ٣٠٦٠ طريقة

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون: بعد أن يتعلم الطلاب طريقة حساب عدد التوافيق في المثالين ٣ وَ ٤، ناقش معهم الفرق بين التباديل والتوافيق. ففي المثال ٤، لا يهمُّ الترتيب الذي يتم به اختيار الموظفين؛ لأنها مجرد عملية اختيار مجموعة موظفين. أمّا إذا أرادت الشركة أن تقرر وظيفة كل موظف في الشركة، فعندئذ يصبح الترتيب مهمًّا.

التوافيق

المثال ٣ يُبيّن طريقة استعمال التوافيق لحل مسائل من واقع الحياة.

المثال ٤ يُبيّن طريقة استعمال قانون التوافيق لحل مسائل من واقع الحياة.

المثال ٥ يُبيّن طريقة إيجاد احتمال حادثة ما باستعمال التباديل.

مثالان إضافيان

٣ مدرسة: تطوّع ٤ من طلاب الصف الأول المتوسط، و٥ من الصف الثاني المتوسط و٧ من الصف الثالث المتوسط؛ لتنفيذ حملة للعناية بساحة المدرسة، ويريد مدير المدرسة أن يختار ١٢ طالبًا من بين هذه المجموعة ليقوموا بالعمل. بكم طريقة يمكنه اختيار ١٢ طالبًا؟ ١٨٢٠ طريقة.

٤ نقود: مع فيصل كيس يحتوي على ١٠ أوراق نقدية من فئة الريال، و٦ أوراق من فئة ٥ ريالاتٍ، و٤ أوراق من فئة ١٠ ريالاتٍ، وورقتان من فئة ٥٠ ريالًا. بكم طريقة يمكن أن يسحب ٤ أوراق نقد من الكيس؟ ٧٣١٥ طريقة

إرشادات للمعلم الجديد

قراءة الرياضيات: يمكن كتابة عدد التوافيق لعناصر عددها (ن) مأخوذ منها راء عنصرًا كل مرة بالرمز: $ن\,ق_{ر}$.

المحتوى الرياضي

التوافيق: التوفيق هو تنظيم أو تسجيل عدد من العناصر لا يكون ترتيبها مهمًّا، فمثلًا عند اختيار مجموعة من الأزهار لتكوين باقة أزهار، لا يكون لترتيب اختيار الأزهار أهمية؛ لذا تكون هذه الحالة توفيقًا. ويُرمز لعدد التوافيق بالرمز $ن\,ق_{ر}$؛ حيث يُمثّل (ن) عدد عناصر المجموعة التي يتم الاختيار منها، (ر) عنصرًا في كل مرّة. ولإيجاد عدد التوافيق يستعمل القانون:

$$ن\,ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\,ر!}$$

يمكن استعمال التباديل والتوافيق لإيجاد احتمال حادثة ما.

إرشادات للدراسة

ثلاثة أرقام:
يمكن اعتبار العدد ٠٢٥ رمزًا لفتح القفل، بينما لا يُعَد العدد ٢٥ رمزًا لفتحه.

مثال ٥ من واقع الحياة إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل

دراجات: يتطلب فتح قفل يعمل بالأرقام رمزًا مكوّنًا من ثلاثة أرقام من بين الأرقام صفر إلى ٩ على ألّا يُستعمل العدد الواحد أكثر من مرة واحدة.

أ) ما عدد الترتيبات المختلفة الممكنة؟

بما أن ترتيب الأرقام في الرمز مهم، إذن هذه الحالة تمثّل تباديل لعشرة أرقام مأخوذة ثلاثة في كل مرة.

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$ قانون التباديل

$$= \frac{١٠!}{(١٠ - ٣)!}$$ ن= ١٠، ر= ٣

$$= \frac{١٠!}{٧!}$$ بسط

$$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= ٧٢٠$$ بسط

هناك ٧٢٠ رمزًا مختلفًا.

ب) ما احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية؟

نستعمل مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد الحالات التي تكون فيها الأرقام الثلاثة فردية. هناك ٥ أرقام فردية هي: ١، ٣، ٥، ٧، ٩، إذن عدد عناصر الحادثة يساوي $^{٥}ل_{٣}$ = ٦٠.

$$ح(\text{الأرقام جميعها فردية}) = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{٦٠}{٧٢٠}$$

$$= \frac{١}{١٢}$$ بالتبسيط

احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية هو $\frac{١}{١٢}$ = ٨٪ تقريبًا

تحقق من فهمك

٥) شركات: يريد أعضاء مجلس إدارة شركة أن يختاروا رئيسًا ونائبًا للرئيس وأمينًا للسر وأمينًا للصندوق. وكان فهد وسطام من بين تسعة مرشحين لهذه المراكز.

أ) بكم طريقة يمكن لأعضاء مجلس الإدارة اختيار الأعضاء الذين يشغلون هذه المراكز؟ ٣٠٢٤

ب) إذا تم الاختيار عشوائيًّا، فما احتمال أن يُختار فهد أو سطام لمركز الرئيس أو نائب الرئيس؟ $\frac{٥}{١٢}$ = ٤١,٧٪ تقريبًا

تأكد

مثال ١

١) جوائز: يريد أحد المراكز التجارية أن يعرض صور جوائزه الستّ التي يوزّعها على الزبائن على لوحة. بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صفٍّ واحدٍ؟ ٧٢٠ طريقة

الأمثلة ٢ - ٤

أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

٢) $^{٧}ل_{٢}$ ٤٢ **٣)** $^{٩}ل_{٣}$ ٥٠٤ **٤)** $^{٦}ق_{٤}$ ١٥ **٥)** $^{٥}ق_{٢}$ ١٠

٦) إعادة تدوير: وضع خالد حاوياتٍ لتجميع المواد التي سيُعاد تدويرها، على أن تكون هناك حاوية لكلٍّ من المواد الآتية: الزجاج والبلاستيك والورق والألومنيوم. بكم طريقة يمكن أن ينظم خالد هذه الحاويات في صفٍّ؟ ٢٤

مثال إضافي

٥ احتفال: تطوّع ٢٢ طالبًا من الصف الثالث المتوسط لتنظيم حفل المدرسة الختامي، فإذا علمت أن ٧ منهم من طلاب الثالث أول، و٥ من طلاب الثالث ثاني، و ٦ من طلاب ثالث ثالث، و ٤ من طلاب ثالث رابع، فأجب عن الفرعين أ ، ب .

أ) بكم طريقة يمكن اختيار ١٢ طالبًا من هؤلاء الطلاب، ليقوموا بتنظيم الاحتفال؟ ٦٤٦٦٤٦

ب) إذا تم اختيار الطلاب الاثني عشر عشوائيًّا، فما احتمال أن يتم اختيار ٣ من طلاب كل فصل؟ $\frac{٢٨٠٠٠}{٦٤٦٦٤٦}$

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١–٧؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

غالبًا ما يقع الطلاب في حيرة بين التباديل والتوافيق؛ لذا لا بد من مناقشة أمثلة عديدة على كلٍّ منهما، وتوضيح طريقة إيجاد عدد التباديل أو عدد التوافيق في كل مثال.

مثال ٥

٧) **مثلجات:** يعرض أحد مصانع المثلجات ٥ أنواع مختلفة بطعم الشوكولاتة، و ٤ أنواع مختلفة بطعم الفراولة و ٦أنواع بطعم التوت.

أ) بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الزبائن ٣ أنواع مختلفة من المثلجات؟ ٤٥٥

ب) هل تتضمن عملية الاختيار التباديل أم التوافيق؟ توافيق

جـ) إذا تم اختيار أنواع «المثلجات» عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون الأنواع الثلاثة التي اختارها أحد الزبائن بطعم الشوكولاتة؟ $\frac{٢}{٩١} = ٢,٢٪$ تقريبًا

تدرب وحل المسائل

مثال ١

٨) **تصوير:** اصطفَّ الطلاب الأربعة الأوائل في فصول الصف الثالث المتوسط في إحدى المدارس في صفٍّ لالتقاط صورة؛ لعرضها على لوحة الشرف في المدرسة. فبكم طريقة يمكن أن ينظِّم المصور الطلاب الأربعة ليلتقط الصورة؟ ٢٤

٩) **مسابقات علمية:** وصل ٨ طلاب إلى المرحلة النهائية في مسابقات علمية. فبكم طريقة يمكن أن يقف هؤلاء الطلاب في صفٍّ على منصةِّ قاعة الاحتفالات؟ ٤٠٣٢٠

الأمثلة ٢ - ٤

أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

١٠) $ل_{٦}^{٦}$ ٧٢٠ ١١) $ل_{١}^{٥}$ ٥ ١٢) $ل_{١}^{٤}$ ٤ ١٣) $ل_{٣}^{٧}$ ٢١٠

١٤) $ق_{٦}^{٧}$ ٧ ١٥) $ق_{٣}^{٥}$ ١٠ ١٦) $ق_{٥}^{٥}$ ١ ١٧) $ق_{٠}^{٣}$ ١

١٨) **مجوهرات:** يعمل قاسم في محل لبيع المجوهرات. وقد طلب منه مديره أن يضع ثلاثًا من القلائد الاثنتي عشرة في خزانة العرض الأمامية. فبكم طريقة يمكن أن يرتب قاسم القلائد في خزانة العرض؟ ١٣٢٠

مثال ٥

١٩) **كرات زجاجية:** يوجد في كيس ٢٠ كرة زجاجية، منها ٧ كرات حمراء و ٨ زرقاء و ٥ خضراء. فإذا سُحبت ١٥ كرة من الكيس عشوائيًّا، فما احتمال سحب ٥ كرات من كل لون؟ $\frac{٤٩}{٦٤٦} = ٧,٥٩٪$ تقريبًا.

٢٠) **كرة قدم:** رشَّح معلم التربية الرياضية ٩ طلاب من الصف الأول الثانوي، و٦ طلاب من الصف الثاني الثانوي، و٨ طلاب من الصف الثالث الثانوي؛ لتشكيل فريق كرة القدم المدرسي. إذا علمت أن الفريق يتكون من ١١ لاعبًا أساسيًّا.

أ) ما عدد طرق اختيار الفريق الأساسي؟ ١٣٥٢٠٧٨

ب) إذا تم اختيار الفريق الأساسي عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من بينهم طالب واحد على الأقل من الصف الثالث الثانوي؟ $١ - \frac{١٥}{١٤٨٥٨} = ٩٩,٩٪$ تقريبًا

حدّد هل يتضمن كل موقف من المواقف الآتية تباديل أم توافيق:

٢١) اختيار ٣ أنواع مختلفة من الفطائر من قائمة تحتوي على ١٢ نوعًا. توافيق

٢٢) اختيار الفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى في مسابقة ثقافية. تباديل

٢٣) اختيار ٥ كتب لقراءتها من بين ٨ كتب على رفٍّ. توافيق

٢٤) ترتيب حروف كلمة «سعودي». تباديل

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير: ذكّر الطلاب بأن يتحقّقوا من معقولية إجاباتهم عند إيجاد عدد التباديل أو التوافيق والاحتمالات.

وعند حساب الاحتمال على سبيل المثال، يجب أن تكون الإجابة عددًا يتراوح بين (٠) إلى (١).

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٨ – ١٩، ٢٧، ٢٩ – ٣٥.
ضمن ضمن المتوسط	٨ – ٢٠ (زوجي)، ٢١ – ٢٧، ٢٩ – ٣٥.
فوق فوق المتوسط	٢١ – ٣٥

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال ٢٧. اسأل الطلاب عمَّا إذا كان الترتيب مهمًّا في هذه المسألة. وذكّرهم بأنه يجب استعمال قانون التوافيق عندما يكون الترتيب غير مهمٍّ.

٤ التقويم

تعلّم لاحق: اطلب إلى الطلاب أن يشرحوا كيف يمكن أن تساعدهم مفاهيم التباديل والتوافيق على إيجاد احتمالات الحوادث المركّبة في الدرس اللاحق.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (١٠-٤) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٣)، ص (٨٨)

إجابات:

٢٨) تحديد ترتيب للطلاب؛ لأنها الحالة الوحيدة التي يكون فيها الترتيب مهمًّا.

٢٩) أحيانًا؛ تكون هذه العبارة صحيحة عندما ر = ١؛ لأن الترتيب غير وراد عند اختيار عنصر واحد، وهي صحيحة أيضًا عندما ر = ٠

٢٧) نوف؛ بما أن الترتيب غير مهم، فيجب استعمال التوافيق.

٢٥) **وظائف:** أجرى ٥١ شخصًا مقابلة لشغل إحدى الوظائف، فقامت لجنة المقابلة باختيار مرشح لهذه الوظيفة و٤ بُدلاء.

أ) هل تتضمن عملية الاختيار تباديل أم توافيق؟ تباديل

ب) بكم طريقة يمكن أن تختار اللجنة المرشَّح للوظيفة والبُدلاء الأربعة؟ ٢٨١٨٨٧٢٠٠

٢٦) **خزانة:** نسي هاني ترتيب الأعداد التي يستعملها لفتح خزانته. ولكنه يتذكر أنها تتكون من الأعداد ٥، ١٦، ٣١. فما العدد الأكبر للمحاولات التي ينفِّذها لفتح الخزانة؟ ٦ محاولات

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٧) **اكتشف الخطأ:** تريد كلٌّ من سلمى ونوف أن يكوِّنا لجنة مؤلفة من ٤ طالبات؛ للإشراف على تزيين المدرسة استعدادًا لاحتفال تكريم الأوائل. تريد كلٌّ منهما أن تحدد عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا تطوَّع ١٠ طالبات للقيام بهذا العمل. فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سلمى

$$_{١٠}ل_{٤} = \frac{!١٠}{!(٤-١٠)}$$

$$= ٥٠٤٠$$

نوف

$$_{١٠}ق_{٤} = \frac{!١٠}{!٤!(٤-١٠)}$$

$$= ٢١٠$$

٢٨) حدّد الموقف المختلف عن المواقف الثلاثة الأخرى فيما يأتي، ووضِّح إجابتك: انظر الهامش

اختيار ٥ متسابقين في مسابقة ثقافية.	اختيار ١٠ كرات ملونة من حقيبة.
اختيار ٤ خيول من بين ٦ خيول للمشاركة في سباق.	تحديد ترتيب الطلاب الفائزين في إحدى المسابقات.

٣٠) إجابة ممكنة: اختيار ٣ طلاب للمشاركة في الإذاعة المدرسية من بين ثمانية طلاب.

٢٩) **تبرير:** حدّد هل تكون العبارة $_{ن}ل_{ر} = {}_{ن}ق_{ر}$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا. فسّر إجابتك. انظر الهامش

٣٠) **اكتب:** اذكر موقفًا لاختيار ٣ أشياء من بين ٨ أشياء، على ألا يكون الترتيب فيه مهمًّا.

تدريب على اختبار

٣١) يريد سعيد أن يزرع ٣ أنواع مختلفة من بين ٨ أنواع مختلفة من الأزهار على جانب ممرٍّ في حديقته. بكم طريقة يمكنه زراعة هذه الأزهار؟ جـ

أ) ٣٤٢ جـ) ٣٣٦

ب) ٣٣٨ د) ٣٢٨

٣٢) مع سالم ٣٠ ورقة نقد من فئتي عشرين ريالًا وخمسة ريالات، قيمتها ٤٢٠ ريالًا. فكم ورقة معه من فئة عشرين ريالًا؟ جـ

أ) ١٢ جـ) ١٨

ب) ١٥ د) ٢٠

مراجعة تراكمية

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لكل مجموعة من مجموعات البيانات الآتية مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرةٍ. الدرس (١٠-٣)

٣٣) ٧٦، ٤٧، ٥٩، ٤٧، ٧٢، ٨٩ ١٥,٤، ٢٣٨,٣، ٦٥

٣٤) ٢٠، ٣٠، ١٠، ٤٠، ٢٠، ١٢، ٥٠ ١٣,٧، ١٨٧,٤، ٢٦

٣٥) **مسح:** أجرت إحدى شركات صنع العصائر دراسة مسحيةً؛ لمعرفة عدد العلب التي يشتريها الزبون في الأسبوع. فحصلت على الاستجابات الآتية: ١٤، ٧، ٣، ٠، ١٠، ١٢، ١٠، فأي مقاييس النزعة المركزية أفضل لتمثيل هذه البيانات؟ برّر إجابتك، ثم أوجد هذا المقياس. الدرس (١٠-٢) المتوسط الحسابي: لعدم وجود قيم متطرفة؛ ٨

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اسأل الطلاب إذا كانوا يتوقّعون أن يكون عدد التوافيق لعناصر عددها (ن) مأخوذة راء كل مرة أقل من، أم أكبر من عدد التباديل لعناصر عددها (ن) مأخوذة راء كل مرة. واطلب إليهم أن يوضّحوا تبريرهم بتقديم أمثلة من واقع الحياة.

سيكون عدد التوافيق أقل من عدد التباديل. إجابة ممكنة: إذا أردت أن تقرأ الروايتين أ، ب دون ترتيب محدّد فإن هذه الحالة تكون توافيق، وعندئذ يمثل أ ب، ب أ شيئًا واحدًا. أمّا إذا كان الترتيب الذي تقرأ به الروايتين مهمًّا، فإن قراءة الروايتين بالترتيب أ ب تختلف عن قراءتهما بالترتيب ب أ؛ لذا يكون عدد التوافيق أقل من عدد التباديل.

١٨٢ الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ١٠ - ٤

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (١٨) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

١٠-٤ تدريبات إعادة التعليم

التباديل والتوافيق

التباديل، عندما تُنظّم العناصر بحيث يكون ترتيبها مهمًّا، وتُكتب جميع الترتيب الممكنة لهذه العناصر، يُسمّى كلٌّ من هذه الترتيب **تبديلًا**. على سبيل المثال الترتيب أ ب لاختيار أ و ب يختلف عن الترتيب ب أ للاختيار نفسه.

التباديل	$_{ن}ل_{ر} = \frac{!ن}{!(ن-ر)}$

مثال ١ أوجد قيمة $_{٦}ل_{٤}$.

$_{ن}ل_{ر} = \frac{!ن}{!(ن-ر)}$ قانون التباديل

$_{٦}ل_{٤} = \frac{!٦}{!(٦-٤)}$ ن = ٦، ر = ٤

$= \frac{!٦}{!٢}$ بسّط

$= \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦}{١\times٢}$ تعريف مضروب العدد

$= ٣٠ = ٥\times٦$ بسّط

يوجد ٣٠ طريقة لاختيار عنصرين مع الترتيب من بين ٦ عناصر.

مثال ٢ **كلمة المرور**: يطلب برنامج حاسوبي معيّن من المستخدم إدخال كلمة سرور مكوّنة من ٥ أرقام مختلفة تُختار من بين الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٧، ٨، ٩.

أ) ما عدد كلمات المرور الممكنة؟

$_{ن}ل_{ر} = \frac{!ن}{!(ن-ر)}$

$_{٧}ل_{٥} = \frac{!٧}{!(٥-٧)}$

$= \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧}{١\times٢}$

$= ٢٥٢٠ = ٣\times٤\times٥\times٦\times٧$

توجد ٢٥٢٠ طريقة لاختيار كلمة المرور.

ب) ما احتمال أن يكون الرقمان الأول والثاني فرديين، والأرقام الأخرى أي ٣ أرقام من الأرقام المتبقية؟

ح (الرقمان الأول والثاني فرديان) = $\frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$

بما أنه يوجد أربعة أرقام فردية فإنّ عدد طرائق اختيار الرقم الأول هو ٤، وعدد طرائق اختيار الرقم الثاني هو ٣، ويبقى ٥ اختيارات للرقم الثالث، و ٤ للرابع، و ٣ للخامس. وبذلك يكون عدد عناصر الحادثة هو

$٤ \times ٣ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٧٢٠$

الاحتمال = $\frac{٧٢٠}{٢٥٢٠} = ٢٨,٦٪$

تمارين

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

١) $_{٥}ل_{٥}$ ٨٤٠ ٢) $_{١٠}ل_{٣}$ ٧٢٠ ٣) $_{٩}ل_{٤}$ ٣٠٢٤ ٤) $[_{٥}ل_{٥}] \times [_{٦}ل_{٣}]$ ١٤٤٠٠

٥) $_{١١}ل_{٢}$ ١١٠ ٦) $_{٨}ل_{٨}$ ٤٠٣٢٠ ٧) $_{٧}ل_{٥}$ ٢٥٢٠ ٨) $_{٩}ل_{٩}$ ٣٦٢٨٨٠

٩) **نادٍ ثقافيّ**، يتكون نادٍ ثقافي في إحدى المدارس من ١٠ أعضاء، منهم ٦ من الصف الثالث المتوسط و ٤ من الصف الثاني المتوسط. ويُراد اختيار رئيس للنادي ونائب للرئيس وأمين للسر وأمين للصندوق من بين أعضائه.

أ) ما عدد طرائق اختيار هؤلاء الطلاب الأربعة؟ ٥٠٤٠

ب) ما احتمال أن يكون هؤلاء الطلاب الأربعة من الصف الثالث المتوسط؟ ٧,١٪

تدريبات حل المسألة (٢٠) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

١٠-٤ تدريبات حل المسألة

التباديل والتوافيق

١) **أعمال منزلية**، تتكون إحدى الأسر من الأب، والأم، و ٤ أبناء وبنات. إذا كان شخصان من أفراد الأسرة يتعاونان على رفع الأطباق بعد تناول طعام الغداء، فبكم طريقة يمكن اختيار هذين الشخصين؟

١٥ طريقة

٢) **خدمة عامة**، يختار الحاسوب في إحدى البلديات لجنة مكوّنة من ١٢ شخصًا اختيارًا عشوائيًّا من قائمة تتضمن أسماء ٢٠ شخصية، لحضور جلسة المجلس البلدي. ما عدد طرائق اختيار أعضاء اللجنة؟

١٢٥٩٧٠ طريقة

٣) **رياضة**، قرّر فريق كرة قدم أن يختار قائدين للفريق كل أسبوع بحيث تتاح لعدد أكبر من اللاعبين فرصة قيادة الفريق. في كل أسبوع يكتب كل واحد من أعضاء الفريق الأحد عشر اسمه على قصاصة من الورق، وتوضع القصاصات في إناء وتخلط جيدًا، ثم يسحب قائدا الفريق قصاصتين من الإناء لتحديد قائدَي الفريق للأسبوع المقبل. ما عدد طرائق اختيار قائدَي الفريق؟

٥٥ طريقة

٤) **ألغاز**، يتكوّن لغز في إحدى الصحف من سلسلة من الأحرف التي يمكن إعادة ترتيبها لتكوين كلمة معينة. يحاول وليد أن يكوّن لغزًا خاصًّا به لمشروع يقدمه للمدرسة، ويريد أن يخلط أحرف الكلمة (مستويان) في لغزه. بكم طريقة يمكن ترتيب حروف هذه الكلمة بحيث يكون الحرف (ي) هو الحرف الأول؟

٧٢٠ طريقة

٥) **سباق خيل**، تسابق ٢٢ متسابقًا في إحدى سباقات الخيل.

أ) بكم طريقة يمكن أن تنهي الخيول السباق؟

٢٢ طريقة

ب) بكم طريقة يمكن تحديد الخيول الفائزة بالمراكز الأول والثاني والثالث؟

٩٢٤٠ طريقة

جـ) إذا كان لكل واحد من جميع هذه الخيول الفرصة نفسها في الفوز في السباق، وكان ٣ منها إناثًا، فما احتمال أن تفوز هذه الإناث الثلاث بالمراكز الثلاثة الأولى في السباق؟

$\frac{٦}{٩٢٤٠}$

التدريبات الإثرائية (٢١) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

١٠-٤ التدريبات الإثرائية

صفقة البيتزا

قدّم إعلان تجاري متلفز صفقة بيتزا، حيث يستطيع الزبون اختيار طبقين من البيتزا يحتوي كل منهما ٥ إضافات على الأكثر مُختار من بين ١١ إضافة. ويدّعي صبي يظهر في الإعلان أنه توجد(١٠٢٤)' أو ١٠٤٨٥٧٦ طريقة يستطيع أن يختار بها الزبون طبقين من البيتزا. هل ما يقوله هذا الصبي صحيح؟

صفقة البيتزا!!!

يمكنك انت تختار ولفترة محدودة فقط طبقين من البيتزا مع ٥إضافات على الأكثر

تكلّف منهما بمبلغ ١٤,٩٩ ريالاً فقط!!

الإضافات	نعم	لا
شريحة لحم	☐	☐
نقانق	☐	☐
طماطم	☐	☐
زيتون أخضر	☐	☐
زيتون أسود	☐	☐
فطر	☐	☐
جبنة صفراء	☐	☐
فلفل	☐	☐
بصل	☐	☐
أناناس	☐	☐
مرتديلا	☐	☐

١) افترض أنّ الزبون يستطيع أن يختار العدد الذي يرغب فيه من الإضافات لغاية ١١ إضافة، فأوجد عدد طرائق تجهيز أطباق البيتزا، مستعملًا مبدأ العدّ. (إرشاد: تخيّل أنّ الزبون سيختار "نعم" أو "لا" لكل إضافة).

٢^١١ أو ٢٠٤٨

٢) أوجد عدد طرائق تجهيز طبق البيتزا الواحد الذي يحتوي ٥ إضافات على الأكثر، مستعملًا التوافيق.

ق١١ + ق١١ + ق١١ + ق١١ + ق١١ + ١، أي ١٠٢٤

٣) بكم طريقة يمكن تجهيز الطبقين إذا كانا متماثلين؟

١٠٢٤

٤) بكم طريقة يمكن تجهيز الطبقين إذا كانا مختلفين؟ (إرشاد: استعمل عدد الطرائق الممكنة لتجهيز الطبق الواحد من السؤال ٢، ثم أوجد عدد طرائق اختيار اثنين منها). هل تستعمل التوافيق أم التباديل؟

التوافيق؛ ٥٢٣٧٧٦ = ١٠٢٤ق٢

٥) اجمع نتيجتي السؤالين ٣ و ٤ لتحديد العدد الكلّي لطرائق تجهيز طبقين من البيتزا مع ٥ إضافات على الأكثر لكلٍّ منهما.

٥٢٤٨٠٠

٦) يدّعي الصبي في الإعلان أنه توجد أمام الزبون(١٠٢٤)' طريقة تجهيز، فما قيمة (١٠٢٤)'؟ وما وجه المقارنة بين الناتج الفعلي في السؤال ٥ والقيمة التي أوردها الصبي في الإعلان؟

١٠٤٨٥٧٦؛ عدد طرائق الاختيار الفعلية أصغر بكثير من عدد الطرائق التي أوردها الصبي في الاعلان.

كتاب التمارين (٣١) — دون ضمن فوق

١٠ - ٤ التباديل والتوافيق

استعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد قيمة كل ممّا يأتي:

١) **مهام**، يرغب أحمد في زيارة ٦ متاجر في طريق عودته إلى بيته من العمل. بكم طريقة يمكن أن يرتب زيارته هذه المتاجر؟ ٧٢٠

٢) **اقتراع**، ينتظم ٨ أشخاص للإدلاء بأصواتهم في انتخابات مجلس إدارة شركة. بكم طريقة يمكن أن يصطف هؤلاء للإدلاء بأصواتهم؟ ٤٠٣٢٠

أوجد قيمة العبارات الآتية:

٣) $_{١١}ل_{٣}$ ٩٩٠ ٤) $_{٦}ل_{٣}$ ١٢٠ ٥) $_{١٦}ل_{٣}$ ٢٧٣٠

٦) $_{١٠}ق_{٣}$ ١٢٠ ٧) $_{١٢}ق_{٣}$ ٢٢٠ ٨) $_{٧}ق_{٣}$ ٣٥

٩) $_{٧}ق_{٣}$ ٣٥ ١٠) $_{١٢}ق_{٤}$ ٤٩٥ ١١) $_{١٣}ل_{٣}$ ١٧١٦

١٢) $_{١٦}ق_{١٣}$ ١٨٢٠ ١٣) $_{١٧}ق_{٣}$ ١٣٦ ١٤) $_{١٦}ق_{١٥}$ ١٦

١٥) $_{٢٠}ل_{٣}$ ١٨٦٠٤٨٠ ١٦) $_{١١}ل_{٧}$ ١٦٦٣٢٠٠ ١٧) $_{١٣}ل_{١٣}$ ١٣

١٨) $_{١٩}ق_{١٨}$ ٩٦٩ ١٩) $_{١٥}ل_{٣}$ ٣٢٧٦٠ ٢٠) $_{١٤}ق_{٣}$ ٣٤٣٢

٢١) **رياضة**، بكم طريقة يمكن ترتيب أول خمسة متسابقين يصلون إلى خط النهاية في أحد السباقات الرياضية؟ ١٢٠

٢٢) **إجراءات قضائية**، يرغب المجلس الأعلى للقضاء في اختيار ٣ قضاة من بين ٨ قضاة للنظر في قضايا جنائية. وكان خمسة من القضاة يحملون درجة الدكتوراه في القانون، و ٣ يحملون درجة الماجستير في القانون.

أ) هل يتضمن اختيار القضاة تباديل أم توافيق؟ توافيق

ب) بكم طريقة يمكن اختيار القضاة الثلاثة؟ ٥٦

جـ) إذا تم اختيار القضاة الثلاثة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكونوا جميعًا من حملة درجة الدكتوراه؟ $\frac{٥}{٢٨} = ١٨٪$ تقريبًا

ملحوظات المعلم

احتمالات الحوادث المركبة

لماذا ؟

يرغب خالد في السفر من الرياض إلى جدة بالطائرة. وتشير تقارير شركة الطيران إلى وصول الطائرات في موعدها بنسبة ٩٢٪ من الرحلات. كما تشير إلى فقدان الأمتعة في ١٪ من الحالات. ما احتمال وصول طائرة خالد في موعدها وعدم فقدان أمتعته؟

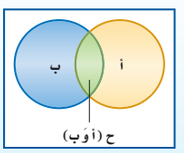
الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة : تذكّر أن الحادثة الواحدة، مثل الطيران إلى جدة تُسمى حادثة بسيطة. وأن **الحادثة المركبة** تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر. فاحتمال وصول الطائرة في موعدها وعدم فقدان الأمتعة مثال على الحادثة المركبة. وقد لا يؤثر وصول الطائرة في موعدها على فقدان الأمتعة أو عدمه، وتُسمّى هاتان الحادثتان **حادثتين مستقلتين**؛ لأن نتيجة إحداهما لا تؤثر في نتيجة الأخرى.

مفهوم أساسي — احتمال الحوادث المستقلة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا، يساوي حاصل ضرب احتمال الحادثة أ في احتمال الحادثة ب.

النموذج:



الرموز: ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب)

مثال ١ من واقع الحياة — احتمال الحوادث المستقلة

كرات زجاجية : يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائيًّا ثم أُعيدت وسُحِبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

الكرة الأولى: ح(سوداء) $= \frac{٦}{٢١}$ ← عدد الكرات السوداء / عدد الكرات الكلي

الكرة الثانية: ح(صفراء) $= \frac{٤}{٢١}$ ← عدد الكرات الصفراء / عدد الكرات الكلي

ح (سوداء وصفراء) = ح (سوداء) × ح (صفراء) احتمال الحوادث المستقلة

$= \frac{٦}{٢١} \times \frac{٤}{٢١} = \frac{٢٤}{٤٤١}$ عوّض

الاحتمال يساوي $\frac{٢٤}{٤٤١} = ٤,٥$٪ تقريبًا.

تحقق من فهمك

١أ) ح (زرقاء وخضراء) $= \frac{١٨}{٤٤١} = ٤,١$٪ تقريبًا

١ب) ح (ليست سوداء و زرقاء) $= \frac{١٣٥}{٤٤١} = ٣٠,٦$٪ تقريبًا

عندما تؤثر نتيجة حادثة ما في نتيجة حادثة أخرى نقول عنهما: إنهما **حادثتان غير مستقلتين**، ففي المثال ١ إذا لم تُرجع الكرة التي سُحبت في المرة الأولى إلى الكيس، فإن سحب الكرتين يمثل حادثتين غير مستقلتين؛ لأن احتمال سحب الكرة الثانية يعتمد على لون الكرة التي سُحبت أولًا.

فيما سبق

درست حساب احتمال بسيط.

والآن

- أجد احتمال حادثتين مستقلتين أو حادثتين غير مستقلتين.
- أجد احتمال حادثتين متنافيتين أو حادثتين غير متنافيتين.

المفردات

الحادثة المركبة
الحادثتان المستقلتان
الحادثتان غير المستقلتين
الحادثتان المتنافيتان

obeikaneducation.com

١ التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس ١٠ ـ ٥

حساب الاحتمالات البسيطة.

الدرس ١٠ ـ ٥

إيجاد احتمال حادثتين مستقلتين أوحادثتين غير مستقلتين.

إيجاد احتمال حادثتين متنافيتين أو حادثتين غير متنافيتين.

ما بعد الدرس ١٠ ـ ٥

إنشاء التوزيعات الاحتمالية.

٢ التدريس

أسئلة البناء

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا"؟ .

ثم اسأل:

- افترض أن الطائرة وصلت في موعدها، فهل يؤثّر ذلك على فقدان أمتعة خالد؟ لا
- ما معنى كلمة مستقلة؟ حرة أو غير مرتبطة
- هل يمكن استعمال كلمة مستقلة لوصف العلاقة بين "وصول الطائرة في موعدها" و"فقدان الأمتعة"؟ نعم؛ لأن وصول الطائرة في موعدها لا يؤثّر في فقدان الأمتعة أو عدمه: هاتان الحادثتان مستقلتان إحدا هما عن الأخرى.

مصادر الدرس ١٠ ـ ٥

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (١٨٥)	• تنويع التعليم ص (١٨٥، ١٨٨)	• تنويع التعليم ص (١٨٨)
كتاب التمارين	ص (٣٢)	ص (٣٢)	ص (٣٢)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (٢٢) • تدريبات حل المسألة، ص (٢٤)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٤)	• تدريبات حل المسألة، ص (٢٤) • التدريبات الإثرائية، ص (٢٥)

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

المثال ١ يُبيّن طريقة إيجاد احتمال وقوع حادثتين مستقلتين.

المثال ٢ يُبيّن طريقة إيجاد احتمال وقوع حوادث غير مستقلة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين «تحقّق من فهمك» بعد كل مثالٍ؛ للتحقّق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

١ **رحلات جوية:** يسافر عبد الغني من تبوك إلى نجران على متن طائرة، احتمال وصولها إلى نجران في موعدها ٩٠٪، إذا كان احتمال سقوط أمطار في أبها في اليوم الذي سافر فيه يساوي ٥٠٪، فما احتمال وصول طائرة عبد الغني في موعدها وسقوط أمطار في أبها؟ ٤٥٪

٢ **كرة سلة:** تُقدّم جوائز للفائزين في لعبة رمي كرة سلة للمرمى يتم اختيارها عشوائيًّا من وعاء يحتوي على ٤ نظارات شمسية، و٦ قبعات، و٥ سلاسل للمفاتيح. سُحبت ٣ جوائز من الوعاء من دون إرجاع. أوجد الاحتمالين الآتيين:

أ) ل (نظارة، قبعة، سلسلة للمفاتيح). $\frac{٤}{٩١}$

ب) ل (قبعة، قبعة، ليست قبعة). $\frac{٩}{٩١}$

مفهوم أساسي — احتمال الحوادث غير المستقلة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة (أ) في احتمال وقوع الحادثة (ب) بعد وقوع الحادثة أ.

الرموز: ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)

تذكّر أن متمّمة مجموعة هي جميع العناصر التي لا تنتمي إلى تلك المجموعة. افترض أنه يوجد في وعاء ٦ أقلام زرقاء و ٨ أقلام حمراء و ٧ أقلام خضراء و٩ أقلام سوداء، فإن متممة سحب قلم أزرق هي سحب قلم أحمر أو أخضر أو أسود؛ لذا فإن احتمال سحب قلم أزرق يساوي $\frac{٦}{٣٠}$، واحتمال عدم سحب قلم أزرق يساوي $\frac{٣٠-٦}{٣٠} = \frac{٢٤}{٣٠}$، وبالتالي يكون مجموع احتمالي أي حادثتين متتامتين يساوي ١.

مثال ٢ من واقع الحياة — الحوادث غير المستقلة

بطاقات: **يوجد في صندوق ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ صفراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء. وبطاقات كل مجموعة مرقّمة بالأرقام من ١ إلى ١٠. فإذا سحب عبد الكريم ثلاث بطاقات عشوائيًّا من الصندوق واحدة تلو الأخرى من دون إرجاع. فأوجد احتمال أن تكون البطاقات المسحوبة بالترتيب المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:**

أ) ح (حمراء، بيضاء، حمراء)

البطاقة الأولى: ح (حمراء) = $\frac{١٠}{٤٠} = \frac{١}{٤}$ ← $\frac{\text{عدد البطاقات الحمراء}}{\text{عدد البطاقات الكلي}}$

البطاقة الثانية: ح (بيضاء) = $\frac{١٠}{٣٩}$ ← $\frac{\text{عدد البطاقات البيضاء}}{\text{عدد البطاقات المتبقية}}$

البطاقة الثالثة: ح (حمراء) = $\frac{٩}{٣٨}$ ← $\frac{\text{عدد البطاقات الحمراء المتبقية}}{\text{عدد البطاقات المتبقية}}$

ح (حمراء، بيضاء، حمراء) = ح (حمراء) × ح (بيضاء) × ح (حمراء)

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١٠}{٣٩} \times \frac{٩}{٣٨} = \frac{١٥}{٩٨٨}$ عوّض

إذن الاحتمال يساوي $\frac{١٥}{٩٨٨}$ = ١,٥٪ تقريبًا.

ب) ح (أربعة ، أربعة ، ليس تسعة)

بعد أن يسحب عبد الكريم البطاقتين اللتين تحملان الرقم ٤، إذن يبقى في الصندوق ٣٨ بطاقة. وبما أن البطاقتين المسحوبتين لا تحملان الرقم ٩، فإنه يوجد في الصندوق ٤ بطاقات تحمل الرقم ٩؛ وعليه فإن عدد البطاقات التي لا تحمل الرقم ٩ يساوي ٣٨ − ٤ = ٣٤.

ح (أربعة، أربعة، ليس تسعة) = ح (أربعة) × ح (أربعة) × ح (ليس تسعة)

$= \frac{٤}{٤٠} \times \frac{٣}{٣٩} \times \frac{٣٤}{٣٨}$

$= \frac{١٧}{٢٤٧٠}$

إذن الاحتمال يساوي $\frac{١٧}{٢٤٧٠}$ = ٠,٧٪ تقريبًا.

إرشادات حل المسألة

التمثيل

يساعد تمثيل الموقف أو المسألة في فهم السؤال المطروح، لذا استعمل أوراقًا ملونة لتمثيل المسألة.

تحقق من فهمك

١أ) ح (اثنان، خمسة، ليس خمسة) **٢ب)** ح (حمراء، ليست حمراء، حمراء)

١أ) $\frac{٧}{٧٤١}$ = ٠,٩٪ تقريبًا

٢ب) $\frac{٤٥}{٩٨٨}$ = ٤,٦٪ تقريبًا

الحوادث المتنافية: تُسمّى الحادثتان اللتان لا يمكن وقوعهما معًا **حادثتين متنافيتين**. افترض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة حمراء أو بطاقة زرقاء من وعاء يحتوي على بطاقات ملوّنة. بما أنه لا يمكن أن تكون البطاقة حمراء وزرقاء في الوقت نفسه فتُسمى هاتان الحادثتان حادثتين متنافيتين.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: **استعمل أشكال (فن) لمساعدة الطلاب على تصور أمثلة بسيطة تُستعمل حوادث متداخلة. اجعل إحدى الدوائر تُمثّل الشرط (أ)، والدائرة الثانية تُمثّل الشرط (ب)، واكتب النواتج الممكنة جميعها وحرّك كلًّا منها إلى الجزء المناسب من الشكل. وضّح للطلاب أنه يجب طرح ح (أ وَ ب) ؛ لأنها تقع في منطقة تقاطع المجموعتين.**

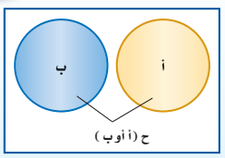
مفهوم أساسي — الحوادث المتنافية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتمالي الحادثتين.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)

النموذج:



إرشادات للدراسة

«و»، «أو»

ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «و» بالحوادث المستقلة، في حين ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «أو» بالحوادث المتنافية وغير المتنافية.

مثال ٣ من واقع الحياة — الحوادث المتنافية

أوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية عند رمي مكعب أرقام:

أ) ح (٣ أو ٥)

بما أنه لا يمكن أن يظهر الرقم ٣ والرقم ٥ في الوقت نفسه على وجه المكعب العلوي، فإن هاتين الحادثتين متنافيتان.

ح (ظهور ٣) = $\frac{\text{عدد الأوجه التي تحمل ٣}}{\text{عدد أوجه المكعب جميعها}}$ = $\frac{١}{٦}$

ح (ظهور ٥) = $\frac{\text{عدد الأوجه التي تحمل ٥}}{\text{عدد أوجه المكعب جميعها}}$ = $\frac{١}{٦}$

ح (٣ أو ٥) = ح (ظهور ٣) + ح (ظهور ٥) — احتمال الحوادث المتنافية

= $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٦}$ — عوّض

= $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$ — اجمع

إذن احتمال ظهور الرقم ٣ أو ٥ عند رمي مكعب أرقام يساوي $\frac{١}{٣}$ = ٣٣٪ تقريبًا.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

يمكن أن تجد الاحتمال في المثال ٣ أ، بقسمة عدد عناصر الحادثة على عدد النواتج الممكنة جميعها.

$\frac{١+١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

ب) ح (٤ على الأقل)

ظهور ٤ على الأقل يعني ظهور ٤ أو ٥ أو ٦؛ لذا يجب أن تجد احتمال ظهور ٤ أو ٥ أو ٦.

ح (٤ على الأقل) = ح (ظهور ٤) + ح (ظهور ٥) + ح (ظهور ٦) — حوادث متنافية

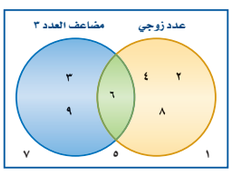
= $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٦}$ — عوّض

= $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ — اجمع ثم بسّط

إذن احتمال ظهور ٤ على الأقل يساوي $\frac{١}{٢}$ = ٥٠٪ .

تحقق من فهمك

٣أ) ح (أقل من ٣) $\frac{١}{٣}$ = ٣٣٪ تقريبًا. **٣ب)** ح (عدد زوجي) $\frac{١}{٢}$ = ٥٠٪ تقريبًا.



افترض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة تحمل عددًا زوجيًّا أو مضاعفًا للعدد ٣ عشوائيًّا من مجموعة مكوّنة من ٩ بطاقات مرقّمة بالأرقام من ١ إلى ٩. وبما أن العدد الظاهر على البطاقة يمكن أن يكون زوجيًّا ومضاعفًا للعدد ٣ في الوقت ذاته، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

ح (عدد زوجي) $\frac{٤}{٩}$ ح (مضاعف للعدد ٣) $\frac{٣}{٩}$ ح (زوجي ومضاعف للعدد ٣) $\frac{١}{٩}$

الحوادث المتنافية

المثال ٣ يُبيّن طريقة إيجاد احتمال وقوع حوادث متنافية.

المثال ٤ يُبيّن طريقة إيجاد احتمال وقوع حوادث غير متنافية.

مثال إضافي

٣ **سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من مجموعة مكوّنة من ١٣ بطاقة مرقّمة بالأرقام من ١ إلى ١٣. أوجد الاحتمالات الآتية:**

أ) ح (٧ أو ٨) $\frac{٢}{١٣}$

ب) ح (٥ على الأكثر) $\frac{٥}{١٣}$

المحتوى الرياضي

الحوادث المتنافية: تُسمّى الحوادث التي لا يمكن وقوعها معًا في وقتٍ واحدٍ حوادث متنافية، فعلى سبيل المثال، إذا سُحبت كرة زرقاء أو كرة صفراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على كرات، فإن هاتين الحادثتين تكونان متنافيتين؛ لأنك لا يمكن أن تسحب كرة زرقاء وأخرى صفراء في الوقت نفسه. نجد احتمال وقوع الحادثتين المتنافيتين بإيجاد مجموع احتمالَي كلٍّ منهما. فإذا كان احتمال سحب كرة زرقاء يساوي $\frac{٣}{٨}$، واحتمال سحب كرة صفراء يساوي $\frac{١}{٤}$، فإن احتمال سحب كرة زرقاء أو صفراء يساوي

$\frac{٣}{٨} + \frac{١}{٤} = \frac{٥}{٨}$

تنويع التعليم:

دون ضمن

المتعلمون المكانيون / البصريون: أحضر إلى الفصل علبة بذور لنبات تبّاع الشمس أو أية بذور سريعة الإنبات. وليكن عدد البذور أكثر من عدد طلاب الصف بقليل. وضّح لهم أن كل طالب سيأخذ بذرة ويزرعها في حديقة المدرسة أو في وعاء صغير. وبينما يأخذ كل طالب بذرة واحدة من العلبة، وجِّههم إلى أن عملية اختيار البذور تُمثّل حوادث غير مستقلة لهم جميعًا، باستثناء الطالب الذي سحب البذرة الأولى.

في الكسرين الأول والثاني السابقين حُسب احتمال سحب العدد ٦ مرتين؛ إحداهما في حادثة ظهور عدد زوجي، والثانية في حادثة ظهور مضاعف للعدد ٣؛ لذا يتطلب إيجاد الاحتمال المطلوب أن نطرح ح (عدد زوجي ومضاعف للعدد ٣) من مجموع الاحتمالين الأولين.

إذن ح (عدد زوجي أو مضاعف للعدد ٣) = ح (عدد زوجي) + ح (مضاعف للعدد ٣) − ح (عدد زوجي ومضاعف للعدد ٣) $= \frac{٤}{٩} + \frac{٣}{٩} - \frac{١}{٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$.

قراءة الرياضيات

أ أو ب

يختلف استعمال أ أو ب عن الاستعمال اللغوي، فالعبارة أ أو ب تسمح بإمكانية وقوع الحادثتين أ و ب معًا أيضًا.

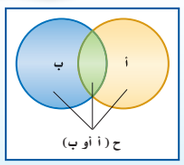
مفهوم أساسي الحوادث غير المتنافية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتماليهما ناقص احتمال وقوع الحادثتين معًا.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح(ب) − ح (أ وَ ب)

النموذج:



تنبيه !

تقاطع الحوادث

عند إيجاد احتمالات الحوادث غير المتنافية، نحسب تقاطع الحادثتين مرتين؛ لأنه يوجد في كلتا الحادثتين. لذا يجب الانتباه إلى أنه في الحقيقة يقع في تقاطعهما مرة واحدة.

مثال ٤ من واقع الحياة الحوادث غير المتنافية

الطلاب الرياضيون: **يوجد من بين ٢٤٠ طالبًا في مدرسة ما ١٧٦ طالبًا متفوقًا علميًّا و ٤٨ طالبًا متفوقًا رياضيًّا. وهناك ٣٦ طالبًا متفوقًا علميًّا ورياضيًّا. اختير طالب عشوائيًّا فما احتمال أن يكون متفوقًا علميًّا أو رياضيًّا ؟**

بما أن بعض الطلاب متفوقون علميًّا ورياضيًّا فالحادثتان غير متنافيتين.

ح (متفوق رياضيًّا)$= \frac{٤٨}{٢٤٠}$، ح (متفوق علميًّا) $= \frac{١٧٦}{٢٤٠}$، ح (متفوق رياضيًّا وعلميًّا)$= \frac{٣٦}{٢٤٠}$

ح (متفوق رياضيًّا أو علميًّا)= ح (متفوق رياضيًّا)+ ح (متفوق علميًّا)− ح (متفوق رياضيًّا وعلميًّا)

$= \frac{٤٨}{٢٤٠} + \frac{١٧٦}{٢٤٠} - \frac{٣٦}{٢٤٠}$ عوّض

$= \frac{١٨٨}{٢٤٠} = \frac{٤٧}{٦٠}$ بسط.

الاحتمال يساوي $\frac{٤٧}{٦٠}$ = ٧٨٪ تقريبًا.

تحقق من فهمك

٤) **مكعب أرقام:** عند رمي مكعب أرقام، ما احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟ $\frac{٢}{٣}$ = ٦٦,٧٪ تقريبًا.

تأكد

المثالان ١، ٢

بيّن إن كانت الحوادث في الأسئلة الآتية مستقلة أم غير مستقلة، ثم أوجد احتمال كلٍّ منها :

١) **ألعاب الأطفال:** يحتوي صندوق ألعاب على ١٢ دمية و ٨ سيارات صغيرة و ٣ كرات. إذا اختارت أمينة اثنتين عشوائيًّا من هذه الألعاب لأخيها الأصغر، فما احتمال أن تكون قد اختارت سيارتين صغيرتين؟ غير مستقلة؛ $\frac{٢٨}{٢٥٣}$ = ١١٪ تقريبًا

٢) **فواكه:** تحتوي سلة على ٦ تفاحات و ٥ موزات و ٤ برتقالات و ٥ درّاقات. إذا اختار ماجد حبة واحدة من الفاكهة عشوائيًّا وأكلها ثم اختار حبة ثانية. فما احتمال أن يكون قد اختار موزة ثم تفاحة؟ غير مستقلة؛ $\frac{٣}{٣٨}$ = ٨٪ تقريبًا

مثال إضافي

٤ **ألعاب:** في لعبة البينجو، تُسحب كرات مرقّمة بالأعداد من ١ إلى ٧٥، وتقابل هذه الأعداد أعمدة على بطاقة البينجو كما هو مبيّن في الشكل أدناه. إذا اختيرت إحدى الكرات عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون رقمها مضاعفًا للعدد ٥ أو يقع في العمود المقابل للحرف (ن)؟ $\frac{٩}{٢٥}$

ب	ي	ن	غ	و
١–١٥	١٦–٣٠	٣١–٤٥	٤٦–٦٠	٦١–٧٥

٣ التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة ١ – ٦؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي: وجِّه الطلاب إلى أنه لا يوجد تداخل في شكل (فـن) الخاص بالحادثتين المتنافيتين، في حين أن الأشكال الخاصة بالحوادث غير المتنافية تحتوي على دوائر متداخلة. اسأل الطلاب عن سبب رسم أشكال (فـن) بهذه الطريقة.

المثالان ٣، ٤

٣) **كتب:** اختار حسن كتابًا من الرف المجاور عشوائيًّا، وأعاده ثم اختار كتابًا آخر. فما احتمال أن يكون قد اختار كتابين من كتب الرياضيات؟ مستقلة؛ $\frac{٦٤}{٢٨٩} = ١,٢٢$٪ تقريبًا

يحتوي صندوق على ٨ كرات حمراء و٨ سوداء و ٨ بيضاء و ٨ زرقاء، وقد رُقّمت كرات كل لون بالأرقام من ١ إلى ٨، ثم سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا من الصندوق. حدّد هل الحادثتان في كلٍّ ممّا يأتي متنافيتان أم غير متنافيتين، ثم أوجد الاحتمال:

٤) متنافيتان؛ $\frac{١}{٤}$

٥) متنافيتان؛ $\frac{١}{٢}$

٦) غير متنافيتين؛ $\frac{٥}{٨}$

٤) ح (٢ أو ٨)

٥) ح (حمراء أو زرقاء)

٦) ح (زوجي أو سوداء)

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢

حدّد إذا كانت الحوادث فيما يأتي مستقلة أم غير مستقلة، ثم احسب احتمال كلٍّ منها:

٧) **نقود:** إذا أُلقيت قطعة نقود ٤ مراتٍ، فما احتمال ظهور الكتابة في المرات الأربع جميعها؟

٨) **مكعب أرقام:** رمي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور عددين مختلفين؟

٩) **حلوى:** يحتوي صندوق على ١٠ قطع شوكولاتة بالحليب و٨ قطع شوكولاتة سوداء و ٦ قطع شوكولاتة بيضاء. اختار محمد قطعة واحدة عشوائيًّا وأكلها، ثم اختار قطعة ثانية عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون قد اختار قطعة شوكولاتة بالحليب، ثم قطعة شوكولاتة بيضاء؟ غير مستقلة؛ $\frac{٥}{٤٦} = ١١$٪ تقريبًا

١٠) **مكعب أرقام:** إذا أُلقي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور العدد نفسه في الرميتين؟

حدّد إذا كانت الحوادث الآتية متنافية أم غير متنافية، ثم أوجد احتمال كلٍّ منها:

١١) **لعبة البولينج:** تشير نتائج سابقة إلى أن احتمال أن يُسقِط مشعل جميع القوارير في المحاولة الأولى ٣٠٪ ، واحتمال إسقاطها في المحاولة الثانية ٤٥٪ ، واحتمال عدم إسقاطها في المحاولتين ٢٥٪. فما احتمال أن يسقط مشعل القوارير جميعها في المحاولة الأولى أو الثانية لأيِّ إطارٍ؟ متنافيتان؛ $\frac{٣}{٤}$، أو ٧٥٪

١٢) **صغار القطط:** أنجبت هرة ٨ قطط صغيرة: خمس إناث ؛ اثنتان برتقاليتان، و ٣ ملونة ، وثلاثة ذكور؛ واحد برتقالي، واثنان ملونان. فأراد خالد أن يحتفظ بواحدة من القطط الصغيرة، فما احتمال أن يختار منها واحدًا برتقالي اللون أو أنثى عشوائيًّا؟ غير متنافيتين؛ $\frac{٣}{٤} = ٧٥$٪

يحتوي كيس على ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء و ١٠ خضراء، ورُقّمت البطاقات من كل لون بالأعداد من ١ إلى ١٠، فإذا سُحبت بطاقتان من دون إرجاع، فأوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية:

١٣) ح (حمراء أو زرقاء)

١٤) ح (زرقاء أو بيضاء)

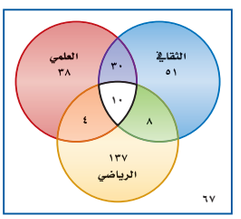
١٥) ح (١٠ ثم حمراء)

١٦) ح (٨ ثم زرقاء)

١٧) ح (خمسة ثم خضراء)

١٨) ح (٣ أو ليست بيضاء)

١٩) **النشاط المدرسي:** يمثّل شكل ڤن الآتي النشاطات المدرسية التي يشارك فيها طلاب المرحلة المتوسطة في إحدى المدارس.



أ) ما عدد طلاب المرحلة المتوسطة في هذه المدرسة؟ ٣٤٥ طالبًا

ب) ما عدد الطلاب المشاركين في النشاط الرياضي؟ ١٥٩ طالبًا

الربط مع الحياة

لعبة البولينج رياضة فردية أو جماعية، تُقذف فيها كرة من البلاستيك الثقيل (١٦ رطلًا) لتضرب قوارير خشبية أو بلاستيكية طول الواحدة منها حوالي ٣٨ سم، موضوعة في نهاية مضمار طوله ١٨ مترًا، وعرضه ١,٠٤ مترًا؛ بهدف إسقاط أكبر عدد منها وتسجيل نقاطٍ.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: يلتبس الأمر على الطلاب أحيانًا في معرفة ما إذا كانت الحوادث المركّبة مستقلةً أم غير مستقلةٍ، ومتنافيةً أم غير متنافيةٍ. وقد ترغب في إلقاء نظرة على الأسئلة ٧ – ١٢ مع الطلاب قبل الشروع في حلها. اطلب إلى الطلاب أن يعيّنوا نوع الحوادث المركّبة في كل سؤال. وإذا أخفق بعض الطلاب في تحديد نوع الحادثة، فاقترح عليهم أن يُراجعوا أمثلة الدرس جميعها.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	٧ – ١١، ٢١، ٢٢ – ٣٠
ضمن ضمن المتوسط	٧ – ١٩ (فردي)، ٢٠ – ٣٠
فوق فوق المتوسط	١٣ – ٣٠

جـ) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون مشاركًا في النشاط الرياضي أو العلمي؟ $\frac{٢٢٧}{٣٤٥} = ٦٦٪$ تقريبًا

د) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون مشاركًا في النشاطين الثقافي والعلمي فقط؟ $\frac{٢}{٢٣} = ٩٪$ تقريبًا

٢٠) **حلوى:** يحتوي وعاء على ١٠ قطع حلوى حمراء، و٦ خضراء، و٧ صفراء و ٥ برتقالية. فما احتمال أن يتم اختيار ٣ قطع عشوائيًّا مع الإرجاع، على أن تكون الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة برتقالية ؟ $\frac{١٢٥}{٥٤٨٨} = ٢٪$ تقريبًا

مسائل مهارات التفكير العليا

٢١) **اكتشف الخطأ:** يريد كلٌّ من حمدٍ وجمالٍ تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء أو حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على ٨ كرات زرقاء و ٦ حمراء و ٨ صفراء و ٤ بيضاء. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ اشرح تبريرك.

حمد

ح (زرقاء أو حمراء)
= ح(زرقاء) + ح (حمراء)
$= \frac{٨}{٢٦} + \frac{٦}{٢٦}$
$= \frac{١٤}{٢٦}$ = ٥٤٪ تقريبًا

جمال

ح (زرقاء أو حمراء)
= ح (زرقاء)×ح (حمراء)
$= \frac{٨}{٢٦} \times \frac{٦}{٢٦}$
$= \frac{٤٨}{٦٧٦}$ = ٧٪ تقريبًا

٢١) حمد؛ يجب جمع الاحتمالين؛ لأننا نريد احتمال كرة زرقاء أو حمراء، وهما حادثتان متنافيتان.

٢٢) ح (أ)، ح (ب)، ح(جـ)، ح(أ وَب)، ح (أ وَجـ)، ح(ب وَ جـ)؛ ح (أ أو ب أو جـ) = ح (أ)+ ح(ب)+ ح(جـ)− ح(أ وب)− ح (أ وَجـ)− ح(ب وَ جـ)+ ح (أ وَ ب وَ جـ)

٢٢) **تبرير:** افترض أن هناك ٣ حوادث غير متنافية هي أ، ب، جـ، واكتب جميع الاحتمالات التي يجب أخذها في الاعتبار عند حساب ح (أ أو ب أو جـ)، ثم اكتب الصيغة التي تستعمل لحساب هذا الاحتمال.

٢٣) **مسألة مفتوحة:** صف موقفًا في حياتك يتضمن حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة، واشرح الأسباب التي تجعل الحادثة مستقلة أو غير مستقلةٍ. انظر الهامش

٢٤) **اكتب:** اشرح لماذا يُستعملُ الطرح عند حساب احتمال حادثتين غير متنافيتين. انظر الهامش

تدريب على اختبار

٢٥) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكوّنة من ٤ أشخاص من بين ١٢ شخصًا؟ جـ

أ) ٤٨ جـ) ٤٩٥

ب) ٤٨٣ د) ١١٨٨٠

٢٦) **إجابة قصيرة:** إذا كان احتمال ظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقود يساوي احتمال ظهور الكتابة، فما احتمال ظهور الكتابة إذا أُلقيت قطعة النقد مرة أخرى؟ $\frac{١}{٢}$

أ) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٤}$

ب) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{٣}{٤}$

مراجعة تراكمية

٢٧) **هندسة:** مستطيل عرضه $٣\sqrt{٥}$ سنتمتر، وطوله $٤\sqrt{١٠}$ سنتمتر. أوجد مساحته. ثم اكتب الإجابة على شكل جذر في أبسط صورة. (الدرس ٩-٢) $٦٠\sqrt{٢}$ سم^٢

حل كلًّا من المعادلات الآتية، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس ٩-٤)

٢٨) $\sqrt{-٣أ} = ٦ - ١٢$

٢٩) $٥\sqrt{٢س} = ٥٠$

٣٠) $٣\sqrt{٤س} - ٢ = ١٠$ ٤

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى بعض الطلاب كتابة مثال على استعمال حسابات الاحتمالات في حياتهم اليومية: على أن يتضمّن المثال وصفًا لطريقة استعمال حسابات الاحتمالات، وعينة بيانات وحساباتها.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: في السؤال ٢١. وجِّه الطلاب إلى أنه عندما ترتبط حادثتان بالحرف (أو)، يحسب احتمال الحادثة المركّبة بجمع احتمالات الحوادث البسيطة التي تكوّنها.

إجابات:

٢٣) إجابة ممكنة: اختيار كتاب وقراءته ووضعه جانبًا، ثم اختيار كتاب آخر وقراءته ووضعه جانبًا تمثل حادثًا مستقلًّا؛ لأن الكتاب الأول وضع جانبًا قبل اختيار الكتاب الثاني. أما اختيار الواجب البيتي لمادتين لحلهما، فسيكون حادثًا غير مستقل إذا لم أضع الواجب الأول جانبًا.

٢٤) إذا كانت الحادثتان غير متنافيتين، فإنه يوجد فيهما عناصر مشتركة؛ لذا لا بد أن نطرح، للتخلّص من العناصر التي تُحسب مرتين.

٤ التقويم

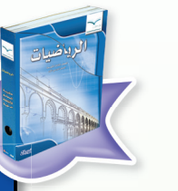
بطاقة مكافأة: اكتب أمثلة على الاحتمالات في قصاصات من الورق باستعمال كافة أنواع الحوادث المركّبة، وأعطِ كل طالب واحدًا من هذه الأمثلة، وعندما يخرج الطلاب من الصف، اطلب إلى كلٍّ منهم أن يذكر نوع الحوادث في المثال الذي بحوزته: هل هي حوادث مستقلة أم غير مستقلة، ومتنافية أم غير متنافية؟ وأن يُحدّد احتمال الحادثة، ويسلّمك ورقته قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس (١٠-٥) بإعطائهم:

الاختبار القصير (٤)، ص (٨٨)

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس ١٠ - ٥

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (٢٢) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

٥-١٠ تدريبات إعادة التعليم
احتمالات الحوادث المركبة

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة، تكوّن **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. والحوادث إمّا أن تكون مستقلة أو غير مستقلة.

احتمال حادثتين مستقلتين	نتيجة إحدى الحادثتين لا تؤثر في نتيجة الأخرى.	ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب)	**مثال:** ظهور الرقم ٦ على مكعب أرقام في الرمية الأولى، ثم ظهور الرقم ٥ في الرمية الثانية.
احتمال حادثتين غير مستقلتين	نتيجة إحدى الحادثتين تؤثر في نتيجة الأخرى.	ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)	**مثال:** اختيار كرة حمراء من كيس، ثم اختيار كرة زرقاء دون إرجاع.

مثال ١: **أوجد احتمال ظهور الرقم ٦ في الرمية الأولى وظهور ٥ في الرمية الثانية عند إلقاء مكعب أرقام مرتين.**

الحادثتان مستقلتان؛ لذا: ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب)

في الرمية الأولى: ح (ظهور٦) = $\frac{١}{٦}$

في الرمية الثانية: ح (ظهور٦) = $\frac{١}{٦}$

ح (٦ و ٥) = ح (٦) × ح (٥)

= $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦}$

= $\frac{١}{٣٦}$

احتمال ظهور ٦ ثم ٥ عند إلقاء المكعب مرتين يساوي $\frac{١}{٣٦}$.

مثال ٢: **يحتوي كيس على ٣ كرات حمراء و ٤ كرات زرقاء. اختيرت منه كرتان عشوائيًّا دون إرجاع. أوجد احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين.**

الحادثتان غير مستقلتين؛

لذا: ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)

الكرة الأولى: ح (زرقاء) = $\frac{٤}{٧}$

الكرة الثانية: ح (زرقاء) = $\frac{٣}{٦}$

ح (زرقاء وزرقاء) = $\frac{٤}{٧} \times \frac{٣}{٦} = \frac{١٢}{٤٢} = \frac{٢}{٧}$

احتمال سحب كرتين زرقاوين دون إرجاع يساوي $\frac{٢}{٧}$.

تمارين

يحتوي كيس على ٣ كرات حمراء و ٤ كرات زرقاء و ٦ كرات صفراء. اختيرت منه كرات واحدة تلو الأخرى عشوائيًّا من دون إرجاع. أوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية:

١) ح (صفراء ثم صفراء)　　٢) ح (حمراء ثم صفراء)　　٣) ح (زرقاء ثم حمراء ثم صفراء)

$\frac{٥}{٣٦}$　　$\frac{٢}{١٣}$　　$\frac{٦}{١٤٣}$

٤) يوجد في صندوق بطاقتان حمراوان وبطاقتان بيضاوان. إذا اختيرت من الصندوق بطاقتان عشوائيًّا من دون إرجاع، فما احتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء؟ $\frac{١}{٦}$

٥) إذا أُلقيت قطعتا نقد معدنيتان في بركة ماء، فما احتمال ظهور الشعار على القطعتين؟ $\frac{١}{٤}$

٦) إذا أُلقي مكعب أرقام وقطعة نقد معدنية، فما احتمال ظهور ٢ وكتابة؟ $\frac{١}{١٢}$

تدريبات حل المسألة (٢٤) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٥-١٠ تدريبات حل المسألة
احتمالات الحوادث المركبة

١) **تاريخ ميلاد،** سأل سهيل صديقه أحمد عن تاريخ ميلاده. ما احتمال أن يكون تاريخ ميلاد أحمد مطابقًا لتاريخ ميلاد سهيل أو قبله بيوم واحد أو بعده بيوم واحد؟ (افترض السنة ٣٦٥ يومًا وأن جميع أيام السنة متساوية الاحتمال).
٠,٠٠٨٢ أو ٠,٨٢ ٪ تقريبًا

٢) **رياضة،** تتكوّن مباراة إحدى الألعاب الرياضية بين الفريقين أ، ب من ٧ جولات، ويفوز في المباراة الفريق الذي يكسب ٤ جولات منها. إذا كان لكلّ فريق الفرصة نفسها في الفوز في كل جولة، فما احتمال أن تنتهي المباراة بفوز الفريق ب في أول ٤ جولات؟
٠,٠٦٢٥ أو ٦,٢٥٪

٣) **تجارة،** يوجد في شركة لصناعة مواد التغليف ٦ موظفين مسؤولين عن تسويق وبيع منتجات الشركة، وهم ٣ فنيين و ٣ إداريين. أراد مدير الشركة أن يرسل ٤ من هؤلاء الموظفين لحضور مؤتمر حول صناعة التغليف، على أن يكون اختيارهم عادلًا، فقرر كتابة أسماء الموظفين الستة على قصاصات عشوائيًّا. ما احتمال أن تكون اللجنة التي ستحضر المؤتمر من ٣ إداريين وفني واحد؟
٠,٢ أو ٢٠ ٪

٤) **كرات،** يوجد في كيس ١٠ كرات حمراء و ٦ خضراء و ٤ سوداء. إذا اختار كل واحد من ٣ أشخاص كرة واحدة من الكيس عشوائيًّا دون إرجاع، فما احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء؟
٠,١٠٥ تقريبًا أو ١٠,٥٪ تقريبًا

٥) **أسهم،** اشترى عصام ١٠٠ سهم من أسهم إحدى شركات صناعة الأدوية. وتسعى هذه الشركة للحصول على اعتماد أحد الأدوية من الجهة المسؤولة. احتمال اعتماد هذا الدواء يساوي ٥٠٪ بناءً على تقارير خبراء الأدوية. وفي حال اعتماده فإنّ احتمال أن يصبح سعر سهم الشركة مثلَي سعره الأصلي يساوي ٨٥٪ بناءً على تقارير خبراء سوق الأسهم.

أ) ما احتمال أن تحصل الشركة على اعتماد للدواء وأن يصبح سعر سهمها مثلَي سعره الأصلي؟
٠,٤٢٥ أو ٤٢,٥ ٪

ب) ما احتمال أن تحصل الشركة على اعتماد للدواء وألّا يصبح سعر سهمها مثلَي سعره الأصلي؟
٠,٠٧٥ أو ٧,٥ ٪

جـ) هل هاتان الحادثتان مستقلتان أم غير مستقلتين؟
غير مستقلتين؛ لأن احتمال أن يصبح سعر سهم الشركة مثلَي سعره الأصلي يعتمد على احتمال حصول الشركة على اعتماد للدواء.

التدريبات الإثرائية (٢٥) — فوق

الاسم _____ التاريخ _____

٥-١٠ التدريبات الإثرائية
تاريخ ميلاد

طُلب من متسابق في أحد برامج المسابقات التلفازية أن يختار عشوائيًّا عددًا كافيًا من الأشخاص للحضور إلى الغرفة، بحيث تكون احتمالية ميلاد أحدهم (على الأقل) في نفس اليوم والشهر الذي ولد فيه المتسابق أكبر من ٥٠٪. ولأهمية عامل الزمن في المسابقة، فإنّ المتسابق لا يريد أن يختار عددًا من الأشخاص أكثر من العدد الضروري. ما عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة؟

١) خمّن عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة.
مستنوع الإجابات. أحد التخمينات التالية ١٨٧ تقريبًا.

٢) إذا كان احتمال أن يكون لكلّ شخص في الغرفة تاريخ ميلاد مختلف هو أصغر من ٥٠٪، فإنّ احتمال أن يشترك اثنان منهم في تاريخ الميلاد هو أكبر من ٥٠٪. اشرح سبب ذلك.
إجابة ممكنة: لأنه إذا كان احتمال الحادثة أصغر من ٥٠٪، فإنّ احتمال الحادثة المتممة يساوي ١ − (أصغر من ٥٠ ٪). وهذا سيكون أكبر من ٥٠٪

٣) لاحظ النمط الآتي:
إذا كان في الغرفة شخصان فإن احتمال أن يكون تاريخا ميلادهما مختلفين يساوي:
$\frac{٣٦٥}{٣٦٥} \times \frac{٣٦٤}{٣٦٥}$ = ٩٩,٧٪.
وإذا كان في الغرفة ٣ أشخاص فإن احتمال أن تكون تواريخ ميلادهم مختلفة يساوي:
$\frac{٣٦٥}{٣٦٥} \times \frac{٣٦٤}{٣٦٥} \times \frac{٣٦٣}{٣٦٥}$ = ٩٩,٢٪.
وإذا كان في الغرفة ٤ أشخاص فإن احتمال أن تكون تواريخ ميلادهم مختلفة يساوي:
$\frac{٣٦٥}{٣٦٥} \times \frac{٣٦٤}{٣٦٥} \times \frac{٣٦٣}{٣٦٥} \times \frac{٣٦٢}{٣٦٥}$ = ٩٨,٤٪
استمرّ في توسعة هذا النمط إلى أن تحصل على احتمال أصغر من ٥٠٪. ما عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة للحصول على احتمال أصغر من ٥٠٪؟
٢٣ شخصًا

٤) وبناءً عليه، فما عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة ليكون احتمال اشتراك اثنين منهم في تاريخ الميلاد نفسه أكبر من ٥٠٪؟ قارن هذا العدد بتخمينك في السؤال ١.
٢٣ شخصًا؛ انظر إجابات الطلاب.

٥) استعمل الطريقة السابقة لتحديد عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة ليكون احتمال اشتراك اثنين منهم في تاريخ الميلاد نفسه (دون تحديد للشهر) أكبر من ٥٠٪؟
٧ أشخاص

كتاب التمارين (٣٢) — دون ضمن فوق

٥ - ١٠ احتمالات الحوادث المركّبة

يحتوي كيس على ٥ كرات حمراء، و٣ بيّنة، و٦ صفراء، وكرتين زرقاوين. إذا سُحبت ٣ كرات عشوائيًّا من الكيس دون إرجاع، فأوجد الاحتمالات الآتية:

١) ح (بيّنة، ثم صفراء، ثم حمراء) $\frac{٣}{١١٢}$　　٢) ح (حمراء، ثم حمراء، ثم زرقاء) $\frac{١}{٨٤}$

٣) ح (صفراء، ثم صفراء، ثم ليست زرقاء) $\frac{٣}{٢٨}$　　٤) ح (بيّنة، ثم بيّنة، ثم ليست صفراء) $\frac{١}{٧٠}$

رُمي مكعب أرقام، وسُحبت بطاقة من كيس فيه ١٠ بطاقات حمراء، و١٠ بيضاء و١٠ زرقاء و١٠ خضراء، وكانت البطاقات من كل لون مرقّمة من ١ إلى ١٠. أوجد الاحتمالات الآتية.

٥) ح (العدد ٦ وبطاقة تحمل رقم ١٠) $\frac{١}{٦٠}$　　٦) ح (عدد أولي وبطاقة زرقاء) $\frac{١}{٨}$

٧) ح (عدد أقل من ٣ وبطاقة حمراء) $\frac{١}{١٢}$　　٨) ح (عدد أكبر من ١ وبطاقة ليست خضراء) $\frac{٥}{٨}$

٩) **طقس،** ذكر الراصد الجوي أن فرصة سقوط أمطار يوم الثلاثاء تساوي ٤٠٪، وفرصة سقوط أمطار يوم الأربعاء ٦٠٪. إذا كان الاحتمالان مستقلين، فما احتمال سقوط المطر في اليومين معًا؟ ٢٤٪

١٠) **طعام،** وضع حسين في كيس وصفات لأربعة أطباق من المعكرونة، وخمسة أطباق من اللحم بالخضار، وثلاثة أطباق من المقبلات، وثمانية أطباق من الحلوى.

أ) إذا اختار حسين إحدى الوصفات عشوائيًّا، فما احتمال أن يختار وصفة معكرونة أو وصفة لحم بالخضار؟
$\frac{٩}{٢٠}$ = ٤٥٪

ب) إذا اختار حسين إحدى الوصفات عشوائيًّا، فما احتمال ألّا يختار طبق حلوى؟ ٠,٦ = ٦٠٪

جـ) إذا اختار حسين وصفتين عشوائيًّا دون إرجاع، فما احتمال أن تكون الأولى وصفة طبق لحم بالخضار، والثانية وصفة طبق حلوى؟ $\frac{٥}{٦٦}$ = ٧,٥٪ تقريبًا

ملحوظات المعلم

عيّن العينة والمجتمع الذي اختيرت منه فيما يأتي، ثم صنّف الطريقة المُستعملة لجمع البيانات:

١) **لُعب:** دعت شركة تنتج لُعبًا للأطفال ٥٠ طفلًا لاختبار لعبة جديدة ورصدت ردود أفعالهم. انظر الهامش

٢) **أزهار:** أرسل مشتل استبانة؛ لتحديد نوع الأزهار التي يفضلها الناس بصورة أكثر. وقد أرسل هذه الاستبانة إلى من تخطّى سن الـ ٥٠ سنة في القوائم البريدية الخاصة بزبائن المشتل. انظر الهامش

احسب قيمة كلٍّ من المقادير الآتية:

٣) ${}_{٥}ل^{٧}$ ٢٥٢٠ ٤) ${}_{٤}ق^{١٠}$ ٢١٠

٥) ${}_{٢}ق^{٧}$ ٢١ ٦) ${}_{٣}ل^{٦}$ ١٢٠

ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات الآتية؟ برّر إجابتك، واحسب قيمة المقياس:

٧) **اقتراع:** رصد مركز اقتراع، أعمار الأشخاص الذين اقترعوا في ذلك المركز فكانت: ٢١، ٢٥، ٣٢، ٤١، ٣٢، ٢٠، ٦٥، ٣٣، ٣٠، ٧٢ الوسيط؛ يوجد قيم متطرفة؛ ٣٢

٨) **تسوّق:** رصد محل تجاري عدد القطع التي يشتريها المتسوقون في يوم معيّن فكانت: ٣، ٤، ٥، ٣، ٤، ٥، ٥، ٣، ٢، ٣، ٢، ١٠. الوسيط؛ توجد قيم متطرفة؛ ٣,٥

بيّن إن كانت العينة في كلٍّ ممّا يأتي متحيزة أم غير متحيزة، وبرّر إجابتك:

٩) **صحف:** أُرسلت استبانة لجميع المشتركين في إحدى الصحف؛ لمعرفة الصحيفة التي يفضل الناس قراءتها. انظر الهامش.

١٠) **تسوّق:** سُئل كل شخص يغادر مجمّعًا تجاريًّا عن أفضل ٣ محالّ لبيع الملابس في المجمّع. انظر الهامش.

١١) **كتب:** بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة من بين عشرة كتب مختلفة؟ ١٢٠.

١٢) ما الاحتمال النظري لظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقد؟ $\frac{١}{٢}$

١٣) **مكعب أرقام:** عند رمي مكعب أرقام مرتين، ما احتمال ظهور العدد ٢ في المرة الأولى، والعدد ٣ في المرة الثانية؟ $\frac{١}{٣٦}$

١٤) **تعليم:** سأل خالد ٢٠٠ طالب في مدرسته عن عدد الأيام التي يحل فيها الطلاب واجباتهم المنزلية في الأسبوع. وعرضت النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأيام	عدد الطلاب
٠	٦
١	١٨
٢	٣١
٣	٤٦
٤	٥٧
٥ أو أكثر	٤٢

أ) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون قد حلّ واجبات منزلية في أكثر من أربعة أيام؟ ٢١٪

ب) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في ثلاثة أيام على الأكثر؟ ٥٠,٥٪

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعات البيانات الآتية:

١٥) ٤، ٥، ٥، ٦، ٦، ٩، ٨، ١٠ ١٦) ٢٢، ٢٥، ٢٧، ٣٠

٦,٦؛ ٢,٠، ٤,٠ ٢٦، ٨,٥، ٢,٩

١٧) **صحف:** تابع ناصر زمن مطالعة الصحيفة بالدقائق لسبعة من زملائه في أحد الأيام فكانت: ٥، ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٦٠. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة. ١٢,٩

١٨) **اختيار من متعدد:** لتمثيل مدرسة متوسطة في تجمّع طلابي اختير طالبان عشوائيًّا من كلِّ صفٍّ من الصفوف: الأول والثاني والثالث المتوسط. فما أفضل وصف لهذه العينة؟ ب

أ) بسيطة. ج) منتظمة.

ب) طبقية. د) لا شيء مما ذُكر.

المعالجة

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًا للطلاب.

إجابات:

١) العينة هم الأطفال الخمسون، والمجتمع هو الأطفال جميعهم. طريقة جمع البيانات: دراسة قائمة على الملاحظة.

٢) العينة: من تخطّى سن الـ٥٠ سنة جميعهم على القائمة البريدية الخاصة بزبائن المشتل. المجتمع: الزبائن على القائمة البريدية للمشتل. طريقة جمع البيانات: الدراسة المسحية.

٩) متحيّزة؛ لأن الدراسة المسحية أُجريت على مشتركي الصحيفة بعينها؛ لذا سيختار المستجيبون تلك الصحيفة على الأغلب.

١٠) غير متحيّزة؛ لأن الأشخاص الذين يخرجون من المجمّع سُئلوا جميعًا.

مخطط المعالجة

المستوى ١	ضمن المتوسط	المستوى ٢	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لايزيد على ٢٥٪ تقريبًا من التمارين.	إذا	أخطأ بعض الطلاب في ٥٠٪ تقريبًا من التمارين.
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس ١٠-١ إلى ١٠-٥	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل ص (١٥٨)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

تشخيص أخطاء الطلاب.

تفحص إجابات الطلاب عن كل فقرة؛ إذ قد تشير إجاباتهم إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية.

١) أ) الإجابة الصحيحة
ب) اختيار مقياس لا يتأثّر بالقيم المتطرفة.
جـ) اختيار مقياس لا يتأثّر بالقيم المتطرفة.
د) اختيار مقياس لا يتأثّر بالقيم المتطرفة.

٢) أ) اختيار عامل
ب) اختيار عامل
جـ) اختيار عامل
د) الإجابة الصحيحة

٣) أ) سوء فهم لمفهوم التوافيق
ب) سوء فهم لمفهوم التوافيق
جـ) الإجابة الصحيحة
د) خطأ حسابي

٤) أ) الإجابة الصحيحة
ب) سوء فهم لطريقة حساب الميل
جـ) سوء فهم لطريقة حساب الميل
د) سوء فهم لطريقة حساب الميل

٥) أ) تفسير المقطع الصادي بصورة غير صحيحة بدلًا من الميل.
ب) تفسير المقطع الصادي بدلًا من الميل.
جـ) الإجابة الصحيحة
د) تفسير الميل بصورة غير صحيحة

٦) أ) تخمين أو استعمال أرقامٍ غير صحيحة للحساب.
ب) تخمين أو استعمال أرقام غير صحيحة للحساب .
جـ) الإجابة الصحيحة.
د) تخمين أو استعمال أرقام غير صحيحة للحساب.

٧) أ) تخمين أو خطأ حسابي.
ب) الإجابة الصحيحة.
جـ) التبديل بين ثمن تذكرة الأطفال وثمن تذكرة الكبار.
د) تخمين أو خطأ حسابي.

اختبار تراكمي (٢)

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة.

١) يبيِّن الجدول الآتي عدد السُّعرات الحرارية في ١٢ صنفًا من الأطعمة الخفيفة المختلفة. فما مقياس النزعة المركزية الأكثر تأثرًا بالقيمة المتطرفة ٣٤٢ سُعرًا؟ أ

عدد السعرات الحرارية في الأطعمة			
١٢١	١٤٩	٨٧	١٢٢
٧٢	٣٤٢	١٣٨	٦٤
١١٤	٩٩	١٠٥	١٧٩

أ) المتوسط الحسابي
جـ) المنوال
ب) الوسيط
د) المدى

٢) أيٌّ ممّا يأتي ليس من عوامل $س^{٤} - ٦س^{٢} - ٢٧$؟ د

أ) $س^{٢} + ٣$
جـ) $س + ٣$
ب) $س - ٣$
د) $س^{٢} - ٣$

٣) لدى فاروق ٢٠ رواية، ويريد أن يختار ٣ روايات منها ليأخذها معه في رحلة لبضعة أيام. فبكم طريقة يمكنه أن يختار الروايات إذا كان الترتيب غير مهمٍّ؟ جـ

أ) ٦٠
جـ) ١١٤٠
ب) ٨٤
د) ١٤٨٢

إرشادات للاختبارات

السؤال ٣: بما أن الترتيب غير مهم، فإن المطلوب هو عدد التوافيق للروايات التي يمكن اختيارها.

٤) ما معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-١، -٣)، (-٢، ٣)$؟ أ

أ) $ص = -٦س - ٩$
جـ) $ص = ٤س - ٥$
ب) $ص = -\frac{١}{٤}س + ٣$
د) $ص = \frac{٢}{٣}س + ١$

٥) ترتفع قمة جبل حتى ٢٠٣٧ مترًا فوق سطح البحر. فإذا تحدد موقع شخص يسير على هذا الجبل. بالدالة م (ن) = $-٥,٢ن + ٢٠٣٧$، حيث ن عدد الدقائق، فأيٌّ ممّا يأتي يُعدُّ أفضل تفسير لميل الدالة؟ جـ

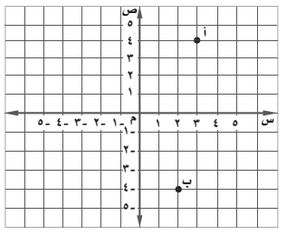
أ) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ مترًا تحت مستوى سطح البحر.

ب) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ مترًا فوق مستوى سطح البحر.

جـ) ينزل هذا الشخص بسرعة ٢,٥ متر لكل دقيقة.

د) يصعد هذا الشخص بسرعة ٢,٥ متر لكل دقيقة.

٦) أوجد المسافة بين النقطتين أ وَ ب مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ؟ أ



أ) ٨,١
جـ) ٩,٦
ب) ٨,٥
د) ١٠,٢

٧) ثمن تذكرة دخول المتحف للأطفال ٨ ريالاتٍ، وللكبار ١٥ ريالًا. ما هي تكلفةُ دخول عائلة مكوَّنة من ٤ أطفال ووالِدِيهِمْ؟ ب

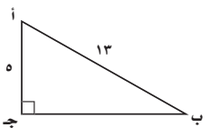
أ) ٤٨ ريالًا
جـ) ٧٦ ريالًا
ب) ٦٢ ريالًا
د) ٩٠ ريالًا

الفصل ١٠ اختبار تراكمي ٢

إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٨) ما قيمة جا ب في الشكل أدناه؟ اكتب إجابتك في صورة كسر اعتيادي. $\frac{٥}{١٣}$



٩) أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية، موضّحًا خطوات الحل، ثم قرّب الإجابة إلى أقرب جزءٍ من عشرة إذا لزم ذلك. ٣,٤

١٤	١١	٩	٦
١٠	١٦	١٥	١٣
٩	١٢	١٩	١٠

١٠) مع لطيفة علبة فيها ٥ قطع بسكويت بطعم البندق و٧ قطع بطعم الشوكولاتة و٩ قطع بطعم جوز الهند و ٤ قطع بطعم الفراولة. إذا اختارت قطعتين من العلبة عشوائيًّا من دون إرجاع، فما احتمال أن تختار قطعة بطعم البندق، ثم قطعة بطعم الفراولة؟ اكتب الإجابة في صورة كسر اعتيادي. $\frac{١}{٣٠}$

١١) اكتب عبارة جبرية تمثّل مساحة مثلث ارتفاعه ٤جـ^{٣} د^{٢}، وطول قاعدته ٣جـ د^{٤} بالوحدات المربعة. ٦جـ^{٤} د^{٦}

١٢) سجّل عدنان ٨٤ هدفًا خلال موسم كرة السلة، وكان مجموع النقاط لهذه الأهداف ١٨٣ نقطة. إذا علمت أنه يمكن أن يكون للهدف نقطتان أو ثلاث نقاط، فما عدد الأهداف التي حصل فيها على ٣ نقاط، والأهداف التي حصل فيها على نقطتين في هذا الموسم؟ ١٥ هدفًا بثلاث نقاط و ٦٩ هدفًا بنقطتين.

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل.

١٣) أراد مجلس بلدية أن يُعِيدَ تنظيم أحد أحياء المدينة. فقرّر أعضاء المجلس أن يستطلعوا آراء سكان الحي. فاختار المجلس ٢٥٠ ربَّ أسْرة من سكان الحي عشوائيًّا، ثم سألهم عبر الهاتف عن رأيهم في مشروع إعادة التنظيم. وبناءً على نتائج الاستطلاع، توصّل المجلس إلى استنتاج أن ٧١٪ من سكان الحي يؤيّدون إعادة التنظيم. أ- هـ انظر الهامش

أ) حدّد العينة.

ب) صِفِ المجتمع الذي اختيرت منه.

جـ) هل طريقة جمع البيانات التي استعملها المجلس دراسة مسحية أم تجريبية أم دراسة قائمة على الملاحظة؟ اشرح إجابتك.

د) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

هـ) إذا كانت العينة غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. وفسّر إجابتك.

للمساعدة ..													
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
فراجع الدرس ..	٢-١٠	٧-٢	١٠-٤	٣-٢	٢-٥	٩-٥	٥-٣	٩-٧	١٠-٣	١٠-٥	٦-١	٥-٥	١٠-١

التقويم التكويني:

يمكن استعمال هاتين الصفحتين لتقويم تقدّم الطلاب.

الاختبار المعياري في مصادر الفصل ١٠

التدريب على استعمال ورقة الإجابة

اطلب إلى الطلاب محاكاة أداء الاختبار المعياري، وذلك بتسجيل إجاباتهم في النموذج الخاص من مصادر الفصل.

إجابات:

١٣أ) إجابة ممكنة: ٢٥٠ رب أسرة من الحي.

١٣ب) إجابة ممكنة: أرباب أسر الحي جميعهم.

١٣جـ) دراسة مسحية؛ لا يوجد تجربة ولا دراسة قائمة على الملاحظة.

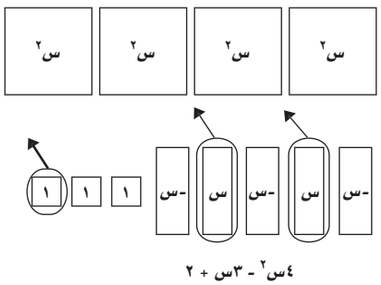
١٣د) غير متحيّزة؛ لأن لكل رب أسرة الفرصة نفسها ليكون بين الذين تم الاتصال بهم.

١٣هـ) عينة بسيطة؛ إجابة ممكنة؛ لأن لكل رب أسرة الفرصة نفسها ليكون بين الذين تم الاتصال بهم.

الفصل السادس

استكشاف الدرس ٦-٤، ص (٢٧) :

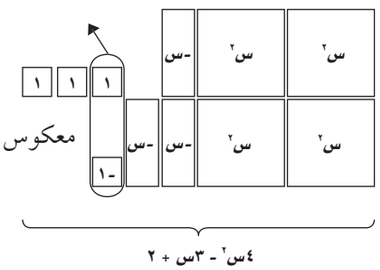
٤) الطريقة من نشاط ٢:



٤س² - ٣س + ٢

أنت بحاجة إلى إضافة أزواج صفرية؛ لتتمكّن من حذف بطاقتين من النوع (س)، وبطاقة واحدة من النوع (١).

الطريقة من نشاط ٣:



٤س² - ٣س + ٢

تُحذف الأزواج الصفرية جميعها؛ لإيجاد الفرق في أبسط صورة.

الدرس ٦-٦، ص (٤٣) :

٢٧ب) أول حدٍّ في مربع مجموع حدين، هو مربع الحد الأول، والحد الأوسط هو مثلا حاصل ضرب الأول في الحد الثاني، والحد الثالث هو مربع الحد الثاني.

٣١) يمكن استعمال الضرب رأسيًّا، وذلك بتوزيع الضرب وتجميع الحدود، وتُستعمل طريقة التوزيع بالترتيب أو الطريقة الأفقية، حيث يضرب كلٌّ من الحدين: الأولين، والطرفين، والأوسطين، والأخيرين في ثنائية الحدود. ويمكن استعمال الطريقة المستطيلة أيضًا، بكتابة حدود كثيرات الحدود في أعلى المستطيل والضلع الأيمن منه، ثم ضرب الحدود وتجميع الحدود المتشابهة منها.

الفصل السابع

الدرس ٧-١، ص (٥٣ - ٥٥) :

٢٣) الارتفاع ١ سم، القاعدة ٥٦سم.
الارتفاع ٢ سم، القاعدة ٢٨ سم.
الارتفاع ٤ سم، القاعدة ١٤ سم.
الارتفاع ٧ سم، القاعدة ٨ سم.
الارتفاع ٨ سم، القاعدة ٧ سم.
الارتفاع ١٤ سم، القاعدة ٤سم.
الارتفاع ٢٨ سم، القاعدة ٢ سم.
الارتفاع ٥٦ سم، القاعدة ١ سم

٢٤) رفَّان وَ ١٨ كتابًا؛ ٣ رفوف وَ ١٢ كتابًا؛ ٤ رفوف وَ ٩ كتب؛ ٦ رفوف وَ ٦ كتب؛ ٩ رفوف وَ ٤ كتب.

٣١) خاطئة، إجابة ممكنة: (ق . م . أ) لوحيدتي الحد ٩٩ س^{٥} ص^{١١} ع^{٣٠}، ١٠١ أ ب جـ يساوي ١ .

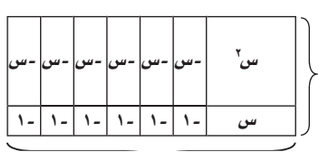
٣٣) إجابة ممكنة: ٦ص^{٣}، ١٢ص^{٤}، ١٨ص^{٥}؛ ٦ هو أكبر قاسم عددي مشترك بين وحيدات الحد الثلاث، ص^{٣} أعلى قوة مشتركة لـ ص.

٣٤) لتحليل عدد إلى عوامله الأولية، نكتب قائمة العوامل الأولية للعدد. ويوجد لذلك ثلاث طرق: الطريقة الأولى هي إيجاد العوامل الأولية الصغرى، والاستمرار في قسمة العدد على أعداد أولية صغيرة، حتى تجد جميع الأعداد الأولية فيه، ثم كتابة هذه العوامل في صورة حاصل ضرب.
ثانيًا: يمكن استعمال الرسم الشجري. وذلك بالبدء باختيار أي عاملين للعدد، ثم الاستمرار في إيجاد العوامل الأخرى لكل فرع من الشجرة، والانتهاء بالعوامل الأولية. ويمكن وضع دائرة حول العوامل الأولية لمتابعتها. وأخيرًا يمكن استعمال مخطّط السلّم، وذلك بالبدء بقسمة العدد على عامل أولي، والاستمرار بالقسمة على عوامل أولية للوصول إلى الناتج ١ .

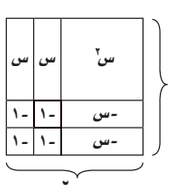
استكشاف الدرس ٧-٣، ص (٦٣) :

٥) لا يمكن رسم مستطيل يحقق المطلوب.

٦) نعم



٧) نعم

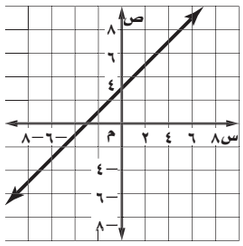


٨) لا يمكن رسم مستطيل يحقق المطلوب.

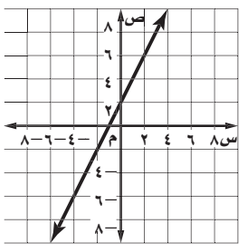
الفصل الثامن

التهيئة للفصل ٨ ، ص (٨٩) :

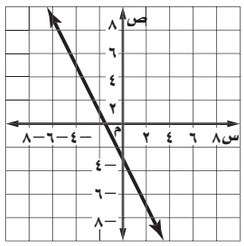
١)



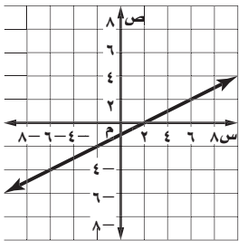
٢)



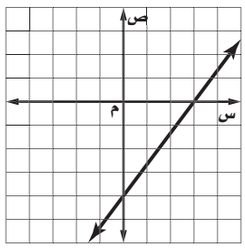
٣)



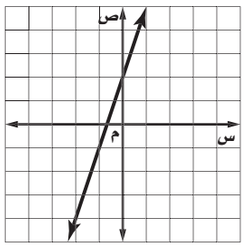
٤)



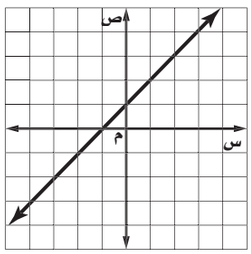
٥)



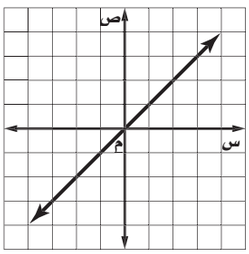
٦)



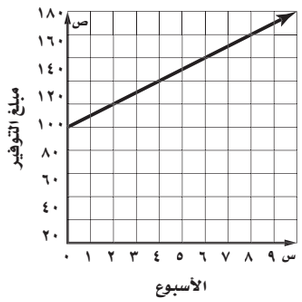
٧)



٨)



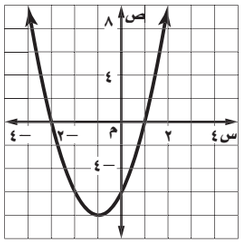
٩)



الدرس ٨-١، ص (٩٥-٩٧) :

١)

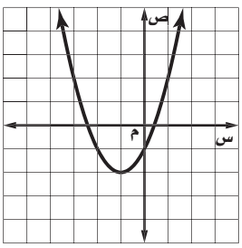
س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٠	-٦	-٨	-٦	٠	١٠



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى = {ص | ص ≤ -٨ }

٢)

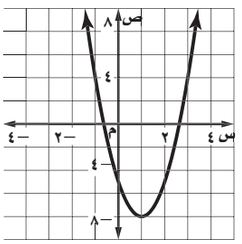
س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٢	-١	-٢	-١	٢	٧



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى = {ص | ص ≤ -٢ }

٣)

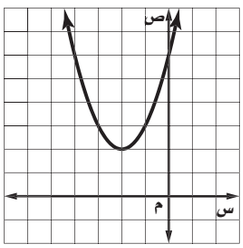
س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	١٩	٤	-٥	-٨	-٥	٤



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى = {ص | ص ≤ -٨}

١٧)

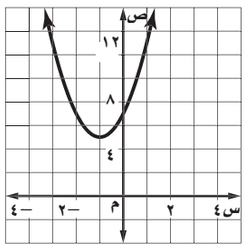
س	-٤	-٣	-٢	-١	٠
ص	٦	٣	٢	٣	٦



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى = {ص | ص ≤ ٢}

١٨)

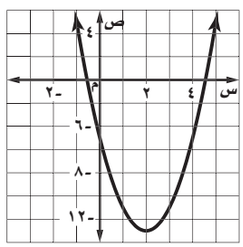
س	-٣	-٢	-١	٠	١
ص	١٣	٧	٥	٧	١٣



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى = {ص | ص ≤ ٥}

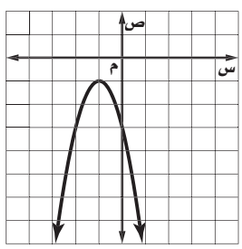
١٩)

س	٤	٣	٢	١	٠
ص	-٥	-١١	-١٣	-١١	-٥

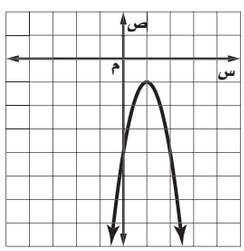


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى = {ص | ص ≤ -١٣}

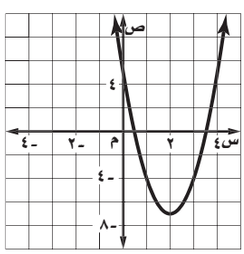
٢٩)



٣٠)



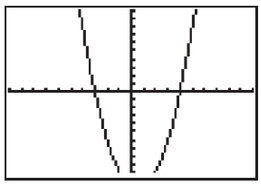
٣١)



٣٣أ)

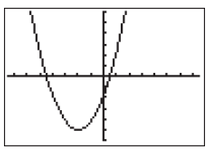
المعادلة	الدالة المرتبطة	الأصفار
$س^{٢} - س = ١٢$	$ص = س^{٢} - س - ١٢$	-٣ ، ٤
$س^{٢} + ٨س = ٩$	$ص = س^{٢} + ٨س - ٩$	-٩ ، ١
$س^{٢} = ١٤س - ٢٤$	$ص = س^{٢} - ١٤س + ٢٨$	٢ ، ١٢
$س^{٢} + ١٦س = ٢٨$	$ص = س^{٢} + ١٦س + ٢٨$	-١٤، -٢

٣٣ب)



[-١٠، ١٠] scl: ١
by ١ :scl [-١٠، ١٠]

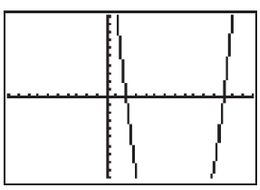
ص = $س^{٢}$ - س - ١٢



[-١٥، ١٥] scl: ٢ by [-٣٠، ٣٠] scl: ٥

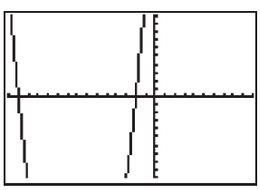
by ٢ :scl [-١٥، ١٥]
٥ :scl [-٣٠، ٣٠]

ص = $س^{٢}$ + ٨س - ٩



by ١ :scl [-١٥، ١٠]
١ :scl [-١٠، ١٠]

ص = $س^{٢}$ - ١٤س + ٢٤



by ١ :scl [-١٥، ١٠]
١ :scl [-١٠، ١٠]

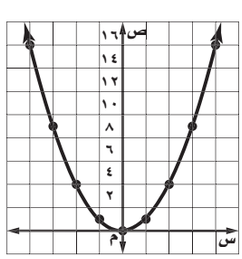
ص = $س^{٢}$ + ١٦س + ٢٨

توسع ٨-١، ص (٩٨) :

١)

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	١٦	٩	٤	١	٠	١	٤	٩	١٦

٢)



تتزايد الدالة عندما س ≤ ٠، وتتناقص عندما س > ٠.

٣)

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	١٦	٩	٤	١	٠	١	٤	٩	١٦
معدل التغير	٠٠	-٧	-٥	-٣	-١	١	٣	٥	٧

إجابة ممكنة: معدل التغير عندما تتناقص الدالة هو عكس معدل التغيّر عندما تتزايد.

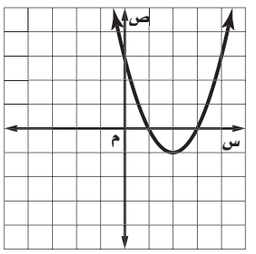
٤)

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	-١٥٦	-٤٤	٣٦	٨٤	١٠٠	٨٤	٣٦	-٤٤	١٥٦
معدل التغير	٠٠	١١٢	٨٠	٤٨	١٦	-١٦	-٤٨	-٨٠	-١١٢

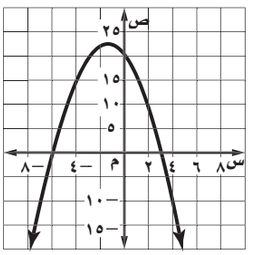
إجابة ممكنة: يكون لمعدل التغير عندما تتزايد الدالة القيمة المطلقة نفسها عند تناقص الدالة.

الدرس ٨-٢، تحقق من فهمك، ص (٩٩، ١٠٠) :

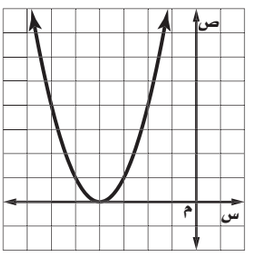
١أ)



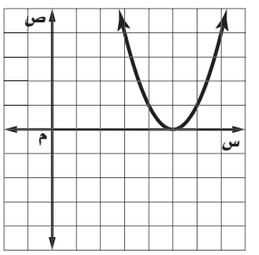
١ب)



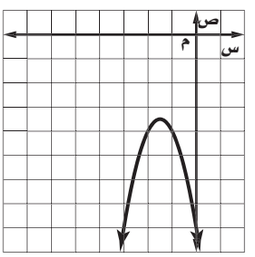
٢أ)



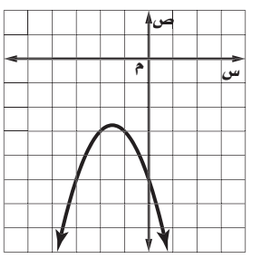
٢ب)



٣أ)

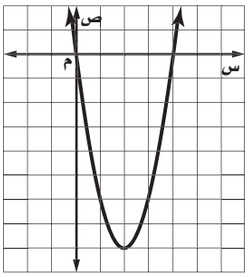


٣ب)

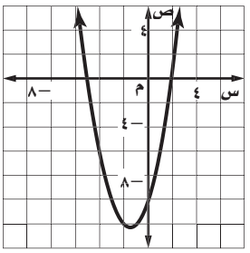


الدرس ٨-٢، ص (١٠٢، ١٠٣) :

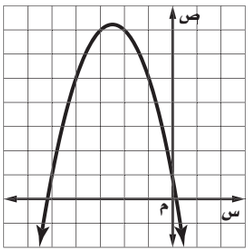
١)



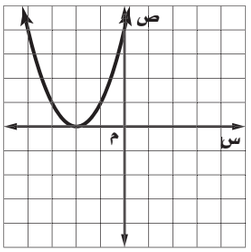
٢)



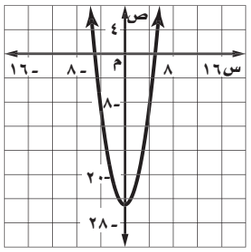
٣)



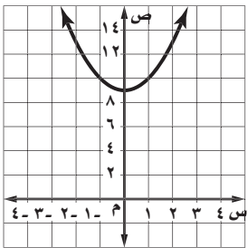
٤)



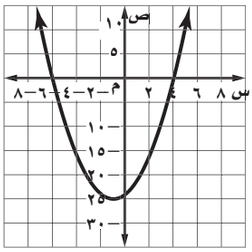
٥)



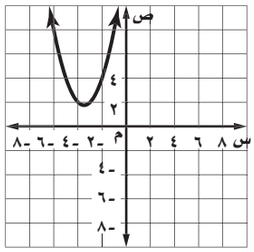
٦)



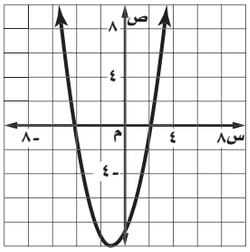
٨)



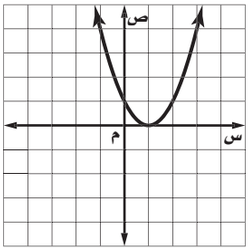
٩)



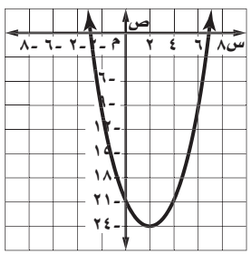
١٠)



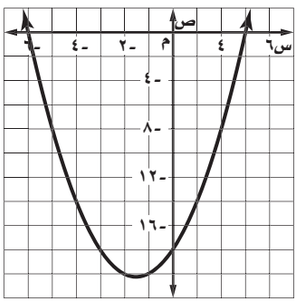
١١)



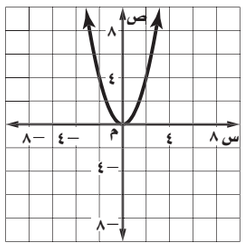
١٢)



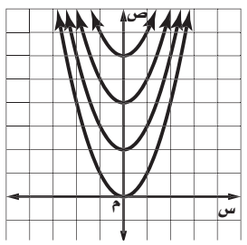
١٣)



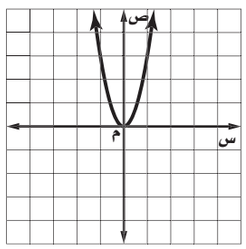
١٩أ)



١٩جـ)

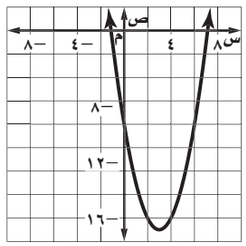


٢٦)



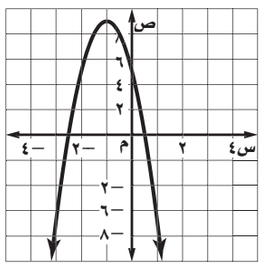
(٠، ٠) ؛ س = ٠ ، صغرى

٢٧)



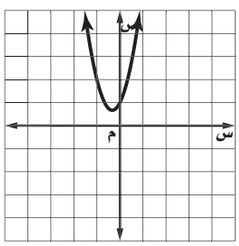
(٣، -١٧)، س = ٣، صغرى

٢٨)



(-١، ٩) ؛ س = -١ ، عظمى

٢٩)



$(-\frac{١}{٣}، \frac{٢}{٣})$، $س = -\frac{١}{٣}$، صغرى

الدرس ٨-٤، ص (١١٤) :

٣٨) إجابة ممكنة:

التحليل: طريقة سهلة، عندما تكون ثلاثية الحدود قابلة للتحليل مثل: $س^٢ + ٥س + ٦ = ٠$ ، لكنها غير ممكنة، عندما تكون ثلاثية الحدود غير قابلة للتحليل مثل: $-س^٢ + س - ٥ = ٠$

التمثيل البياني: يعطي فقط جذورًا تقريبية لإيجاد الجذر التربيعي طريقة سهلة، عندما تكون المعادلة من الشكل: $أ س^٢ + ب = ٠$ ، مثال $٢س^٢ - ٦ = ٠$ ، لكنها غير فعالة إذا لم يكن الطرفان مربعًا كاملًا.

إكمال المربع: طريقة مضمونة لحل المعادلات التربيعية جميعها، لكن قد تكون حساباتها غير سلسة، إذا كانت المعادلات تحوي كسورًا.

القانون العام: طريقة مضمونة لحل جميع المعادلات التربيعية.

الفصل التاسع

الدرس ٩-١، ص (١٢٤) :

٤٣) $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ المعادلة الأصلية

$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} =$ صفر اقسم على أ.

$س^٢ + \frac{ب}{أ} س = -\frac{جـ}{أ}$ اطرح $\frac{جـ}{أ}$ من الطرفين.

$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{ب^٢}{٤أ^٢} = -\frac{جـ}{أ} + \frac{ب^٢}{٤أ^٢}$ أكمل المربع.

$(س + \frac{ب}{٢أ})^٢ = \frac{-٤ أجـ + ب^٢}{٤أ^٢}$ تحليل العبارة: $س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{ب^٢}{٤أ^٢}$

$|س + \frac{ب}{٢أ}| = \sqrt{\frac{ب^٢ - ٤أجـ}{٤أ^٢}}$ خذ الجذر التربيعي للطرفين.

$س + \frac{ب}{٢أ} = \pm\sqrt{\frac{ب^٢ - ٤أجـ}{٤أ^٢}}$ تخلّص من رمز القيمة المطلقة.

$س + \frac{ب}{٢أ} = \frac{\pm\sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ خاصية القسمة في الجذور التربيعية.

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، اطرح $\frac{ب}{٢أ}$ من الطرفين.

توسع ٩-١، ص (١٢٥) :

١) $(ب^{\frac{١}{ن}})^{ن} = ب^{\frac{١}{ن} \times ن}$ خاصية قوة القوة

$= ب^{١} = ب$ بسط

لذلك فإنَّ: $ب^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{ب}$.

٢) $ب^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{ب^{م}}$ أو $ب^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{ب})^{م}$

$ب^{\frac{م}{ن}} = (ب^{\frac{١}{ن}})^{م}$ خاصية قوة القوة

$= (\sqrt[ن]{ب})^{م}$ تعريف $ب^{\frac{١}{ن}}$

$= (ب^{م})^{\frac{١}{ن}}$ خاصية قوة القوة

$= \sqrt[ن]{ب^{م}}$ الأسس النسبية

الدرس ٩-٧، ص (١٥٥) :

(٣٧أ)

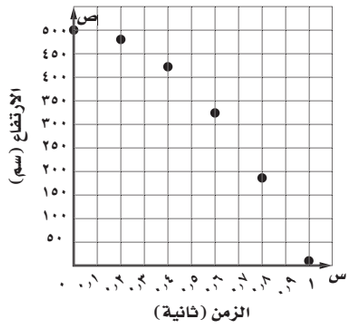
المثلث	النسب المثلثية		جا٢	جتا٢	جا٢ + جتا٢ = ١
أ ب جـ	جا أ = ٤/٥	جتا أ = ٣/٥	١٦/٢٥	٩/٢٥	١
	جا جـ = ٣/٥	جتا جـ = ٤/٥	٩/٢٥	١٦/٢٥	١
هـ ك ل	جا هـ = ١٢/١٣	جتا هـ = ٥/١٣	١٤٤/١٦٩	٢٥/١٦٩	١
	جا ل = ٥/١٣	جتا ل = ١٢/١٣	٢٥/١٦٩	١٤٤/١٦٩	١
س ص ز	جا س = ٩/٤١	جتا س = ٤٠/٤١	٨١/١٦٨١	١٦٠٠/١٦٨١	١
	جا ز = ٤٠/٤١	جتا ز = ٩/٤١	١٦٠٠/١٦٨١	٨١/١٦٨١	١

الفصل العاشر

الدرس ١٠-١، ص (١٦٤) :

١٧) إجابة ممكنة: تحتاج الشركات إلى دراسات مسحية دقيقة؛ لاتخاذ القرارات حول طرق تسويق وبيع منتجاتها التي تُحقّق للشركة أكبر ربح، واتخاذ القرارات المناسبة بشأن التسويق والإعلان وطريقة الوصول للجماهير المستهدفة، كما تساعدهم على اتخاذ القرارات بشأن أنواع المنتجات التي يجب تطويرها أو الاستمرار في بيعها.

٢٠)



الدرس ١٠-٣ تحقق من فهمك، ص (١٧١) :

١) العينة: العبوة التي تؤخذ عن خط الإنتاج ويتم وزنها.
المجتمع: جميع العبوات التي ينتجها المصنع.

إحصائي العينة: منوال عينة أوزان الإنتاج اليومي.

مَعلمة المجتمع: منوال أوزان جميع عبوات الإنتاج.