

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين  
وَأَزِدْنَا اللَّيْلَةَ وَالنَّجْمِ

# الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

فريق التأليف:

أ. رائدة عويس

أ. أرواح كرم

د. محمد صالح (منسقاً)

أ. موسى حراشة

أ. عبد الكريم صالح

أ. نسرين دويكات

أ. قيس شبانة



قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٨ / ٢٠١٩ م

### الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج د. صبري صيدم  
نائب رئيس لجنة المناهج د. بصري صالح  
رئيس مركز المناهج أ. ثروت زيد

### الدائرة الفنية

إشراف فني وتصميم كمال فحماوي

تحكيم علمي د. محمد نجيب  
تحرير لغوي أ. عمر عبد الرحمن  
قراءة د. محمد عواد  
متابعة المحافظات الجنوبية د. سمية النخالة

الطبعة الأولى

٢٠١٩ م / ١٤٤٠ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين

وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

Facebook: /MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بأشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعدد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكرية المتوخاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكمة يطارق قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تألفت وتكاملت؛ ليكون الناتج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطر لهذا التطوير، بما يعزز أخذ جزئية الكتب المقررة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طبيعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات. ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إجزاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، ولجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٨ م

يسرنا أن نقدم لزملائنا المعلمين والمعلمات، ولطلبتنا الأعضاء كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي والصناعي، وفقاً للخطط العريضة لوثيقة الرياضيات، والتي تم تطويرها بناءً على التغذية الراجعة والدراسات الهادفة إلى تطوير المناهج الفلسطينية، ومواكبتها لمهارات القرن الحادي والعشرين، مستندين في ذلك لمعايير وطنية ودولية.

لقد اشتمل محتوى الكتاب، على أنشطة وتطبيقات وسياقات حياتية، من أجل إفراح المجال للطلبة للتفكير والإبداع، ولإبراز أهمية الرياضيات في الحياة، وقد تم مراعاة التسلسل المنطقي للمفاهيم والنظريات والتعميمات وتم برهنة بعض النظريات (للمعلم فقط).

وقد اشتمل الفصل الأول على ثلاث وحدات، هي: حساب التفاضل، وتطبيقات التفاضل، والمصفوفات.

في الوحدة الأولى (حساب التفاضل) فقد تم تقديم متوسط التغير، قواعد الاشتقاق، مشتقة الاقترانات المثلثية، قاعدة لوبيتال، مشتقة الاقترانات الأسية واللوغريتمية، كما تم عرض بعض التطبيقات الهندسية والفيزيائية على الاشتقاق، بالإضافة إلى قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني.

وفي الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)، تم تقديم نظريتي القيمة المتوسطة وروول، فترات التزايد والتناقص، القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران، نقط الانعطاف، مجالات التقعر للأعلى وللأسفل، ثم عرضت تطبيقات عملية على القيم القصوى.

أما في الوحدة الثالثة (المصفوفات) تم تقديم مفهوم المصفوفة ورتبتها، العمليات عليها، محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية وحل أنظمة المعادلات الخطية بثلاث طرق هي: طريقة النظير الضربي، طريقة كريمر، طريقة جاوس.

أما الفصل الثاني فقد اشتمل على ثلاث وحدات، هي: التكامل غير المحدود وتطبيقاته، التكامل المحدود وتطبيقاته، والأعداد المركبة. ففي الوحدة الرابعة (التكامل غير المحدود وتطبيقاته) تم تقديم مفهوم التكامل غير المحدود من خلال معكوس المشتقة، وتم التعرف على قواعد التكامل غير المحدود وتطبيقاته الفيزيائية والهندسية، وأخيراً طرق التكامل الثلاث (التكامل بالتعويض، والتكامل بالأجزاء، والتكامل بالكسور الجزئية).

أما في الوحدة الخامسة (التكامل المحدود وتطبيقاته) فقد تم تقديم مفهوم التجزئة ومجموع ريبان، ثم التكامل المحدود، وخصائصه، وتطبيقاته في حساب المساحة والحجوم الدورانية.

وفي الوحدة السادسة (الأعداد المركبة) تم عرض مفهوم العدد المركب، والعمليات على الأعداد المركبة (المساواة، والجمع والطرح، والضرب) ثم عرضت عملية القسمة، وفي نهاية الوحدة عرض حل المعادلة التربيعية في (ك) وإيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب.

وقد حرصنا أن تشمل كل وحدة على تمارين عامة متنوعة بين المقالية والموضوعية (الاختيار من متعدد)، لحرصنا على تغطية كافة المفاهيم والتعميمات والمهارات الواردة في الوحدة، لتكون عوناً للطلبة على التدرب والتمكن من المهارات.

نتمنى أن نكون بهذا العمل قد حققنا مطالب عناصر العملية التعليمية كافة، بإخراج منهاج فلسطيني واقعي، يربط الطالب بظواهر رياضية حياتية، أملين من زملائنا المعلمين والمعلمات والمديرين والمديرات في مدارس الوطن، تقديم التغذية الراجعة لمركز المناهج قبل تطبيق الكتاب المقرر، وأثناء تطبيقه في الميدان، وبعد التطبيق.

والله ولي التوفيق

٢	حساب التفاضل Differentiation
٤	١ - ١ متوسط التغير (Rate of Change)
٩	٢ - ١ قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)
١٩	٣ - ١ مشتقات الاقترانات المثلثية (The Derivative of Trigonometric Functions)
٢٢	٤ - ١ قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الآسي واللوغاريتمي (L'Hôpital's Rule)
٣٠	٥ - ١ تطبيقات هندسية وفيزيائية (Geometric and Physical Applications)
٣٧	٦ - ١ قاعدة السلسلة (Chain Rule)
٤٢	٧ - ١ الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)
٥٢	تطبيقات التفاضل Differentiation Applications
٥٤	١ - ٢ نظريتا رول والقيمة المتوسطة (Rolle's Theorem)
٦٠	٢ - ٢ الاقترانات المتزايدة والمتناقصة (Increasing and Decreasing Functions)
٦٥	٣ - ٢ القيم القصوى (Extreme Values)
٧٥	٤ - ٢ التفتّر و نقط الانعطاف (Concavity and Points of Inflection)
٨٣	٥ - ٢ تطبيقات عملية على القيم القصوى (Applications of Extrema)
٩٢	المصفوفات والمحددات Matrices and Determinants
٩٤	١ - ٣ المصفوفة (Matrix)
٩٩	٢ - ٣ العمليات على المصفوفات (Operations on Matrices)
١٠٨	٣ - ٣ المحدّات (Determinants)
١١٤	٤ - ٣ النظر الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse of a Square Matrix)
١٢٠	٥ - ٣ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات (Solving Systems of Linear Equations)
١٣٠	التكامل غير المحدود، وتطبيقاته Indefinite Integral and its Applications
١٣٢	١ - ٤ التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)
١٣٧	٢ - ٤ قواعد التكامل غير المحدود (Rules of Indefinite Integrals)
١٤١	٣ - ٤ تطبيقات التكامل غير المحدود (Applications of Indefinite Integrals)
١٤٦	٤ - ٤ طرق التكامل (التعويض، الأجزاء، الكسور الجزئية) (Methods of Integration)
١٦٢	التكامل المحدود وتطبيقاته Definite Integration and its Applications
١٦٤	١ - ٥ التجزئة ومجموع ريمان (Partition and Riemann Sum)
١٧١	٢ - ٥ التكامل المحدود (The Definite Integral)
١٧٦	٣ - ٥ العلاقة بين التفاضل والتكامل (Fundamental Theorem of Calculus)
١٨١	٤ - ٥ خصائص التكامل المحدود (Properties of Definite Integral)
١٨٩	٥ - ٥ تطبيقات التكامل المحدود (المساحة، الحجم) (Applications of Definite Integral)
٢٠٤	الأعداد المركبة Complex Numbers
٢٠٦	١ - ٦ الأعداد المركبة (Complex Numbers)
٢١٠	٢ - ٦ العمليات على الأعداد المركبة (Operations on Complex Numbers)
٢١٥	٣ - ٦ قسمة الأعداد المركبة (Division of Complex Numbers)
٢٢٣	إجابات تمارين الكتاب

الوحدة

١

الوحدة

٢

الوحدة

٣

الوحدة

٤

الوحدة

٥

الوحدة

٦

الوحدة



Differentiation

حساب التفاضل



تكثر في ربوع فلسطين الشوارع والطرق الملتوية والخطرة في المناطق الجبلية، هل تعتقد أن تصميم هذه الشوارع في تلك المناطق مشابه لتصميمها في المناطق المستوية الأفقية؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف حساب التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ إيجاد متوسط التغير، وتفسيره هندسياً وفيزيائياً.
- ٢ حساب المشتقة الأولى عند نقطة باستخدام قواعد الاشتقاق.
- ٣ التعرف إلى المشتقات العليا للاقتران، وإجراء بعض التطبيقات عليها.
- ٤ إيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.
- ٥ التعرف إلى مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي.
- ٦ إيجاد بعض النهايات باستخدام قاعدة لوبيتال.
- ٧ التعرف إلى قاعدة السلسلة، واستخدامها في إيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
- ٨ حساب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.
- ٩ التعرف إلى المعنى الهندسي والفيزيائي للمشتقة، وحل مسائل عليها.

**نشاط ١:** عائلة فلسطينية مكونة من: أم محمد وولديها التوأمين محمد وخالد كانت كتلة محمد قبل عشر سنوات ٣٢ كغم، وأصبحت اليوم ٦٢ كغم، أما كتلة خالد فكانت ٢٩ كغم، ولكنها اليوم ٥٢ كغم. ارتاحت أم محمد للتغير في كتلة محمد، بينما ذهبت بابنها خالد إلى الطبيب... برأيك لماذا؟

**تعريف:**

- إذا كان  $ص = ق(س)$  اقتراناً وتغيرت  $س$  من  $س_١$  إلى  $س_٢$ ،  $س_١ \neq س_٢$  فإن:
- التغير في  $س$  يساوي  $س_٢ - س_١$  ونرمز له بالرمز  $\Delta س$  ويقرأ دلتا  $س$ .
- التغير في الاقتران  $ق(س)$  يساوي  $ق(س_٢) - ق(س_١)$  ويرمز له بالرمز  $\Delta ص$ .

- متوسط التغير في الاقتران  $ص = ق(س)$  يساوي  $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} =$$

$$\frac{ق(س_٢) - ق(س_١ + هـ)}{هـ} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

حيث  $هـ = \Delta س \neq ٠$ ، ونسميه اقتران متوسط التغير عند  $س_١$ .



**مثال ١:**

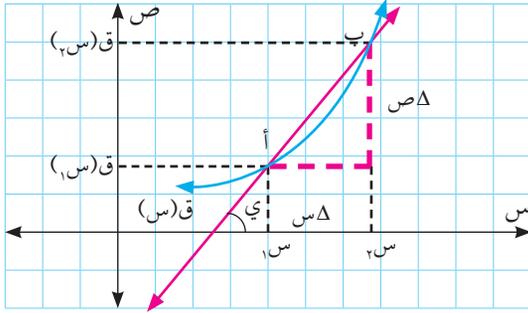
إذا كان  $ص = ق(س) = س^٣ - ٥س + ٣$ ، جد:

- ١  $\Delta س$  عندما تتغير  $س$  من  $١^-$  إلى  $٢^-$ .
- ٢ التغير في  $ق(س)$  عندما تتغير  $س$  من  $١^-$  إلى  $٢^-$ .
- ٣ متوسط التغير في  $ق(س)$  عندما تتغير  $س$  من  $١^-$  إلى  $٢^-$ .

**الحل:**

- ١ بما أن  $س_١ = ١^-$ ،  $س_٢ = ٢^-$ ، فإن  $\Delta س = س_٢ - س_١ = ١^-$
- ٢  $\Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١) = (٢^-) - (١^-) = ٧^- - ١^- = ٦^-$
- ٣ متوسط التغير  $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٦^-}{١^-} = ٦^-$

## المعنى الهندسي لمتوسط التغير:



الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران  $ق(س)$  والمستقيم المار بالنقطتين أ ، ب والذي يسمى قاطعاً للمنحنى، ويكون

$$\frac{ق(س_1) - ق(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{ص \Delta}{س \Delta} = \text{ميله}$$

### تعريف:

متوسط التغير للاقتران  $ق(س)$  عندما تتغير  $س$  من  $س_1$  إلى  $س_2$  يساوي ميل القاطع المار بالنقطتين،  $(س_1, ق(س_1))$  ،  $(س_2, ق(س_2))$  ونسمي الزاوية (ي) التي يصنعها القاطع للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية ميل المستقيم، ويكون (ظاي = ميل القاطع).



مثال ٢: إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران  $ق(س) = س + جا س$

في النقطتين  $(٠, ق(٠))$  ،  $(\frac{\pi}{2}, ق(\frac{\pi}{2}))$

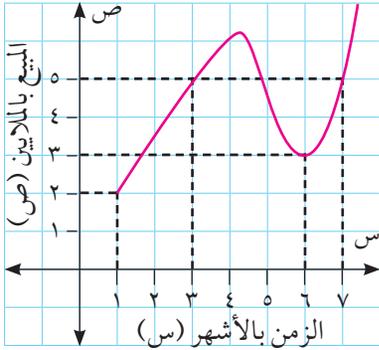
١ احسب ميل المستقيم ل.

٢ جد قياس زاوية ميل المستقيم ل.

١ الحل: ميل المستقيم ل = متوسط تغير  $ق(س)$  في الفترة  $[\frac{\pi}{2}, ٠]$

$$١ = \frac{ق(\frac{\pi}{2}) - ق(٠)}{\frac{\pi}{2} - ٠} = \frac{(\frac{\pi}{2} + جا \frac{\pi}{2}) - (٠ + جا ٠)}{\frac{\pi}{2} - ٠} = \frac{\frac{\pi}{2} + ١}{\frac{\pi}{2}}$$

٢ ميل المستقيم ل = ظاي = ١ ومنها قياس زاوية ميل المستقيم ل هو  $\frac{\pi}{4}$  (لماذا؟)



يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س) في الشكل المجاور  
مبيع شركة سيارات حيث ص: المبيع بالملايين خلال  
س شهراً، أراد عمر من الرسم إيجاد متوسط التغير  
في المبيع عندما تتغير س من ١ إلى ٣، فكتب

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١} = \frac{٥ - ٢}{٣ - ١} = \frac{٣}{٢}$$

والآن أكمل: متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٧ يساوي .....  
متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٦ يساوي .....

مثال ٣: إذا كان ص = ق(س) =  $\sqrt{2س + ١}$ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير  
س من ٠ إلى ب يساوي  $\frac{١}{٢}$ . احسب قيمة ب حيث  $٠ < ب$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(س_٢) - \text{ق}(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{ق}(ب) - \text{ق}(٠)}{ب - ٠} = \frac{\sqrt{2ب + ١} - \sqrt{١}}{ب} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{أي أن } \sqrt{2ب + ١} = ٢ - \sqrt{١} + ب$$

$$\sqrt{2ب + ١} = ب + ١$$

وبالتربيع، وحل المعادلة ينتج أن:  $ب = ٠$  أو  $ب = ٤$  (القيمة  $ب = ٠$  تهمل، لماذا؟)

$$\left. \begin{array}{l} ١ \leq س \leq ٢ \\ ١ > س \geq ٢ - ١ \end{array} \right\} \text{ليكن ص} = \text{ق}(س)$$

ليبان أن متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ١ + هـ

$$\left. \begin{array}{l} ٢ + هـ < هـ < ٠ \\ ٢ > هـ > ٠ \end{array} \right\} \text{هو } \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

$$\frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(١ + هـ)}{هـ} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \text{ عندما } هـ < ٠$$

$$هـ + ٢ = \frac{٢(١) - ٢(١ + هـ)}{هـ}$$

٢ أكمل: عندما  $h > 0$  فإن  $\frac{\Delta v}{\Delta s} = \dots\dots\dots$

٣ اعتمد على ما سبق في إيجاد متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

- عندما تتغير س من ١ إلى ٣
- عندما تتغير س من ١ إلى  $2^{-}$

## المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير:

تعريف:

إذا كانت  $f = f(t)$  حيث  $f$  المسافة التي يقطعها الجسم،  $t$  الزمن، فإن متوسط التغير في المسافة عندما تتغير  $t$  من  $t_1$  إلى  $t_2$  هو  $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$  ويسمى السرعة المتوسطة في الفترة  $[t_1, t_2]$ .



مثال ٤: يتحرك جسم على خط مستقيم، بحيث أن بعده  $f$  بالأمتار عن النقطة (و) بعد  $t$  من الثواني يعطى بالقاعدة  $f = t^2 + 8t$ ، جد:

- ١ السرعة المتوسطة في الفترة  $[0, 3]$ .
- ٢ إذا كانت السرعة المتوسطة في الفترة  $[1, a]$  تساوي ١٣ م/ث جد قيمة  $a$ .

الحل:

- ١  $t_1 = 0, t_2 = 3$   
السرعة المتوسطة  $= \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{33 - 0}{3} = \frac{33}{3} = 11$  م/ث
- ٢ السرعة المتوسطة  $= \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \frac{a^2 + 8a - 9}{a - 1} = 13$

بالتبسيط ينتج أن:  $a^2 + 8a - 9 = 13(a - 1)$  وبحل المعادلة ينتج أن قيمة  $a$  المطلوبة هي ٤



١ إذا كان ق(س) =  $\frac{3}{س} + س^2$ ، جد:

أ التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٣ إلى ٥.

ب متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ إلى ١.

٢ إذا كان ق(س) = جتا ٣ - جاس ٣ جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة  $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ .

٣ إذا كان ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} س - ٦ ، س > ٢ \\ س^2 + أس ، س \leq ٢ \end{array} \right\}$

وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى أ ، أ < ٢ يساوي ٩، احسب قيمة أ.

٤ إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١، ٣]، يساوي ٤، وكان ك(س) =  $س^2 + ٣ق(س)$ ، جد متوسط التغير للاقتران ك(س) في نفس الفترة.

٥ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (١، أ)، (٣، ب) وصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. احسب متوسط التغير في الاقتران ه(س) =  $٣ق(س) + س^2 - ١$  في الفترة [١، ٣].

٦ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن بعده ف بالأمتار عن نقطة الانطلاق بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ق(ن) =  $٢ن + ب ن$  وكانت السرعة المتوسطة في الفترة [١، ٣] تساوي ٦ م/ث. فما قيمة الثابت ب؟

٧ إذا كان ق(س) =  $أس^2 + ب س + ج$ . أثبت أن متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ن يساوي  $أ(ن + ٢) + ب$

٨ أ إذا كان ق(س) =  $س + هس^١$ ، (ه العدد النيبيري)

جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

ب إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) =  $س + لوس^٠$ ، س < ٠ عندما تتغير س من ١ إلى ه

يساوي  $\frac{٣-ه}{ه-١}$ ، احسب قيمة ن.



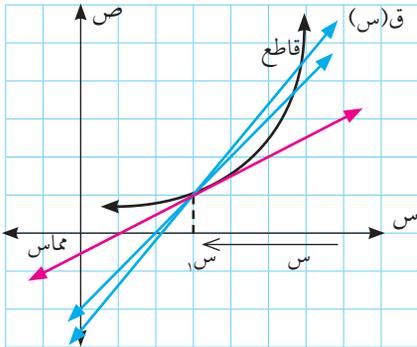
نشاط ١:

أنشأ السيد مراد مصنعاً للألبان في إحدى المدن الفلسطينية، ليزود السوق الفلسطيني بمنتجات الألبان، بعد النقص الحاصل من مقاطعة بضائع الاحتلال، والذي يعتبر شكلاً من أشكال المقاومة السلمية، فإذا كان بهذا المصنع خطّان للإنتاج، بحيث ينتج الخطّ الأول عبوات من الألبان وفق الاقتران  $ق(ن) = ٢ن + ١$ .

- أما الخطّ الثاني فينتج عبوات وفق الاقتران  $ق(ن) = ٢ن + ١$  حيث  $ن$  الزمن بالساعات.
- يكون معدل التغير في إنتاج الخطّ الأول من العبوات بعد  $ن$  ساعة يساوي  $ق(ن) = ٢ن + ١$
  - أما معدل التغير في إنتاج الخطّ الثاني من العبوات فيساوي .....
  - كمية إنتاج الخطّين من العبوات بدلالة  $ن$  يساوي .....
  - معدل التغير في إنتاج المصنع بدلالة  $ن$  يساوي .....
- ماذا تستنتج؟

تعلمت في الدرس السابق مفهوم متوسط التغير للاقتران  $ص = ق(س)$  عندما تتغير  $س$  من  $س_١$  إلى

$$س_١ + \Delta س \text{ وكان } \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_١ + \Delta س) - ق(س_١)}{\Delta س}, \Delta س \neq ٠$$



وإذا أخذنا  $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$  هنا وكانت هذه النهاية موجودة فإننا نسميها معدل التغير للاقتران  $ق(س)$  عند  $س_١$  أو المشتقة الأولى للاقتران  $ق(س)$  عند  $س = س_١$  ونقول إن  $ق(س)$  قابل للاشتقاق عند  $س_١$  (أي كلما اقتربت  $س$  من  $س_١$  فإن متوسط تغير الاقتران (ميل القاطع) يؤول إلى معدل تغير الاقتران  $ق(س)$  (ميل المماس) عند  $س = س_١$ ، انظر الشكل المجاور.



### تعريف (١):\*

إذا كانت  $ص = ق(س)$  اقتراناً معرفاً عند  $س_١$  في مجاله، وكانت  $نهـا$   $\frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$

موجودة فإن قيمة هذه النهاية تسمى المشتقة الأولى للاقتران  $ق(س)$  عند  $س_١$ ،

ونرمز لها بأحد الرموز الآتية:  $ق'(س_١)$  أو  $ص'|_{س=س_١}$  أو  $\frac{دص}{دس}|_{س=س_١}$

ويمكن كتابتها على النحو  $ق'(س_١) = نهـا$   $\frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$



### تعريف (٢):

ليكن الاقتران  $ق(س)$  معرفاً عندما  $س = س_١$  فإن:

$ق'(س_١)^+ = نهـا$   $\frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$  (مشتقة  $ق(س)$  من يمين العدد  $س_١$ )

$ق'(س_١)^- = نهـا$   $\frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$  (مشتقة  $ق(س)$  من يسار العدد  $س_١$ )

وعندما  $ق'(س_١)^+ = ق'(س_١)^- = ل$ ، فإن  $ق(س)$  قابل للاشتقاق عند  $س_١$  وتكون  $ق'(س_١) = ل$



### تعريف (٣):

- إذا كان الاقتران  $ق(س)$  معرفاً على  $[أ، ب]$  فإن  $ق(س)$  غير قابل للاشتقاق عند أطراف الفترة  $[أ، ب]$ .
- يكون  $ق(س)$  قابلاً للاشتقاق على  $[أ، ب]$  إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة فيها.



### فكر وناقش:

مجال  $ق(س)$   $\supseteq$  مجال  $ق(س)$ .



### قاعدة (١):

إذا كان  $ق(س) = ج$  حيث  $ج \in ح$  فإن  $ق'(س) = ٠$  لجميع قيم  $س \in ح$ .

\* لا يطلب من الطلبة إيجاد المشتقة بالتعريف.

مثال ١ : جد ق(س) لكل مما يأتي: ١ ق(س) = ٥ ٢ ق(س) = جتا  $\pi$

الحل : ١ ق(س) = ٥

٢ ق(س) = ٥

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = س فإن ق(س) = ١



قاعدة (٣):

إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق وكان ج  $\exists$  ح فإن ك(س) = ج ق(س) قابل للاشتقاق وتكون ك(س) = ج ق(س).



مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س ، جد ق(س)

الحل : ق(س) = ٥ × ١ = ٥

قاعدة (٤):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ك(س) = ق(س)  $\pm$  هـ(س) قابل للاشتقاق، وتكون ك(س) = ق(س)  $\pm$  هـ(س).



ملاحظة:

تبقى القاعدة (٤) صحيحة لأكثر من اقترانين.



مثال ٣ : إذا كان ق(١) = ٥ ، ك(١) = ٣- ، وكان ل(س) = ٢س + ق(س) - ٣ك(س) ، جد ل(١).

الحل :

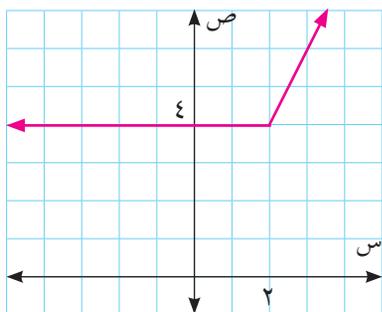
$$\text{ل(س)} = ٢ + \text{ق(س)} - ٣\text{ك(س)}$$

$$\text{ل(١)} = ٢ + \text{ق(١)} - ٣\text{ك(١)}$$

وبالتعويض ينتج أن: ل(١) = ١٦



مثال ٤ : إذا كان ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} ٢ \leq \text{س} ، ٢س \\ ٢ > \text{س} ، ٤ \end{array} \right\}$  ، جد ق(٢)



الحل : ق(س) متصل على مجاله (تحقق من ذلك)، ومنها يكون

$$\text{ق(س)} = \left. \begin{array}{l} ٢ < \text{س} ، ٢ \\ ٢ > \text{س} ، ٠ \end{array} \right\}$$

أما عند س = ٢ فنبحث بالمشتقة عن يمينها وعن يسارها فتكون ق(٢)<sup>+</sup> = ٢ ، ق(٢)<sup>-</sup> = ٠ ، ومنها ق(٢) غير موجودة. (لماذا؟)



مثال ٥ : إذا كان ق(س) = [س] ، س ∈ [٠ ، ٢] . جد ق(س)

الحل : نعيد كتابة ق(س) دون رمز أكبر عدد صحيح.

$$\text{ق(س)} = \left. \begin{array}{l} ٠ ، ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ١ ، ١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢ ، \text{س} = ٢ \end{array} \right\}$$

لاحظ أن ق(س) منفصلاً عند س = ١

$$\text{ق(س)} = \left. \begin{array}{l} ٠ ، ٠ < \text{س} < ١ \\ ٠ ، ١ < \text{س} < ٢ \end{array} \right\}$$

ق(٠) غير موجودة ، ق(٢) غير موجودة ..... (لماذا؟)

وق(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)



أتعلم:

عند إيجاد المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق، لا بد من بحث الاتصال أولاً.



قاعدة (٥):

إذا كان  $ق(س)$ ،  $هـ(س)$  اقترانين قابلين للاشتقاق فإن  $ك(س) = ق(س) \times هـ(س)$  قابل للاشتقاق وتكون  $ك'(س) = ق'(س) \times هـ(س) + ق(س) \times هـ'(س)$



مثال ٦:

إذا كان  $ق(س) = (س - ٥)(١ - س)$  جد  $ق'(س)$ ، ثم  $ق'(١)$ .

الحل:

$$ق'(س) = (س - ٥)'(١ - س) + (س - ٥)(١ - س)'$$

$$\text{ومنها } ق'(س) = (س - ٥)'(١ - س) + (س - ٥)(١ - س)'$$

$$\text{وتكون } ق'(١) = (١ - ٥)'(١ - ١) + (١ - ٥)(١ - ١)'$$

مثال ٧:

إذا كان  $ق(س) = س ك(س)$  جد  $ق'(٢)$  علماً بأن  $ق(٢) = ٦$ ،  $ك'(٢) = ٤$

الحل:

$$ق'(س) = س ك'(س) + ك(س)$$

$$ق'(٢) = ٢ ك'(٢) + ك(٢) = ٨ + ٨ = ١٦$$

$$\text{لكن } ق(٢) = ٢ ك(٢) = ١٢، \text{ ومنها } ك(٢) = ٦$$

$$ق'(٢) = ١٢ + ٦ = ١٨$$

نظرية:

إذا كان  $ق(س) = س^n$ ، فإن  $ق'(س) = n س^{n-1}$ ،  $n \neq ١$ ،  $n \in ص^+$



مثال ٨ :

إذا كان ق(س) = س<sup>٣</sup> - ٢س + ٥، جد ق(س)، ثم ق(-٢).

الحل :

$$\text{ق(س)} = \text{س}^3 - 2\text{س} + 5 \text{ ومنها ق(-2)} = (-2)^3 - 2(-2) + 5 = -8 + 4 + 5 = 1$$

أتعلم:

إذا كان ق(س) كثير حدود، فإن ق(س) قابل للاشتقاق.



نظرية:

يكون ق قابلاً للاشتقاق عند س = س<sub>١</sub> إذا وفقط إذا كان ق(س) متصلًا عند س<sub>١</sub> و ق(س<sub>١</sub>) = ق(س<sub>١</sub>)<sup>-</sup>



مثال ٩ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{أ} \text{س}^2 + \text{ب} ، \text{س} \leq 1 \\ \text{س}^3 + \text{س} ، \text{س} > 1 \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

أوجد قيمة أ، ب علمًا بأن ق(س) قابل للاشتقاق على ح

الحل :

نعلم أن ق(س) متصل عند س = ١ ..... (لماذا؟)

$$\text{ومنها} \text{نهاق(س)} = \text{ق(1)} \text{ أي أن } \text{أ} + \text{ب} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق} \text{أ} \text{س}^2 ، \text{س} \leq 1 \\ \text{ق} \text{س}^3 + 1 ، \text{س} > 1 \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

وكذلك ق(1) = ق(1)<sup>-</sup> ومنها أ = ٤

$$\text{أي أن } \text{أ} = 4 ، \text{ب} = 0$$

قاعدة (٦):



إذا كان  $K(s)$ ،  $M(s)$  اقترانين قابلين للاشتقاق فإن  $Q(s) = \frac{K(s)}{M(s)}$ ،  $M(s) \neq 0$   
 قابل للاشتقاق وتكون  $Q(s) = \frac{M(s) \times K'(s) - K(s) \times M'(s)}{(M(s))^2}$

نتيجة:



إذا كان  $Q(s) = s^n$ ، فإن  $Q'(s) = n s^{n-1}$ ،  $n \in \mathbb{Z}$ ،  $s \neq 0$

مثال ١٠: إذا كان  $Q(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{s^2}{1-s}$ ، جد  $Q'(s)$ .

الحل:  $Q(s) = \frac{s^2}{1-s} + s^{-3}$

$Q'(s) = \frac{1 \times 2s - s^2 \times (1-s)}{(1-s)^2} + s^{-4} \times (-3) = \frac{1 \times 2s - s^2 \times (1-s)}{(1-s)^2} - 3s^{-4}$

$Q'(s) = \frac{2s - s^2(1-s)}{(1-s)^2} - \frac{3}{s^4} = \frac{2s - s^2 + s^3}{(1-s)^2} - \frac{3}{s^4}$  (تحقق من ذلك)

مثال ١١: إذا كان  $Q(s) = \frac{s^2 - 2}{s + 3}$ ،  $s \neq -3$ ، جد قيمة/ قيم  $s$  التي تجعل  $Q'(s) = \frac{3}{4}$

الحل:  $Q'(s) = \frac{1 \times (s^2 - 2) - (s + 3) \times 2s}{(s + 3)^2} = \frac{1 \times (s^2 - 2) - 2s(s + 3)}{(s + 3)^2}$  بالتبسيط والاختصار، ينتج أن:

$Q'(s) = \frac{s^2 + 6s + 2}{(s + 3)^2}$ ، لكن  $Q'(s) = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} = \frac{s^2 + 6s + 2}{(s + 3)^2}$

وبالضرب التبادلي والاختصار، ينتج أن:  $s = 1$ ،  $s = 5$

## المشتقات العليا (Higher Derivatives)

إذا كان  $ص = ق(س) = س^٤ + س^٣ - ٢$ ، جد  $ق(س)$ .  
هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة لـ  $س$ ؟ ولماذا؟  
نسمي المشتقات التي تلي المشتقة الأولى بالمشتقات العليا.

وإذا كانت  $ص = ق(س)$  حيث  $ق$  قابل للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى هي  $ص' = \frac{دص}{دس} = ق'(س)$  تمثل اقتراناً جديداً. وإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق، فإن مشتقتها  $\frac{د}{دس} \left( \frac{دص}{دس} \right)$  تسمى المشتقة الثانية، ويرمز لها بالرمز  $ص''$  أو  $ق''(س)$  أو  $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$  وتقرأ (دال اثنين ص دال س تربيع) وهكذا بالنسبة للمشتقات الثالثة والرابعة... ونعبر عن المشتقة من الرتبة  $n$  بإحدى الصور الآتية:  
 $ص^{(n)}$  أو  $\frac{د^n ص}{دس^n}$  أو  $ق^{(n)}(س)$ ، حيث  $n \in \mathbb{N}^+$ ،  $n > ٢$

### فكر وناقش:



هل يوجد اختلاف بين كل من  $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$  و  $\frac{د(دص)}{دس}$ ؟

مثال ١٢: إذا كان  $ق(س) = س^٥ + س^٤ - ٣س - ١$ ، جد  $ق^{(٥)}(س)$ . ثم جد  $ق^{(٤)}(٢)$ .

الحل:

$$\begin{aligned} ق(س) &= س^٥ + س^٤ + ١٢س^٢ + ٢٠س + ٢٤ \\ ق^{(٣)}(س) &= ٦٠س^٢ + ٢٤ \\ ق^{(٤)}(س) &= ١٢٠س \\ ق^{(٤)}(٢) &= ٢ \times ١٢٠ = ٢٤٠ \end{aligned}$$

### نشاط ٤:

إذا كان  $ق(س)$  كثير حدود، وكان  $ق(س) + ق'(س) = ٢س^٣ - ٣س$ ، فلإيجاد  $ق(١)$  نجد:  
أولاً قاعدة  $ق(س)$ ، لاحظ أن  $ق(س)$  اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة..... (لماذا؟)  
ومن  $ق(س) = أس^٣ + ب س^٢ + ج س + د$  والآن أكمل:  
 $ق(س) = \dots$   
 $ق(س) + ق'(س) = \dots = ٢س^٣ - ٣س$  ومنها  $أ = \dots$ ،  $ب = \dots$ ،  $ج = \dots$ ،  $د = \dots$   
ومنها  $ق(س) = \dots$ ،  $ق'(س) = \dots$ ، ومنها  $ق(١) = \dots$

مثال ١٣: إذا كان  $\frac{1}{س} = ص$  ،  $س \neq ٠$  ، أثبت أن:  $س^٢ص + سص = ص$

الحل:  $ص = \frac{1}{س}$  ،  $ص = \frac{1^-}{س}$  ،  $ص = \frac{٢}{س}$

ومنها  $س^٢ص + سص = \frac{٢}{س} \times س + \frac{1^-}{س} \times س = ٢ + ١ = ٣$

وهو المطلوب  $ص = \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{٢}{س} =$

## تمارين ١ - ٢

١ جد ق(س) في كل مما يأتي عند قيم س إزاء كل منها:

أ ق(س) =  $س^٥ - س^٢ + ج$  ، حيث ج ثابت ، عندما  $س = ١^-$

ب ق(س) =  $(س^٣ - ١)(س + ١٢)$  ، عندما  $س = ٣$

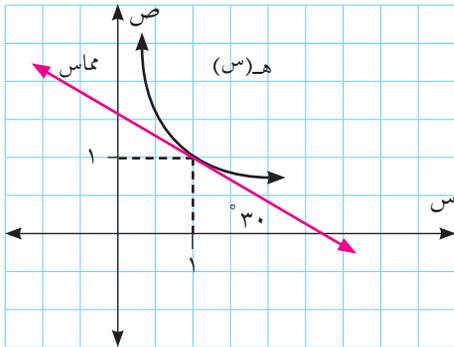
ج ق(س) =  $\frac{س^٢}{س - ٥}$  ، عندما  $س = ٢^-$

٢ بالاعتماد على المعطيات في الجدول المجاور، جد ما يأتي:

ق(١)	ق(١)	ق(١)	ه(١)
٢	٣	١^-	٣^-

أ (ق + ه) (١)

ب  $(س^٢ ق - \frac{٣}{ه})$  (١)



٣ إذا كان ق(س) =  $\frac{س}{س^٢ + ١}$  وكان الشكل المجاور يمثل

منحنى الاقتران ه(س)، فجد  $(\frac{ق}{ه})$  (١)

٤ أ إذا كانت  $\frac{س}{س+١} = ص$  ،  $س \neq ١$  ، أثبت أن:  $ص + ص + ص = ٠$

ب إذا كانت  $ص = أس + ٥$  ،  $س \neq ٠$  ، أثبت أن:  $\frac{ص}{س} = ٢٠$

٥ إذا كان  $ق(س) = (س-١)(س+١)(س+١)(س+١)(س+١)(س+١)$  ، جد  $ق(١)$ .

٦ إذا كان  $ق(س) = س^٢$  ،  $هـ(س) = [س^٢]$

أولاً: جد: أ  $ق(٠)$  ب  $هـ(٠)$

ج  $ق(هـ)(س)$  د  $ق(هـ)(٠)$

ثانياً: هل هذا يتناقض مع قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين؟ فسّر إجابتك.

٧ إذا كان  $ق(س) = س^٤ + أس^٣ - ٣$  ، جد قيمة أ ، حيث  $ق(٢) = ١٨$

٨ إذا كان  $ق(س) = س^٧$  ،  $ن \in ص$  ، وكان  $ق(٣) = أس$  ، جد قيمة أ



نشاط ١:

أظهر التقرير الصحي السنوي لفلسطين للعام ٢٠١٤ أن أمراض القلب والأوعية الدموية المسبب الأول لوفيات الفلسطينيين، وبنسبة بلغت ٥, ٢٩٪ من مجموع الوفيات المبلغ عنها.

- ١ هل سبق أن سمعت بحاجة مريض لتخطيط قلب؟ وهل شاهدت تخطيط قلب؟
- ٢ سبق ودرست الاقترانات المثلثية، ما وجه الشبه بين تخطيط القلب ومنحنى بعض الاقترانات المثلثية؟

لقد تعرفت في الدروس السابقة اشتقاق الاقترانات كثيرة الحدود، والاقترانات النسبية، وستعرف في هذا الدرس على قواعد خاصة لإيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.

قاعدة (١):

إذا كان  $q = \sin(\theta)$  ،  $s = \cos(\theta)$  فإن  $q' = \cos(\theta)$  ،  $s' = -\sin(\theta)$



مثال ١: إذا كان  $q = \sin(\theta)$  ،  $s = \cos(\theta)$  ، جد  $q' = \cos(\theta)$

الحل :

$$q = \sin(\theta) \Rightarrow q' = \cos(\theta)$$

$$s = \cos(\theta) \Rightarrow s' = -\sin(\theta)$$

$$1 = \left(\frac{\pi}{2}\right) q'$$

قاعدة (٢):

إذا كان  $q = \sin(\theta)$  ،  $s = \cos(\theta)$  ، فإن  $q' = \cos(\theta)$  ،  $s' = -\sin(\theta)$



مثال ٢ : إذا كان ق(س) =  $\frac{س^2}{جتاس}$  ، جد ق(س)

الحل :  $ق(س) = \frac{جتاس \times ٢س - س^2 \times جاس}{جتاس^2}$

$$= \frac{٢س جتاس + س^2 جاس}{جتاس^2}$$

قاعدة (٣):

- إذا كان ق(س) = ظاس ، فإن ق(س) = قاس.
- إذا كان ق(س) = ظتاس ، فإن ق(س) = -قتاس.
- إذا كان ق(س) = قاس ، فإن ق(س) = قاس ظاس .
- إذا كان ق(س) = قتاس ، فإن ق(س) = -قتاس ظتاس.



فكر وناقش:

تحقق من صحة القواعد السابقة بالتعويض بدلالة جاس، جتاس، ثم باستخدام قواعد الاشتقاق.



مثال ٣ : إذا كان ق(س) = قاس + ظاس ، جد ق(س) ، ق( $\frac{\pi}{٤}$ )

الحل : ق(س) = قاس ظاس + قاس = قاس(ظاس + قاس)

$$ق\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\pi}{٤} قاس\left(\frac{\pi}{٤}\right) + \frac{\pi}{٤} ظاس\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\pi}{٤} (٢ + \sqrt{٢}) \quad (\text{لماذا؟})$$

مثال ٤ : إذا كانت ص = قتاس ظتاس ، أثبت أن:  $\frac{دص}{دس} = ٢قتاس^3 - قتاس$

الحل :  $\frac{دص}{دس} = -قتاس^2 ظتاس + قتاس^2 = -قتاس^2 (١ + قتاس) = -قتاس^2 - قتاس^3$

$$= -قتاس^2 - قتاس^3$$

$$= ٢قتاس^3 - قتاس$$

١ جد  $\frac{دص}{دس}$  لكل مما يأتي:

ب  $\frac{١ - قاس}{١ + قاس} = ص$

أ  $ص = ٢جتاس - ٢ظاس$

د  $ص = س٢قاس$

ج  $ص = \frac{س}{قتاس + ظتاس}$

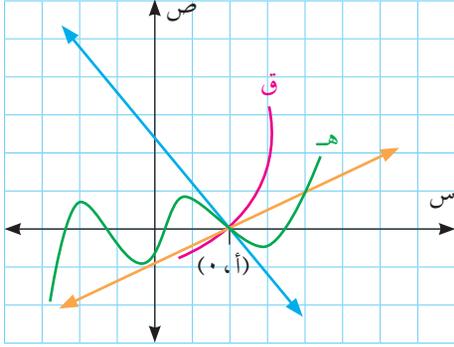
٢ إذا كانت  $ص = ظاس$ ،  $س$  زاوية حادة أثبت أن:  $\frac{دص}{دس} = ٢ص(١ + ص٢)$ .

٣ إذا كانت  $ص = \frac{جاس}{س}$ ،  $س \neq ٠$ ، أثبت أن:  $ص + \frac{٢}{س} = ص٢ + ٠$

٤ إذا كان  $ق(س) = \frac{١}{٢}س٢ - جتاس$ ،  $س \in [\pi٢, \pi٢-]$ ،

جد مجموعة قيم  $س$  التي تجعل  $ق(س) = ٠$

أولاً: قاعدة لوبيتال



نشاط ١:

قال أحمد لمعلم الرياضيات: اتفقت أنا وزملائي بأن نسمي النقطة (أ، ٠) بالنقطة الذهبية قال له المعلم: لماذا يا أحمد، أجاب أحمد: لأنه إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين كثيري حدود يمران بالنقطة (أ، ٠) فإن:

$$١ \quad \text{نهـا} \frac{ق(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow أ}{=} ٠ = ((س) هـ(س))$$

$$٢ \quad \text{نهـا} \frac{ق(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow أ}{=} ٠ = ((س) هـ(س) \times (س) هـ(س))$$

$$\text{أما نهـا} \frac{ق(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow أ}{=} \frac{ق(أ)}{هـ(أ)} \text{ بالتعويض المباشر} \frac{ق(أ)}{هـ(أ)}$$

تعلمت في الصف الحادي عشر كيفية إيجاد النهايات التي تكون على الصورة غير المعينة  $(\frac{0}{0})$  ولاحظت أن كثيراً منها يحتاج إلى خطواتٍ عديدةٍ وأحياناً معقدةٍ، وهنا سوف نتعلم طريقة جديدة لحساب قيمة بعض هذه النهايات.

قاعدة لوبيتال:



إذا كان ق(س)، هـ(س) قابلين للاشتقاق عند النقطة س = أ، ل  $\exists$  ح، وكانت

$$\frac{ق(أ)}{هـ(أ)} = \frac{ق(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow أ}{=} \frac{ق(أ)}{هـ(أ)} \text{ ، } \frac{ق(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow أ}{=} \frac{ق(أ)}{هـ(أ)} \text{ فإن نهـا} \frac{ق(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow أ}{=} \frac{ق(أ)}{هـ(أ)}$$

البرهان: (للمعرفة فقط) بما أن ق(أ) = ٠، هـ(أ) = ٠

$$\text{فإن نهـا} \frac{ق(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow أ}{=} \frac{ق(س) - ق(أ)}{هـ(س) - هـ(أ)} = \frac{ق(س) - ق(أ)}{هـ(س) - هـ(أ)}$$

$$= \frac{ق(س) - ق(أ)}{هـ(س) - هـ(أ)} \times \frac{هـ(س) - هـ(أ)}{هـ(س) - هـ(أ)}$$

$$\frac{\text{نهما}}{\text{س}} \times \frac{\text{ق(س) - ق(أ)}}{\text{س(أ) - س(هـ)}} = \frac{\text{ق(أ)}}{\text{هـ(أ)}} \dots \dots \text{(لماذا؟)}$$

ملاحظة:

سوف لا نتعرض لحالات لوبيتال الأخرى.



مثال ١: جد  $\frac{\text{نهما}}{\text{س}}$  باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل: من خلال التعويض المباشر تكون  $\frac{\text{جا}}{\text{ج}}$ ، ومنها يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال

$$\text{فتكون } \frac{\text{نهما}}{\text{س}} = \frac{\text{نهما}}{\text{س}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} = \text{جتا} = ١$$

نشاط ٢: استخدمت سعاد المشتقة الأولى في إيجاد قيمة  $\frac{\text{نهما}}{\text{س}}$  فكتبت:

$$\frac{\text{نهما}}{\text{س}} = \frac{\text{نهما}}{\text{س}} = \frac{\text{جتا} - \text{جتاس}}{\text{س} - \text{س}}$$

وهي على الصورة  $\frac{\text{نهما}}{\text{س}} = \frac{\text{ق(س) - ق(أ)}}{\text{س(س) - س(أ)}} = \frac{\text{ق(أ)}}{\text{س(أ)}}$  (لماذا؟)

وعند استخدام قاعدة لوبيتال في إيجاد قيمة النهاية

$$\text{فإن } \frac{\text{نهما}}{\text{س}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} = \dots \dots \dots$$

مثال ٢: جد  $\frac{\text{نهما}}{\text{س}}$  باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل: من خلال التعويض المباشر تكون  $\frac{\text{جا}}{\text{ج}}$

$$\text{ومنها } \frac{\text{نهما}}{\text{س}} = \frac{\text{نهما}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$$



عند استخدام قاعدة لوبيتال، إذا كانت  $\frac{ق(أ)}{هـ(أ)} = \frac{ق(ب)}{هـ(ب)}$  فإننا نستمر بتطبيق القاعدة حتى نحصل على عدد حقيقي.

مثال ٣: جد نها  $\frac{١ - جتاس}{س٢}$  باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل: من خلال التعويض المباشر تكون  $\frac{١ - جتا٠}{س٢٠} = \frac{١}{٠}$

نها  $\frac{١ - جتاس}{س٢}$  = نها  $\frac{جتاس}{س٢}$  لكن نها  $\frac{جتاس}{س٢}$  = نها  $\frac{١}{س٢}$

نطبق قاعدة لوبيتال مرة أخرى

فتكون نها  $\frac{جتاس}{س٢}$  = نها  $\frac{جتاس}{س٢}$  = نها  $\frac{١}{س٢}$

مثال ٤: إذا كان ق(٢) = ٥ جد:

نها  $\frac{ق(٢) - (٥ - هـ)}{هـ}$

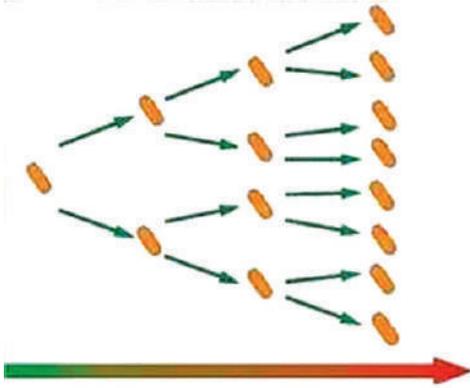
الحل: نفرض  $٥ - هـ = و$ ، ومنها  $هـ = و - ٥$ ، وعندما  $هـ \rightarrow ٠$  فإن  $و \rightarrow ٢$

نها  $\frac{ق(٢) - (٥ - هـ)}{هـ}$

= نها  $\frac{ق(٢) - (٥ - و)}{و - ٥}$

= نها  $\frac{ق(٢) - (٥ - و)}{و}$

= نها  $\frac{ق(٢) - (٥ - و)}{و} = ٥ - ٥ = ٠$

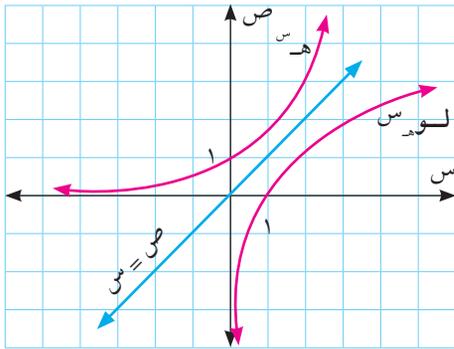


## نشاط ٣:

تعتبر البكتيريا من الكائنات المجهرية الدقيقة بدائية النواة، وواسعة الانتشار، نتعامل معها يومياً دون أن نراها وتعتبر من أوائل الكائنات الحية التي وجدت على الأرض.

هناك بعض أنواع البكتيريا تنشط الخلية الواحدة فيها كل ٢٠ دقيقة إلى خليتين. توصل العلماء إلى أن عدد البكتيريا في الساعة ن يساوي ٢<sup>٣٦</sup>.

بعد كم دقيقة سيكون عدد خلايا البكتيريا ١٠٧٣٧٤١٨٢٤ خلية؟



تعلمت سابقاً الاقتران الأسي الذي يكتب على الصورة  $ق(س) = أ^س$ ،  $أ \neq 1$ ،  $أ > 0$  والاقتران اللوغاريتمي على الصورة  $ل(س) = لو_أ س$ ،  $س > 0$ ،  $أ \neq 1$ ،  $أ > 0$  وسوف نقتصر دراستنا على الاقتران الأسي الطبيعي  $ق(س) = هـ^س$ ، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي  $ق(س) = لو_هـ س$ ، حيث هـ تسمى العدد النيبيري.

## تعريف:

العدد النيبيري هو العدد الحقيقي، غير النسبي، الذي قيمته التقريبية  $هـ \cong 2,7182818$

ويحقق العلاقة الآتية:  $هـ = \frac{1-س}{س}$



ونورد بعض خصائص الاقترانين:



الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي / مجاله ح<sup>+</sup>

١ لو<sub>ص</sub> س ص = لو<sub>ص</sub> س + لو<sub>ص</sub> ص

٢ لو<sub>ص</sub>  $\frac{س}{ص}$  = لو<sub>ص</sub> س - لو<sub>ص</sub> ص

٣ لو<sub>ص</sub> س<sup>ن</sup> = ن لو<sub>ص</sub> س ، س < ٠

٤ لو<sub>ص</sub> س = س



الاقتران الأسّي الطبيعي / مجاله ح

١ ه<sub>ص</sub> س × ه<sub>ص</sub> ص = ه<sub>ص</sub> س<sup>ص</sup>

٢  $\frac{ه<sub>ص</sub> س}{ه<sub>ص</sub> ص} = ه<sub>ص-ص</sub> س$

٣ (ه<sub>ص</sub> س) ص = ه<sub>ص</sub> س ص

٤ ه<sub>٠</sub> = ١

٥ ه<sub>ص</sub> لو<sub>ص</sub> س = س ، س < ٠

قاعدة (١):



إذا كان ص = ه<sub>ص</sub> ، فإن لو<sub>ص</sub> ص = س ، ص < ٠

قاعدة (٢):



إذا كان ق(س) = ه<sub>ص</sub> فإن ق(س) = ه<sub>ص</sub>

البرهان (للمعرفة فقط): ق(س) = ه<sub>ص</sub> =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$

=  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$

=  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$  =  $\frac{ق(س + و) - ق(س)}{و}$

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = س<sup>٣</sup>هـ - س + ق(س) ، فجد ق(س) .

الحل : ق(س) = س<sup>٣</sup>هـ - س + ق(س) - ق(س) = س<sup>٣</sup>هـ - س

قاعدة (٣):

إذا كان ق(س) = لوس، س < ٠ ، فإن ق(س) =  $\frac{١}{س}$



مثال ٥ : إذا كان ص = لوس<sup>١٠</sup> ، فجد  $\frac{دص}{دس}$  عندما س = ٥

الحل : ص = لوس<sup>١٠</sup> = ١٠ لوس

ومنها يكون  $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س} \times ١٠ = \frac{دص}{دس}$

$$٢ = \frac{١٠}{٥} = \frac{دص}{دس} \Big|_{س=٥}$$

مثال ٦ : بين باستخدام قاعدة لوبيتال ما يأتي:

$$١ \quad \text{نها} \frac{١-س}{س} = ١$$

$$٢ \quad \text{نها} \frac{لوس}{١-س^٢} = \frac{١}{٢}$$

الحل : ١ بالتعويض المباشر  $\frac{١-س}{س} = \frac{١-س}{س}$  لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\text{ومنها} \text{نها} \frac{١-س}{س} = \frac{نها}{س} = \frac{نها}{س} = \frac{١-س}{س} = \frac{نها}{س} = \frac{نها}{س} = ١$$

٢ بالتعويض المباشر تكون  $\frac{لوس}{١-٢١} = \frac{١}{٠}$  لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\frac{١}{٢} = \frac{\frac{١}{س}}{٢س} = \frac{نها}{١-٢س} = \frac{لوس}{١-٢س} = \frac{نها}{١-٢س}$$

جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

مثال ٧ :

١ ق(س) = س هـ س

٢ ع(س) = هـ س لوس حيث س < ٠

١ ق(س) = س هـ س + هـ س

الحل :

٢ ع(س) = هـ س ×  $\frac{١}{س}$  + هـ س لوس = هـ س  $(\frac{١}{س} + لوس)$

١ احسب النهايات الآتية باستخدام قاعدة لوبيتال:

$$\text{أ} \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{هـ^{s-1} - س}{لو^س} \quad \text{ب} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{نها ٤س}{ظاس} \quad \text{ج} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{نها س - جاس}{س^٣}$$

٢ جد  $\frac{دص}{دس}$  في كل مما يأتي:

$$\text{أ} \quad ص = هـ^س جتاس \quad \text{ب} \quad ص = لو^س \sqrt{س} ، س < ٠$$

$$\text{ج} \quad ص = لو^س \sqrt[٣]{\frac{س}{س^١}} ، س < ٠ \quad \text{د} \quad ص = (هـ^س - ٢)(هـ^س + ٢)$$

٣ إذا كان  $ق(١) = ٢^-$  ،  $ق(٣) = ٢^-$  ،  $ق(٣) = ٤$  جد قيمة النهايات الآتية:

$$\text{أ} \quad \lim_{هـ \rightarrow ١٠} \frac{نها ق(٣) - (٣ + هـ) - ق(٣)}{١٠}$$

$$\text{ب} \quad \lim_{س \rightarrow ١} \frac{س^٢ - ١}{ق(١) - ق(س)}$$

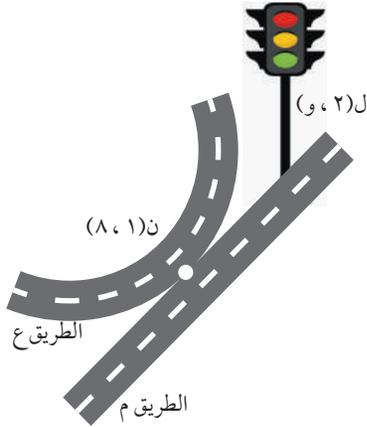
٤ إذا كانت  $ص = س^٢ + هـ^س + ١$  ، فجد قيمة / قيم  $س$  التي تجعل  $ص = ص$

٥ أثبت باستخدام قاعدة لوبيتال أن:  $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{نها س^٢ - س^١}{س^٢ - س^١} = \frac{ن}{م} (أ) - ن$  ،  $أ \neq ٠$

٦ جد  $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{نها س ق(١) - ق(س)}{س - ١}$  باستخدام قاعدة لوبيتال، علماً بأن  $ق(١) = ٣$  ،  $ق(١) = ٦$

٧ إذا كان  $ق(٢) = ٣$  ،  $ق(٢) = ٥$  ، جد  $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{نها ق(٢) - ق(س)}{س - ١}$

أولاً: تطبيقات هندسية:



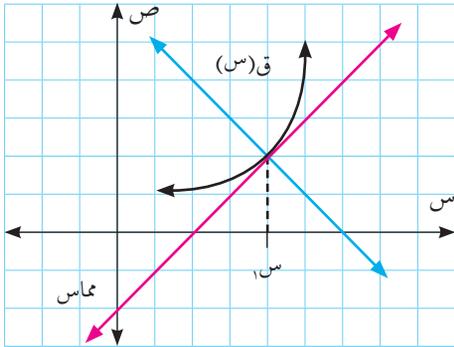
نشاط ١:

يمثل الشكل المجاور طريقين م ، ع أحدهما مستقيم والآخر منحنى، يلتقيان عند الموقع ن، والذي تمثله النقطة (١ ، ٨) في مستوى إحداثي متعامد، فإذا كانت معادلة الطريق ع هي:

$$ص = ٤س + ٢$$

١ جد معادلة الطريق م علماً بأن الطريقين متماسان عند النقطة ن.

٢ إذا كانت النقطة ل (٢ ، ٥) تمثل موقع إشارة ضوئية في مستوى الطريقين، فما قيمة (و) بحيث تقع الإشارة الضوئية على الطريق م؟



نلاحظ في الشكل المجاور أن معدل التغير للاقتران ق(س) (ميل المنحنى) عند  $س_١$  هو ميل المماس المرسوم للمنحنى وتساوي ق'(س<sub>١</sub>) ونسمي النقطة (س<sub>١</sub> ، ق(س<sub>١</sub>)) نقطة التماس.

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة أ (س<sub>١</sub> ، ق(س<sub>١</sub>))، فإن ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س)، ويساوي ق'(س<sub>١</sub>). ويعرف العمودي على منحنى الاقتران، بأنه العمودي على المماس للمنحنى عند نقطة التماس.



مثال ١ : جد ميل منحنى الاقتران ق(س) = س<sup>٣</sup> + ٥س عند س = ١، ثم جد معادلتى المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة.

مثال ١ :

الحل : ميل المنحنى عند س = ١ يساوي ق'(١)  
 ق'(س) = (س) = س<sup>٣</sup> + ٥ = ٥ + ٣ = ٨ = ميل المماس  
 لكن نقطة التماس هي (١، ق(١)) = (١، ٦)  
 معادلة المماس هي: ص - ص<sub>١</sub> = م(س - س<sub>١</sub>)  
 أي: ص - ٦ = ٨(س - ١) ومنها ص = ٨س - ٢  
 ميل العمودي على المماس =  $\frac{-1}{8}$   
 ومنها تكون معادلة العمودي على المماس هي:  
 ٨ص + س - ٤٩ = ٠ (تحقق من ذلك)



مثال ٢ : إذا كان المماس لمنحنى ق(س) =  $\frac{٤}{س}$ ، س < ٠، يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، أثبت أن العمودي على المماس عند نقطة التماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠، ٠).

مثال ٢ :

الحل : نفرض نقطة التماس (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)  
 ميل المماس = ظا ١٣٥ = ١<sup>-</sup>، ق'(س) =  $\frac{-٤}{س^٢}$   
 لكن ميل المنحنى عند س<sub>١</sub> =  $\frac{-٤}{س_١^٢}$   
 ومنها ١<sup>-</sup> =  $\frac{-٤}{س_١^٢}$   
 إذن س<sub>١</sub> = ٢ لأن س<sub>١</sub> < ٠  
 نقطة التماس هي (٢، ٢)، ومنها ميل العمودي =  $\frac{١}{١}$   
 معادلة العمودي هي ص - ٢ = ١(س - ٢) ومنها ص = س  
 النقطة (٠، ٠) تقع على العمودي على المماس.  
 أي أن العمودي على المماس يمر بالنقطة (٠، ٠)



مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) =  $\frac{س^2}{س-هـ}$  عند النقطة التي إحداثيها السيني = ١

الحل : ق(س) =  $\frac{س^2 - س - س^2}{س(س-هـ)}$  ومنها يكون ميل المماس = ق'(١) =  $\frac{١}{هـ}$  (لماذا ؟)

عندما س = ١، فإن ص =  $\frac{١}{هـ}$  فتكون معادلة المماس هي :

$$ص - \frac{١}{هـ} = \frac{١}{هـ}(س - ١) ، ومنها هـ ص = س$$

مثال ٤ : إذا كان المستقيم ص =  $٣س - ١$  + ج يمس منحنى ق(س) =  $٢س^2 + ٥س + ١$  جد نقطة / نقط التماس.

الحل : نفرض أن نقطة التماس (س١، ص١)، ق'(س) =  $٤س + ٥$

وبما أن ميل المماس = ميل المنحنى

$$إذن ٣ - ١ = ٤س١ + ٥ ومنها س١ = ٢$$

$$نقطة التماس = (٢، ق(٢)) = (٢، ٣) (تحقق من ذلك)$$

مثال ٥ : إذا كان المستقيم ص = ج + ٥ يمس منحنى الاقتران ق(س) =  $س^3 + ٣س + ٢$

عند النقطة (١-، ٣-) جد قيم أ، ب، ج

الحل : النقطة (١-، ٣-) تحقق معادلة المستقيم، ومنها ٣- = ج + ١- × ٥

$$٨- = ج أي أن ج = ٨- ومنها ص = ٨س + ٥$$

لكن النقطة (١-، ٣-) تحقق معادلة المنحنى

$$٣- = أ + ٣(١-) × ب + ٢(١-) × ج أي أن ٣- = أ + ٣ب + ٢ج ... (١)$$

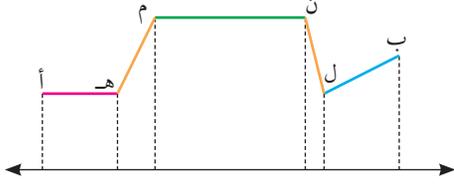
كما أن ميل المماس = ميل المنحنى عند النقطة (١-، ٣-)

$$\text{ومنها } ٣س^2 + ٢س = ٨ = ٣س^2 - ٢س + ٨ \dots (٢)$$

وبحل المعادلتين ينتج أن: أ = ٢، ب = ١-

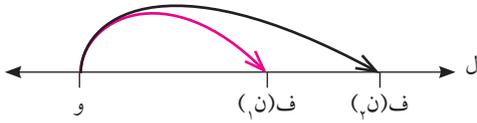
## نشاط ٢:

الشكل المجاور يمثل المسار (الملون) بين مدينتين أ، ب، انتقلت سيارة من المدينة أ باتجاه المدينة ب، ثم عادت إلى المدينة أ. هل الزمن الذي تستغرقه السيارة في الإياب يتساوى مع الزمن الذي استغرقته في الذهاب؟



لتكن (و) نقطة على المستقيم ل وتحرك جسم عليه بحيث كانت ف تمثل بعد الجسم عن النقطة (و) بعد ن ثانية فإن:

$$\text{السرعة المتوسطة في الفترة } [ن_١, ن_٢] = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} \text{ تساوي } \frac{ف \Delta}{\Delta ن}$$



## تعريف:

$$\text{السرعة اللحظية (ع) عند الزمن ن هي } ع(ن) = \frac{د ف}{د ن}$$

$$\text{التسارع اللحظي (ت) عند الزمن ن هو } ت(ن) = \frac{د ع}{د ن} = \frac{د^٢ ف}{د ن^٢}$$



## مثال ٦:

تحرك جسم على خط مستقيم، بحيث إن بعده عن نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعلاقة  $ف = ن^٣ - ٩ن^٢ + ٧$  حيث ف بعده بالأمتار، ن الزمن بالثواني، جد:

- ١ السرعة المتوسطة للجسم في الفترة [١، ٣]
- ٢ تسارع الجسم عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته.

## الحل:

$$١ \text{ السرعة المتوسطة } = \frac{ف \Delta}{\Delta ن} = \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١} = \frac{١ - ٤٧}{٣ - ١} = -٢٣ \text{ م / ث.}$$

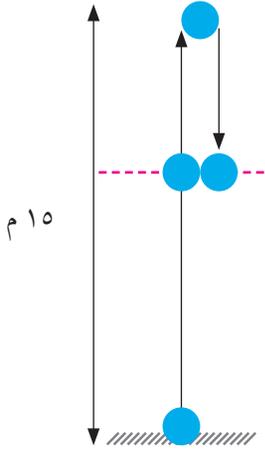
$$٢ \quad \text{ف(ن) = ع(ن) = } ١٨ - ٢ن^٣$$

يعكس الجسم اتجاه حركته في اللحظة التي تتغير فيها إشارة ع  
أي عندما ع(ن) = ٠ ومنها  $١٨ - ٢ن^٣ = ٠ \Leftrightarrow ٣(٦ - ن) = ٠ \Leftrightarrow ن = ٠, ن = ٦$  ثوانٍ  
يعكس الجسم اتجاه حركته بعد ٦ ثوانٍ  
ت(ن) = ١٨ - ٦ن = ١٨ - ٦ × ٦ = ١٨ - ٣٦ = -١٨ م/ث<sup>٢</sup>



### مثال ٧ :

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث  
يتحدد بعده عن سطح الأرض بالعلاقة ف(ن) =  $٢٠ - ٢ن^٢$ ،  
حيث ف: ارتفاع الجسم بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، جد:  
١ أقصى ارتفاع يصله الجسم.  
٢ سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٥ م من سطح الأرض.  
٣ المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الأربعة الأولى.



### الحل :

$$\text{ف(ن) = } ٢٠ - ٢ن^٢$$

١ عندما يصل الجسم أقصى ارتفاع فإن ع(ن) = ٠

$$\text{ع(ن) = } ٢٠ - ١٠ = ٠ \text{ أي أن } ن = ٢ \text{ ثانية}$$

$$\therefore \text{أقصى ارتفاع} = \text{ف(٢)} = ٢٠ - ٢ \times ٢ = ١٢ \text{ م}$$

٢ عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٥ م فإن ف(ن) = ١٥

$$\Leftrightarrow ٢٠ - ٢ن^٢ = ١٥ \Leftrightarrow ٢ن^٢ = ٥ \Leftrightarrow ن = \sqrt{٢.٥} = ١.١١٨ \text{ م}$$

$$\Leftrightarrow (١ - ن)(١ + ن) = ٠ \text{ ومنها } ن = ١, ن = ٣$$

يكون الجسم على ارتفاع ١٥ م عندما:

•  $ن = ١$  أي أن ع(١) =  $١٠ - ٢ = ٨$  م/ث، الجسم صاعد.

•  $ن = ٣$ ، أي أن ع(٣) =  $١٠ - ١٨ = -٨$  م/ث، (ماذا تعني السرعة السالبة؟)

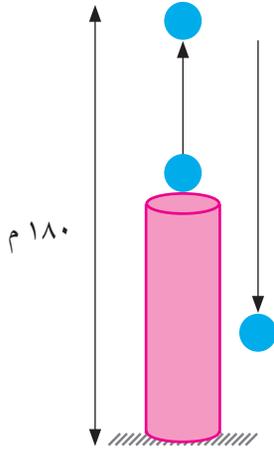
٣ عندما  $ن = ٤$  ثانية يكون الجسم على ارتفاع: ف(٤) =  $٢٠ - ٣٢ = -١٢$  م،

أي يكون الجسم قد وصل سطح الأرض،

وتكون المسافة المقطوعة =  $٢ \times \text{أقصى ارتفاع} = ٢٤$  م



مثال ٨ :



قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج بحيث إن ارتفاعه عن البرج بالأمتار بعد  $n$  ثانية يعطى بالعلاقة  
ف(ن) =  $30n - 5n^2$  ، جد:

- ١ ارتفاع البرج علماً بأن أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض =  $180$  م
- ٢ سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض.
- ٣ المسافة الكلية المقطوعة خلال الثواني السبعة الأولى.

الحل :

- ١ عند أقصى ارتفاع عن قمة البرج تكون  $v = 0$   
ع(ن) = ف(ن) =  $30n - 5n^2 = 0$  ومنها  $n = 3$   
أقصى ارتفاع عن قمة البرج = ف(٣) =  $45$  م  
لكن أقصى ارتفاع عن سطح الأرض =  $180$  م ، ارتفاع البرج =  $180 - 45 = 135$  م  
يرتطم الجسم بالأرض عندما تكون ف(ن) =  $-135$  م (فسّر).
- ٢ بحل المعادلة ينتج أن  $n = 9$  ومنها السرعة  $30 - 9 \times 10 = -60$  م / ث
- ٣ عندما  $n = 7$  الإزاحة =  $-35$  أي أن المسافة المقطوعة =  $125$  م (لماذا؟)

١ جد النقطة/النقط على منحنى ق(س) =  $s^2 - 2s + 1$  التي يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم  $s + 2v - 4 = 0$  صفر

٢ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) =  $3 - 3s^2$  عندما  $s = \frac{\pi}{4}$

٣ إذا كان المماس لمنحنى ق(س) =  $\frac{s}{2}$  عندما  $s = 2$  يقطع محوري السينات والصادات في النقطتين ب، ج على الترتيب، جد مساحة المثلث م ب ج، حيث م نقطة الأصل.

٤ إذا كان المستقيم  $s = 6 - v$  يمس منحنى الاقتران ق(س) =  $\frac{s^3}{2 - s}$ ، س  $\neq 2$ ، جد قيم أ.

٥ قذف جسم رأسياً إلى أعلى وفق العلاقة  $f = 40 - 5t^2$ ، حيث  $f$  ارتفاعه بالأمتار،  $t$  بالثواني. جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة  $100$  م.

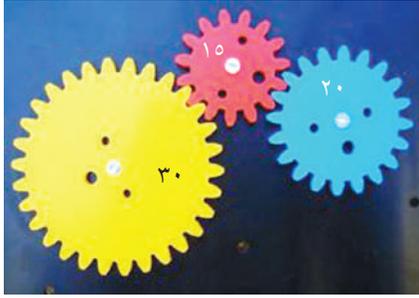
٦ من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى، وكان ارتفاعه  $f$  بالأمتار بعد  $t$  من الثواني يعطى بالعلاقة  $f = 30t - 5t^2$ ،

جد:

أ أقصى ارتفاع يصله الجسم.

ب سرعة الجسم وهو نازل عندما يكون على مستوى سطح العمارة التي ترتفع  $40$  م.

نشاط ١:



تعتبر التروس (المسنتات) من الأجزاء الميكانيكية المهمة التي تسهم في نقل الحركة وهي عبارة عن عجلات دائرية لها بروزات تتشابك مع أسنان الترس الآخر، وهكذا لتشكل سلسلة من التروس بأحجام مختلفة، تسهم في تسهيل الحركة المطلوبة ونقلها. بالاعتماد على الشكل المجاور.

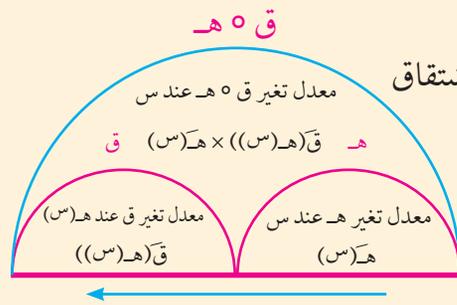
- ١ حدد اتجاه الحركة للترسين: الأحمر والأصفر علماً بأن حركة الأزرق باتجاه عقارب الساعة.
- ٢ إذا فرضنا أن الترس الأزرق يدور س مرة، فإن الأحمر (ح) يدور  $\frac{4}{3}$  س مرة (ح =  $\frac{4}{3}$  س)، أما الأصفر (ص) فيدور  $\frac{1}{2}$  ح مرة (ص =  $\frac{2}{3}$  س).  
(لاحظ عدد المسنتات في كل ترس). هل يمكن إيجاد  $\frac{د ص}{د س}$ ؟

تواجهنا بعض الاقترانات مثل ق(س) = (س<sup>2</sup> + ١)<sup>3</sup>، والمطلوب إيجاد ق(س)، وهنا نلجأ إلى فك المقدار أولاً ثم اشتقاق الناتج، أو استخدام مشتقة حاصل الضرب، ولكن هذه الطريقة تزداد صعوبة وتعقيداً كلما كان الأس كبيراً، وهذا يدعو إلى البحث عن طريقة أسهل لإيجاد مشتقة هذه الاقترانات. فمثلاً، إذا كان ص = ق(س) = (س<sup>2</sup> + ١)<sup>3</sup>، وفرضنا أن ع = هـ(س) = س<sup>2</sup> + ١ فيكون ص = ق(ع) = ع<sup>3</sup>

أتذكر:

ق(هـ) = (س) = ق(هـ(س)) هو الاقتران المركب من ق، هـ

قاعدة السلسلة:



إذا كانت ص = ق(ع)، ع = هـ(س) وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق و ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س)، مدى هـ  $\subseteq$  مجال ق  
فإن  $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$   
أي أن ق(هـ(س)) = ق(هـ(س)) × (هـ(س))'

مثال ١ :

إذا كان ق(س) = س<sup>٣</sup> + س ، هـ(س) = س<sup>٢</sup> ، جد:

١ (ق هـ) (س)      ٢ (هـ هـ) (٢)

الحل :

$$\begin{aligned} \text{ق(س)} &= \text{س}^3 + 1 \text{ ، هـ(س)} = \text{س}^2 \\ \text{١ (ق هـ) (س)} &= (\text{ق هـ}) \times (\text{هـ(س)}) \\ &= (\text{س}^3 + 1) \times \text{س}^2 = \text{س}^5 + \text{س}^2 \\ \text{٢ (هـ هـ) (٢)} &= (\text{هـ(٢)}) \times (\text{هـ(٢)}) \\ &= 8 \times 4 = 32 \end{aligned}$$

مثال ٢ :

إذا كان ص = ع<sup>٢</sup> - ع ، ع =  $\frac{1}{1+س}$  ، جد  $\frac{دص}{دس}$  عندما س = ٠

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{دص}{دس} &= \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دس} \times (٥ - ع) \\ &= \frac{1}{(1+س)^2} \times (٥ - ع) \text{ ، عندما س = ٠ فإن ع = ١} \\ \text{ومنها} \left. \frac{دص}{دس} \right|_{س=٠، ع=١} &= \frac{1}{(1+٠)^2} \times (٥ - ٢) = ٣ = ١^- \times ٣^- \end{aligned}$$

مثال ٣ :

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة ص = س ق(س) (١ + س<sup>٢</sup>) عندما س = ٢ ، علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق ، ق(٥) = ٣ ، ق(٥) = ١

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{دص}{دس} &= ١ \times \text{ق(س)} + (١ + \text{س}^2) \times \text{س} \\ \text{ميل المماس} \left. \frac{دص}{دس} \right|_{س=٢} &= \text{ق(٥)} + ٨ \times \text{ق(٥)} = ٢٤ + ١^- = ٢٣ \end{aligned}$$

ميل المماس = ٢٣ ، نقطة التماس هي (٢ ، ٢) . (لماذا؟)  
معادلة المماس هي ص - ٢ = ٢٣(س - ٢) ومنها ص = ٢٣س - ٤٨

### نتيجة:

إذا كان ص = (هـ(س))<sup>ن</sup>، وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق، ن  $\exists$  ص  
فإن  $\frac{دص}{دس} = ن(هـ(س))^{ن-1} \times هـ'(س)$



### مثال ٤:

إذا كان ق(س) =  $\left(\frac{س+1}{س-1}\right)^٥$ ، جد ق'(٢)

### الحل:

$$ق'(س) = ٥ \left(\frac{س+1}{س-1}\right)^٤ \times \frac{(س-1) - ١ \times (س+1)}{(س-1)^2}$$

$$= \frac{٢-}{٢(س-1)} \times \left(\frac{س+1}{س-1}\right)^٤$$

$$ق'(٢) = ٥ \times ٣ \times ٢^{-٤} = ٨١٠^{-}$$

### نشاط ٢:

إذا كان ص = (قاس + ظاس)<sup>ن</sup> فإن:

$$\frac{دص}{دس} = ن(قاس + ظاس)^{ن-1} (\dots\dots\dots)$$

$$= ن قاس(قاس + ظاس)^{ن-1} (\dots\dots\dots)$$

### ملاحظة:

يمكن تعميم قاعدة السلسلة لتشمل أكثر من اقترانين.



### مثال ٥:

إذا كان ص =  $(٢ع + \frac{٦٤}{ع})$ ، ع = س<sup>٣</sup>، س = أ + ٤، جد أ بحيث  $\frac{دص}{دم} \Big|_{س=٢} = ٩٠$

### الحل:

$$\frac{دص}{دم} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} \times \frac{دس}{دأ}$$

$$\text{أي أن } \frac{دص}{دم} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} \times \frac{دس}{دأ} = \frac{دص}{دم} \times \frac{٢ع}{٦٤} \times \frac{٣س^٢}{١} \times \frac{١}{١} = \frac{دص}{دم} \times \frac{٢ع}{٦٤} \times ٣س^٢$$

عندما س = ٢، فإن ع = ٨،

$$\text{ومنها } \frac{دص}{دم} \Big|_{س=٢} = \frac{دص}{دم} \times \frac{٢ \times ٨}{٦٤} \times ٣ \times ٢^٢ = ٩٠ \text{ ومنها } \frac{دص}{دم} \Big|_{س=٢} = \frac{١}{٢}$$

قاعدة:



إذا كان ك (س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن:

- ق (س) = هـ ك (س) قابل للاشتقاق، وتكون ق (س) = ك (س) هـ ك (س)
- م (س) = لو هـ ك (س)، ك (س) < 0 قابل للاشتقاق وتكون م (س) = ك (س) ك (س)

١ إذا كان ص = هـ جتاس فجد  $\frac{دص}{دس}$  عندما س =  $\frac{\pi}{2}$

مثال ٦:

٢ إذا كان ص = لو هـ س<sup>٢</sup>، فبيّن أن: ص = هـ ص = ٢-

١ الحل:  $\frac{دص}{دس} = -جاس هـ جتاس$  ومنها  $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=\frac{\pi}{2}} = ١- هـ ١-$

٢ ص = ٢ لو هـ س ومنها  $\frac{دص}{دس} = ٢$ ، ص =  $\frac{٢-}{س}$ ، ص =  $\frac{٢-}{س}$  (لماذا؟) أي أن ص = هـ ص = ٢-

## تمارين ٦-١

١ جد  $\frac{دص}{دس}$  عندما  $س = ١$  لكل مما يأتي:

أ ص =  $(س^٢ + س + ١)^٣$       ب ص =  $س^٢$  قا  $\frac{\pi}{س}$  ،  $س \neq ٠$

ج ص =  $٧ - ٢ع$  ،  $ع = \frac{١}{س^٢ + ١}$       د ص =  $\left(\frac{\pi}{س}\right)$  جتا  $(س)$  ،  $س \neq ٠$

هـ ص =  $(لو_٣(س))$  ،  $س < ٠$

٢ إذا كان ق(س) =  $\frac{لو_٣(م(س))}{س^٢}$  ، وكان م(١) = هـ<sup>٢</sup> ، م(١) = هـ<sup>٢</sup> ، فجد ق(١).

٣ جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ ق(س) = هـ<sup>٢</sup> س<sup>٢</sup> + س      ب ع(س) = لو\_٣(س<sup>٣</sup> - س<sup>٢</sup>) ،  $س < ٣$

٤ إذا كان ق(س) =  $س^٢(س + ١)$  اعتمد على

م(٢)	م(٢)	م(٢)
١	١-	٥

الجدول المجاور في إيجاد ق(١).

٥ إذا كان ص = ق<sup>٣</sup>(س) - ق(س<sup>٣</sup>) ، جد  $\frac{دص}{دس}$  عندما  $س = ٢$

علمًا بأن ق(٢) = ١ ، ق(٢) = ٢- ، ق(٨) = ٢.

٦ إذا كان ص =  $٢ن + ٥ن$  وكانت  $\frac{دن}{دس} \Big|_{١=ن} = ٢$  ، جد  $\frac{دص}{دس} \Big|_{١=ن}$ .

٧ إذا كان ق(س) =  $س + \frac{١}{س}$  ، هـ(س) = جتا س ،  $س \neq ٠$  ، أثبت أن: ق(٥ هـ) (س) = جاس قا<sup>٢</sup> س.

٨ جد: أ  $\frac{نها(٢س + هـ) - ظا٢س}{هـ}$

ب  $\frac{نها(١ + هـ٣) - ق(١ - هـ٣)}{١٠ هـ}$  ، علمًا بأن ق(١) = ٢-



نشاط ١:

شب حريق في إحدى البنايات، وهرعت قوات الدفاع المدني للمشاركة في إطفاء الحريق وإنقاذ المواطنين، فاستخدم أحد رجال الإطفاء سلماً طوله ٢٠ متراً للوصول إلى أحد شبايبك البناية، ولكن السلم بدأ بالترحلق بحيث يتعد أسفل السلم عن البناية بشكل أفقي.

تلاحظ من الشكل أن العلاقة بين  $s$ ،  $v$  هي  $s^2 + v^2 = 400$

ما اتجاه سير أعلى السلم؟ وهل يمكنك إيجاد  $\frac{dv}{ds}$  بناءً على ما تعلمته سابقاً؟

يمكنك كتابة العلاقة السابقة على الصورة  $v = \sqrt{400 - s^2}$ ، واستخدام قاعدة السلسلة في إيجاد مشتقة العلاقة.

سبق لك إيجاد مشتقة الاقتران  $v = \sqrt{400 - s^2}$  عندما تكون العلاقة بين المتغيرين صريحة (ص معرفة بدلالة  $s$ )، ولكن في العلاقة  $s^2 + v^2 = 400$  ليس من السهل كتابة  $v$  بدلالة  $s$ ، فنسميها علاقةً ضمنيةً، ونجد  $\frac{dv}{ds}$  بطريقة تسمى الاشتقاق الضمني، حيث يتم اشتقاق كل من طرفي العلاقة بالنسبة إلى  $s$  ضمن قواعد الاشتقاق.

مثال ١: إذا كان  $s^2 + v^2 = 400$ ، ثم جد  $\frac{dv}{ds}$  عند النقطة  $(1, 1)$

الحل: نشتق طرفي العلاقة ضمناً بالنسبة إلى  $s$ :

$$2s + 2v \frac{dv}{ds} = 0 \Rightarrow v \frac{dv}{ds} = -s$$

$$v \frac{dv}{ds} = -s \Rightarrow \frac{dv}{ds} = -\frac{s}{v}$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{s}{v} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{s}{v} = -\frac{1}{1} = -1$$

مثال ٢ : إذا كان ٣ ص = جاس جتا ٢ ص ، جد  $\frac{د ص}{د س}$

الحل : نشق طرفي العلاقة ضمناً بالنسبة إلى س

$$٣ ص = جتا ٢ ص + جاس - ٢ جا ٢ ص \times ص$$

$$٣ ص + ٢ جاس \times جا ٢ ص \times ص = جتا ٢ ص$$

$$\text{ومنها } ص = \frac{\text{جتاس} \times \text{جتا ٢ ص}}{٣ + ٢ جاس \times جا ٢ ص}$$



مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة (س + ص) - ٣ = ٣ ص - ٥ ، ص < ٠ ، عند نقطة تقاطع

منحناها مع المستقيم س + ص = ٢

الحل : بالتعويض بدل س + ص بالعدد ٢ في معادلة المنحنى ينتج أن: ٥ = ٣ ص - ٢

إذن ص = ١ ، ومنها نقطة التقاطع هي (١ ، ١)

لكن ميل المماس = ميل المنحنى عند النقطة (١ ، ١)

نشق العلاقة ضمناً بالنسبة إلى س فينتج ٣(س + ص) - ٥ = ٣ ص - ٢

وبتعويض النقطة (١ ، ١) ينتج أن: ٣(١ + ١) - ٥ = ٣ ص - ٢ ومنها ص = ٢

ميل المماس = ٢ - ٣ وتكون معادلة المماس هي: ص = ٢ - ٣



مثال ٤ : إذا كانت ص = ٣ع + ١ ، س = ٢ع - ٢ ، جد  $\frac{د ص}{د س}$  ، عندما ع = ٢ ، س < ٠

$$\text{الحل : } \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

لإيجاد  $\frac{د ع}{د س}$  نشق العلاقة س = ٢ع - ٢ ضمناً بالنسبة إلى س وينتج

$$س = ٢ \frac{د ع}{د س} + ٢$$

$$\text{ومنها } \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = (س٢ - ع٢) = س٢ - ع$$

$$\text{أي أن: } \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{دع}}{\text{س٢ - ع٢}}$$

$$\text{وبما أن: } \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{ فإن } \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{ع٢}}{\text{س٢ - ع٢}} = \frac{\text{دص} \times \text{ع٢}}{\text{س٢ - ع٢}}$$

عندما  $ع = ٢$ ،  $س = ١$  (لماذا)

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٦$$

قاعدة:

$$\text{إذا كانت } ص = س٢ - ع٢، م، ن \exists ص، م \neq ن، ن \neq ٠، \text{ فإن } \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$



نتيجة:

إذا كان  $ق(س) = (هـ(س))٢$ ،  $ن \exists ح$   
وكان  $هـ(س)$  اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن  $ق(س) = ن(هـ(س))٢ \times هـ(س)$



$$\text{إذا كان } ق(س) = (س٣ + ٥س - ٢) \frac{٣}{٤}، \text{ جد } ق(٢)$$

مثال ٥ :

$$\text{ق(س)} = (س٣ + ٥س - ٢) \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٤} = (س٣ + ٥س - ٢) \frac{٣}{١٦}$$

الحل :

$$\frac{(س٣ + ٥س - ٢)}{٢ - ٥س + س٣} \times \frac{٣}{٤} =$$

$$\frac{(٥ + ٢ \times ٣)}{٢ - ٢ \times ٥ + ٣} \times \frac{٣}{٤} = ق(٢)$$

$$\frac{٥١}{٨} = \frac{١٧}{٢} \times \frac{٣}{٤} =$$

مثال ٦ : احسب نهـا  $\frac{\sqrt[3]{2 - \sqrt{1 + s}}}{1 - s}$  باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : بالتعويض المباشر تكون  $\frac{\sqrt[3]{2 - \sqrt{1 + s}}}{1 - s} = \frac{0}{0}$  وبتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\text{نهـا} = \frac{\sqrt[3]{2 - \sqrt{1 + s}}}{1 - s} = \frac{\frac{1}{3}(2 - \sqrt{1 + s})^{-\frac{2}{3}}}{-1} = \frac{1}{3} \frac{(2 - \sqrt{1 + s})^{-\frac{2}{3}}}{-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2 - \sqrt{1 + s})^{\frac{2}{3}}} \text{ (لماذا؟) } \dots \frac{1}{12}$$



مثال ٧ : جد النقط على منحنى العلاقة  $\sqrt{v} + \sqrt{3 - v} = 5$  التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم  $v + 2s = 5$

الحل : ميل المماس = ميل المستقيم الموازي له  $= 2 = -2$  (لماذا؟)

(لماذا)  $0 = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  نشق العلاقة ضمناً بالنسبة إلى  $s$ :

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2}} = \text{ومنها } \sqrt{v} = \sqrt{2}$$

$$\text{لكن } \sqrt{v} - 3 = \sqrt{2} - 3$$

$$\text{ومنها } \sqrt{v} = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{أي أن: } \sqrt{3} = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{2} = 1 - 3 \Leftrightarrow s = 1 \text{ ومنها } v = 4$$

أي أن: النقطة المطلوبة هي (١، ٤).



نشاط ٢:

إذا كان  $٥ = \frac{٣}{ص} + \frac{٢}{س}$  ، ص ، س ، ص  $٥ \neq ٠$

١ بضرب طرفي المعادلة بالمقدار (س ص) ينتج  $٥ص٢ = ٣س + ٢ص٢$

٢ نشتق طرفي المعادلة ضمناً: .....

٣  $\frac{دص}{دس}$  .....

٤  $\frac{دص}{دس} \Big|_{(١,١)}$  تساوي .....

٥ هل يمكن إيجاد  $\frac{دص}{دس}$  عند النقطة (٢ ، ٣) ؟ ..... (لماذا؟)

نشاط ٣:

إذا كانت ص  $\frac{(١ + س)^٤ (س + ٢)^٤}{(س٢ + ١)٣}$

لإيجاد  $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=٠}$  نأخذ لوغاريتم الطرفين فيصبح:

لور ص = لور  $\frac{(١ + س)^٤ (س + ٢)^٤}{(س٢ + ١)٣}$

وبتطبيق قوانين اللوغاريتمات تصبح:

لور ص = لور  $٥(١ + س) + ٤(س + ٢) - ٣(س٢ + ١)$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س تكون  $\frac{دص}{دس} =$  .....

ومنها  $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=٠} =$  .....

١ جد  $\frac{دص}{دس}$  لكل مما يأتي :

أ  $٥ = ٣س + ص + ٢ص$  ب  $٣ + \sqrt{١ - ٢س} = ص$

ج  $ص = جا(س + ص)$  د  $٢ = \frac{١}{ص} + \frac{١}{س}$

٢ جد معادلة العمودي على منحنى الدائرة التي معادلتها  $ص = ٢س - ٣س + ٢ص = ٢٥$  ، عند كل من نقطتي تقاطعها مع منحنى  $ص = ٢س - ٣س + ٥$

٣ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة  $٢ = أن + ٢٤$  حيث  $ف$  المسافة بالأمتار،  $ن$  الزمن بالثواني، جد قيمة  $أ$  الموجبة. علماً بأن سرعته بعد  $٢$  ثانية تساوي  $١ م / ث$ .

٤ إذا كانت  $ف = أجا(٢ن + م)$ ،  $أ \neq ٠$  هي معادلة الحركة لجسيم يتحرك على خط مستقيم، حيث  $أ$ ،  $م$  عدنان ثابتان، أثبت أن:  $ت = ٤^-$  ف عددياً.  $ف$  المسافة بالأمتار،  $ن$  الزمن بالثواني.

٥ إذا كان المستقيم المار بالنقطة  $(٠، ٢^-)$  يمس منحنى العلاقة  $٤س + ٢ص = ٤$ ، جد نقطة/نقط التماس.

٦ إذا كان  $هص + هس = هص^- + هس^-$ ، فجد  $\frac{دص}{دس}$  عند النقطة  $(١، ١)$ .

٧ إذا كانت  $٢س = لو(سص)$ ،  $س$ ،  $ص < ٠$ ، فجد  $\frac{دص}{دس}$  عند النقطة  $(١، ه)$ .

٨ إذا كان  $ق(س)$ ،  $ه(س)$  اقتراين قابلين للاشتقاق وكانت  $ص = ق(س) \times ه(س)$

أثبت أن:  $\frac{ص}{ق} = م \left( \frac{ق}{ق} + \frac{ه}{ه} \right)$ ، حيث  $م \neq ٠$ ،  $ق(س)$ ،  $ه(س) \neq ٠$

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

١ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٣، ١] يساوي ٤ وكان متوسط تغير نفس الاقتران

في الفترة [٧، ٣] يساوي  $5^-$ ، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [٧، ١]؟

أ) ٢ (ب) ١ (ج)  $1^-$  (د)  $2^-$

٢ إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢،  $1^-$ ) يصنع زاوية قياسها  $135^\circ$  مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات، فما قيمة  $\frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$ ؟

أ)  $1^-$  (ب)  $\frac{1^-}{٢}$  (ج)  $\frac{١}{٢}$  (د) ١

٣ إذا كان ق(س) = جتا ٢س، فما قيمة ق(س) + ٦ ق(س)؟

أ) جتا ٢س (ب) جا ٢س (ج) جتا ٢س (د) جا ٢س

٤ إذا كان ق(س) =  $\sqrt{١ + ٢س}$  وكان ق قابلاً للاشتقاق، فما قيمة ق(٣)؟

أ) ١٦ (ب) ٢٩ (ج) ٤٨ (د) ١٤٤

٥ إذا كان  $س^٢ - س + ص = ٣$ ، فما قيمة  $\frac{دص}{دس}$  عند النقطة (١،  $1^-$ )؟

أ)  $2^-$  (ب)  $1^-$  (ج) ١ (د) ٢

٦ إذا كان ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} س^٢ + ٢ ، س \neq ٥ \\ س ، س = ٥ \end{array} \right\}$ ، فما قيمة ق(٥)؟

أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ١٠ (د) غير موجودة

٧ يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة: ف(ن)ع(ن) = ن

ف: المسافة بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، ع(ن) السرعة، وكانت ع(٢) =  $٣ م/ث$ ،

فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية؟

أ)  $٨ م/ث^٢$  (ب)  $٨ م/ث^٢$  (ج)  $١٢ م/ث^٢$  (د)  $١٢ م/ث^٢$

٨ إذا كان ق(س) =  $\frac{1}{س+١}$  ، هـ(س) = ظاس ، فما قيمة ق(٥ هـ) (س) ؟

أ) قاس (ب) جتاس (ج) ١ (د) قاس ظاس

٩ إذا كانت ق(س) =  $(س+٢)٣$  ، فما قيمة ق(١) ؟

أ)  $\frac{١١}{١٨}$  (ب)  $\frac{٤}{٩}$  (ج)  $\frac{١٥}{١٨}$  (د)  $\frac{١}{٢}$

١٠ إذا كانت س = جتاص ، ص  $\in [٠, \frac{\pi}{٢}]$  ، فما قيمة  $\frac{دص}{دس}$  ؟

أ)  $\frac{١}{\sqrt{س-١}}$  (ب)  $\frac{١}{\sqrt{س-١}}$  (ج)  $\frac{س}{\sqrt{س-١}}$  (د)  $\frac{س}{\sqrt{س-١}}$

١١ إذا كان ق(٥ هـ) = (٣) ، وكان ق(س) =  $س-٩$  ، هـ(٣) = ٥ ، فما قيمة هـ(٣) ؟

أ) ٠ (ب) ١,٥ (ج) ٢ (د) ٣

١٢ أي الاقترانات الآتية يكون قابلاً للاشتقاق على مجاله ؟

أ) ق(س) = [٢ - س] (ب) ق(س) = |س - ٢| - |س|

ج) ق(س) =  $\sqrt{س+٢} + ١$  (د) ق(س) = [س + ٢] - [س]

٢ إذا كان ق(١) = ٢ ، ق(٣) = ٢- ، ق(٣) = ٤ ، جد نها  $\frac{ق(١+٩ هـ) - ق(١)}{١ - هـ + \sqrt{١}}$

٣ جد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) = (س + ١) هـ<sup>٢-س</sup> عندما تتغير س من ٠ إلى ١

٤ إذا كان ق(٢) = ٣ ، ق(٢) = ١- ، جد نها  $\frac{ق(س+٢) - ق(١-س)}{س-١}$

٥ جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال

أ) نها  $\frac{هـ-٤}{ظاس}$  (ب) نها  $\frac{هـ-٢}{س}$

ج) نها  $\frac{جا٢س - جاس}{س}$  (د) نها  $\frac{١ - جتاس}{س جاس}$

$$6 \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذا كان هـ(س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + \text{ق(س) - 1} , \text{ س} \leq 1 \\ \text{ق(س)} , \text{ س} > 1 \end{array} \right\} \text{، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س)}$$

في الفترة [٠، ٢] يساوي ٣ جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) في الفترة [٠، ٣]

$$7 \quad \text{إذا كانت نهـا} \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - \text{ق(س)} \\ \text{س} - 1 \end{array} \right\} = 3, \text{ ق متصلًا على ح.}$$

$$\text{جد نهـا} \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 \text{ق(س) - ق(1)} \\ \text{س} - 1 \end{array} \right\}$$

8 **ا** يقف أحمد ونزار على سطح بناية، أفلت أحمد كرةً من السكون وفق العلاقة ف<sub>١</sub>(ن) = ٥ن<sup>٢</sup>، وفي اللحظة نفسها، رمى نزار كرةً أخرى عمودياً إلى أسفل وفق العلاقة ف<sub>٢</sub>(ن) = ١٥ن + ٥ن<sup>٢</sup>، فإذا ارتطمت كرة أحمد بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار، ما سرعة ارتطام كرة نزار بالأرض؟  
(ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

$$9 \quad \text{إذا كان ق(س) = أجاس، هـ(س) = } \frac{\text{س}^3}{1 + \text{س}^2} \text{ فجد قيمة أ بحيث (هـ ٥ ق) } = \left(\frac{\pi}{6}\right), \text{ أ} \neq 0$$

$$10 \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} [2 - \text{س}] + \text{س}^2 , \text{ س} \geq 0 \\ \frac{2}{1 + \text{س}} , \text{ س} \leq 2 \end{array} \right\} \text{،}$$

ابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله.

11 **ا** يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف = ٢(هـ<sup>٢</sup> - هـ<sup>٢</sup> - ٥)، بين أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي ٤ ف عددياً. (ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

$$12 \quad \text{إذا كان ق(س) = جاس}^3 - \text{جتاس}^3, \text{ جد ق}\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

13 **ا** جد مجموعة قيم س التي تكون عندها ق(س) = ٠ في كل مما يأتي:

$$\text{أ} \quad \text{ق(س) = (س) = } (2 - \text{س})^2 (2 + 3\text{س})^2, \text{ س} \in [0, 3]$$

$$\text{ب} \quad \text{ق(س) = جاس} (1 + \text{جتاس}), \text{ س} \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

١٤ جد  $\frac{دص}{دس}$  لكل من الاقترانات الآتية:

أ ص = ق (س) =  $\frac{س هـ اس}{جاس}$  ، جاس  $\neq ٠$

ب ص = ق (س) =  $\frac{س ل و س}{جتاس}$  ، حيث  $س < ٠$  ، جتاس  $\neq ٠$

١٥ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = أ(جتا ٢ن + جا ٢ن) حيث ف تمثل بعد الجسم عن النقطة الثابتة (و)، ن الزمن بالثواني. ما تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من النقطة (و)؟

١٦ جد النقطة/ النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى ق(س) =  $س + \frac{١}{س}$  ، س  $\neq ٠$   
موازيًا للقاطع الواصل بين النقطتين (٢، ١) ، (٢، ٢) ،  $(\frac{٥}{٢}, ٢)$

١٧ أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

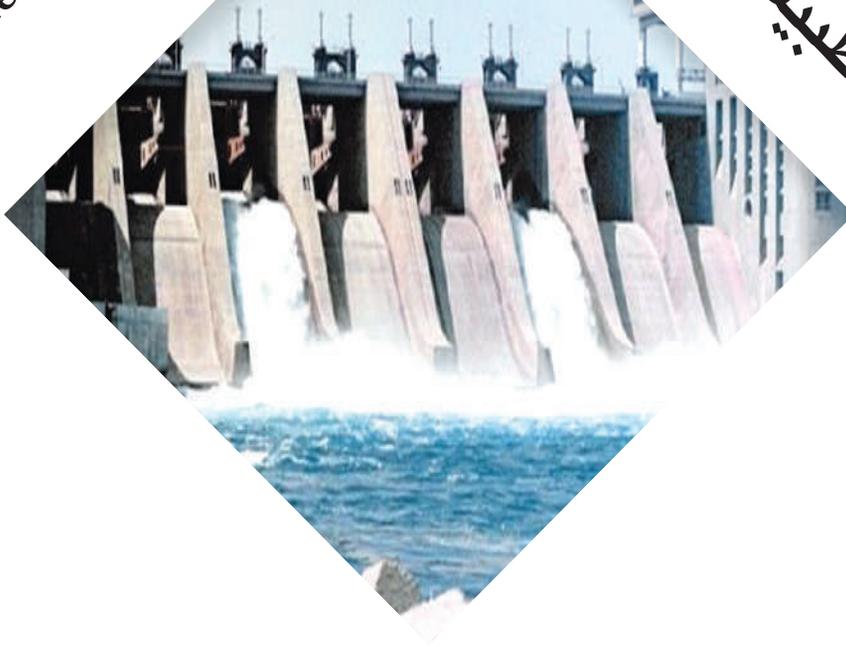
مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			أجد متوسط التغير جبريا وهندسيا
			استخدم قاعدة لوبيتال في ايجاد المشتقات
			أجد مشتقات الاقترانات واحل مسائل منوعة عليها
			أجد مشتقة اقترانات ليست كثيرة حدود
			أوظف قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني في ايجاد مشتقة اقترانات

الوحدة

٢

Differentiation Applications

تطبيقات التفاضل



ما سبب انهيار بعض السدود؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف تطبيقات التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ إيجاد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لاقتران معلوم.
- ٢ التعرف إلى نظرية القيمة المتوسطة، ونظرية رول، وبعض التطبيقات عليها.
- ٣ إيجاد القيم العظمى والصغرى لمنحنى اقتران معلوم.
- ٤ إيجاد فترات التفرع للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى اقتران معلوم.
- ٥ تحديد خصائص اقتران، إذا علم منحنى إحدى مشتقاته.
- ٦ توظيف القيم القصوى المطلقة في حل مسائل حياتية.

## أولاً: نظرية رول\*



المسجد العمري الكبير

نشاط ١: الشكل المجاور يمثل جزءاً من الأقواس التي تزين المسجد العمري الكبير بغزة حيث الخط  $AB$  يمثل خطاً أفقياً يصل بين نهايات الأعمدة. ما ميل الخط الأفقي  $AB$ ، وما ميل الخط الأفقي المار بالنقطة  $(ج)$ ؟ وما قيمة  $ق(ج)$ ؟

## نظرية رول\*:



إذا كان  $ق(س)$  اقتراناً متصلاً في الفترة  $[أ، ب]$ ، وقابلاً للاشتقاق في  $[أ، ب]$ ، وكان  $ق(أ) = ق(ب)$  فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل  $ج \in [أ، ب]$  بحيث  $ق(ج) = ٠$ .

مثال ١: يبين أن الاقتران  $ق(س) = س^٢ - س - ٦$  يحقق شروط نظرية رول في الفترة  $[٠، ١]$ . ثم جد قيمة، أو قيم  $ج$  التي تعينها النظرية.

## الحل :

١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران  $ق(س)$  في الفترة  $[٠، ١]$   $ق(س)$  متصل في الفترة  $[٠، ١]$  وقابل للاشتقاق في الفترة  $[٠، ١]$  لأنه كثير حدود

$$ق(٠) = ٦^-، ق(١) = ٦^-، ومنها ق(٠) = ق(١)$$

تحققت شروط نظرية رول

إذن يوجد على الأقل  $ج \in [٠، ١]$  بحيث  $ق(ج) = ٠$

٢ نجد قيمة/ قيم  $ج$  التي تعينها النظرية:

$$ق(س) = س^٢ - س - ٦ = ٠ ومنها ق(ج) = ٠ - ١ - ٦ = ٠$$

$$ج = \frac{1}{٢} \in [٠، ١]$$

\* ميشيل رول : هو عالم رياضيات فرنسي اشتهر بوضعه مبرهنة رول (١٦٩١)

مثال ٢ :

إذا علمت أن الاقتران ق(س) = جتا٢س + ٢جاس يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ، π] حيث  $٠ < أ$  ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل :

بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ، π] فإن ق(أ) = ق(π) ومنها جتا٢أ + ٢جاأ = ١ (لماذا؟)  
إذن  $٢جاأ + ٢جاأ = ٠$  ..... (لماذا؟)  
 $٢جاأ(١ - ١) = ٠$  ومنها إما جاأ = ٠ فتكون أ = π ، ٠ (مرفوضة)  
أو (جاأ - ١) = ٠ ومنها جاأ = ١ فتكون  $أ = \frac{\pi}{٢}$

مثال ٣ :

ابحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} ١ - > س \geq ٤^- ، ٢ - س \\ ١ \geq س \geq ١^- ، ٧ - ٢ س \end{array} \right\}$  في الفترة [٤<sup>-</sup> ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحدها النظرية (إن وجدت).

الحل :

نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [٤<sup>-</sup> ، ١]

١ ق(س) متصل في [٤<sup>-</sup> ، ١] لأنه كثير حدود

ق(س) متصل في [١ ، ١<sup>-</sup>] لأنه كثير حدود

لكن ق(س) غير متصل عند س = ١<sup>-</sup> ..... (لماذا؟)

ومنها فإن ق(س) غير متصل على [٤<sup>-</sup> ، ١]

٢  $\left. \begin{array}{l} ١^- > س > ٤^- ، ١ \\ ١ > س > ١^- ، ٢ س \end{array} \right\} = ق(س)$

ق(١<sup>-</sup>) غير موجودة (لماذا؟)

إذن ق(س) غير قابل للاشتقاق على [٤<sup>-</sup> ، ١]

٣ ق(٤<sup>-</sup>) = ق(١) = ٦<sup>-</sup>

لم تتحقق شروط نظرية رول على [٤<sup>-</sup> ، ١] ، وهذا لا يعني بالضرورة عدم وجود قيم

جـ ، وللبحث عن قيم جـ بحيث ق(جـ) = ٠ فإنه:

عندما  $٤^- > س > ١^-$  تكون ق(س) ≠ ٠ ، لا يوجد جـ في هذه الفترة

عندما  $١ > س > ١^-$  فإن  $٢جـ = ٠$  ، أي أن جـ = ٠ ∈ [١<sup>-</sup> ، ١]

هل يتعارض هذا مع نظرية رول ؟ ..... (لماذا؟)

مثال ٤ :

إذا علمت أن الاقتران ق(س) =  $\frac{(س^2 - ٥س + ٦)(س + ١)}{س - ٣}$ ، س  $\in [١^-، ب]$  يحقق شروط نظرية رول في  $[١^-، ب]$ ، وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي جـ = ٠، فجد الثابتين أ، ب

الحل :

بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة  $[١^-، ب]$  فإن:

ق(س) متصل في  $[١^-، ب]$  ومنها فإن  $٣ > ب$ ، ..... (لماذا؟)

وبالتالي ق(س) = (س - ٢)(س + ١) =  $س^2 + س - ٢$ ، س  $\neq ٣$  (لماذا؟)

وبما أن ق(ب) = ق(١<sup>-</sup>) فإن  $ب^2 - ٢ب + ١ = ٣ - أ$  ..... (١) (لماذا؟)

لكن ق(س) =  $س^2 + س - ٢$ ، س  $\in [١^-، ب]$

وبما أن جـ = ٠ فإن ق(٠) = ٠ ومنها  $٢ = أ$  (لماذا؟)

بتعويض قيمة  $أ = ٢$  في المعادلة (١) نحصل على أن قيمة  $ب = ١$

مثال ٥ :

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على  $[أ، جـ]$  بحيث ق(س) موجودة في  $[أ، جـ]$ ،

وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)، حيث  $أ > ب > جـ$ .

أثبت وجود عدد حقيقي واحد على الأقل  $د \in [أ، جـ]$  بحيث ق(د) = ٠

الحل :

١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في  $[أ، ب]$

وحيث أن ق(س) موجودة في  $[أ، جـ]$  فإن:

ق(س) متصل على  $[أ، ب]$  وقابل للاشتقاق على  $[أ، ب]$ ، ق(أ) = ق(ب)

∴ تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ  $\in [أ، ب]$  بحيث ق(جـ) = ٠

٢ نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في  $[ب، جـ]$

ق(س) متصل على  $[ب، جـ]$  وقابل للاشتقاق على  $[ب، جـ]$ ، ق(ب) = ق(جـ)

∴ تحققت شروط نظرية رول، ومنها يوجد جـ  $\in [ب، جـ]$  بحيث ق(جـ) = ٠

لاحظ أن  $جـ > جـ$  ..... (لماذا؟)

٣ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في  $[جـ، جـ]$

ق(س) متصل في  $[جـ، جـ]$  وقابل للاشتقاق في  $[جـ، جـ]$  (لماذا؟)

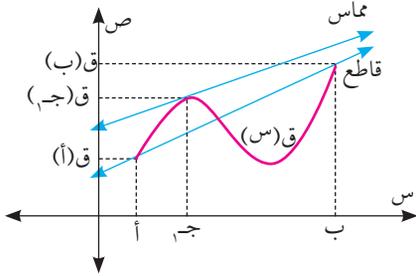
ق(جـ) = ق(جـ)

∴ تحققت شروط نظرية رول على ق(س) في  $[جـ، جـ]$

يوجد على الأقل عدد مثل  $د \in [جـ، جـ]$ ،  $د \in [أ، جـ]$  بحيث ق(د) = ٠

## نشاط ٢:

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ، ب]. هل ق(س) متصل في [أ، ب]، وقابل للاشتقاق في [أ، ب]؟ ما ميل القاطع الواصل بين النقطتين (أ، ق(أ))، (ب، ق(ب))؟ هل ميل مماس المنحنى عند س = ج = يساوي ميل القاطع؟ ..... (لماذا؟) هل يوجد في الشكل مماسات أخرى لها نفس الميل؟



## نظرية القيمة المتوسطة:



إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في ]أ، ب[ فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل ج ∈ ]أ، ب[ بحيث أن ق(ج) =  $\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

## مثال ٦:

بين أن الاقتران ق(س) = س<sup>٣</sup> + ١ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [-٢، ١] ثم جد قيمة/ قيم ج التي تحدها النظرية.

## الحل:

نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [-٢، ١] الاقتران ق(س) متصل في الفترة [-٢، ١]، وقابل للاشتقاق في الفترة [-٢، ١] لأنه كثير حدود، إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [-٢، ١]

$$\text{يوجد على الأقل } ج \in [-٢، ١] \text{ بحيث } ق(ج) = \frac{ق(١) - ق(-٢)}{١ - (-٢)}$$

$$\text{ومنها } ٣ج = \frac{١ - ٨}{٣} = -٢ \text{ أي أن } ج = -٢$$

$$\text{ومنها } ٣ج = ١ \text{ أي أن } ج = \frac{١}{٣} \text{ ..... (لماذا؟)}$$

مثال ٧ :

إذا علمت أن الاقتران ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{أ} \text{ س} + \text{ب} ، \text{ أ} \text{ س} \geq 3^- ، \text{ أ} \text{ س} \geq 1^- \\ \text{ب} \text{ س}^- ، \text{ أ} \text{ س} > 1^- ، \text{ أ} \text{ س} \geq 5 \end{array} \right\}$  ، يحقق شروط  
نظرية القيمة المتوسطة في الفترة  $[5, 3^-]$  ، جد الثابتين أ ، ب .

الحل :

بما أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة  $[5, 3^-]$  فإن:

ق(س) متصل على  $[5, 3^-]$  ومنه ق(س) متصل عند  $س = 1^-$

أي أن:  $1^- = \text{أ} + \text{ب} = 1^-$  ..... (١)

كما أن: ق(س) قابل للاشتقاق في  $[5, 3^-]$ :

ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{أ} ، \text{ أ} \text{ س} \geq 3^- ، \text{ أ} \text{ س} > 1^- \\ \text{ب} \text{ س}^- ، \text{ أ} \text{ س} > 1^- ، \text{ أ} \text{ س} > 5 \end{array} \right\}$  ،  $\text{أ} ، \text{ب} \in \mathbb{R}$

وتكون ق(س) =  $1^- + (س - 1^-) \cdot \text{ب}$  وينتج أن:  $2 = \text{أ}$

بتعويض قيمة  $2 = \text{أ}$  في المعادلة (١) ينتج أن  $1 = \text{ب}$

مثال ٨ :

ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) =  $2س + 1$  في الفترة  $[1, 0]$  ،  
ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية (إن وجدت).

الحل :

نكتب الاقتران ق(س) دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح.

ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} 1 ، \text{ أ} \text{ س} \geq 0 ، \text{ أ} \text{ س} > \frac{1}{2} \\ 2 ، \text{ أ} \text{ س} \geq \frac{1}{2} ، \text{ أ} \text{ س} > 1 \\ 3 ، \text{ أ} \text{ س} = 1 \end{array} \right\}$  ومنها ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} 0 ، \text{ أ} \text{ س} > \frac{1}{2} \\ 0 ، \text{ أ} \text{ س} > 1 \end{array} \right\}$

نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في  $[1, 0]$

ق(س) غير متصل في  $[1, 0]$  (لماذا؟)

ق(س) غير قابل للاشتقاق في  $[1, 0]$  (لماذا؟)

لم تتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في  $[1, 0]$  ، وهذا لا يعني عدم وجود قيم

لـ جـ ، وللبحث عن قيمة / قيم جـ (إن وجدت)

$$\text{ق(جـ)} = \frac{\text{ق(0)} - \text{ق(1)}}{0 - 1} = 2$$

لكن ق(س)  $\neq 2$  ،  $\forall س \in [1, 0]$  ، وبالتالي لا يوجد جـ  $\in [1, 0]$

١ بين أيًا من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول في الفترة المعطاة، ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي تحدها النظرية في كل حالة (إن وجدت).

أ ق(س) =  $\sqrt{4س - س^2}$  ، س  $\in [٠, ٤]$

ب ق(س) =  $س^2 - ٢س - ٣$  ، س  $\in [-١, ٣]$

جـ ق(س) =  $\log(س + \frac{1}{س})$  ، س  $\in [\frac{1}{٢}, ٢]$

د ق(س) =  $٢س + ٢$  جـاس ، س  $\in [٠, \frac{\pi}{٢}]$

٢ بين أيًا من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة المعطاة، ثم جد قيمة أو قيم جـ التي تحدها النظرية في كل حالة (إن وجدت):

أ ق(س) =  $س^3 - س - ١$  ، س  $\in [-١, ٢]$

ب ق(س) =  $\frac{٤}{٢ + س}$  ، س  $\in [-١, ٢]$

جـ ق(س) =  $\sqrt{س + ٢س}$  ، س  $\in [٤, ٩]$

٣ إذا كان ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} ٢ \geq س \geq ٠ ، \quad أس^٢ + ٢س \\ س^٣ - ٣س + ١٢ \geq ٠ ، \quad ٣ \geq س > ٢ \end{array} \right\}$  ، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في

الفترة  $[٠, ٣]$ ، جد قيم الثابتين أ، ب، ثم جد قيمة / قيم جـ التي تحدها النظرية.

٤ إذا كان ق(س) =  $\frac{1}{س}$  ، س  $\in [أ, ب]$  ، س  $< ٠$  ، فأثبت باستخدام نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الأقل جـ  $\in [أ, ب]$  ، بحيث جـ<sup>٢</sup> = أ . ب

٥ إذا كان ع(س) = (ق ٥ هـ)(س) ، س  $\in [أ, ب]$  ، ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين في  $[أ, ب]$  وقابلين للاشتقاق في  $[أ, ب]$  ، وكان هـ(أ) = ب ، هـ(ب) = أ .

أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ  $\in [أ, ب]$  ، بحيث ع(أ) - ع(ب) = ق(جـ) (ب - أ)

٦ إذا كان ق(س) =  $س$  جـاس ، س  $\in [٠, \frac{\pi}{٢}]$  استخدم نظرية رول لإثبات أن القيمة التي تعينها النظرية هي عندما س =  $\frac{\pi}{٢}$ .



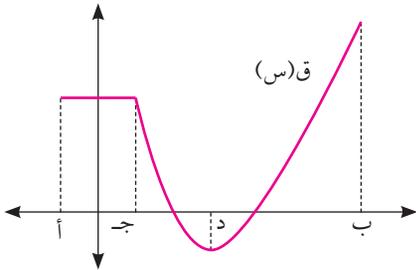
**نشاط ١:** أراد أحد المغامرين السير بسيارته على شارع فوق سلسلة الجبال التي تراها في الصورة، مبتدئاً من النقطة (أ) ومنتهاً بالنقطة (و)، بحيث يلتزم بخط السير الظاهر في الصورة. تلاحظ أن السيارة أثناء سيرها بين (أ) ، (ب) تكون في حالة صعود.

حدد نقطتين على الصورة تكون السيارة بينهما في حالة نزول. إذا كانت إحداثيات النقطة ب (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) وإحداثيات النقطة ج (س<sub>٢</sub> ، ص<sub>٢</sub>)، أيهما أكبر ص<sub>٢</sub> أم ص<sub>١</sub> ؟

**تعريف:**

يكون منحنى الاقتران ق(س) المعروف في [أ، ب] ، س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> ∈ [أ، ب]

- ١ متزايداً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س<sub>١</sub> > س<sub>٢</sub> فإن ق(س<sub>١</sub>) > ق(س<sub>٢</sub>)
- ٢ متناقصاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س<sub>١</sub> > س<sub>٢</sub> فإن ق(س<sub>١</sub>) < ق(س<sub>٢</sub>)
- ٣ ثابتاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س<sub>١</sub> > س<sub>٢</sub> فإن ق(س<sub>١</sub>) = ق(س<sub>٢</sub>)



في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايداً، أو متناقصاً، أو ثابتاً.

يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في [أ، ج] ويكون متناقصاً في [ج، د] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [ج، د] تقل قيمة ق(س)، ويكون متزايداً في [د، ب] (لماذا؟)

(ملاحظة: لا يطلب من الطالب التحقق من التزايد والتناقص جبرياً باستخدام التعريف)

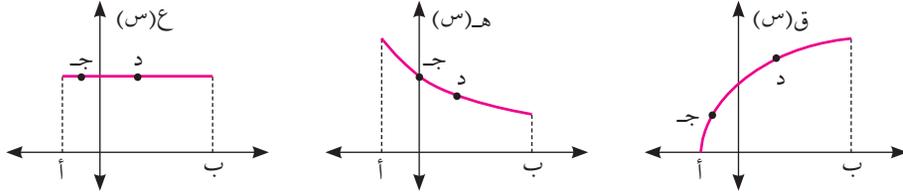
**مثال ١:**

**الحل:**

## التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى

### نشاط ٢:

الشكل أدناه يمثل منحنيات الاقترانات : ق(س)، هـ(س)، ع(س) المعرفة في الفترة [أ، ب]، معتمداً عليها قم بما يأتي:



- ١ حدد أي الاقترانات السابقة يكون منحناه متزايداً، وأيها متناقصاً، وأيها ثابتاً في الفترة [أ، ب].
- ٢ ارسم لكل منحنى مماساً عند النقطة جـ ومماساً عند النقطة د.
- ٣ نوع زاوية الميل للمماسات المرسومة هي .....
- ٤ إشارة ظل زاوية ميل المماس لكل من المماسات التي رسمت هي ..... (لماذا؟)
- ٥ ما إشارة كل من ق(س)، هـ(س)، ع(س) في [أ، ب]؟
- ٦ ما العلاقة بين فترات التزايد والتناقص وإشارة المشتقة الأولى للاقتران؟

### نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في [أ، ب] وقابلًا للاشتقاق في [أ، ب] فإن منحنى :

- ١ الاقتران ق(س) يكون متزايداً في [أ، ب] إذا كانت ق'(س) < 0، صفر،  $\forall$  س  $\in$  [أ، ب]
- ٢ الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في [أ، ب] إذا كانت ق'(س) > 0، صفر،  $\forall$  س  $\in$  [أ، ب]
- ٣ الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في [أ، ب] إذا كانت ق'(س) = 0، صفر،  $\forall$  س  $\in$  [أ، ب]



جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن:

$$ق(س) = (س - ٢)(١ + س)، س \in ح$$

### مثال ٢:

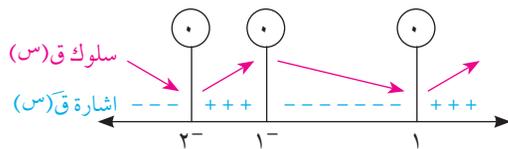
نضع ق'(س) = صفر، ومنها (س - ٢)(١ + س) = ٠

$$\text{ومنها } (س - ٢)(١ + س) = ٠$$

فنتج أن س = ١ أو س = ١- أو س = ٢-

من إشارة ق'(س) في الشكل المجاور يكون:

### الحل:



منحنى ق(س) متناقصاً في  $[-\infty, 2-]$ ،  $[2-, 1-]$ ،  $[1-, 1]$ ، و متزايداً في  $[1, 1-]$ ،  $[1-, \infty]$ .

مثال ٣ :

عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س<sup>٤</sup> + س<sup>٥</sup>، س ∃ ح

الحل :

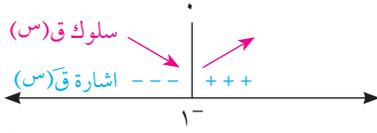
ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود.

ق(س) = س<sup>٤</sup> + س<sup>٣</sup> + ٤ نجعل ق(س) = ٠ ومنها س<sup>٣</sup> + ١ = ٠ فتكون س = ١<sup>-</sup> (لماذا؟)

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور:

يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة ]∞، ١<sup>-</sup>[

ومتناقصاً في الفترة ]١<sup>-</sup>، ∞<sup>-</sup>[.



مثال ٤ :

عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) =  $\frac{1-s}{1+s}$ ، س ≠ ١<sup>-</sup>

الحل :

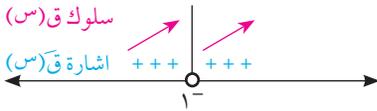
ق(س) =  $\frac{1-s}{1+s}$ ، س ≠ ١<sup>-</sup> متصل في ح - {١<sup>-</sup>}

$$ق(س) = \frac{2}{(1+s)^2}$$

ق(س) ≠ ٠ ∴ س ∃ ح - {١<sup>-</sup>}

والشكل المجاور يبين إشارة ق(س)

ومنه يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترتين ]∞، ١<sup>-</sup>[ ، ]١<sup>-</sup>، ∞<sup>-</sup>[



### فكر وناقش



في المثال السابق هل يمكن القول أن ق(س) متزايد في ح - {١<sup>-</sup>}

مثال ٥ :

أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> + ظاس متزايد في الفترة  $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^-}{2}[$

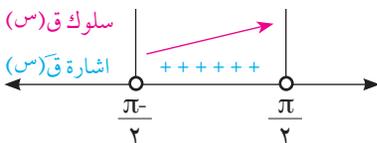
الحل :

ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في الفترة  $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^-}{2}[$  (لماذا؟)

ق(س) = (س<sup>٢</sup> + ٢) ق(س) ≠ ٠

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة  $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^-}{2}[$



مثال ٦ :

عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران

$$\text{ق(س)} = \left. \begin{array}{l} \text{جاس} \\ \frac{\pi}{2} \geq \text{س} \geq 0, \\ \text{س} + \text{جتاس} \\ \pi \geq \text{س} > \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \text{ في الفترة } [\pi, 0]$$

الحل :

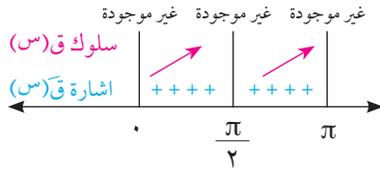
$$\text{ق(س)} = \left. \begin{array}{l} \text{جتاس} \\ \frac{\pi}{2} > \text{س} > 0, \\ \text{س} - 1 \\ \pi > \text{س} > \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

ق(س) غير موجودة. (لماذا؟)

وتكون ق(س) ≠ ٠ ، ∃ س ∈ [٠، π] (لماذا؟)

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترتين  $[\pi, \frac{\pi}{4}]$  ،  $[\frac{\pi}{4}, 0]$



مثال ٧ :

عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = |س² - ٤| ، س ∈ [-٣، ٢]

الحل :

نكتب ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$\text{ق(س)} = \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - ٤ \\ \text{س}^2 - ٤ \\ ٢ - \text{س} \geq ٣^- \\ ٢ \geq \text{س} \geq ٢^- \end{array} \right\} = |٤ - \text{س}^2|$$

ق(س) متصل في الفترة [-٣، ٢] لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران متصل

$$\text{ق(س)} = \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 \\ ٢ - \text{س} \\ ٢ - \text{س} > ٣^- \\ ٢ > \text{س} > ٢^- \end{array} \right\}$$

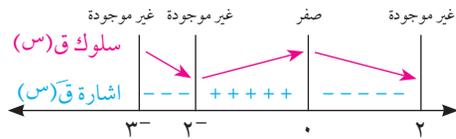
ق(س) غير موجودة عندما س = ٢، ٢⁻، ٣⁻ (لماذا؟)

نجعل ق(س) = ٠ ، ومنها س = ٠

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور يكون

منحنى ق(س) متزايداً في [٠، ٢⁻]

ومتناقصاً في [٢⁻، ٣⁻] ، [٢، ٠]



١ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) =  $3س^3 - 2س^2$ ،  $س \in ]0, 5[$

ب ق(س) =  $س + جا^2س$ ،  $س \in ]\pi, 0[$

ج ق(س) =  $\sqrt{س^2 - 2س + 1}$ ،  $س \in ]0, 1[$

٢ إذا كان ق(س) =  $2س - لو(س + 1)$ ،  $س < 1^-$ ، فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد في ح<sup>+</sup>.

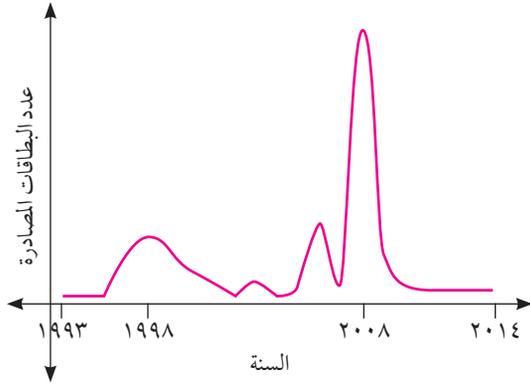
٣ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} ٠ \leq س < ١ ، \quad ٣س^3 \\ ٢ \geq س \geq ١ ، \quad ٢ - ٢س^2 \end{array} \right\}$  في الفترة  $]٠, ٢[$

٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح، وكان ك(س) =  $ق^2(س) + هـ^2(س) + س^2$ ، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س)، علماً بأن ق(س) = هـ(س)، هـ(س) = ك(س) = ق(س).

٥ إذا كان ق(س) كثير حدود متزايداً على ح، وكان ك(س) =  $ق(س^2 - ٤س)$ ، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س).

٦ إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفين في الفترة  $]٠, ٤[$ ، بحيث إن منحنى ق(س) متناقص في مجاله، ويقع في الربع الرابع، ومنحنى هـ(س) متزايد في مجاله، ويقع في الربع الأول، أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) × هـ(س) متناقص في الفترة  $]٠, ٤[$ .

٧ إذا كان ق(س) =  $جاس + جتاس$ ،  $س \in ]\frac{\pi}{٢}, 0[$ ، فجد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).



نشاط ١:

تعرض آلاف الفلسطينيين المقدسيين إلى فقدان حق الإقامة في مدينتهم القدس، منذ زمن طويل، والشكل المجاور يمثل مخططاً بيانياً لعدد بطاقات الهوية المقدسية المصادرة خلال الأعوام ١٩٩٣-٢٠١٤.

كان عدد البطاقات المصادرة عام ٢٠٠٨ أكبر ما يمكن. (لماذا؟)

تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:



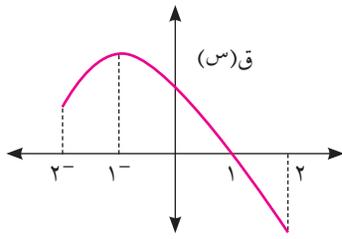
ليكن  $q$  (س) اقتراناً معرفاً على المجال  $E$ ، ولتكن  $J \in E$ ، عندها يكون للاقتزان  $q$  (س):

- ١ قيمة عظمى محلية عند  $s = J$  هي  $q$  (ج) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي  $J$ ، بحيث أن  $q$  (ج)  $\leq q$  (س) لجميع قيم  $s \in (f \cap E)$
  - ٢ قيمة صغرى محلية عند  $s = J$  هي  $q$  (ج) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي  $J$ ، بحيث أن  $q$  (ج)  $\geq q$  (س) لجميع قيم  $s \in (f \cap E)$
  - ٣ قيمة عظمى مطلقة عند  $s = J$  هي  $q$  (ج) إذا كانت  $q$  (ج)  $\leq q$  (س) لجميع قيم  $s \in E$
  - ٤ قيمة صغرى مطلقة عند  $s = J$  هي  $q$  (ج) إذا كانت  $q$  (ج)  $\geq q$  (س) لجميع قيم  $s \in E$
- ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.

فكر وناقش



هل كل قيمة قصوى محلية هي قيمة قصوى مطلقة، أم العكس هو الصحيح؟



مثال ١ :

يمثل الشكل المجاور منحني الاقتران ق(س) في الفترة  $[2-, 2-]$ ، اعتمد عليه في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت). ثم جد قيمة المشتقة الأولى عند كل قيمة منها (إن وجدت).

الحل :

يوجد للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عندما  $s = 2-$  هي ق(2-)

لأنه يوجد فترة مفتوحة مثل ف  $]= 1-, 3- [$  تحوي العدد  $2-$

بحيث أن ق(2-)  $\geq$  ق(س)  $\forall$  س  $\in$  ف  $\cap [2-, 2-] = ]1-, 2- [$

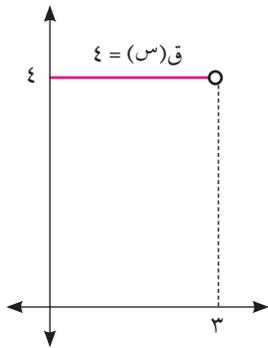
ق(2-) غير موجودة (لماذا؟)

وأيضاً ق(1-) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأن ق(1-)  $\leq$  ق(س)  $\forall$  س  $\in [2-, 2-]$

ق(1-) = 0 (لماذا؟)

ق(2) قيمة صغرى محلية وهي مطلقة لأن ق(2)  $\geq$  ق(س)  $\forall$  س  $\in [2-, 2-]$

ق(2) غير موجودة (لماذا؟)



مثال ٢ :

إذا كان ق(س) = 4 ، س  $\in [0, 3]$

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

الحل :

ق(س) متصل في  $[0, 3]$

ق(س) = 0  $\forall$  س  $\in [0, 3]$

وحسب التعريف  $\forall$  س  $\in [0, 3]$  يوجد قيمة صغرى محلية هي 4

لأن ق(س)  $\leq 4 \forall$  س في تلك الفترة

كما أنه حسب التعريف  $\forall$  س  $\in [0, 3]$  يوجد قيمة عظمى محلية هي 4

لأن ق(س)  $\geq 4 \forall$  س في تلك الفترة

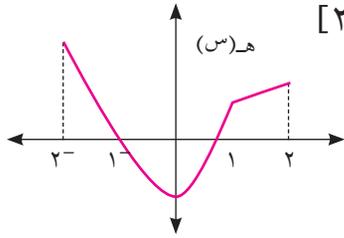


فكر وناقش:

ما صحة القول أن القيمة العظمى المحلية للاقتران دائماً أكبر من القيمة الصغرى المحلية له؟



نشاط ٢:



الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س) في الفترة  $[-2, 2]$

- ١ يوجد قيمة عظمى محلية عند  $s = -2$  والسبب .....
- ٢ عند  $s = 0$  يوجد قيمة ..... محلية والسبب .....
- ٣ هـ(٢) = ..... ، هـ(٠) = ..... ، هـ(-٢) = .....

تعريف:

تسمى النقطة (أ، ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت:

- ١  $\exists$  مجال ق(س)
- ٢ ق(أ) = ٠ أو ق(أ) غير موجودة.



مثال ٣: عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} s^2 - 3, \quad 1^- > s > 2 \\ 3 \geq s \geq 1, \quad 2 \geq s \end{array} \right\}$  في  $[-1, 3]$

الحل: ق(س) متصل عند  $s = 2$  ، ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} 2 > s > 1^- \\ 3 > s > 2, \quad 1^- \end{array} \right\}$

ق(٢) غير موجودة ، ق(٣) غير موجودة ، ..... (لماذا؟)

نجعل ق(س) = ٠ ومنها  $s \in ]1^-, 2]$

لا يوجد قيم لـ  $s \in ]2, 3]$  ،  $3 \in ]3, 2]$  بحيث ق(س) = ٠ (لماذا؟)

لا يوجد نقطة حرجة عند  $s = 1^-$  لأنها لا تنتمي إلى مجال ق(س)

ومنها النقط الحرجة هي  $(0, 3), (1, 2), (3^-, 0)$

مثال ٤: عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} s^3, \quad 1 \geq s \geq 2 \\ 3 \geq s > 2, \quad [s + 3] \end{array} \right\}$  في  $[1, 3]$

الحل: نكتب ق(س) دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح

ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} 2 \geq s \geq 1, \quad s^3 \\ 3 > s > 2, \quad 5 \\ 3 = s, \quad 6 \end{array} \right\}$  ،  $s \in [1, 3]$

ق(س) غير متصل عند  $s = 2$  ، وعند  $s = 3$  ومنها ق(٢) غير موجودة ، ق(٣) غير موجودة ،

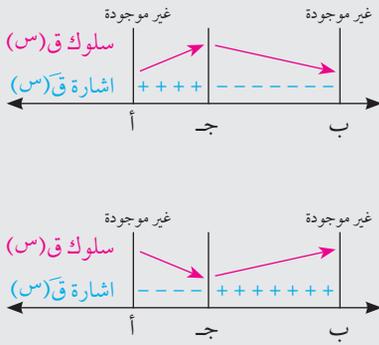
كذلك ق(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)

$$ق(س) = \left. \begin{array}{l} ١ < س < ٢ ، ٣س٢ ، \\ ٢ < س < ٣ ، ٠ \end{array} \right\}$$

٧س  $\exists [٣، ٢] \cup \{١\}$  فإن (س، ق(س)) نقطة حرجة للاقتران ق(س). (لماذا؟)

### اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في الفترة [أ، ب] وكانت (ج، ق(ج)) نقطة حرجة للاقتران ق(س)، ج  $\exists [أ، ب]$  فإنه:



١ إذا كان ق(س)  $< ٠$  عندما  $أ < س < ج$ ،

وكان ق(س)  $> ٠$  عندما  $ج < س < ب$

فإن ق(ج) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

٢ إذا كان ق(س)  $> ٠$  عندما  $أ < س < ج$ ،

وكان ق(س)  $< ٠$  عندما  $ج < س < ب$

فإن ق(ج) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

مثال ٥: جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) =  $٣س٢ + ٢س - ٥س - ٥$

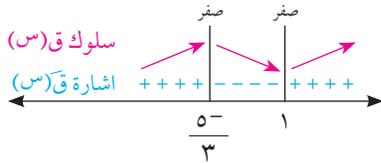
الحل:

ق(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

ق(س) =  $٣س٢ + ٢س - ٥س - ٥$ ،  $٧س \exists ح$ ، نجعل ق(س) = ٠

ومنها  $٣س٢ + ٢س - ٥س - ٥ = ٠$  أي أن  $(٣س + ٢س - ٥س - ٥) = ٠$ ، إذن  $س = \frac{٥^-}{٣}$  أو  $س = ١$

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور تكون



ق(س) =  $\frac{٤٠}{٢٧}$  قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(١) =  $٨^-$  قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

### فكر وناقش:



هل يأخذ الاقتران ق(س) في المثال السابق قيماً قصوى مطلقة؟ حددها (إن وجدت).

مثال ٦ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = (س - ٨) √٣ س

الحل : ق(س) متصل في ح

$$ق(س) = (س) √٣ س^{-٢} + (١ - س) × \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}}$$

$$ق(س) = (س) √٣ س^{-٢} + \frac{(س - ٨)}{٢ √٣ س^{\frac{٢}{٣}}}, س \in ح - \{٠\} \text{ (لماذا؟)}$$

$$\text{إذن ق(س)} = \frac{(س - ٨)}{٢ √٣ س^{\frac{٢}{٣}}}$$

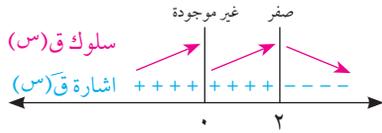
نجعل ق(س) = ٠ ومنها ٨ - ٤س = ٠ ومنها س = ٢

ق(س) غير موجودة عند س = ٠ (لماذا؟)

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور،

يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) عند س = ٢

$$\text{قيمتها ق(٢)} = ٢ √٦$$



فكر وناقش :



هل يوجد قيم قصوى محلية للاقتران عندما س = ٠ في المثال السابق (لماذا؟)

مثال ٧ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = \frac{س^٢ + ٣}{١ - س}, س \neq ١

الحل :

ق(س) متصل في ح - {١}

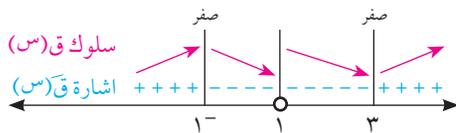
$$ق(س) = (س) \frac{س^٢ - ٣}{٢(١ - س)}, س \neq ١$$

وبوضع ق(س) = ٠ ينتج أن س = ٣ أو س = ١ -

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور تكون

ق(١ -) = ٢ - قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(٣) = ٦ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



مثال ٨ :

إذا كان ق(س) = أس<sup>٣</sup> + ب س<sup>٢</sup> + ج س + د، وكان للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ١<sup>-</sup> قيمتها ٢ وقيمة صغرى محلية عند س = ١ قيمتها ١<sup>-</sup>، فجد قيم الثوابت أ، ب، ج، د.

الحل :

- ق(١<sup>-</sup>) = ٢ ومنها ٢ = أ<sup>-</sup> + ب - ج + د ..... (١)  
 ق(١) = ١<sup>-</sup> ومنها ١<sup>-</sup> = أ + ب + ج + د ..... (٢)  
 ق(س) = أس<sup>٣</sup> + ٢ب س + ج ..... (٣)  
 ق(١<sup>-</sup>) = ٠ ومنها ٠ = أ<sup>٣</sup> - ٢ب + ج ..... (٤)

بحل النظام الناتج من المعادلات الأربع فإن:

$$أ = \frac{٣}{٤}، ب = ٠، ج = \frac{٩}{٤}، د = \frac{١}{٢}$$

اختبار أطراف الفترة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في [أ، ب] وقابلًا للاشتقاق في [أ، ب] فإن:

- ١ ق(أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق(س) < ٠ عندما س < أ (بداية تزايد)
- ٢ ق(أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق(س) > ٠ عندما س < أ (بداية تناقص)
- ٣ ق(ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق(س) < ٠ عندما س > ب (نهاية تزايد)
- ٤ ق(ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق(س) > ٠ عندما س > ب (نهاية تناقص)

مثال ٩ :

$$\left. \begin{array}{l} ٢ \geq س \geq ١^-، س^٢ \\ ٣ > س > ٢، ٤ \end{array} \right\} = \text{ق(س) إذا كان}$$

- ١ جد مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقتران ق(س).
- ٢ حدّد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

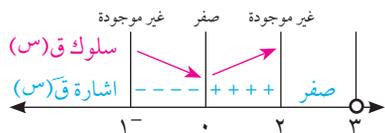
الحل :

١ ق(س) اقتران متصل في [١<sup>-</sup>، ٣]

$$\left. \begin{array}{l} ٢ > س > ١^-، س^٢ \\ ٣ > س > ٢، ٠ \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

أولاً: عندما  $s \in ]1^-, 2]$  نجعل  $q(s) = 0$   
 فيكون  $s = 2$  ومنها عند  $s = 0$  يوجد نقطة حرجة

ثانياً: عندما  $2 < s < 3$  تكون  $q(s) = 0$   
 وهذا يعني أنه عند كل  $s \in ]2, 3]$  يوجد نقطة حرجة  
 $q(2)$  غير موجودة،  $q(1^-)$  غير موجودة  
 فتكون مجموعة قيم  $s$  للنقط الحرجة  $\{0, 1^-, 2, 3\}$



٢ من إشارة  $q(s)$  في الشكل المجاور يكون

عند  $s = 1^-$  يوجد قيمة عظمى محلية لأنها بداية تناقص

عند  $s = 0$  يوجد قيمة صغرى محلية

عند  $s = 2$  يوجد قيمة عظمى محلية

عند كل  $s \in ]2, 3]$  يوجد قيمة عظمى محلية وصغرى محلية في آن واحد.



مثال ١٠: إذا كان  $q(s) = s^2 - 2s - 5$ ، فحدد القيم المحلية التي يكون عندها  
 للاقتران  $q(s)$  قيم قصوى محلية.

الحل :

$q(s)$  متصل في الفترة  $]0, 5]$  ،  $q(s) = s^2 - 2s - 5$

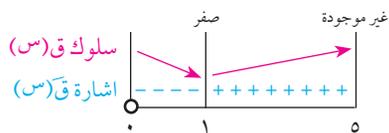
نجعل  $q(s) = 0$  ومنها  $s = \frac{2}{s}$

أي أن  $s = 2$  وتكون  $s = 1$  (لماذا؟)

$q(5)$  غير موجودة، فتكون مجموعة قيم  $s$  التي يكون

عندها نقط حرجة هي  $\{0, 1\}$

من إشارة  $q(s)$  في الشكل المجاور



$q(1) = 1$  قيمة صغرى محلية للاقتران  $q(s)$

$q(5) = 25 - 2 \times 5 = 5$  قيمة عظمى محلية للاقتران  $q(s)$  (نهاية تزايد)



$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \in ]1, 1^-], \\ 1^- \geq \text{س} > 1, \\ \text{س} = 1, \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \text{س} \text{ ق (س) إذا كان}$$

مثال ١١:

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

الحل :

ق(س) متصل في  $]1, 1^-]$

ق(س) =  $3\text{س}^2$ ،  $\text{س} \in ]1, 1^-]$

نجعل ق(س) = 0 ومنها س = 0

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور



عند  $\text{س} = 1^-$  يوجد قيمة صغرى محلية، قيمتها ق(1-) = 1-

أما عند  $\text{س} = 1$  فإن ق(س) منفصل، فلا يمكن الحكم عليها من خلال إشارة المشتقة الأولى؛

لذا نلجأ إلى مقارنة ق(1) مع نها ق(س) وبما أن ق(1) > نها ق(س) فإن ق(1) =  $\frac{1}{2}$  قيمة صغرى محلية.

### نظرية القيم القصوى المطلقة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب]

فإن ق(س) يتخذ قيمه القصوى المطلقة في الفترة [أ، ب].



مثال ١٢:

جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتزان ق(س) =  $\sqrt{2s - 4}$

الحل:

بحل المتباينة  $2s - 4 \geq 0$ ، نستنتج أن مجال ق(س) هو  $[-2, 2]$   
ق(س) متصل على  $[-2, 2]$ ، ق(س) =  $\frac{2s - 4}{\sqrt{2s - 4}}$ ،  $s \in [-2, 2]$

وعندما ق(س) = 0 يكون  $s = \sqrt{2} - 2 \in [-2, 2]$

$s = \sqrt{2} - 2 \in [-2, 2]$

ويكون ق(2-) = 0، ق( $\sqrt{2}$ ) = 2-

ق(2) = 0، ق( $\sqrt{2}$ ) = 2

أصغر قيمة للاقتزان هي ق( $\sqrt{2}$ ) = 2-

وأكبر قيمة للاقتزان هي ق(2) = 0

أي أن القيمة العظمى المطلقة هي ق(2) = 0

والصغرى المطلقة هي ق( $\sqrt{2}$ ) = 2-

أتعلم:

إذا كان ق(س) متصلاً على فترة في مجاله، وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة في تلك الفترة.



١ جد النقط الحرجة للاقتارات الآتية:

أ ق(س) =  $\frac{1}{3}س^3 - 2س^2 + \frac{1}{3}$  ، س  $\in [2, 3]$

ب ق(س) =  $\frac{2}{3}س$  ، س  $\in [8, 8^-]$

٢ في التمارين من (أ - و) جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتاران ق(س) (إن وجدت)

أ ق(س) =  $س^3 - 9س^2 + 24س$  ، س  $\in \mathbb{C}$       ب ق(س) =  $\sqrt{س^2 - 4}$

ج ق(س) =  $(س^2 - 3)هـ^س$  ، س  $\in \mathbb{C}$       د ق(س) =  $\frac{س^3 - 1}{س - 1}$  ، س  $\neq 1$

هـ ق(س) =  $س^2س - جا^س$  ، س  $\in [\pi, 0]$       و ق(س) =  $هـ^{-(2-س)^2}$  ، س  $\in \mathbb{C}$

٣ جد أكبر وأصغر قيمة (إن وجدت) لكل من الاقتارات الآتية:

أ ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} 0 \leq س \leq 2 ، س^3 \\ س > 2 ، س^2 + 4 ، س \geq 3 \end{array} \right\}$  ، س  $\in [0, 3]$

ب ق(س) =  $هـ^س - هـ^{-س}$  ، س  $\in [3, 0]$

ج ق(س) =  $س^3 - \frac{1}{3}س$  ، س  $\in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

٤ إذا كان ق(س) =  $س^3 + 2س^2 + 9س + 1$  ، أ، ب  $\in \mathbb{C}$  اقتاران له قيمة عظمى محلية عند س = 1 ،

و قيمة صغرى محلية عند س = 3 ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب؟

٥ باستخدام القيم القصوى أثبت أن المقدار  $س^4 - 3س^3 - 4س^2 - 29س$  سالب دائماً.

## نشاط ١:

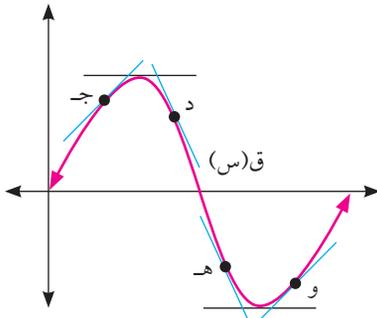
تزخر فلسطين بالأماكن الترفيهية وتحتوي بعض هذه الأماكن ألعاباً مرعبة، مثل القطار الموجود في الصورة المجاورة. هل سبق وركبت مثل هذا القطار؟



حدد مستعيناً بالرموز المدرجة على الصورة المناطق التي يشعر فيها راكب القطار بالرعب والخطر، والمناطق التي تكون أكثر أماناً. فسّر إجابتك.

## نشاط ٢:

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)



- ١ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند كل من ج، د؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران ق(س) عند ج، د يقعان فوق منحناه)
- ٢ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند هـ، و؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران عند هـ، و يقعان تحت منحناه).

## تعريف:

يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعر للأعلى في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة [أ، ب] وأنه مقعر للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة [أ، ب].



## اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية\*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ، ب]، وكان ق''(س) معرفاً في الفترة [أ، ب] فإن منحنى ق(س) يكون:

- ١ مقعراً للأعلى في الفترة [أ، ب] إذا كانت ق''(س) < ٠ لجميع قيم س ∈ [أ، ب].
- ٢ مقعراً للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كانت ق''(س) > ٠ لجميع قيم س ∈ [أ، ب].
- ٣ غير مقعر للأعلى أو للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كانت ق''(س) = ٠ لجميع قيم س ∈ [أ، ب].

\* سيتم التعامل مع الفترات المفتوحة.

مثال ١ :

جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س<sup>٢</sup> - ٦س + ٥ ، ٢- [٥ ، ]

الحل :

ق(س) متصل في ٢- [٥ ، ] لأنه كثير حدود

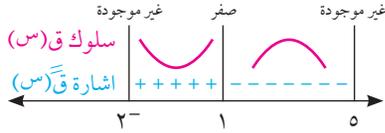
ق(س) = ٣س<sup>٢</sup> - ٦س + ٥ ، ق(س) = ٦ - ٦س

بوضع ق(س) = ٠ تكون ٦ - ٦س = ٠ ، أي س = ١

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) مقعراً للأعلى

في الفترة ٢- [١ ، ] ، ومقعراً للأسفل في الفترة ١ [٥ ، ]



مثال ٢ :

جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) =  $\frac{1+s^2}{s}$  ، س ≠ ٠

الحل :

ق(س) متصل على مجاله

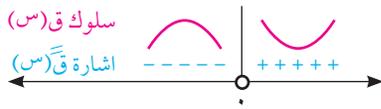
ق(س) =  $\frac{1+s^2}{s}$  ، ومنها ق(س) = ١ -  $\frac{1}{s}$

ق(س) =  $\frac{2}{s}$  ، ٠ ≠

ومن إشارة ق(س) في الشكل المجاور يكون:

منحنى ق(س) مقعراً للأسفل في الفترة ٠- [٠ ، ] ،

ومقعراً للأعلى في الفترة ٠ [٠ ، ] ∞ (لماذا؟)



مثال ٣ :

أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = لورنتز جتاس ، س ∈ [٠ ،  $\frac{\pi}{3}$ ] مقعر للأسفل.

الحل :

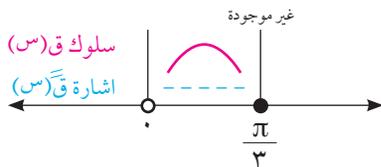
ق(س) متصل في [٠ ،  $\frac{\pi}{3}$ ] (لماذا؟)

ق(س) =  $\frac{-\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$  = -ظاس

ق(س) = -قا س

وبما أن ق(س) ≠ ٠ ، ق(س) > ٠ ،  $\forall s \in [٠ ، \frac{\pi}{3}]$

فإن ق(س) مقعر للأسفل في [٠ ،  $\frac{\pi}{3}$ ]





### تعريف:

- ١ تسمى النقطة (ج، ق) ((ج-)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) إذا كان:
  - ق(س) اقتراناً متصلأً عند س = جـ
  - يغيّر الاقتران اتجاه تقعرّ منحناه عند س = جـ من الأعلى إلى الأسفل، أو العكس.
- ٢ زاوية الانعطاف: هي زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف.
- ٣ إذا كانت (ج، ق) ((ج-)) نقطة انعطاف وكان ق(ج) = ٠ فتسمى النقطة (ج، ق) ((ج-)) نقطة انعطاف أفقي.

مثال ٤: جد نقاط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٣ جاس جتاس ، س ∈ [٠، π]

الحل :

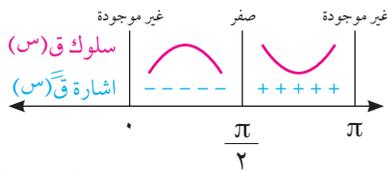
$$ق(س) = ٣جاس + ٣جتاس = ٣جاس + ٣جتاس$$

$$ق'(س) = ٦جاس$$

$$نجعل ق'(س) = ٠ فيكون ٦جاس = ٠ ومنها س = \frac{\pi}{٢}$$

وبما أن ق(س) متصل عند س = \frac{\pi}{٢} ، ويغيّر من

اتجاه تقعره عندها (كما تشير إشارة ق'(س) في الشكل المجاور)



فإن النقطة (\frac{\pi}{٢}, ٠) = ((\frac{\pi}{٢})) نقطة انعطاف

هل النقطة (\frac{\pi}{٢}, ٠) نقطة انعطاف أفقي؟ فسّر إجابتك.

مثال ٥: بيّن أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = \sqrt[٢]{٩ - س} نقطة انعطاف في الفترة [-٣، ٣]

الحل :

$$ق(س) = \sqrt[٢]{٩ - س}$$

$$ق'(س) = \frac{-١}{٢\sqrt[٢]{٩ - س}}$$

$$ق'(س) = \frac{-١}{٢\sqrt[٢]{٩ - س}} \neq ٠ ، \forall س \in [-٣، ٣] \text{ ولكن } ق'(س) > ٠ \text{ صفر دائماً}$$

ومنها يكون منحنى ق(س) مقعرأً للأسفل في [-٣، ٣]

وبما أن ق(س) لا يغير من اتجاه تقعره، فلا يوجد نقاط انعطاف للاقتران ق(س) في [-٣، ٣]

مثال ٦ :

إذا كان ق(س) = س<sup>٤</sup> - ٢س<sup>٣</sup> ، س ∈ ح ، فجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)، ثم جد نقط وزوايا الانعطاف (إن وجدت).

الحل :

ق(س) متصل لأنه كثير حدود.

$$ق(س) = س^4 - 2س^3 = س(س^3 - 2س^2) = س(س^2(س - 2)) = س^3(س - 2)$$

بوضع ق'(س) = ٠ ينتج أن س = ١ ، س = ٠

ومن إشارة ق''(س) في الشكل المجاور يكون:

ق(س) مقعراً للأعلى في الفترة  $[-\infty, ٠]$  ،

وكذلك في الفترة  $[١, \infty]$

ويكون مقعراً للأسفل في الفترة  $[٠, ١]$

النقطتان (٠، ٠) ، (١، ١) هما نقطتا انعطاف ..... (لماذا؟)

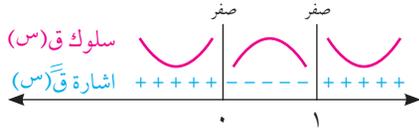
لايجاد زوايا الانعطاف

نفرض ه<sub>١</sub> زاوية الانعطاف عند النقطة (٠، ٠)

$$ظا ه_١ = ق'(٠) = ٠ \text{ ومنها } ه_١ = ٠$$

نفرض ه<sub>٢</sub> زاوية الانعطاف عند النقطة (١، ١)

$$ظا ه_٢ = ق'(١) = ٢ \text{ ومنها } ه_٢ = ١^{-1} = ٢^{-1}$$



مثال ٧ :

$$\left. \begin{array}{l} ٢ \geq س > ٠ ، \quad س^٣ \\ ٤ > س > ٢ ، \quad س^٢ \end{array} \right\} = \text{عَيّن مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س)}$$

الحل :

ق(س) غير متصل عند س = ٢ ومنها ق(٢) غير موجودة

$$\left. \begin{array}{l} ٢ > س > ٠ ، \quad س^٣ \\ ٤ > س > ٢ ، \quad س^٢ \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

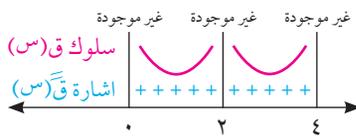
١ ق(س) = ٠ ، عندما  $٢ > س > ٠$

فيكون س = ٠ ومنها س = ٠ ترفض (لماذا؟)

٢ عندما  $٤ > س > ٢$  فإن ق(س) ≠ ٠ (لماذا؟)

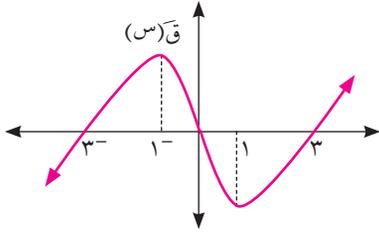
ومن إشارة ق''(س) في الشكل المجاور يكون

منحنى ق(س) مقعراً للأعلى في  $[٠, ٢]$  ، كذلك في  $[٢, ٤]$



مثال ٨ :

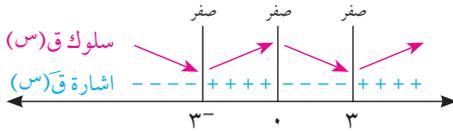
الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران  $Q(s)$  معتمداً عليه، جد كلاً مما يأتي:



- ١ فترات التزايد والتناقص للاقتران  $Q(s)$
- ٢ القيم القصوى المحلية للاقتران  $Q(s)$
- ٣ مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران  $Q(s)$ .
- ٤ قيم  $s$  التي يكون عندها نقاط الانعطاف (إن وجدت).

الحل :

نمثل إشارة  $Q(s)$  كما في الشكل المجاور:



١ يكون منحنى  $Q(s)$

متزايداً في  $]-\infty, -3[$  وفي  $]0, 3[$ ، و

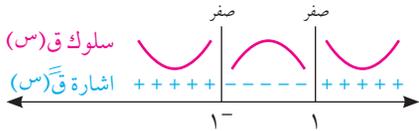
ومتناقصاً في  $]-3, 0[$  وفي  $]3, \infty[$

٢  $Q(-3)$  قيمة صغرى محلية

$Q(0)$  قيمة عظمى محلية

$Q(3)$  قيمة صغرى محلية.

ونمثل إشارة  $Q(s)$  كما في الشكل المجاور:



٣ يكون منحنى  $Q(s)$  مقعراً للأعلى

في  $]-\infty, -1[$  وكذلك في  $]1, \infty[$

ومقعراً للأسفل في  $]-1, 1[$

٤ نقاط الانعطاف تكون عند  $s = -1$ ،  $s = 1$  ..... (لماذا؟)

ملاحظة:

إذا كان  $Q(s)$  كثير حدود وكانت  $(s, Q(s))$  نقطة انعطاف للاقتران  $Q(s)$ ، فإن  $Q(s) = 0$ .



نشاط ٢:

إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، وكان منحناه يمر بالنقطة (٠، ٥) وله نقطة انعطاف أفقي عند النقطة (٢، ١)، جد قاعدة الاقتران ق(س) نفرض أن ق(س) = أس<sup>٣</sup> + ب س<sup>٢</sup> + ج س + د، حيث أ، ب، ج، د ∈ ح، أ ≠ ٠ بما أن ق(٠) = ٥ فإن قيمة الثابت د هي ..... وبما أن (١، ٢) نقطة انعطاف أفقي فإن ق(٢) = ١، ق(٢) = ٠، ق(٢) = ..... ق(٢) = ١ ومنها ٨أ + ٤ب + ٢ج + د = ١ ..... (١) ق(س) = ..... ق(٢) = ٠ ومنها ١٢أ + ٤ب + ج = ٠ ..... (٢) ق(س) = ..... ق(٢) = ٠ ومنها ..... (٣) وبحل المعادلات الناتجة يكون الاقتران ق(س) = .....

اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى Second Derivative Test

نظرية:



إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي جـ وكان ق(جـ) = ٠ فإن:

- ١ ق(جـ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق(جـ) > ٠
- ٢ ق(جـ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق(جـ) < ٠
- ٣ يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت ق(جـ) = ٠، أو ق(جـ) غير موجودة.

مثال ٩:

جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) = ٣س<sup>٣</sup> - ٨س<sup>٢</sup> + ٦س<sup>٢</sup>، باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن).

الحل:

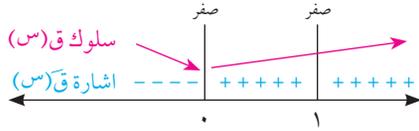
ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في ح لأنه كثير حدود ق(س) = ١٢س<sup>٣</sup> - ٢٤س<sup>٢</sup> + ١٢س ق(س) = ٠ ومنها ١٢س<sup>٢</sup> - ٢٤س + ١٢ = ٠ ق(س) = ١٢س(س - ٢) = ٠، ومنها إما س = ٠ أو س = ١

$$ق(س) = ٣٦س - ٤٨س + ١٢$$

ق(٠) = ١٢ < ٠ إذن ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية.

بما أن ق(١) = ٠ فلا نستطيع تحديد نوع القيمة القصوى ق(١) باستخدام اختبار المشتقة الثانية

لذا نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.



من الشكل المجاور لا يوجد قيمة قصوى

محلية عند س = ١ ..... (لماذا؟)

## تمارين ٢ - ٤

١ عيّن فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) = (س - ٢)(س - ٣ - ٤) (س + ٢) ، س ∈ ح

ب ق(س) = جاس - س ، س ∈ [π/٢, π-]

ج ق(س) = ٤س - ٣س + ٤س ، س ∈ [٠, ٤]

د ق(س) = (س - ٣)² ، س < ٣

هـ ق(س) = جاس ، س ∈ [٠, π]

و ق(س) = هـس جتاس ، س ∈ [٠, π٢]

ز ق(س) = { [1 - 1/3] ، 1 > س ≥ 3 ، 5 > س > 3 ، 3 } ، س

٢ حدد نقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية (إن وجدت):

أ ق(س) = س + ٣س

ب ق(س) = جتاس ، س ∈ [٠, π٢]

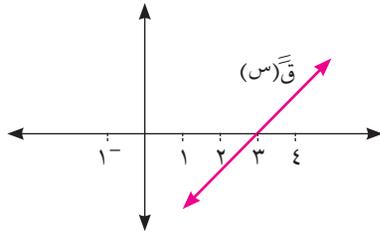
ج ق(س) = √(٥ - س)

٣ جد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات الآتية، وحدد نوع كل منها باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن تطبيقها)، وفي حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى:

أ ق(س) = س<sup>٣</sup> + ٦س<sup>٢</sup>

ب ق(س) = |س + ٦|

٤ إذا كان للاقتران ق(س) = أس<sup>٢</sup> + س<sup>٣</sup> نقطة انعطاف عند س = ١<sup>-</sup>، فجد قيمة/ قيم الثابت أ.



٥ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)

إذا علمت أن ق(٠) = ق(٦) = ٠، جد كلاً مما يأتي:

أ فترات التقرّر، ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

ب القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

ج فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س)

٦ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة، يمر منحناه بالنقطة (١، ٥) وله نقطة انعطاف عند س = ٢ بحيث إن معادلة المماس عند نقطة الانعطاف هي: ٣س + ص = ٧، جد قاعدة الاقتران ق(س).

٧ إذا كان للاقتران كثير الحدود ق(س) = س<sup>٤</sup> - ٤س<sup>٣</sup> + ك(س) نقطة انعطاف أفقي هي (١، ٢)، وكان ع(س) = ك<sup>٢</sup>(س)، احسب ع(١).

٨ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [٢، ٣<sup>-</sup>] ويحقق الشروط الآتية:

ق(٠) = ٠، ق(١) = ٠، ق(٢<sup>-</sup>) = ٠، ق(س) < ٠ عندما س < ٠، ق(س) > ٠ عندما س > ٠

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

ب ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيم قصوى؟ وما نوع كل منها؟

ج ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط انعطاف؟

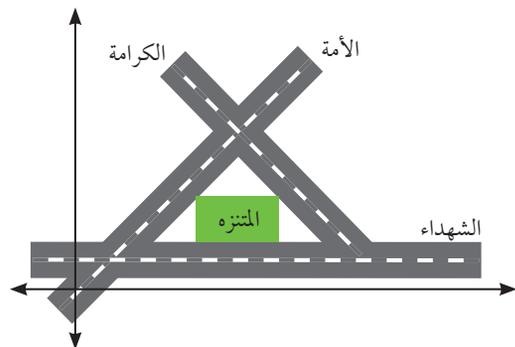
## نشاط ١:

أحمد مزارع فلسطيني يسكن مدينة يافا، ويملك أرضاً واسعة من حقول البرتقال، أراد في أحد الأيام أن يختبر ذكاء أبنائه الثلاثة، فاشترى سياجاً طويلاً وقسمه إلى ثلاثة أجزاء متساوية في الطول، وأعطى كلاً منهم جزءاً من السياج، وطلب أن يحيط كل واحد منهم جزءاً من الأرض بالسياج الذي أخذه؛ لتصبح الأرض التي أحاطها ملكاً له. سرّ الأبناء بهدية والدهم، وأراد كل منهم أن يحصل على أكبر مساحة ممكنة فاختر أحدهم جزءاً مربعاً من الأرض، واختار الثاني جزءاً مستطيلاً، أما الثالث فقد اختار جزءاً على شكل مثلث متساوي الساقين. لو كنت أحد الأبناء، ما الشكل الذي ستختاره؟ (ولماذا؟)



## نشاط ٢:

قررت إحدى بلديات الوطن إنشاء مُتَنَزَّهٍ على شكل مستطيل، باسم الشهيد الراحل ياسر عرفات، أمام مبنى المقاطعة الذي دمره الاحتلال. وقد لاحظ مهندسو البلدية وجود شارعين متقاطعين وقرروا أن يكون رأسان من رؤوس المتنزه على الشارعين، والرأسان الآخران على شارع الشهداء (انظر الشكل) فإذا كانت معادلة الشارع الأول (شارع الأمة) على الخريطة هي  $ص = هـ - ٢٠$  (س) ومعادلة الشارع الثاني (شارع الكرامة) هي  $ص = ق - ٤٢$  (س) وشارع الشهداء أفقي معادلته  $ص = ٠$ ، فمعرفة مساحة أكبر متنزه يمكن إنشاؤه نتبع ما يلي:



نفرض أن طول المتنزه (س)

$$٢٠ = (ع) = هـ$$

وتكون مساحة المتنزه = الطول × العرض

$$أي أن م = س × ٢٠ = ٢٠س (لماذا؟)$$

$$لكن هـ - ٢٠ = ق (لماذا؟)$$

$$ومنها فإن ٢٠ = ٤٢ - س - ع (لماذا؟)$$

أي أن  $ع = \dots\dots\dots$  وتصيح المساحة  $م(س) = \frac{٢٠}{٢١} س(س - ٤٢)$   
 ولتحديد أكبر قيمة للمساحة فإننا نستخدم مفهوم القيم القصوى  
 $\bar{م} = \dots\dots\dots$  ومنها  $س = \dots\dots\dots$

وللتأكد من أن قيمة  $س$  السابقة تجعل المساحة أكبر ما يمكن نجد  $\bar{م}$  ونكمل الحل.....  
 إذن مساحة أكبر متنزه = .....

عددان موجبان مجموعهما ٦٠، جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

مثال ١ :

نفرض أن العددين هما  $س$ ،  $ص$  وأن حاصل ضربهما هو  $م$  فيكون

الحل :

$$م = س \times ص$$

$$\text{لكن } س + ص = ٦٠ \text{ ومنه } ص = ٦٠ - س$$

$$م = س \times ص = س \times (٦٠ - س) = ٦٠س - س^٢$$

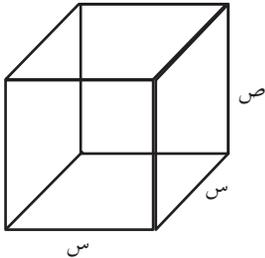
$$\bar{م} = ٦٠ - ٢س$$

$$\text{نجعل } \bar{م} = ٠ \text{ ومنها } ٦٠ - ٢س = ٠ \text{ أي } س = ٣٠$$

$$\text{للتحقق } \bar{م} = ٢ - س \text{ ومنها } \bar{م} = ٢ - ٣٠ = -٢٨ < ٠$$

(عند  $س = ٣٠$  يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن).

فيكون العددان هما ٣٠، ٣٠



يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون

مثال ٢ :

المقوى حجمه ٨ دسم<sup>٣</sup>، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة

تصنيعه أقل ما يمكن. (سعر المتر ثابت)

نفرض طول ضلع قاعدة الصندوق (س دسم) وارتفاعه (ص دسم)

الحل :

$$\text{الحجم} = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}$$

$$٨ = ح = س \times ص \text{ ومنها } س = \frac{٨}{ص}$$

المساحة الكلية للصندوق = مساحة الجوانب الأربعة + مساحة القاعدتين

$$ت = ٤س × ص + ٢س٢ ، لكن ص = \frac{٨}{٢س}$$

$$ومن هنا ت = ٤س × \frac{٨}{٢س} + ٢س٢ = \frac{٣٢}{س} + ٢س٢$$

$$وبالاشتقاق ينتج أن: ت' = \frac{٣٢}{س^٢} - ٤س = ٠ وبوضع ت' = ٠$$

$$\frac{٣٢}{س^٢} = ٤س ، أي أن س = ٢ ، ومنها س = ٢ دسم$$

$$ت'' = \frac{٦٤}{س^٣} > ٠$$

ومن هنا  $ت'' = \frac{٦٤}{٢^٣} = ٨ > ٠$  (صغرى محلية وحيدة فهي صغرى مطلقة)

التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعة طول ضلعها ٢ دسم، وارتفاع الصندوق ٢ دسم.



مثال ٣:

جد أقصر مسافة بين النقطة ك (٠، ٢) ومنحنى العلاقة ص - س = ٨

الحل:

نفرض النقطة ل (س، ص) على منحنى العلاقة

ونفرض ف = المسافة بين ك، ل

$$حسب قانون المسافة بين نقطتين ف = \sqrt{٢(٢-ص) + ص^٢}$$

$$لكن ص = ٨ - س ، فتكون ف = \sqrt{٢(٢-٨+س) + (٨-س)^٢}$$

$$ف' = \frac{٤-س}{\sqrt{٢(٢-٨+س) + (٨-س)^٢}}$$

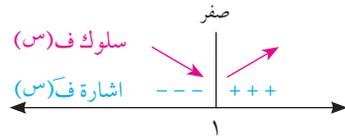
بوضع ف' = ٠ ينتج أن س = ١ ..... (لماذا؟)

ومن إشارة ف' في الشكل المجاور

تكون المسافة أقصر ما يمكن عندما س = ١ ، ص = ٣ ±

ولأن للاقتران قيمة قصوى وحيدة فهي صغرى مطلقة

وتكون أقصر مسافة هي ف =  $\sqrt{١٠}$  وحدة.



سلوك ف(س)

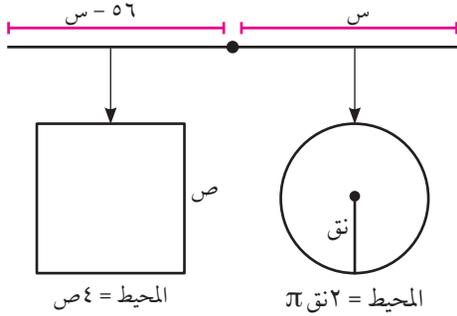
إشارة ف'(س)



مثال ٤ :

سلك طوله ٥٦ سم قسم إلى جزأين، ثني أحدهما على شكل مربع، والجزء الآخر على شكل دائرة، ما أبعاد كل من المربع والدائرة ليكون مجموع مساحتهما أقل ما يمكن؟

الحل :



نفرض طول الجزء الذي صنع منه دائرة (س)

فيكون طول الجزء الثاني ٥٦ - س

$$س = ٢ \text{ نق} \pi \text{ ومنها نق} = \frac{س}{\pi ٢}$$

$$\text{كما أن } ٥٦ - س = ٤ ص \text{ ومنها ص} = ١٤ - \frac{١}{٤} س$$

$$\text{مجموع مساحتهما م} = \text{نق}^٢ \pi + ص^٢$$

$$م = \frac{س^٢}{\pi ٤} + \left(١٤ - \frac{١}{٤} س\right)^٢$$

$$\text{ومنها م} = \frac{س^٢}{\pi ٤} + \left(١٤ - \frac{١}{٤} س\right)^٢ = ٧ - \frac{١}{٨} س + \frac{س}{\pi ٢}$$

$$\text{نضع م} = ٠ \text{ ومنها } ٠ = ٧ - \frac{١}{٨} س + \frac{س}{\pi ٢} \text{ وبعد التبسيط ينتج أن } س = \frac{\pi ٥٦}{\pi + ٤}$$

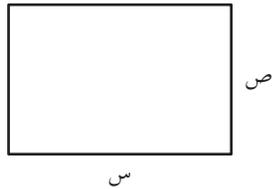
$$\text{ومنها نق} = \frac{٢٨}{\pi + ٤} \text{، ص} = \frac{١}{٤} \left( \frac{\pi ٥٦}{\pi + ٤} - ١٤ \right) = \frac{\pi ١٤}{\pi + ٤} - ١٤$$

$$\text{م} = \frac{١}{\pi ٢} + \frac{١}{٨} < ٠ \text{ (يوجد قيمة صغيرة محلية، وبما أنها وحيدة فهي صغيرة مطلقة)}$$

مثال ٥ :

أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم<sup>٢</sup>

الحل :



نفرض طول المستطيل (س سم) وعرضه (ص سم)

$$\text{مساحة المستطيل م} = س ص = ١٦ \text{ ومنها ص} = \frac{١٦}{س}$$

$$\text{محيط المستطيل ح} = ٢ س + ٢ ص = ٢ س + \frac{٣٢}{س}$$

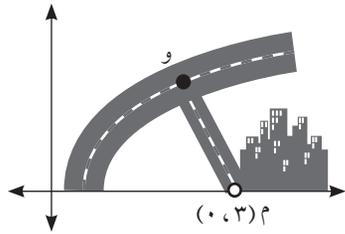
$$\text{ح} = ٢ - \frac{٣٢}{س} \text{ وعندما ح} = ٠ \text{ يكون } ٢ = \frac{٣٢}{س} \text{ ومنها س} = ٤$$

$$\text{ح} = \frac{٦٤}{٣ س} \text{ ومنها ح} = ٤ = ١ \text{ (موجب) ← المحيط أقل ما يمكن}$$

فيكون أقل محيط للمستطيل هو ١٦ سم

١ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟

٢ مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ سم<sup>٣</sup> فإذا علمت أن سعر كل ١ سم<sup>٢</sup> من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم<sup>٢</sup> من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.



٣ طريق منحني معادلته في المستوى الديكارتي هي  
 $ص = ق(س) = \sqrt{٢س - ١}$ ، النقطة م(٠، ٣) تمثل موقع مستشفى،  
 يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع المستشفى (م)،  
 عين إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (وم) أقل ما يمكن.  
 (انظر الشكل المجاور).

٤ جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

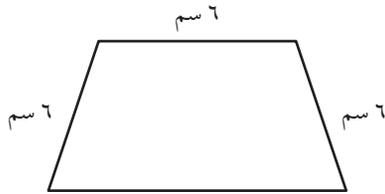
$$ف = أ جتا \frac{\pi}{٤} ن + ب جا \frac{\pi}{٤} ن$$

فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠، ٢] =

هي ١٠ م/ث، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث. احسب الثابتين أ، ب.

٥ في الساعة الثانية عشرة ظهراً كانت الباخرة ب على بعد ٣٠ كم شمال الباخرة أ وتسير غرباً بسرعة ١٠ كم / الساعة، فإذا كانت أ تسير شمالاً بسرعة ٢٠ كم في الساعة، فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن؟

٦ جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم، ونصف قطر قاعدته ٤ سم.



٧ شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف.

٨ أ ب ج د مستطيل عرضه أب = ٨ سم وطوله ب ج = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أم = س سم، ن نقطة على الضلع ب ج بحيث ن ج =  $\frac{٣}{٤}$  س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن ج أكبر ما يمكن.

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات (١-١٤):

١ إذا كان  $ق(س) = \left. \begin{array}{l} ٠ \leq س \leq ١ ، \quad س^٢ - س \\ ١ - س ، \quad ١ < س \leq ٣ \end{array} \right\}$  ، فما مجموعة قيم  $س$  التي يكون عندها

للاقتران  $ق(س)$  نقطة حرجة في الفترة  $[٠، ٣]$ ؟

أ)  $\{٠، ١، ٣\}$  ب)  $\{٣، ٠\}$  ج)  $\{٣، \frac{١}{٢}، ٠\}$  د)  $\{٣، ١، \frac{١}{٢}، ٠\}$

٢ ليكن  $ق(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$  ،  $س \in [٢-، ٢]$  ، فما قيمة  $س$  التي يكون للاقتران  $ق(س)$  عندها قيمة عظمى مطلقة؟

أ)  $٢-$  ب)  $٠$  ج)  $١$  د)  $٢$

٣ إذا كان  $ق(س) = (س^٢ - ١)^٢ (س - ٢)$  ، فما الفترة التي يكون فيها  $ق(س)$  متناقصاً؟

أ)  $[-\infty، ١-]$  ب)  $[١-، ١]$  ج)  $[٢، ١]$  د)  $[٢، \infty]$

٤ إذا كان  $ق(س) = س^٣ - ٣س$  معرفاً في الفترة  $[١-، ٣]$  ، فما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران  $ق(س)$ ؟

أ)  $٣٦-$  ب)  $١٨-$  ج)  $٣-$  د)  $٢-$

٥ إذا كان  $ق(س)$  كثير حدود وكان  $ق(س) < ٠$  عندما  $س > ٤$  ،  $ق(س) > ٠$  عندما  $س < ٤$  وكان  $ق(٣) = ٠$  ، فما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات الآتية؟

أ)  $ق(٣) = ٠$  ب)  $ق(٤) = ٠$

ج)  $ق(٣)$  قيمة عظمى محلية د)  $ق(٣)$  قيمة صغرى محلية

٦ ما مجموعة جميع قيم  $ج$  التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية رول على الاقتران  $ق(س) = ٨$  في الفترة  $[٠، ١]$ ؟

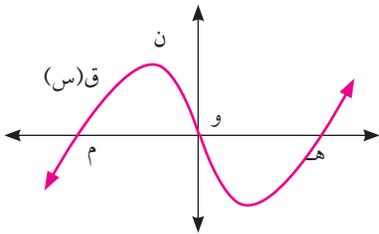
أ)  $\{ \}$  ب)  $\{٠\}$  ج)  $[٠، ١[$  د)  $[٠، ١]$

٧ بالاعتماد على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى  $ق(س)$

ما النقطة التي يكون عندها  $ق(س)$  ،  $ق(س)$  موجبتين:

أ) هـ ب) ن

ج) م د) و



٨ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على  $[١، ٣]$  وكان ق(س)  $> ٠$  لجميع قيم س  $\exists$   $١، ٣$ ، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في  $[١، ٣]$  وكان ق(٢) = ٠، فما العبارة الصحيحة مما يأتي؟

أ) ق(٥/٣) < ٠ (ب) ق(٥/٣) < ق(٢)

ج) ق(٥/٣) = ق(٢) (د) ق(٥/٣) > ق(٢)

٩ ما قيمة الثابت م التي تجعل لمنحنى الاقتران ق(س) = س<sup>٣</sup> + م س<sup>٢</sup> - ٩ س نقطة انعطاف عند س = ١-؟

أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٣- (د) ٤-

١٠ ما قيمة ج التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> + س - ٦ في  $[-١، ٢]$ ؟

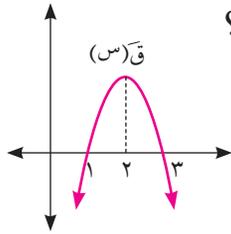
أ) ٥/٢ (ب) ٣/٢ (ج) ١/٢ (د) ١/٢-

١١ إذا كان ق(س) = |س|س| فما العبارة الصحيحة فيما يأتي؟

أ) ق(١) غير موجودة (ب) ق(٠) قيمة عظمى محلية

ج) ق(٠) قيمة صغرى محلية (د) ق(٠) نقطة انعطاف

١٢ الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)، ما مجموعة حل المتباينة ق(س) < ٠؟



أ)  $[-١، ٣]$  (ب)  $[-٢، \infty)$

ج)  $[-\infty، ٢]$  (د)  $[-\infty، ٣] \cup [١، \infty)$

١٣ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة معرفاً على  $[أ، ب]$ ، ما أكبر عدد ممكن من النقط

الحرجة يمكن أن نحصل عليها للاقتران ق(س)؟

أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

١٤ إذا كان ق(س) = لو جاس، س  $\exists$   $[\frac{\pi}{٤}، \pi]$ ، متى يكون منحنى ق(س) متزايداً؟

أ)  $[\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٤}]$  (ب)  $[\pi، \frac{\pi}{٤}]$  (ج)  $[\pi، \frac{\pi}{٢}]$  (د)  $[\pi، \frac{\pi}{٢}]$

أجب عن الأسئلة الآتية (٢ - ١٣):

٢ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س  $\in [0, \frac{\pi}{4}]$  أثبت أن ق(س) متزايد على مجاله.

٣ جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) =  $\frac{1 + \sin s}{\sin^2 s + 3}$ .

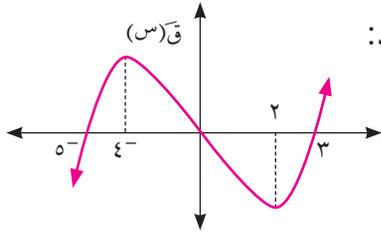
٤ إذا كان ق(س) =  $\sin^2 s - 3\sin s - 5$  أحقق شروط نظرية رول على  $[-1, 1]$  جد قيمة/ قيم الثابت أ.

٥ إذا كان ق(س) =  $\sin^3 s - 3\sin^2 s - 9\sin s + 5$  معرّفًا في الفترة  $[-2, 6]$  جد:

أ القيم القصوى المطلقة للاقتران ق(س).

ب فترات التّعرّ للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

ج- نقط الانعطاف، وزوايا الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س).



٦ معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) جد:

أ فترات التّعرّ للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

ب الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف.

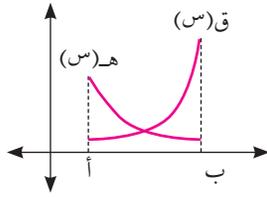
٧ إذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود معرّفًا على  $[2, 6]$  ويقع منحناه في الربع الأول، ومتناقصاً على

مجاله، وكان الاقتران ه(س) =  $8 - s$  بيّن أن الاقتران ك(س) =  $(ق \times ه)$  متناقص في  $[2, 6]$ .

٨ ما أبعاد أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم؟

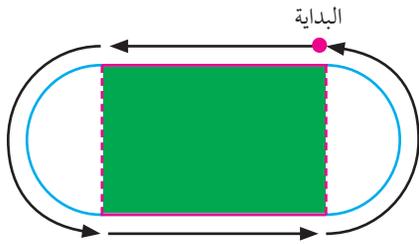
٩ إذا كان ق(س) = جتاس - ه(س) +  $3\sin s$  ، س  $\in [0, \frac{\pi}{4}]$ ، حيث ه(س) قابل للاشتقاق، أثبت أن

الاقتران (ق + ه) متزايد في تلك الفترة.



١٠ الشكل المجاور يبين منحنى الاقترانين ق ، هـ المعرفين على [أ ، ب] يبين أن الاقتران  $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$  هو اقتران متزايد على [أ ، ب].

١١ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، جد قاعدة الاقتران ق(س) إذا علمت أن النقطة (٢ ، ١-) هي نقطة قيمة صغرى محلية، وأن النقطة (٣ ، ٠) هي نقطة انعطاف للاقتران ق(س).



١٢ مسار للسباق طوله ٤٠٠ م، يحيط بميدان على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة. ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟

١٣ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتهما أصغر ما يمكن؟

١٤ أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			احل مسائل متنوعة على نظريتي رول والمتوسطة
			احدد مجالات التزايد والتناقص للاقترانات
			احدد مجالات التقعر للاقترانات
			احل مشكلات وتطبيقات حياتية على المشتقات

## المصفوفات والمحددات

### Matrices and Determinants

توزيع أعداد الطلبة في بعض محافظات فلسطين للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٥ (حكومية وخاصة ووكالة)					
الرقم	المديرية	اللون	عدد الطلبة		المجموع
			ذكور	إناث	
1	القدس		19430	21312	40742
2	شمال غزة		42721	43850	86571
3	جنوب نابلس		12873	13316	26189
4	جنوب الخليل		24360	25227	49587
5	الوسطى		37081	36837	73918
6	طولكرم		22858	22942	45800
7	رام الله		40889	41610	82499
8	بيت لحم		25931	26405	52336
		المجموع	226143	231499	457642

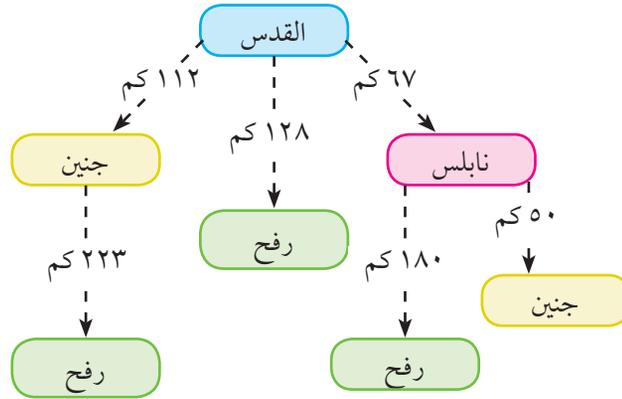
إذا طلب منك إعادة تنظيم بيانات المديرية حسب اللون المجاور لكل منها، فكيف يمكنك ترتيبها بطريقة منظمة تساعد في دراستها؟ ماذا يمثل كل لون؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والمحددات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى المصفوفة، وبعض المصفوفات الخاصة.
- ٢ إيجاد رتبة المصفوفة، وعدد مدخلاتها.
- ٣ التعرف إلى شروط تساوي مصفوفتين، وحل معادلات ناتجة من تساويهما.
- ٤ إجراء العمليات على المصفوفات.
- ٥ التعرف إلى مفهوم المحددات، وخصائصها.
- ٦ حساب محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، وتمييز المنفردة منها.
- ٧ إيجاد النظرير الضربي للمصفوفات المربعة غير المنفردة من الرتبة الثانية.
- ٨ توظيف المصفوفات في حل أنظمة معادلات خطيّة.

نشاط ١:

تريد مجموعة من السياح التنقل بين بعض مدن فلسطين، فجمعت المعلومات الخاصة بالمسافات بين هذه المدن وهي: من القدس: إلى جنين ١١٢ كم، وإلى نابلس ٦٧ كم، وإلى رفح ١٢٨ كم ومن نابلس: إلى جنين ٥٠ كم، وإلى رفح ١٨٠ كم. ومن جنين إلى رفح ٢٢٣ كم. ولتسهيل التعامل مع هذه المعلومات، رتبها أحد السياح كما يأتي:



ما رأيك بهذا التمثيل؟ هل يعطي الصورة الحقيقية للمسافات بين المدن؟ حاول تمثيل المعلومات السابقة بطرق أخرى؟  
إن تنظيم هذه المعلومات له طرق متعددة، وسيتم التعرف على تنظيم جديد للبيانات، يسمى «المصفوفة».

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد، على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ، ب، ، وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات.

تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها، على النحو  $m \times n$  حيث  $m$  يمثل عدد صفوفها،  $n$  يمثل عدد أعمدتها (وتقرأ  $m$  في  $n$ ).  
عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها  $\times$  عدد أعمدتها.



\* أول من قدم المصفوفات بصورتها الحالية هو العالم الرياضي A. Cayley. عام ١٨٥٧ م.

الصورة العامة للمصفوفة من الرتبة  $m \times n$  تكون على النحو:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{m \times n}$$

وتحدد أي مدخلة فيها بحسب الصف والعمود الواقعة فيها، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف  $i$  مع العمود  $j$  هي المدخلة  $a_{ij}$ .

**مثال ١:** إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

١) جد رتبة كل من المصفوفتين  $A$  ،  $B$       ٢) جد  $a_{21}$  ،  $b_{12}$

**الحل:** ١) المصفوفة  $A$  تتكون من ٣ صفوف وعمودين فهي من الرتبة  $3 \times 2$

والمصفوفة  $B$  من الرتبة  $2 \times 3$

٢) قيمة المدخلة  $a_{21} = 1$  ،  $b_{12} = 5$

### أنواع خاصة من المصفوفات:

١) المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها = عدد أعمدها =  $n$ ، وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة  $n$ .

٢) مصفوفة الوحدة: ويرمز لها بالرمز  $(I)$  وهي مصفوفة مربعة، وتكون مدخلاتها على النحو الآتي:

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ فمثلاً } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ وهكذا } \dots$$

٣) المصفوفة الصفرية  $(O)$ : هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، مثل  $O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

٤ مصفوفة الصف: هي المصفوفة المكونة من صف واحد مثل ص =  $\begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$

٥ مصفوفة العمود: هي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثل ج =  $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٦ المصفوفة القطرية: هي المصفوفة المربعة س بحيث س<sub>ي هـ</sub> = ٠ ،  $\forall$  ي هـ  $\neq$

مثل س =  $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \text{س}_{١١} \\ \cdot & \text{س}_{٢٢} & \cdot \\ \text{س}_{٣٣} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  ، ونسمي القطر الذي مدخلاته: س<sub>ي هـ</sub> ،  $\forall$  ي هـ =

بالقطر الرئيسي للمصفوفة س.

٧ المصفوفة المثلثية العلوية: هي المصفوفة المربعة التي تكون مدخلاتها التي تحت القطر الرئيسي أصفاراً،

مثل: أ =  $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  ، س =  $\begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{٢١} & \text{س}_{٣١} \\ \cdot & \text{س}_{٢٢} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \text{س}_{٣٣} \end{bmatrix}$

مثال ٢: لديك المصفوفات أ =  $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٨ \\ ١ & ٥ & ٩ \end{bmatrix}$  ، ب =  $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$  ، ج =  $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$

- ١ ما نوع المصفوفة ج؟
- ٢ هل ب مصفوفة وحدة؟
- ٣ ما مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ؟

- ١ المصفوفة ج هي مصفوفة عمود.
- ٢ المصفوفة ب ليست مصفوفة وحدة. (لماذا؟)
- ٣ مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ يساوي ٢



- ١ ينتج مصنع ألبان نوعين من العبوات: حجم كبير، وحجم صغير، فإذا كان لهذا المصنع فروع في كل من: الخليل وطولكرم وغزة، وكان عدد العبوات التي ينتجها كل فرع يومياً كما يأتي:
- فرع الخليل: ٨٠٠ عبوة من الحجم الكبير، ٩٠٠ عبوة من الحجم الصغير.
- فرع طولكرم: ٦٠٠ عبوة من الحجم الكبير، ٤٥٠ عبوة من الحجم الصغير.
- فرع غزة: ٧٥٠ عبوة من الحجم الكبير، ٦٥٠ عبوة من الحجم الصغير.
- أ نظم المعلومات السابقة بمصفوفة، بحيث تمثل الصفوف فيها أنواع العبوات، ثم اكتب رتبها؟
- ب ماذا يمثل مجموع مدخلات العمود الثاني؟

٢ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 4- & 5 & 2 \\ س & 2 & 6 \\ 7 & س- & 1 \\ 7 & 20 & 3 \end{bmatrix}$  فجد:

- أ رتبة المصفوفة أ      ب قيمة  $(أ_{١٢} + أ_{٣١})$       ج قيمة س بحيث إن:  $(أ_{٢٣}) = ٢٧$

٣ إذا كانت  $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 1-س & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2س & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة / قيم س.

- ٤ كَوْن مصفوفةً مربعةً من الرتبة ٢ بحيث تعطى مدخلاتها حسب العلاقة  $أ_{٢٢} = ٢ - ي - هـ$

٥ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2- \\ 5 & 3- & 6 \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة ب من الرتبة  $٢ \times ٣$

بحيث إن  $أ_{٢٢} = ب_{٢٢}$  لجميع قيم ي، هـ

أولاً: جمع المصفوفات:



نشاط ١:

تبيع شركة ألبسة بدلات رياضية في فرعها في كل من بيت لحم ونابلس، فإذا كانت ألوان البدلات المباعة أحمر وأزرق وأبيض، وسجلت أعداد البدلات التي تم بيعها في الفرعين خلال شهري أيلول وتشرين أول من العام ٢٠١٦ فكانت كما في الجدول الآتي:

اللون	الفرع		الشهر	اللون
	أبيض	أزرق		
٥٠٠	٤٠٠	٤٠٠	أيلول	نابلس
٢٨٠	٥٠٠	٣٠٠	تشرين ١	نابلس
٨٠٠	٤٠٠	٥٠٠	أيلول	بيت لحم
٢٥٠	٣٥٠	٣٠٠	تشرين ١	بيت لحم

١ إذا مثلنا ما باعه فرع نابلس في الشهرين المذكورين بالمصفوفة س =  $\begin{bmatrix} 500 & 400 & 400 \\ 280 & 500 & 300 \end{bmatrix}$  فإن رتبتهما.....

٢ مثل ما باعه فرع بيت لحم في الشهرين المذكورين بالمصفوفة ص، وعين رتبتهما.

٣ هل المصفوفتان س، ص من نفس الرتبة؟

٤ هل يمكن إيجاد مصفوفة (ع) تمثل مجموع ما باعتها الشركة من البدلات في فرعها في المدينتين؟

٥ كَوْن المصفوفة ع (إن أمكن).

تعريف:

إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن، فإن ج = أ + ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ، ب أي أن: ج<sub>يه</sub> = أ<sub>يه</sub> + ب<sub>يه</sub>



$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3^- \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{ع} , \begin{bmatrix} 7^- & 5 \\ 4^- & 3 \end{bmatrix} = \text{ص} , \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \text{س} \quad \text{مثال ١ :}$$

جد ناتج ما يأتي (إن أمكن) ١ س + ص ٢ ص + س ٣ ص + ع

$$\begin{bmatrix} 4^- & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7^- + 3 & 5 + 2 \\ 4^- + 4 & 3 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7^- & 5 \\ 4^- & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \text{س} + \text{ص} \quad ١$$

$$\begin{bmatrix} 4^- & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7^- & 5 \\ 4^- & 3 \end{bmatrix} = \text{ص} + \text{س} \quad ٢ \quad (\text{ماذا تلاحظ؟})$$

٣ ص + ع غير معرفة؛ لأن رتبة ص  $\neq$  رتبة ع.

## ثانياً: ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م  $\times$  ن، وكان ك عدداً حقيقياً، فإن ك أ = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م  $\times$  ن، وتكون مدخلاتها على النحو: جـ<sub>ي هـ</sub> = ك أ<sub>ي هـ</sub> لجميع قيم ي، هـ.



$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3^- \\ 5 & 0 & 2^- \end{bmatrix} = \text{أ} \quad \text{مثال ٢ :} \quad \text{فجد } ١ \text{ أ} \quad ٢ \text{ أ}^- \quad ٣ \text{ أ} + \text{أ}^-$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6^- \\ 10 & 0 & 4^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 4 \times 2 & 3^- \times 2 \\ 5 \times 2 & 0 \times 2 & 2^- \times 2 \end{bmatrix} = \text{أ} \quad ١$$

$$\begin{bmatrix} 1^- & 4^- & 3 \\ 5^- & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3^- \\ 5 & 0 & 2^- \end{bmatrix} \quad 1^- = \text{أ}^- = \text{أ}^- \quad ٢$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^- & 4^- & 3 \\ 5^- & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3^- \\ 5 & 0 & 2^- \end{bmatrix} = \text{أ}^- + \text{أ} \quad ٣ \quad (\text{فسّر الإجابة}).$$

**مثال ٣:** إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$  فجد  $3A + 2B$

**الحل:**  $3A + 2B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} =$$

### ثالثاً: طرح المصفوفات

#### تعريف:

إذا كانت  $A$  ،  $B$  مصفوفتين من نفس الرتبة  $m \times n$  ، فإن  $A - B = A + (-B)$



**مثال ٤:** إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  فجد المصفوفة  $A - B$

**الحل:**  $A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 3-4 \\ 2-5 & 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن مدخلات  $B - A$  تنتج من طرح مدخلات المصفوفة  $A$  من المدخلات المناظرة لها في المصفوفة  $B$

#### خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

إذا كانت  $(A, B, C, D)$  مصفوفات من نفس الرتبة،  $\exists$  ح فإن:

- ١  $A + B = B + A$  ..... (الخاصية التبادلية)
- ٢  $(A + B) + C = A + (B + C)$  ..... (الخاصية التجميعية)
- ٣  $A + O = O + A = A$  ..... (المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)
- ٤  $A + (-A) = (-A) + A = O$  ..... (النظير الجمعي)
- ٥  $k(A + B) = kA + kB$  ..... (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

مثال ٥ : حل المعادلة المصفوفية  $S + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

الحل : بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  إلى طرفي المعادلة تصبح:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + S \right)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + S$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + S$$

أي أن  $S = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

### تدريبات:

١ أ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، فجد  $B + A$ ،  $A - B$

ب إذا كانت  $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ،  $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، فبين أن:  $C + D = 9$

٢ حل المعادلة المصفوفية:  $2 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 3S = S + 2$

٣ إذا كانت  $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  فجد المصفوفة  $A$  بحيث:  $A + C = 0$

٤ جد قيم  $S$ ،  $V$  الحقيقية التي تحقق المعادلة:  $S + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 3V = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

٥ إذا كانت  $S + 2V = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$ ،  $3S - V = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$  فجد المصفوفتين  $S$ ،  $V$ .

## رابعًا: ضرب المصفوفات (Matrix Multiplication)

### نشاط ٢:

بعد انتهاء المرحلة الأولى من دوري كرة القدم الفلسطيني في المحافظات الشمالية للعام ٢٠١٦/٢٠١٧م، كانت الفرق الثلاثة الأولى، هي: (ثقافي طولكرم (ط)، وهلال القدس (ق)، وشباب السمّوع (س)، فإذا علمت أن مصفوفة نتائج مباريات هذه الفرق هي:



$$\begin{matrix} & \text{س} & \text{ق} & \text{ط} \\ \text{فوز} & 5 & 8 & 7 \\ \text{تعادل} & 3 & 2 & 3 \\ \text{خسارة} & 3 & 1 & 1 \end{matrix} = \text{ش}$$

وأن الفريق الفائز يحصل على ٣ نقاط، والمتعادل يحصل على نقطة واحدة، والخاسر لا يحصل على أي نقطة.

١ إذا كانت المصفوفة ص =  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  تمثل النقاط التي يحصل عليها الفريق في أي مباراة يلعبها،

والمصفوفة ع =  $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  تمثل نتائج مباريات فريق هلال القدس، كم نقطة يكون رصيد هذا الفريق؟

٢ كَوْن مصفوفة تمثل نتائج الفرق الثلاثة من النقاط، ثم رتّب الفرق تنازليًا حسب عدد النقاط.

### تعريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فإن حاصل الضرب أ . ب = ج، حيث ج مصفوفة من الرتبة م × ل، وتكون مدخلات المصفوفة ج على النحو

$$ج_{ي هـ} = أ_{ي ١} \times ب_{١ هـ} + أ_{ي ٢} \times ب_{٢ هـ} + \dots + أ_{ي ن} \times ب_{ن هـ}$$



$$\text{لتكن أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ ب} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ ج} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

### مثال ٦:

فأي العمليات الآتية تكون معرفة: ١ أ . ج ٢ أ . ب ٣ ب . ج

- ١ أ من الرتبة  $2 \times 3$ ، ج من الرتبة  $2 \times 2$ ، فإن أ. ج غير معرفة. (لماذا؟)
- ٢ أ. ب معرفة لأن عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب.
- ٣ ب. ج معرفة أيضاً. (لماذا؟)

الحل :

العدد	خيّاط ١	خيّاط ٢	خيّاط ٣
قميص	٢	٣	٢
بنطال	٤	٢	٥
بلوزة	٦	٥	٢

يعمل ثلاثة خيّاطين في مشغلٍ للخياطة، ينتج ثلاثة أنواع من الألبسة (قميص، بنطال، بلوزة)، فإذا كانت أجره خياطة القميص ٥ دنانير، وأجره خياطة البنطال ٦ دنانير، وأجره خياطة البلوزة ٣ دنانير، وفي أحد الأيام كان إنتاجهم كما في الجدول المجاور. ما الأجره التي حصل عليها كل خياط في ذلك اليوم؟

مثال ٧ :

لحساب أجره الخيّاط الأول مثلاً، فإننا نجري العمليات الآتية:

$$2 \times 5 + 4 \times 6 + 3 \times 2 = 52 \text{ ديناراً.}$$

الحل :

ولكن باستخدام المصفوفات يمكن تحديد أجره كل خياط، بحيث نكون مصفوفتين: الأولى

$$[ \begin{array}{ccc} 3 & 6 & 5 \end{array} ] = \text{وهي س}$$

$$[ \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{array} ] = \text{وهي ج}$$

وعليه فأجره كل خياط تستخرج من ناتج الضرب س . ج.

$$\text{أي أن: س . ج} = [ \begin{array}{ccc} 3 & 6 & 5 \end{array} ] \cdot [ \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{array} ]$$

$$[ \begin{array}{ccc} 2 \times 3 + 5 \times 6 + 2 \times 5 & 5 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 5 & 6 \times 3 + 4 \times 6 + 2 \times 5 \end{array} ] =$$

$$[ \begin{array}{ccc} 46 & 42 & 52 \end{array} ] =$$

وتكون أجره الخيّاط الأول ٥٢ ديناراً، والثاني ٤٢ ديناراً، والثالث ٤٦ ديناراً.

مثال ٨ : إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3^- \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2^- & 9 & 5^- \end{bmatrix}$  فجد (إن أمكن):

١ أ. ج ٢ ج. أ

مثال ٨ :

١ : الحل : بما أن رتبة  $A$  هي  $2 \times 2$  ، رتبة  $B$  هي  $3 \times 2$  فإنه يمكن إيجاد ناتج الضرب على النحو أ. ج =

$$\begin{bmatrix} 2^- \times 5 + 2 \times 3^- & 9 \times 5 + 1 \times 3^- & 5^- \times 5 + 4 \times 3^- \\ 2^- \times 6 + 2 \times 1 & 9 \times 6 + 1 \times 1 & 5^- \times 6 + 4 \times 1 \end{bmatrix} =$$

$$L = \begin{bmatrix} 16^- & 42 & 37^- \\ 10^- & 55 & 26^- \end{bmatrix} =$$

لاحظ أن المدخلة  $L_{11} = 42$  ، ناتجة من ضرب مدخلات الصف الأول من  $A$  مع ما يناظرها من مدخلات العمود الثاني من  $B$ .

٢ لا يمكن إيجاد حاصل الضرب ج. أ (لماذا؟)



نشاط ٣ : إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2^- \end{bmatrix}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$  ، فجد (إن أمكن) كلاً من: أ. ب ، ب. أ.

١ أ. ب =  $\begin{bmatrix} 29 & 41 \\ 4^- & 6^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2^- \end{bmatrix}$

٢ ب. أ =  $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2^- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$  ماذا تستنتج؟



مثال ٩ : لتكن  $A$  مصفوفة من الرتبة  $2 \times n$  ،  $B$  مصفوفة من الرتبة  $5 \times k$  فها قيم كل من  $n$  ،  $k$  التي تجعل أ. ب ، ب. أ معرفتين؟

مثال ٩ :

الحل : حتى يكون أ. ب معرفاً فإن قيمة  $n = 5$  ، وليكون ب. أ معرفاً فإن قيمة  $k = 2$  (لماذا؟)



مثال ١٠: جد ناتج  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$

الحل:  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \end{bmatrix}$ ، ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

### خصائص عملية الضرب على المصفوفات:

إذا كانت أ، ب، ج مصفوفات حيث أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، م المصفوفة المحايدة، ك  $\exists$  ح فإن:

- ١ (أ. ب) . ج = أ . (ب . ج) ..... الخاصية التجميعية.
- ٢ أ . (ب + ج) = (أ . ب) + (أ . ج) ..... توزيع الضرب على الجمع من اليمين .
- ٣ (أ + ب) . ج = (أ . ج) + (ب . ج) ..... توزيع الضرب على الجمع من اليسار .
- ٤ أ . م = أ = أ . م ..... (العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات).
- ٥ ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

مثال ١١: إذا كانت  $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = ب$ ،  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = ج$ ،  $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = ج د$  أ . ب، أ . ج

الحل:  $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = أ . ب$

$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = أ . ج$

لاحظ أن أ . ب = أ . ج، لكن ب  $\neq$  ج (ماذا تستنتج؟)

١ إذا كانت أ، ب، ج مصفوفات بحيث أن أ . ب = ج فما رتبة ب في كل ممالي:

أ  $٥ \times ٢$ ، ج  $٤ \times ٢$       ب  $٣ \times ٣$ ، ج  $٥ \times ٣$

٢ إذا كانت أ =  $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب =  $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ج =  $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$  فجد ما يأتي:

أ . أ . ب      ب . ج . ب      ج . أ

٣ جد قيم س، ص بحيث  $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٤ & ٤ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ ٣٤ & ٥ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت س =  $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \end{bmatrix} =$  ص، فيبين أن: س = ٥ ص

٥ إذا كانت أ =  $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب =  $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، فيبين أن: أ - ب  $\neq$  (أ - ب) (أ + ب)

٦ إذا كانت أ =  $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب =  $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فهل يمكن إيجاد قيمة/ قيم س بحيث إن: أ = ب؟

٧ إذا كانت أ =  $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، ب =  $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ج =  $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ - \sqrt{٣} \end{bmatrix}$

أ جد المصفوفة د بحيث أن: أ + د = د . ب

ب بين أن: ج = ج

نشاط ١:

اتفق سليم وأخته منال على طريقةٍ لتشفير الأعداد، وذلك بربط العدد المشفّر (أ)

بالشكل 

س	ص	ل	ع
---	---	---	---

 حيث  $س \times ع - ص \times ل = أ$

فمثلاً تشفير العدد ٥ يمكن أن يكون 

٢	١	٣	٤
---	---	---	---

وتشفير العدد -٥ هو 

٣	٤	٢	١
---	---	---	---

، وهكذا ... ، تشفير العدد ٦ هو .....،

تشفير العدد ٠ هو .....، هل يكون تشفير العدد وحيداً؟

ما رأيك لو مثلنا تشفير العدد ١٠ وهو 

٨	٢-	٧-	٣
---	----	----	---

بمصفوفةٍ مربعةٍ على النحو  $\begin{bmatrix} ٧- & ٣ \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$  .....

اكتب ٣ مصفوفات تمثل تشفيراً للعدد (٠).

للمحددات كثير من التطبيقات والاستخدامات في مجالات عدة، في الجبر والهندسة ، فالمحدد يمثل اقتراناً يربط كل مصفوفةٍ مربعةٍ بعددٍ حقيقي، ويفاد منه في حل أنظمة المعادلات، وفي إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وسوف تقتصر دراستنا في هذا الدرس على إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى، والثانية، والثالثة فقط.

تعريف:



إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً فإننا نرمز لمحددها بالرمز  $| أ |$  :

١ إذا كانت أ  $\begin{bmatrix} أ \\ أ \end{bmatrix}$  فإن  $| أ | = أ$

٢ إذا كانت أ  $\begin{bmatrix} أ & أ \\ أ & أ \end{bmatrix}$  فإن  $| أ | = \begin{vmatrix} أ & أ \\ أ & أ \end{vmatrix} = أ \times أ - أ \times أ = ٠$

٣ إذا كانت أ  $\begin{bmatrix} أ & أ & أ \\ أ & أ & أ \\ أ & أ & أ \end{bmatrix}$

فإن  $| أ | = \begin{vmatrix} أ & أ \\ أ & أ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} أ & أ \\ أ & أ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ & أ \\ أ & أ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ & أ \\ أ & أ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} أ & أ \\ أ & أ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ & أ \\ أ & أ \end{vmatrix}$

مثال ١: إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، فجد: ١  $|A|$ ، ٢  $|A+B|$

الحل: ١  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 2 = 13$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2) \times (4) - 3 \times 1 = 11$

٢  $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $|A+B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$  (ماذا تلاحظ؟)

### نظرية:

إذا كانت  $A$  مصفوفةً مربعةً من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إيجاد  $|A|$  بدلالة مدخلات أي صف، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف  $i$  والعمود  $j$ ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وفق القاعدة  $(-1)^{i+j}$



مثال ٢: جد  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$  باستخدام التعريف ١ بدلالة مدخلات العمود الثاني

الحل: ١ بالتعريف يكون  $13 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

٢ بدلالة مدخلات العمود الثاني يكون  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} (-1)^{1+2} (1) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{2+2} (5) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{3+1} (3) =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} (-1) - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} (5) - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} (3) =$

$= 3 - 6 - 26 = -29$  (ماذا تلاحظ؟)

مثال ٣: جد قيمة س بحيث  $20 = \begin{vmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 1 & س & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

الحل: نجد قيمة المحدد بدلالة مدخلات الصف الثالث، حيث يحوي أصفاراً.

أي أن  $20 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ س & 2 \end{vmatrix} + 3(1-5) = \begin{vmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 1 & س & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  ومنها  $20 = (س - ٤)٥$  أي  $س = ٨$

### بعض خصائص المحددات:

يلزمنا في كثير من الحالات حساب قيم المحددات بصورة سريعة، وخاصة عندما تكون المدخلات أعداداً كبيرة، ولتحقيق ذلك، وتوفيراً للوقت والجهد، سوف نتعرف على بعض خصائص المحددات:

١ عند تبديل صف مكان صف، أو عمود مكان آخر، فإن قيمة المحدد تضرب بـ  $(-١)$ .

فمثلاً  $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} (-١) = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$  (تحقق من ذلك).

٢ يمكن إخراج عامل مشترك من أي صف، أو أي عمود،

فمثلاً  $\begin{vmatrix} ٣- & 2 & 1 \\ 9 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} 3 = \begin{vmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 9 & 7 & 2 \\ 15 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

(بإخراج العدد ٣ كعامل مشترك لمدخلات الصف الثالث وضربه بمحدد المصفوفة الناتجة).  
تحقق من تساوي المحددين

٣ إذا أضيف لمدخلات أي صف، أو أي عمود مضاعفات نظائرها في صفٍ آخر، أو عمودٍ آخر،

فلا تتغير قيمة المحدد، فمثلاً  $\begin{vmatrix} 6 \times 4 + 3 & 5 \times 4 + 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$  (تحقق من ذلك)

(ضرب مدخلات الصف الثاني بـ ٤ وإضافتها لنظائرها في مدخلات الصف الأول)

٤ إذا تساوت المدخلات المتناظرة في صفين أو في عمودين في مصفوفة فإن محدها يساوي صفراً.

$$\text{فمثلاً يكون } 0 = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \end{vmatrix} \text{ (تحقق من ذلك)}$$

٥ إذا كانت المصفوفة مصفوفة مثلثية علوية فإن محدها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر

$$\text{الرئيسي فمثلاً إذا كانت } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \text{ فإن } |A| = a_{11} \times a_{22} \times a_{33}$$

### فكر وناقش:



ما قيمة محدد المصفوفة المربعة التي تحتوي على صف، أو عمود، كل مدخلاته أصفار؟

$$\text{إذا كانت المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ فإن:}$$

نشاط ٢:

$$\begin{aligned} 1 \text{ قيمة } |A| &= \dots\dots\dots \\ 2 \text{ } |2A| &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 4 \times 6 - 8 \times 2 = 8 - 8 = 0 \\ 3 \text{ } |3A| &= \dots\dots\dots \\ 4 \text{ } |kA| &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

### قاعدة (١):



إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة n، فإن  $|kA| = k^n |A|$ ، حيث  $k \in \mathbb{C}$

مثال ٤: إذا كانت A مصفوفة مربعة، وكان  $|A| = 5$ ،  $|2A| = 40$ ، فما رتبة المصفوفة A؟

الحل:

نفرض أن A مصفوفة مربعة من الرتبة n، وبما أن  $|2A| = 40$  فإن  $|2A| = 2^n |A| = 40$   
ومنها  $40 = 5 \times 2^n$  أي أن  $8 = 2^n$  ومنها ينتج أن:  $n = 3$   
أي أن A مصفوفة مربعة من الرتبة 3



قاعدة (٢):



إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعيتين من الرتبة ن فإن  $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

مثال ٥: إذا كان  $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$  ،  $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$  ، فجد  $|أ \cdot ب|$

الحل:  $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٠ = ٢$

وكذلك  $|ب| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١٢ - ٢ = ١٠$

ومنه  $|أ \cdot ب| = |أ| \times |ب| = ٢ \times ١٠ = ٢٠$   
هل يمكنك إيجادها بطريقة أخرى؟

نشاط ٣: إذا كانت  $س = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \end{bmatrix}$  ،  $ص = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$  ، فلإيجاد  $س \cdot ص$  فإننا نجد

$س \cdot ص = \begin{bmatrix} ٢٣ \end{bmatrix}$  ومنها  $س \cdot ص = ٢٣$

١  $س \cdot ص = \dots\dots\dots$

٢  $س \cdot ص = \dots\dots\dots$

ماذا تلاحظ؟

١ جد قيمة كل من المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{أ} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ب} \quad |35| \quad \text{ج}$$

٢ حل المعادلة الآتية:  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  س

٣ إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعيتين من الرتبة الثانية بحيث إن:  $|3| = 54$ ،  $|أ| = 12$ ، فما قيمة  $|أ٢| + |ب٥|$ ؟

٤ إذا كانت  $أ = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، وكان  $|3أ| = 125$ ، فما قيمة/ قيم س؟

٥ إذا علمت أن معادلة المستقيم في المستوى والمار بالنقطتين (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)، (س<sub>٢</sub>، ص<sub>٢</sub>)

$$٠ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

تعطى بالقاعدة

فاستخدم القاعدة في إيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (٥، ٧).

٦ اذكر خاصية/ خصائص المحددات التي استخدمت في كل من المتساويات الآتية:

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{ج} \quad ٠ = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{ب} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{أ}$$

٧ باستخدام خصائص المحددات أثبت ما يلي:

$$٢٠٠ = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 9 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ب} \quad ٠ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{أ}$$

### ٣ - ٤ النظير الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse of a Square Matrix)

عرضنا في درس سابق المصفوفة المحايدة (م) في عملية ضرب المصفوفات، وتعرّفنا إلى خاصية مهمة من خصائص ضرب المصفوفات، وهي  $أ \cdot م = م \cdot أ = أ$  حيث  $أ$  مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

**نشاط ١:** إذا كانت  $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$  ،  $ب = \begin{bmatrix} \frac{٤}{٦} & \frac{٢}{٦} \\ \frac{٥}{٦} & \frac{٤}{٦} \end{bmatrix}$  ،

١  $٦ = |أ|$

٢  $أ \cdot ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{٤}{٦} & \frac{٢}{٦} \\ \frac{٥}{٦} & \frac{٤}{٦} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = م$

٣  $ب \cdot أ = \dots$  ماذا تلاحظ؟

#### تعريف:

تسمى المصفوفة المربعة  $أ$  مصفوفة غير منفردة إذا وجدت مصفوفة مربعة  $ب$  من نفس الرتبة بحيث  $أ \cdot ب = ب \cdot أ = م$ ، وتسمى المصفوفة  $ب$  نظيراً ضربياً للمصفوفة  $أ$ ، ونرمز لها بالرمز  $أ^{-١}$  ونكتب  $(ب = أ^{-١})$  ويكون  $أ^{-١} \cdot أ = أ \cdot أ^{-١} = م$



**مثال ١:** إذا كانت  $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$  ،  $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$  فبين فيما إذا كانت  $ب = أ^{-١}$

**الحل:**  $أ \cdot ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = م$

$ب \cdot أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = م$

ومنها  $ب = أ^{-١}$  (لماذا؟)

نشاط ٢:

$$\begin{bmatrix} 19 & 8 & 2 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{ب} ، \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ} \text{ إذا كانت}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 8 & 2 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ. ب}$$

$$\text{ب. أ} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 & 8 & 2 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \dots \text{ ماذا تستنتج؟}$$

مثال ٢:

إذا كانت  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{س}$ ، تحقق فيما إذا كان للمصفوفة  $\text{س}$  نظيراً ضربياً أم لا؟

الحل:

نفرض أن للمصفوفة  $\text{س}$  نظيراً ضربياً هو  $\text{ص} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، ومن التعريف يكون  $\text{س} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{س} = \text{م}$

$$\text{أي أن: } \text{س} \cdot \text{ص} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\text{أ} + 3\text{ج} & 2\text{ب} + 3\text{د} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{لكن} \begin{bmatrix} 2\text{أ} + 3\text{ج} & 2\text{ب} + 3\text{د} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (لماذا؟)}$$

∴ لا يوجد للمصفوفة  $\text{س}$  نظير ضربى.

تعريف:

المصفوفة المنفردة هي المصفوفة المربعة التي لا يوجد لها نظير ضربى.



نظرية:

المصفوفة  $\text{أ}$  منفردة إذا وفقط إذا كان  $|\text{أ}| \neq 0$



مثال ٣ : أي المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة؟ أ =  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$  ، ب =  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

الحل :  $|أ| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$  ، ومنها تكون المصفوفة أ غير منفردة.

$|ب| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$  أي أن المصفوفة ب منفردة.

مثال ٤ : جد قيمة س التي تجعل المصفوفة أ =  $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ (1+س) & 3 \end{bmatrix}$  منفردة.

الحل :  $|أ| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ (1+س) & 3 \end{vmatrix} = 24 - (1+س)2 = 0$

وبما أن أ مصفوفة منفردة فيكون  $|أ| \neq 0$

$24 - (1+س)2 = 0$

$س + 2 = 24 - 2 = 22$  ومنها  $س = 20$

### خصائص النظير الضربي:

إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعيتين، وغير منفردتين، ومن نفس الرتبة، وكان ك عدداً حقيقياً  $\neq 0$ ، فإن:

١  $(أ^{-١})^{-١} = أ$       ٢  $(ك أ)^{-١} = ك^{-١} أ^{-١}$       ٣  $(أ . ب)^{-١} = ب^{-١} . أ^{-١}$

### إثبات الخاصية الثالثة:

(أ . ب) (أ . ب)  $^{-١} = م$  بضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة  $أ^{-١}$  من اليمين ينتج أن:  
 $أ^{-١} . (أ . ب) . (أ . ب) = أ^{-١} . م$  ومنها ينتج  $(أ^{-١} . أ) . ب . (أ . ب) = أ^{-١} . م$   
 أي أن  $ب . (أ . ب) = أ^{-١} . م$  وبضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة  $ب^{-١}$  من اليمين ينتج أن:  
 $ب^{-١} . ب . (أ . ب) = ب^{-١} . أ^{-١} . م$  ومنها  $(ب^{-١} . ب) . (أ . ب) = ب^{-١} . أ^{-١} . م$   
 أي أن:  $(أ . ب) = ب^{-١} . أ^{-١} . م$  ، وبنفس الطريقة نثبت أن  $(أ . ب) \times (أ . ب) = م$

(البرهان للمعرفة فقط)

## إيجاد النظير الضربي للمصفوفة:

سوف نتعرف على طرق إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وستقتصر دراستنا على النظير الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية فقط.

**مثال ٥ :** جد النظير الضربي للمصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$  (إن وجد).

**الحل :** نفرض أن:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} س & ص \\ ل & ع \end{bmatrix}$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \quad \text{أي} \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س & ص \\ ل & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنها  $\begin{bmatrix} 3س + 5ل & 3ص + 5ع \\ 4س + 6ل & 4ص + 6ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

كما أن  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$  أي  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س & ص \\ ل & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3س + 5ل & 3ص + 5ع \\ 4س + 6ل & 4ص + 6ع \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3س + 5ل & 3ص + 5ع \\ 4س + 6ل & 4ص + 6ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبحل المعادلات الناتجة من تساوي المصفوفتين في الحالتين السابقتين:

ينتج أن:  $س = 2$  ،  $ع = 3^-$  ،  $ص = \frac{3^-}{2}$  ،  $ل = \frac{5}{2}$

أي أن:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3^-}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & 3^- \end{bmatrix}$  (تحقق من ذلك)

تعميم:

$$\text{إذا كانت } A = \begin{bmatrix} 11^أ & 11^أ \\ 22^أ & 12^أ \end{bmatrix} \text{ مصفوفة غير منفردة فإن } A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 11^أ & 11^أ \\ 22^أ & 12^أ \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 12^أ - 22^أ & 11^أ \\ 22^أ & 11^أ - 12^أ \end{bmatrix}$$

أي أن:  $A^{-1}$  تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محدها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ.



مثال ٦ : إذا كانت  $S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فجد  $S^{-1}$  (إن أمكن).

الحل :  $|S| = 6 - 2 = 4 \neq 0$   
المصفوفة  $S$  لها نظير ضربي، وتكون  $S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

نشاط ٣ : حاولت مريم إيجاد العلاقة بين قيمة  $|A^{-1}|$ ، وقيمة  $|A|$ ، فجربت عدة مصفوفات من الرتبة الثانية، وحصلت على النتائج الآتية:

١  $|A| = 2$ ،  $|A^{-1}| = \frac{1}{2}$

٢  $|A| = \frac{1}{7}$ ،  $|A^{-1}| = 7$

٣  $|A| = 0$ ،  $|A^{-1}| = \dots$ ، واستنتجت العلاقة  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

هل العلاقة التي حصلت عليها مريم صحيحة دائماً؟ فسّر إجابتك.

١ بين أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٩ & ٣ & ٦ \\ ١ & ٨ & ٢ \end{bmatrix} = \text{د} \quad \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = \text{ج}$$

٢ ما قيم ك التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردة؟ أ  $\begin{bmatrix} ك & ك \\ ٢ك & ٤ \end{bmatrix}$  ب  $\begin{bmatrix} ٤ & ك \\ ك & ١ \end{bmatrix}$

٣ إذا كانت أ  $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجد: أ  $١^{-١}$  (إن أمكن) ب  $(١^{-١})^{-١}$

٤ إذا كانت أ  $\begin{bmatrix} ٥ & س \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان  $|١^{-١}| = \frac{١}{٥}$ ، فما قيمة س؟

٥ إذا كانت أ  $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ ص & ١ \end{bmatrix}$ ، وكان  $|١^{-١}| = |١^{-١}|$ ، فما قيمة / قيم المقدار (س ص)؟

٦ إذا علمت أن أ  $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب  $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان أ . ج = ب، فجد ج  $١^{-١}$

٧ إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعيتين وكانت أ مصفوفة غير منفردة بحيث أ . ب = أ . ج فأثبت أن: ب = ج، بحيث ج مصفوفة.

## نشاط ١:

يزرع الحاج أبو رفيع أرضه سنوياً بالقمح والشعير، ويبيع المحصول في السوق الفلسطيني، فإذا كان ثمن ٣ أكياس من القمح مع ٥ أكياس من الشعير يساوي ١٤٠ ديناراً، وكان ثمن ٥ أكياس من القمح يزيد عن ثمن ٤ أكياس من الشعير بمقدار ٣٦ ديناراً.

حاول أحمد كتابة النظام المكون للمسألة من معادلتين، بفرض أن  $s$  تمثل سعر الكيس الواحد من القمح،  $v$  سعر الكيس الواحد من الشعير، فحصل على المعادلتين

$$3s + 5v = 140 \quad (1)$$

$$5s - 4v = 36 \quad (2)$$

وكتب مصفوفة المعاملات  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

ومصفوفة المتغيرات  $K = \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix}$ ، ومصفوفة الثوابت  $J = \begin{bmatrix} 140 \\ 36 \end{bmatrix}$

ثم كتب المعادلة المصفوفية  $A \cdot K = J$

وتعرفنا في صفوف سابقة على حل أنظمة المعادلات الخطية (عدد المعادلات = عدد المتغيرات، ولها حل وحيد) بطريقتي الحذف والتعويض، وفي هذا الدرس سنبرز أهمية المصفوفات والمحددات في حل هذه الأنظمة، وستناول ثلاث طرق:

١ طريقة النظير الضربي\*

٢ طريقة كريمر\*

٣ طريقة جاوس

\* يكتفى بحل نظام مكون من معادلتين خطيتين فقط عند الحل بطريقتي النظير الضربي وكريمر.

## أولاً: طريقة النظير الضربي

يمكننا تمثيل نظام من المعادلات الخطية على شكل معادلة مصفوفية، باستخدام ثلاث مصفوفات، هي: مصفوفة المعاملات أ، ومصفوفة المتغيرات ك، ومصفوفة الثوابت جـ.

إذا كان لدينا نظام المعادلات الخطية الآتي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3^- \end{bmatrix} = \text{أ}، \text{ فإن مصفوفة المعاملات هي: } \text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3^- \end{bmatrix}$$

$$\text{ومصفوفة المتغيرات هي: ك} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}، \text{ ومصفوفة الثوابت هي: جـ} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ويمثل النظام السابق من المعادلات الخطية بمعادلة مصفوفية كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3^- \end{bmatrix}$$

وهي على الصورة أ . ك = جـ وبالتالي:

تكون ك = أ<sup>-1</sup> . جـ بشرط أن أ مصفوفة غير منفردة (لماذا؟)

**مثال ١:** حل النظام:  $2\text{س} + \text{ص} = 1^-$ ،  $4\text{س} + \text{ص} = 1$ ، باستخدام طريقة النظير الضربي.

**الحل:** نكتب المعادلة المصفوفية على النحو:  $\begin{bmatrix} 1^- \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1^-}{2} \\ 1^- & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^- & 1 \\ 2 & 4^- \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2^-} = 1^- \text{ ومنها } 2^- = 4 - 2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11$$

$$\text{أي أن: } \text{س} = 1، \text{ص} = 3^- \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 1^- + 2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^- \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1^-}{2} \\ 1^- & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

### فكر وناقش:



ماذا يحدث للإجابة إذا تم تغيير ترتيب المعادلتين هكذا:

$$4\text{س} + \text{ص} = 1، 2\text{س} + \text{ص} = 1^-$$



قامت حينئذ بحل نظام مكون من معادلتين خطيتين بالمتغيرين س ، ص ، فوجدت أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ، والمصفوفة A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ فإن:}$$

مصفوفة المعاملات للنظام الذي حلته حينئذ هي: .....  
 س = ..... ، ص = .....

### ثالثاً: طريقة جاوس

لقد قدم الرياضي الألماني كارل جاوس (١٧٧٧-١٨٥٥) هذه الطريقة التي تعتمد على تكوين مصفوفة ممتدة (تتضمن المعاملات والثوابت في نظام المعادلات)، فإذا كان لدينا النظام:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 & 0 & 0 \end{array} \right] = \overline{A}$$

فإن المصفوفة الممتدة للنظام هي  $\overline{A}$

وللحصول على حل للنظام، نجري بعض العمليات على صفوف  $\overline{A}$  ، لنحصل على مصفوفة مثلثية علوية ونجد منها أولاً قيمة المتغير ع ، ثم بالتعويض العكسي نجد قيمة المتغير ص ، ثم المتغير س .  
 والعمليات التي يمكن إجراؤها على صفوف المصفوفة أ :

- ١ تبديل صف مكان صف آخر .
- ٢ ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفراً .
- ٣ ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفراً ، وإضافتها إلى صف آخر .

#### ملاحظة:

إذا كانت  $a_{11} = 0$  ، فيمكن تبديل صف مدخلته الأولى  $\neq 0$  مكان الصف الأول في المصفوفة الممتدة  $\overline{A}$



مثال ٣ :

استخدم طريقة جاوس لحل النظام:  $3س + 7ص = 10$  ،  $2س - 5ص = 3$

الحل :

المصفوفة الممتدة للنظام هي  $\bar{A} = \left[ \begin{array}{cc|c} 10 & 7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{array} \right]$  ونجري العمليات على النحو الآتي:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 10 & 7 & 3 \\ 29 & 29 & 0 \end{array} \right] \xleftarrow[2ص + \frac{2}{3}ص]{\left[ \begin{array}{cc|c} 10 & 7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{array} \right]}$$

ومنها تكون  $\frac{29}{3}ص = \frac{29}{3}$  ، أي أن  $ص = 1$   
وبالتعويض العكسي  $3س + 7(1) = 10$  ومنها  $س = 1$

مثال ٤ :

استخدم طريقة جاوس لحل النظام:  $س + ص - ع = 9$  ،  $ص + ع٣ = 3$  ،  $س - ع٢ = 2$

الحل :

نكون المصفوفة الممتدة  $\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$  ونجري العمليات الآتية:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] \xleftarrow[3ص - 2ص]{\left[ \begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 11 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right]} \xleftarrow[3ص + 1ص]{\left[ \begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}$$

وبهذا حصلنا على مصفوفة مثلثية علوية، فنجد قيم المجاهيل بالتعويض العكسي

فتكون  $8 = 6 - ع$  ، ومنها  $ع = \frac{8}{3}$  كذلك  $ص + ع٣ = 3$  ، ومنها  $ص = 7$

كما أن:  $س + ص - ع = 9$  ومنها  $س = \frac{2}{3}$

١ حل كلاً من الأنظمة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

$$\begin{array}{l} \text{أ} \quad \text{س} - \text{ص} = ٣ \\ \text{ب} \quad \text{س} + \text{ص} = ٢ \\ \text{س} + ٢\text{ص} = ٦ \\ ١٠\text{س} + \text{ص} = ١١ \end{array}$$

٢ حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كريمر:

$$\begin{array}{l} \text{أ} \quad \text{س} - \text{ص} = ٥ \\ \text{ب} \quad \text{س} + \text{ص} = ٣- \\ \text{س} + ٢\text{ص} = ٢ \\ ٢\text{ص} + \text{س} = ٢- \end{array}$$

٣ عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بالمتغيرين س ، ص بطريقة كريمر، وجد أن:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} ، \text{أس} = \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix} ، \text{فجد قيمة س ، ص}$$

٤ استخدم طريقة جاوس في حل الأنظمة الآتية:

$$\begin{array}{l} \text{أ} \quad ٣\text{س} - \text{ص} = ١ ، \quad \text{س} + ٢\text{ص} = ٥ \\ \text{ب} \quad \text{س} - \text{ص} + \text{ع} = ٦ ، \quad \text{س} + ٢\text{ص} + \text{ع} = ٣ ، \quad ٢\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = ٠ \end{array}$$

١ اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1- & 4 \\ 9 & 3- & 6 \\ 1- & 7 & 2 \end{bmatrix}$  فما قيمة  $A^{-1} - A$ ؟

(أ) ٤ (ب)  $1-$  (ج) ١ (د)  $3-$

٢ إذا كانت  $\begin{bmatrix} 3 & س \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & س+2 \end{bmatrix}$  فما مجموعة قيم س؟

(أ)  $\{2-, 3\}$  (ب)  $\{3-\}$  (ج)  $\{2\}$  (د)  $\{2, 3-\}$

٣ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 5- & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 5 & 3- \\ 6- & 1 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المصفوفة  $5A - (A+B) + 27B$ ؟

(أ)  $\begin{bmatrix} 2- & 3 \\ 2- & 3 \end{bmatrix}$  (ب)  $\begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 17 & 17 \end{bmatrix}$  (ج)  $\begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 17 & 17 \end{bmatrix}$  (د)  $\begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 17 & 17 \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعيتين غير منفردتين، فما العبارة الصحيحة دائماً فيما يأتي؟

(أ)  $|A| = |B| = 4$  (ب)  $|A+B| = |A| + |B|$

(ج)  $A \cdot B = B \cdot A$  (د)  $\frac{|B|}{|A|} = |A^{-1}|$

٥ إذا كان  $S \cdot S = S$ ،  $S = S$ ، فما العبارة الصحيحة دائماً فيما يأتي: (س، ص مربعتان من نفس الرتبة)

(أ)  $S^{-1} = S$  (ب) ص مصفوفة منفردة (ج)  $S = S$  (د)  $S = -S$

٦ إذا كانت س مصفوفة بحيث  $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، فماذا يمكن أن تكون المصفوفة س؟

(أ)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  (ب)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  (ج)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (د)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

٧ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  ، فما المصفوفة التي تساوي  $A^{-1} + A$  ، حيث  $A^{-1}$  هي النظير الضربي للمصفوفة  $A$ ؟

أ) و (ب)  $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$  (ج)  $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$  (د) ٢٣٧

٨ إذا كانت  $A$  ،  $B$  مصفوفتين مربعيتين غير منفردتين بحيث إن:  $|A| = 18$  ،  $|B| = 11$  ، وكان  $|A| \leq |B|$  فما قيمة  $|A|$ ؟  
 أ) ٧ (ب) ٩ (ج) ٢ (د) ٦

٩ إذا علمت أن  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  ، فما قيمة  $A^{-2} - A$ ؟

أ) ١٠ (ب)  $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$  (ج)  $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$  (د) ٢٣٨

١٠ استخدم أحمد طريقة كرامر لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين في المتغيرين  $s$  ،  $v$  فوجد أن:  $|A| = 2$  ،  $|A_s| = -\frac{1}{4}$  ، فما قيم  $s$  ،  $v$  على الترتيب؟  
 أ) ٢ ، -٤ (ب) -٤ ، ٢ (ج) ١ ، -٢ (د) ٢ ،  $-\frac{1}{4}$

٢ إذا كان  $\begin{vmatrix} s & 1 \\ v & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$  ، فما قيم  $s$  ،  $v$ ؟

٣ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  فجد: أ)  $|A|^{-1}$  ب)  $|A^3|$  ج)  $(-A)^{-1}$

٤ جد قيم  $s$  التي تجعل  $9 = \begin{vmatrix} 1 & s & 2 \\ s & 3 & s \\ 5 & s & 4 \end{vmatrix}$

٥ حل المعادلات المصفوفية الآتية:

أ  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  (باستخدام النظير الضربي)

ب  $\begin{bmatrix} 11 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix}$

٦ إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 3 & س \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ،  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & ص \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فما قيم  $س$ ،  $ص$ ؟

٧ إذا كانت  $A$ ،  $B$  مصفوفتين مربعيتين غير صفيريتين، بحيث أن  $A \cdot B = O$ ، فأثبت أن: إحدى المصفوفتين  $A$ ،  $B$  على الأقل ليس لها نظير ضربي.

٨ عند حل المعادلتين  $س - ص = 5$ ،  $س + ص = 3$ ،  $ن$ ،  $ك$  عدنان حقيقيان لا يساويان صفراً.

باستخدام طريقة كرامر، إذا كانت  $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$  تمثل محدد  $A$

جد قيمة: أ  $ن$ ،  $ك$  ب  $س$ ،  $ص$

٩ إذا كانت  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  فجد  $(A^{-2})^{-1}$ ،  $(A^{-1})^2$  (ماذا تلاحظ؟)

١٠ استخدم طريقة كرامر لحل نظام المعادلات:  $س + ٣ص = ٤$ ،  $٥ص + س = ٣$

١١ استخدم طريقة جاوس في حل النظام الآتي:

$س - ص + ٤ع = ٩$ ،  $٢س + ٣ص + ٤ع = ٢$ ،  $٣ص + س - ٤ع = ٤$

١٢ إذا كانت  $A^{-1} = \begin{vmatrix} 11 & 2 & س \\ 9 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ، فجد قيم  $س$  مستخدماً خصائص المحددات.

١٣ أقيم ذاتي: أعبر بلغتي عن المفاهيم الأكثر إثارة في هذه الوحدة.

# الفصل الدراسي الثاني

الوحدة

٤

Indefinite Integral  
and its Applications

التكامل غير المحدود  
وتطبيقاته



كيف يستطيع المهندسون تصميم المباني ذات المنحنيات والمنحدرات المعقدة؛ لتبدو  
في النهاية في غاية الإبداع والإتقان؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل غير المحدود وتطبيقاته في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ إيجاد الاقتران الأصلي لاقتران معطى (إن أمكن) وتحديد العلاقة بين التفاضل والتكامل.
- ٢ التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود، واستخدامها في إيجاد تكاملات معطاة.
- ٣ إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرة حدود، ومثلثية، وأسيّة، ولوغاريتمية، ونسبية.
- ٤ استخدام طرق التكامل، مثل: التكامل بالتعويض، وبالأجزاء، وبالكسور الجزئية في إيجاد تكاملات معطاة.
- ٥ توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية وفيزيائية.

## ٤ - ١ التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

تعاني محافظات الوطن من شحّ في المياه، وتعتبر مشكلة المياه من أبرز معوّقات التنمية في فلسطين بشكل عام، لذلك يعكف المهتمون بالتنقيب عن المياه الجوفية وحفر الآبار الارتوازية، للتغلب على أسباب شحّ المياه، والتفكير في البحث عن مصادر متجددة.



**نشاط ١:** كان معدل تسرب الماء من خزان رئيسي يعطى بالعلاقة  $\frac{د ص}{د ن} = ٣ م^٣ / ساعة$  حيث ن تمثل الزمن بالساعة، برأيك كيف يمكن تحديد قاعدة الاقتران (ص) الذي يمثل كمية الماء المتسرب من هذا الخزان بعد فترة محددة من الزمن؟

من خلال ما تعلمته في التفاضل، أكمل الجدولين الآتيين، ثم أجب عن الأسئلة التي تليهما:

الجدول (ب)	
ق(س)	ق(س)
	٧
	٢س
٣ + ٢س	٢س٣
	قا٢س
	$\frac{١}{س}$

الجدول (أ)	
ق(س)	ق(س)
	س
	س + ٥
	جاس
٢س	س + ٤
	هـ س

- ١ تسمى العملية في الجدول (أ) عملية اشتقاق.
- ٢ اقترح اسماً للعملية في الجدول (ب).....
- ٣ ما العلاقة بين العمليتين؟.....
- ٤ هل الاقتران ق(س) يكون وحيداً لكل حالة في الجدول (ب)؟ أعط أمثلة.

## تعريف: معكوس المشتقة Antiderivative

إذا كان الاقتران ق (س) متصلًا في الفترة [أ، ب] فإن م (س) يسمى معكوس المشتقة (اقتران أصلي) للاقتران ق (س) إذا كان: م (س) = ق (س)،  $\forall$  س  $\in$  [أ، ب]



مثال ١:

تحقق من أن الاقتران م (س) =  $\frac{1}{x}$  س٤ اقتران أصلي للاقتران ق (س) = س٣

الحل:

الاقتران م (س) =  $\frac{1}{x}$  س٤ هو اقتران أصلي للاقتران ق (س) لأن  $\frac{d}{ds} (\frac{1}{x} س٤) = س٣$  (لاحظ أن ق (س) متصل لأنه كثير حدود).

نشاط ٣:

جد اقتراناً أصلياً للاقتران ق (س) = س٢

حسب التعريف يكون أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق (س) هو م (س) = س٢

لأن  $\frac{d}{ds} (س٢) = س٢$

١ هل م (س) = س٢ - ٢، م (س) = س٢ + ٥ اقترانان أصليان آخران للاقتران ق (س)؟

٢ هل يوجد عدد محدد من الاقترانات الأصلية للاقتران ق (س). ما العلاقة بينها؟

## قاعدة:

إذا كان م (س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق (س) فإن م (س) + ج هي الصورة العامة لأي اقتران أصلي للاقتران ق (س) حيث ج ثابت.



## أتعلم:

الفرق بين أي اقترانين أصليين لاقتران معين يساوي اقتراناً ثابتاً دائماً.



مثال ٢:

إذا كان الاقترانان م (س)، هـ (س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق (س)، وكان ل (س) = م (س) - هـ (س)، فجد ل (٣).

الحل:

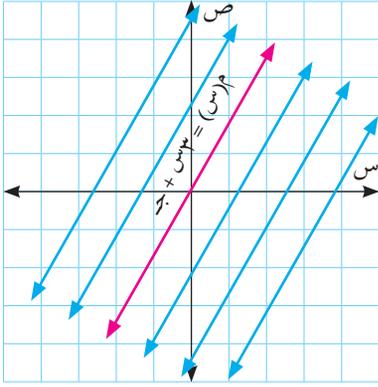
الاقترانان م (س)، هـ (س) اقترانان أصليان للاقتران المتصل ق (س)

إذن م (س) - هـ (س) = ج (ثابت)، ومنه ل (س) = ج

ل (س) = ٠ ومنها ل (٣) = ٠

مثال ٣ :

بين أن مجموعة الاقترانات الأصلية للاقتران ق (س) = ٣ هي مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمت متوازية.



الحل :

جميع الاقترانات الأصلية تكون على الصورة:  
 م (س) = ٣س + جـ ، حيث جـ ∈ ح، وهي عبارة عن  
 مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمت متوازية،  
 فمثلاً إذا كان جـ = ٥ فإن م (س) = ٣س + ٥  
 وإذا كانت جـ = ٣- فإن م (س) = ٣س - ٣ وهكذا ...

مثال ٤ :

بين فيما إذا كان الاقتران م (س) =  $\frac{١-٣س}{٢س}$  اقتراناً أصلياً للاقتران  
 ق (س) =  $\frac{٢}{٣س} + ١$  ، س ≠ ٠

الحل :

م (س) =  $\frac{١-٣س}{٢س} = \frac{١}{٢س} - س = ٢-س - س$   
 ومنها م (س) =  $١ - (٢-س) = ١ - ٢ + س = س - ١ = \frac{٢}{٣س} + ١ = ق (س)$   
 ∴ م (س) اقتران أصلي للاقتران ق (س).

تعريف :



- ١ تسمى مجموعة كل الاقترانات الأصلية للاقتران ق (س) بالتكامل غير المحدود للاقتران ق (س) بالنسبة لـ س ويرمز له بالرمز [ق (س) دس] ويقرأ تكامل ق (س) دال س.
- ٢ إذا كان م (س) = ق (س) فإن [ق (س) دس] = م (س) + جـ حيث جـ ثابت. (ثابت التكامل).
- ٣ إذا كان ق (س) اقتراناً متصلماً فإن  $\frac{د}{دس}$  [ق (س) دس] = ق (س).

نشاط ٤:

$$\text{لاحظ أن } \left[ \text{س}^3 \text{ دس} = \frac{\text{س}^4}{4} + \text{ج} \right] \text{ وذلك لأن } \frac{\text{د}}{\text{دس}} = \left( \frac{\text{س}^4}{4} + \text{ج} \right) = \text{س}^3$$

$$\text{وكذلك } \left[ \text{ص}^2 \text{ دص} = \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ج} \right] \text{ وذلك لأن } \dots\dots\dots$$

$$\text{وبالمثل } \left[ \text{جاس دس} = \text{ج} + \text{جاس} \right] \text{ وذلك لأن } \dots\dots\dots$$

مثال ٥:

$$\text{إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً وكان } \left[ \text{ق(س) دس} = \text{س}^3 - 3\text{س} + 5 \right] \text{ جد ق(٢)، ق(٣).$$

الحل:

بما أن ق(س) اقتران متصل

$$\text{إذن } \frac{\text{د}}{\text{دس}} \left( \text{ق(س) دس} \right) = \text{ق(س)} = \text{س}^3 - 3\text{س} + 5$$

$$\text{ومنها ق(٢) = } 2^3 - 3(2) + 5 = 9$$

$$\text{ق(٣) = } 3^3 - 3(3) + 5 = 12$$

مثال ٦:

$$\text{إذا كان ق(س) = } \left[ \text{ه}^{\text{س}} \text{ دس} \right] \text{، وكان ق(٠) = ٣، فجد ق(١).$$

الحل:

$$\text{ق(س) = } \left[ \text{ه}^{\text{س}} \text{ دس} = \text{ه}^{\text{س}} + \text{ج} \right]$$

$$\text{لكن ق(٠) = ٣، ومنها يكون ه}^0 + \text{ج} = 3$$

$$\text{أي أن } 1 + \text{ج} = 3 \text{ ومنها ج} = 2$$

$$\text{ق(س) = } \left[ \text{ه}^{\text{س}} + 2 = \text{ه}^{\text{س}} + 2 = \text{ق(١)} \right]$$

١ بيّن فيما إذا كان م (س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق (س) في كل مما يأتي:

أ م (س) =  $\frac{1}{3}(2س + 2)^{\frac{3}{2}}$  ، ق (س) =  $\sqrt{س + 2}$

ب م (س) = قاس<sup>٣</sup> ، ق (س) = ٣ قاس<sup>٢</sup> ظاس

ج م (س) = لو<sup>٣</sup> (س<sup>٢</sup> + هـ) ، ق (س) =  $\frac{س^٣ + ٢س^٢ - ٢هـ}{س^٣ + ٣هـ}$

٢ إذا كان م (س) ، هـ (س) اقترانين أصليين للاقتران ق (س) ،

وكان م (س) = س<sup>٢</sup> - ٤س + ٦ ، هـ (س) = ٤ ، فجد هـ (١).

٣ إذا كان م (س) ، هـ (س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق (س) ، وكان ق (٤) = ٧ ، ق (٤) = ١٠ ،

فما قيمة (٣ - هـ) (٤)؟

٤ إذا كان م (س) = ٢ ظاس - قاس أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق (س) =  $\frac{أ}{١ + جاس}$  ،

س  $\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . احسب قيمة الثابت أ.

٥ إذا كان ق (س) دس = أ س<sup>٣</sup> + ج س ، حيث ق (س) اقتران متصل ،

وكان ق (١) = ٤ ، ق (٢) = ٢٤ ، فجد قيمة كل من أ ، ج .



نشاط ١:

تكثر الآبار الجوفية في مسافر بني نعيم شرق الخليل، فإذا ضُخَّت المياه من بئرين في التوقيت نفسه، الأول بمعدل (٢٠) م<sup>٣</sup>/ ساعة، والثاني بمعدل (٣٠) م<sup>٣</sup>/ ساعة، حيث ن تمثل الزمن بالساعة فإن:

- ١ كمية المياه التي تضخ من البئر الأول في أي زمن ن تساوي ١٠ ن<sup>٢</sup> (لماذا؟)
  - ٢ العلاقة التي تحدد كمية المياه التي يتم ضخها من البئر الثاني هي .....
  - ٣ معدل ضخ الماء من البئرين معاً = ٥٠ ن (لماذا؟)
  - ٤ العلاقة التي تحدد كمية الماء التي يتم ضخها من البئرين معاً هي: .....
- ماذا تلاحظ؟

يتطلب إيجاد الاقتران الأصلي من خلال عمليات الاشتقاق كثيراً من الوقت والجهد، لذلك سنستخدم قواعد سيتم التعرف على بعض منها من خلال النشاط الآتي.

نشاط ٢:

أكمل الجدول الآتي حيث  $\exists \text{ ح}$ ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

ق (س)	ق (س)	ق (س) دس
٥		ج
أس		أس + ج
س <sup>٣</sup>		
س <sup>ن</sup>	ن س <sup>ن-١</sup>	
لوس، س < ٠		

لاحظ أن المقدارين ق (س)، [ق (س) دس]، في كل حالة يختلفان بمقدار ثابت.

- ١ ما العلاقة بين نواتج العمود الثاني، ونواتج العمود الثالث؟
- ٢ بالاعتماد على النتائج التي توصلت إليها، وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل، يمكنك التحقق من صحة القواعد الآتية:



### قواعد التكامل غير المحدود:

- ١  $\int \text{أ دس} = \text{أس} + \text{ج}، \text{أ} \neq \text{ح}$
- ٢  $\int \text{س}^{\text{ن}} \text{ دس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ج}، \text{ن} \neq -1$
- ٣  $\int \frac{1}{\text{س}} \text{ دس} = \text{لو}|\text{س}| + \text{ج}$
- ٤  $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{ دس} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} + \text{ج}$
- ٥  $\int \text{جاس} \text{ دس} = \text{ج}^{-1} \text{جتاس} + \text{ج}$
- ٦  $\int \text{جتاس} \text{ دس} = \text{جاس} + \text{ج}$
- ٧  $\int \text{قاأس} \text{ دس} = \text{ظاس} + \text{ج}$
- ٨  $\int \text{قتأس} \text{ دس} = \text{ظتاس}^{-1} + \text{ج}$
- ٩  $\int \text{قاس} \text{ ظاس} \text{ دس} = \text{قاس} + \text{ج}$
- ١٠  $\int \text{قتاس} \text{ ظتاس} \text{ دس} = \text{قتاس}^{-1} + \text{ج}$

### خواص التكامل غير المحدود:

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل فإن:

- ١  $\int \text{أ ق(س) دس} = \text{أ} \int \text{ق(س) دس}، \text{أ} \neq 0$
  - ٢  $\int (\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}) \text{ دس} = \int \text{ق(س) دس} \pm \int \text{هـ(س) دس}$
- ويمكن تعميمها على أكثر من اقترانين.

جد كلاً من التكاملات الآتية:

مثال ١:

- ١  $\int \left(3 + \frac{1}{\text{س}}\right) \text{ دس}$
- ٢  $\int \text{قاس} (\text{قاس} + \text{ظاس}) \text{ دس}$
- ٣  $\int (\text{س}^2 + \text{هـ}^{\text{س}}) \text{ دس}$
- ٤  $\int (2 - \text{ظأس}) \text{ دس}$

الحل:

- ١  $\int \left(3 + \frac{1}{\text{س}}\right) \text{ دس} = \int 3 \text{ دس} + \int \frac{1}{\text{س}} \text{ دس} = \text{لو}|\text{س}| + 3\text{س} + \text{ج}$
  - ٢  $\int \text{قاس} (\text{قاس} + \text{ظاس}) \text{ دس} = \int (\text{قاأس} + \text{قاس} \text{ظاس}) \text{ دس}$
- $= \int \text{قاأس} \text{ دس} + \int \text{قاس} \text{ ظاس} \text{ دس}$
- $= \text{قاس} + \text{قاس} + \text{ج}$

$$٣ \quad \left[ (س^٢ + ه^٢) دس \right] + \left[ س^٢ دس \right] + \left[ ه^٢ دس \right] = \frac{س^٣}{٣} + ه^٢ + ج$$

$$٤ \quad \left[ (٢ - ظا^٢ س) دس \right] = \left[ (٢ - (١ - قاس) - ٢) دس \right] = \left[ (٣ - قاس) دس \right]$$

$$= ٣س - ظاس + ج$$

مثال ٢:  $\left[ دس \frac{٢(١ + س^٢)}{س^٢} \right]$  جد

الحل:  $\left[ دس \frac{٢(١ + س^٢)}{س^٢} \right] = \left[ دس \left( \frac{١ + س^٢}{س} \right) \right] = \left[ دس (س + س^{-١}) \right]$

$$= \left[ دس (س + ٢ + س^{-٢}) \right]$$

$$= \frac{س^٣}{٣} + ٢س + \frac{١}{س} + ج$$

فكر وناقش:



هل يمكنك إيجاد ناتج التكامل بطريقة أخرى؟

نشاط ٣:

إذا كان ق(س) = (س٥ - ٤س - ١)، وكان ق(١) = ٥، فلإيجاد ق(٢) لاحظ أن:

$$ق(س) = \left[ ق(س) دس \right] = \left[ (س٥ - ٤س - ١) دس \right] = س^٥ - س - ج$$

$$لكن ق(١) = ٥ = ..... ومنها ج = .....$$

$$فيكون ق(س) = .....$$

$$ق(٢) = .....$$

فكر وناقش:



ما الفرق بين:  $\frac{د}{دس} \left[ ق(س) دس \right]$ ،  $\left[ ق(س) دس \right]$ ، علماً بأن ق(س) اقتران متصل؟

١ جد التكاملات الآتية:

أ  $\int 8 \, ds$       ب  $\int (7s^2 - 4s + \frac{3}{s^4}) \, ds$

ج  $\int (s+3)\sqrt{s} \, ds$       د  $\int (5s + \text{قاس ظاس}) \, ds$

هـ  $\int \frac{s-1}{1-\sqrt[3]{s}} \, ds$       و  $\int \frac{2s^2 + 5s - 1}{s^2} \, ds$

ز  $\int \frac{1}{\text{جتاس}^2} \, ds$       ح  $\int (5e^s + \frac{2}{s}) \, ds$

٢ إذا كان ق(س) = هـ<sup>س</sup> + جتاس، جد ق(س) حيث ق(٠) = ١

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا على مجاله وكان  $\int ق(س) \, ds = \text{جاس} - \text{جتاس} + ٢$   
 أثبت أن:  $ق\left(\frac{\pi}{2}\right) - ق\left(\frac{\pi}{2}\right) = ٢$

٤ إذا كان  $\int (ق(س) + ٢س) \, ds = ٢س^٣ + جـس^٢ + ٢$ ، وكان ق(١) = ٤، ق(٢) = ٦، فجد ق(١)

أولاً: تطبيقات هندسية: Geometric Applications

**نشاط ١:** يسير رجل على طريق منحنٍ بحيث يكون ميل المماس عند أي نقطة أ (س ، ص) على الطريق

يساوي (١ + ٢س). (لاحظ أن ميل المماس هو  $\bar{ص} = ٢س + ١$ )

- ١) الاقتران الذي يمثل معادلة الطريق هو اقتران تربيعي قاعدته ص = .....
- ٢) إذا كانت النقطة (٠ ، ٢) تقع على الطريق، فإن قاعدة الاقتران ص = .....

**مثال ١:** إذا كان المستقيم ص = س + ٢ يمس منحنى الاقتران ق(س) عند س = ٠ وكان ق(س) = ٦س ، جد قاعدة الاقتران ق(س).

**الحل :** ق(س) = ق(س) دس

$$= \int ٦س دس = ٣س^٢ + ج_١$$

لكن ق(٠) = ١ (لماذا؟)

ومنها ج\_١ = ١ ، ق(س) = ٣س^٢ + ١

وأيضاً ق(س) = ق(س) دس

$$= \int (٣س^٢ + ١) دس = س^٣ + س + ج_٢$$

وبها أن النقطة (٠ ، ٢) هي نقطة تماس

فإن ق(٠) = ٢ ومنها ج\_٢ = ٢

ق(س) = س^٣ + س + ٢

مثال ٢ :

إذا كان ق(س) = ١٢ س فجد معادلة منحنى الاقتران ق(س)  
 علماً بأنه يمر بالنقطتين (١، ٣)، (١-، ١).

الحل :

بما أن ق(س) = [ق(س) دس

فإن ق(س) = [١٢ س دس = ٦ س<sup>٢</sup> + ج<sub>١</sub>

كما أن ق(س) = [٦ س<sup>٢</sup> + ج<sub>١</sub>] دس = ٢ س<sup>٣</sup> + ج<sub>١</sub> س + ج<sub>٢</sub> (لماذا؟) ..... (١)

لكن ق(١) = ٣ ، ق(١-) = ١

وبالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

$$ج_١ + ج_٢ = ١ ، ج_١ - ج_٢ = ٣$$

وبحل المعادلتين معاً نحصل على قيمة: ج<sub>١</sub> = ١- ، ج<sub>٢</sub> = ٢

معادلة المنحنى المطلوبة هي: ق(س) = ٢ س<sup>٣</sup> - س + ٢



ثانياً: تطبيقات فيزيائية Physical Applications

نشاط ٢:



نظّمت وزارة التربية والتعليم العالي المرحلة النهائية

من مسابقة العدو لمسافة ١٠٠ متر، وشارك فيها ١٧

متسابقاً على مستوى المحافظات الشمالية، وكان من

المتسابقين حامد وحاتم، فإذا انطلقا معاً، بحيث كانت

سرعة حامد (ن) م/ث وسرعة حاتم  $\left(\frac{٢}{٣}ن\right)$  م/ث.

لاحظ أن سرعة حامد ع(ن) = ن

فتكون القاعدة التي تحدد المسافة التي قطعها حامد هي:

$$ف_١(ن) = \frac{٢}{٣}ن + ج_١$$

وبما أن ف(٠) = ٠ فتكون ف<sub>١</sub>(ن) =  $\frac{٢}{٣}ن$

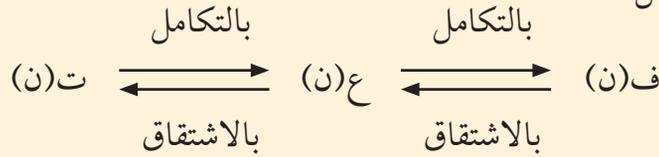
ولإيجاد زمن وصول حامد نهاية السباق

نجعل  $f(n) = 100$  متر ومنها  $n = \sqrt{200}$  ثانية

- ١ القاعدة التي تحدد المسافة التي قطعها حاتم هي : .....
- ٢ الزمن الذي استغرقه حاتم في قطع السباق يساوي .....
- ٣ أيهما قطع مسافة السباق أولاً؟



تأمل المخطط الآتي، ولاحظ العلاقة بين البعد  $f(n)$  والسرعة  $v(n)$  والتسارع  $a(n)$  في التفاضل والتكامل.



مثال ٣: بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة  $v(n) = 2n^2 + 3n^3$ ، فما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد اثنتين من بدء الحركة؟

$$v(n) = 2n^2 + 3n^3$$

الحل :

$$f(n) = \int v(n) dn = \int (2n^2 + 3n^3) dn = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{4}n^4 + C$$

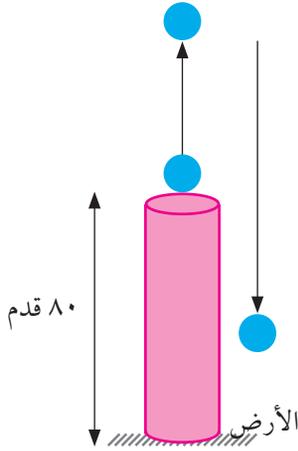
$$0 = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{4}n^4 + C \quad \text{في } n=0 \text{ فإن } C=0$$

$$f(n) = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{4}n^4$$

بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد اثنتين =  $f(2) = 12$  متراً

مثال ٤ :

قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ ث من قمة برج ارتفاعه ٨٠ قدماً. جد أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تصله الكرة، علماً بأن تسارعها يساوي -٣٢ قدم/ ث<sup>٢</sup>.



الحل :

$$ع(ن) = \int ت(ن) دن$$

$$= \int -٣٢ دن + ج_١$$

$$لكن ع(٠) = ٦٤ ومنها ج_١ = ٦٤$$

$$ع(ن) = -٣٢ن + ٦٤$$

تصل الكرة لأقصى ارتفاع بعد اثنتين ..... (لماذا؟)

$$ف(ن) = \int ع(ن) دن = \int (-٣٢ن + ٦٤) دن = -١٦ن^٢ + ٦٤ن + ج_٢$$

$$لكن ف(٠) = ٨٠ ومنها ج_٢ = ٨٠$$

$$ف(ن) = -١٦ن^٢ + ٦٤ن + ٨٠$$

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = ف(٢) = ١٤٤ قدماً.

- ١ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي س(٣ - ٢) فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق(٢) = ٥
- ٢ إذا كان ق(س) = أس - ٣س<sup>٢</sup>، فجد قاعدة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ مماس للمنحنى عند النقطة (١، ق(١)).
- ٣ جد قاعدة منحنى الاقتران ص = ق(س) الذي يمر بنقطة الأصل والنقطة (١، ٢) علماً بأن ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي  $2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2$  حيث أثبت،  $0 < \dots$
- ٤ إذا كان ق(س) = جتاس وكان ق(π) = ٢، ق(π) = ١، فجد قاعدة الاقتران ق(س).
- ٥ تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) مبتعداً عنها، بسرعة ابتدائية مقدارها ٣ م/ث، فإذا كان تسارعه في أي لحظة يساوي (ن) م/ث<sup>٢</sup>، فما سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة، وما المسافة التي قطعها خلال هذه الثواني؟
- ٦ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي  $\left(\frac{1}{\sqrt{s}} + \sqrt{s}\right)$  فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطة  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ .
- ٧ كذفت كرة رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ٤٥ متراً عن سطح الأرض، وكانت السرعة في اللحظة ن تساوي  $(-١٠ + ٤٠) م/ث$ ، جد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى سطح الأرض.



مثال ١ : جد  $\sqrt[3]{2س^2 + 4} دس$

الحل : نفرض أن:  $ع = 2س^2 + 4 \iff 2س^2 = 4 + 2س^2 = 2س^2 + 4$  ومنها  $دس = \frac{ع}{2}$

وبالتعويض، ينتج أن:

$$\sqrt[3]{2س^2 + 4} دس = \sqrt[3]{2س^2 + 4} \left( \frac{ع}{2} \right) = \frac{ع}{2} \sqrt[3]{2س^2 + 4} = \frac{ع}{2} \sqrt[3]{2(س^2 + 2)}$$
$$ج + \frac{ع^2}{3} = \frac{ع}{2} \sqrt[3]{2(س^2 + 2)}$$

مثال ٢ : جد  $\sqrt[3]{(2س + 1)^3} دس$

الحل : نفرض أن:  $ع = 2س + 1$  ومنها يكون  $دس = 2س + 1$ ، أي أن  $دس = \frac{ع}{2}$

$$\sqrt[3]{(2س + 1)^3} دس = \sqrt[3]{(2س + 1)^3} \left( \frac{ع}{2} \right) = \frac{ع}{2} \sqrt[3]{(2س + 1)^3}$$
$$ج + \frac{ع^2}{3} = \frac{ع}{2} \sqrt[3]{(2س + 1)^3}$$

نشاط ٢ : لإيجاد  $\sqrt[3]{(2س + 3)^3} دس$

نفرض  $ع = 2س + 3$ ، فيكون  $دس = 2س + 3$  ومنها  $دس = \dots$

$$\sqrt[3]{(2س + 3)^3} دس = \sqrt[3]{(2س + 3)^3} \left( \frac{ع}{2} \right) = \frac{ع}{2} \sqrt[3]{(2س + 3)^3}$$
$$ج + \frac{ع^2}{3} = \frac{ع}{2} \sqrt[3]{(2س + 3)^3}$$

أتعلم:

إذا كان  $ق(س)$  اقتراناً قابلاً للتكامل فإن  $ق(أس + ب) دس = \frac{1}{أ} ق(أس + ب) + ج$  حيث  $أ، ب، ج$  أعداداً حقيقية،  $أ \neq 0$



مثال ٣ : جد  $\text{أس هـ} - \text{س}^{١+٢} \text{دس}$

الحل : نفرض أن:  $\text{ع} = \text{س} + ٢ = ١ + ٢ \text{دس} \Leftrightarrow \frac{\text{دع}}{\text{س}^٢} = \text{دس}$  وبالتعويض والاختصار، ينتج أن:

$$\text{أس هـ} - \text{س}^{١+٢} \text{دس} = \frac{١}{٢} \text{أهـ} \text{ع} \text{دع}$$

$$= \frac{\text{هـ} \text{ع}}{٢} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{س}^{١+٢} \text{هـ}}{٢} + \text{جـ}$$

مثال ٤ : جد  $\left[ \frac{\sqrt{١+س} + ١}{١+س} \right] \text{دس}$

الحل : نفرض أن:  $\text{ع} = \sqrt{١+س}$

$$\text{دع} = \frac{١}{١+س} \sqrt{٢} \text{دس} \text{ ومنها دس} = \text{ع}^٢$$

$$\text{إذن} \left[ \frac{\sqrt{١+س} + ١}{١+س} \right] \text{دس} = \left[ \frac{\sqrt{٢} + ١}{٢} \right] \text{دع} = \text{ع}^٢ + \text{ع} + \text{جـ}$$

$$= \sqrt{٢} + ١ + س + \text{جـ} \text{ (لماذا؟)}$$

مثال ٥ : جد  $\text{أجاس}^٣ \text{دس}$

الحل :  $\text{أجاس}^٣ \text{دس} = \left[ \text{أجاس}^٢ \text{دس} \right] = \left[ (١ - \text{جتاس}^٢) \text{دس} \right]$

$$\text{إذن} \left[ \text{أجاس}^٣ \text{دس} \right] = \left[ \text{أجاس}^٢ \text{دس} \right] - \left[ \text{جتاس}^٢ \text{دس} \right]$$

$$= - \text{جتاس}^٢ + \frac{\text{جتاس}^٣}{٣} + \text{جـ} \text{ (لماذا؟)}$$

مثال ٦: جد  $\int \sin^3(x) dx$

الحل: نفرض أن:  $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

$$\int \sin^3(x) dx = \int \sin^2(x) \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx$$

$$= \int (1 - \cos^2(x)) (-du) = - \int (1 - u^2) du$$

$$= - \left( u - \frac{u^3}{3} \right) + C = - \sin(x) + \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

عوض قيمة  $u$  واكتب الناتج بدلالة  $x$

نشاط ٣: جد  $\int \cos^2(x) dx$

تعلم أن:  $\int \cos^2(x) dx = \int \sin^2(x) dx + 1 = \int \cos^2(x) dx - 1$

بالتعويض في التكامل عن  $\cos^2(x)$ ،  $\int \cos^2(x) dx = \int \cos^2(x) dx - 1$

$$\int \cos^2(x) dx = \int \cos^2(x) dx - 1 \Rightarrow \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$= \dots \dots \dots \text{(أكمل الحل)}$$

قاعدة:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx + C$$



مثال ٧: جد  $\int \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx$

الحل: لاحظ أن البسط يساوي مشتقة المقام

$$\text{وباستخدام القاعدة السابقة يكون } \int \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1 + \sin(x)| + C$$

١ جد التكاملات الآتية:

- أ  $\int \frac{4}{(s+2)^0} ds$
- ب  $\int (1-s) ds$  جا  $(s^2 - 2s) ds$
- ج  $\int \frac{لوس}{س} ds$
- د  $\int (s^2 + 2) \sqrt{s+1} ds$
- هـ  $\int (s+2)^2 (1-s)^2 ds$
- و  $\int \text{جتا} s ds$
- ز  $\int \frac{1}{1+جاس} ds$
- ح  $\int \frac{هـ^2}{هـ^2 + س^2} ds$

٢ جد التكاملات الآتية:

- أ  $\int \sqrt{\frac{1+s}{س}} ds$
- ب  $\int \frac{1}{س} ds$  جا  $\frac{1}{س} ds$
- ج  $\int (جاس + قتاس)^2 ds$
- د  $\int \frac{(س+2)^0}{س^7} ds$
- هـ  $\int س^2 (س^3 + 2س + 1)^{\frac{1}{3}} ds$
- و  $\int \text{ظا} س ds$

## فكر وناقش:



هل يمكن إيجاد  $\int$  س جتاس دس بطرق التكامل التي تعلمتها؟

## أتعلم:



$\frac{د}{دس} (ق \times ع) = ق \times \frac{دع}{دس} + ع \times \frac{دق}{دس}$  حيث ق ، ع اقترانات قابلة للاشتقاق.  
وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى س ينتج أن:  
 $ق \times ع = \int ق دع + \int ع دق$  (لماذا؟)  
ومنها  $\int ق دع = \int ع دق - ع \times ق$

تسمى هذه النتيجة قاعدة التكامل بالأجزاء، وتستخدم لإيجاد تكامل بعض الاقترانات التي تكون على صورة حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقة للآخر.

## قاعدة:



قاعدة التكامل بالأجزاء:  $\int ق دع = \int ع دق - ع \times ق$

جد  $\int$  س جتاس دس

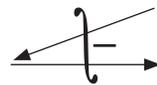
مثال ١:

دع = جتاس دس

نفرض أن: ق = س

ع = جاس

دق = دس



وحسب القاعدة  $\int ق دع = \int ع دق - ع \times ق$

يكون  $\int$  س جتاس دس = س جاس -  $\int$  جاس دس = س جاس + جتاس دس + ج



إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ع لا يغير من النتيجة.

## نشاط ١:

جد  $\int 2s \text{ جاس دس}$   
 نفرض أن:  $ق = 2s$   
 $\therefore دق = 2 \text{ دس دس}$

دع = جاس دس  
 ع = -جتاس

إذن  $\int 2s \text{ جاس دس} = \int -2 \text{ جتاس دس} + \int 2 \text{ جتاس دس}$

= ..... (أكمل الحل)

## مثال ٢:

جد  $\int (1-s) \text{ هـ س دس}$

نفرض أن:  $ق = 1-s$   
 $\therefore دق = -\text{دس}$

دع = هـ س دس  
 ع = هـ س

إذن  $\int (1-s) \text{ هـ س دس} = \int -\text{هـ س دس} + \int \text{هـ س دس}$

=  $(1-s) \text{ هـ س} + ج$

## الحل:

## نشاط ٢:

جد  $\int \sqrt{s} \text{ دس}$

نبدأ بالتكامل بالتعويض

نفرض  $\sqrt{s} = ص$  فيكون  $دص = \frac{1}{2\sqrt{s}} \text{ دس}$

ومنها  $2ص \text{ دص} = \text{دس}$

إذن  $\int \sqrt{s} \text{ دس} = \int 2ص \text{ دص}$

= ..... (أكمل مستخدماً التكامل بالأجزاء)

مثال ٣ : جد  $\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right|$  دس

الحل : نفرض أن: ق = س

$$دع = \frac{١}{٢+س\sqrt{٢}} دس$$

$$ع = ٢\sqrt{٢+س} = \frac{١}{٢+س\sqrt{٢}} دس \quad \therefore دق = دس$$

$$\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس = ٢س\sqrt{٢+س} - \left| ٢\sqrt{٢+س} \right| دس$$

$$= ٢س\sqrt{٢+س} - \frac{٤}{٣}\sqrt{٢(٢+س)} + ج \quad (\text{لماذا؟})$$

فكر وناقش:



أوجد  $\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right|$  دس من المثال السابق باستخدام التكامل بالتعويض.

مثال ٤ : جد  $\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right|$  دس

الحل : نفرض أن: ق = جاس

$$دع = \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} دس$$

$$ع = \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} دس \quad \therefore دق = جتاس دس$$

$$\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس = جتاس دس - \left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس$$

لاحظ أن:  $\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس$  على نمط التكامل المطلوب نفسه.

نفرض أن: ق = جتاس

$$دع = \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} دس$$

$$ع = \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} دس \quad \therefore دق = -جتاس دس$$

$$\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس = جتاس دس + \left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس \quad (\text{ماذا تلاحظ؟})$$

بالتعويض عن  $\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس$  في التكامل الأصلي، فيصبح:

$$\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس = جتاس دس - جتاس دس - \left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس + ج$$

$$\left| \frac{س}{٢+س\sqrt{٢}} \right| دس = \frac{١}{٢} (جتاس دس - جتاس دس) + ج \dots \dots \quad (\text{لماذا؟})$$

نشاط ٣: جد  $\int$  جتا (لو<sub>٣</sub> س) دس

(افرض ص = لو<sub>٣</sub> س واستفد من المثال السابق في إكمال الحل).

### تمارين ٤ - ٤ ب

١ جد كلاً من التكاملات الآتية:

- أ  $\int$  س لو<sub>٣</sub> س دس
- ب  $\int$  س قاس دس
- ج  $\int$  لو<sub>٣</sub> (س + ٢) دس
- د  $\int$  س جا٢ س دس
- هـ  $\int$  س<sup>٣</sup> هـ<sup>٢</sup> س<sup>١</sup> دس
- و  $\int$  جا<sup>٢</sup> س + ١ دس
- ز  $\int$  س<sup>٢</sup> هـ<sup>س</sup> دس / (س + ١) دس
- ح  $\int$  هـ<sup>س</sup> جاس جتاس دس
- ط  $\int$  هـ<sup>س</sup> (قتاس - قتاس ظتاس) دس
- ي  $\int$  س<sup>١</sup> جتا (س<sup>١</sup>) دس

٢ أثبت أن:  $\int$  س<sup>١</sup> لو<sub>٣</sub> س دس =  $\frac{س^{١+١}}{١+١} - (لو<sub>٣</sub> س - \frac{١}{١+١}) + ج$ ، ن  $\neq ١$ ، س < ٠

## فكر وناقش:



هل يمكن إيجاد  $\int \frac{س + 1}{س^2 - 4} دس$  بطرق التكامل التي تعلمتها؟

لقد تعلمنا في الدروس السابقة إيجاد  $\int \frac{س^2}{س^2 - 1} دس$  بالتكامل بالتعويض، لأن البسط مشتقة للمقام ولكن ماذا بالنسبة للتكامل  $\int \frac{س + 1}{س^2 - 4} دس$ ؟

في مثل هذه الحالة نلجأ لطريقة جديدة تسمى التكامل بالكسور الجزئية، وسوف نقتصرها على الاقتارات النسبية، التي يمكن كتابة المقام فيها على شكل حاصل ضرب ثلاثة عوامل خطية مختلفة على الأكثر.

كتابة ق(س) =  $\frac{س - 2}{س^3 - س}$  على صورة كسور جزئية، نقوم بتحليل المقام إلى عوامله الأولية،

## نشاط ١:

$$\frac{س - 2}{س^3 - س} = \frac{س - 2}{س(س - 1)(س + 1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - 1} + \frac{ج}{س + 1}$$

وبتوحيد المقامات، والإفادة من تساوي الاقتارات، نحصل على المعادلة:

$$س - 2 = أ(س - 1)(س + 1) + ب(س)(س + 1) + ج(س)(س - 1) \dots (1)$$

ولتحديد قيم أ، ب، ج نقوم بما يلي:

$$\text{نعوض } س = 1 \text{ في المعادلة (1) ومنها } ب = \frac{1}{2}$$

$$\text{نعوض } س = -1 \text{ في المعادلة (1) ومنها } ج = \frac{3}{2}$$

ولإيجاد قيمة أ نعوض س = ..... في المعادلة (1) ومنها أ = .....

$$\text{فيصبح: } \frac{س - 2}{س^3 - س} = \frac{س - 2}{س} + \frac{1}{2(س - 1)} + \frac{3}{2(س + 1)}$$

هل يمكنك إيجاد قيم أ، ب، ج بطرق أخرى؟

$$\text{نسمي كتابة المقدار } \frac{س - 2}{س^3 - س} \text{ على الصورة } \frac{س - 2}{س} + \frac{1}{2(س - 1)} + \frac{3}{2(س + 1)} \text{ بالكسور الجزئية}$$



إذا أمكن كتابة الاقتران النسبي على الصورة  $\frac{أ}{س-م} + \frac{ب}{س-ن} + \frac{ج}{س-ل}$  حيث أ، ب، ج أعداداً حقيقية، فإن تكامله يساوي  $ل \log|س-ل| + ب \log|س-ن| + ج \log|س-م| + ثابت التكامل$  ويراعى في ذلك أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام، فإذا كانت درجة البسط  $\leq$  درجة المقام نستخدم القسمة المطولة.

$$\text{جد } \int \frac{2}{س-2} دس$$

مثال ١:

الحل: لاحظ أن درجة البسط أقل من درجة المقام، وأن البسط ليس مشتقة للمقام لذلك نكتب:

$$\frac{2}{س-2} = \frac{أ}{س-1} + \frac{ب}{س+1} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\int \frac{2}{س-2} دس = \int \left( \frac{1}{س-1} + \frac{1}{س+1} \right) دس = \int \frac{1}{س-1} دس + \int \frac{1}{س+1} دس = \log|س-1| - \log|س+1| + ج$$

(اكتب الناتج بصورة أخرى)

$$\text{جد } \int \frac{س-2}{س-3} دس$$

مثال ٢:

$$\text{توصلنا من النشاط (١) أن: } \frac{س-2}{س-3} = \frac{2}{س} + \frac{1}{س-1} + \frac{3}{س+1}$$

الحل:

$$\text{وبالتالي } \int \frac{س-2}{س-3} دس = \int \left( \frac{2}{س} + \frac{1}{س-1} + \frac{3}{س+1} \right) دس$$

$$= 2 \log|س| + \log|س-1| + 3 \log|س+1| + ج$$

مثال ٣ : جد  $\left| \frac{s^2}{s^2 - 4} \right|$  دس

الحل : نلاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذا نقسم البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة.

$$\text{وينتج أن: } \frac{s^2}{s^2 - 4} = s^{-} + \frac{s^2}{s^2 - 4} \text{ ومنها يكون } \frac{s^2}{s^2 - 4} = \frac{s^2}{s^2 - 4} + \frac{0}{s^2 - 4}$$

وبتوحيد المقامات، ومساواة الاقترانين، ينتج أن:  $2 = 2 + 0$  ،  $2 = 2 + 0$  (لماذا؟)

$$\text{ويصبح } \frac{s^2}{s^2 - 4} = \frac{s^2}{s^2 - 4} + \frac{0}{s^2 - 4} = \frac{s^2}{s^2 - 4} + \frac{0}{s^2 - 4}$$

$$\text{ومنها } \left| \frac{s^2}{s^2 - 4} \right| \text{ دس} = \frac{s^2}{s^2 - 4} = \frac{s^2}{s^2 - 4} + \frac{0}{s^2 - 4}$$

$$= \frac{s^2}{s^2 - 4} + \frac{0}{s^2 - 4} \text{ ..... (لماذا؟)}$$

حل آخر :  $\left| \frac{s^2}{s^2 - 4} \right| \text{ دس} = \left( s^{-} + \frac{s^2}{s^2 - 4} \right) \text{ دس}$  (بعد إجراء القسمة)

$$\text{ومنها } \left| \frac{s^2}{s^2 - 4} \right| \text{ دس} = \left( s^{-} + \frac{s^2}{s^2 - 4} \right) \text{ دس}$$

$$= \frac{s^2}{s^2 - 4} + \frac{0}{s^2 - 4} \text{ ..... (لماذا؟)}$$

مثال ٤ : جد  $\left| \frac{\sqrt{s}}{9 - s} \right|$  دس

الحل : نلاحظ أن  $\frac{\sqrt{s}}{9 - s}$  ليس اقتراناً نسبياً، ولكن يمكن كتابته على الصورة  $\frac{\sqrt{s}}{9 - (\sqrt{s})^2}$

$$\text{وبفرض } s = \sqrt{s} \text{ فإن دس} = \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ ومنها دس} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\text{إذن } \left| \frac{\sqrt{s}}{9 - s} \right| \text{ دس} = \left| \frac{\sqrt{s}}{9 - s} \times \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}} \right| \text{ دس} = \left| \frac{s}{9 - s} \right| \text{ دس}$$

(لاحظ أن درجة البسط = درجة المقام؛ لذا نقسم البسط على المقام).

$$\text{وينتج أن: } \left| \frac{s}{9 - s} \right| \text{ دس} = \left( \frac{18}{9 - s} + 2 \right) \text{ دس}$$

$$\left| \frac{s}{9 - s} \right| \text{ دس} = \frac{s}{9 - s} = \frac{s}{9 - s} + \frac{0}{9 - s}$$

مثال ٥ :

$$\text{جد } \left| \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{ص}} - ٢} \text{ دس} \right|$$

الحل :

نفرض  $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}$  ومنها  $\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{ دس}$

$$\left| \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{ص}} - ٢} \text{ دس} \right| = \left| \frac{\text{دص}}{\text{ص} + \text{ص} - ٢} \text{ دس} \right|, \text{ وباستخدام الكسور الجزئية، يكون:}$$

$$\frac{١}{\text{ص} + \text{ص} - ٢} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٢} \text{ ومنها } \left( \frac{١}{٣} = \text{أ} \right), \left( \frac{١}{٣} = \text{ب} \right) \text{ (لماذا؟)}$$

$$\left| \frac{\text{دص}}{\text{ص} + \text{ص} - ٢} \right| = \frac{١}{٣} \left| \frac{\text{دص}}{\text{ص} - ١} \right| - \frac{١}{٣} \left| \frac{\text{دص}}{\text{ص} + ٢} \right| + \text{ج}$$

$$\text{ومنها } \left| \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{ص}} - ٢} \text{ دس} \right| = \frac{١}{٣} \left| \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - ١} \right| - \frac{١}{٣} \left| \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٢} \right| + \text{ج}$$

نشاط ٢ :

جد  $\left| \frac{\text{قاس}}{\text{قاس}} \text{ دس} \right|$

$$\text{إرشاد: لاحظ أن } \frac{\text{قاس}}{\text{قاس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} = \frac{١}{\text{جتاس} - ١} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس} - ١}$$

$$\text{إذن } \left| \frac{\text{قاس}}{\text{قاس}} \text{ دس} \right| = \left| \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس} - ١} \text{ دس} \right| \text{ وباستخدام التكامل بالتعويض بفرض } \text{ص} = \text{جتاس}$$

$$\text{يصبح التكامل على الصورة } \left| \frac{١}{\text{ص} - ١} \text{ دص} \right|$$

$$= \dots \text{ (أكمل الحل)}$$

$$\text{وبطريقة أخرى: } \left| \frac{\text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس})}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \text{ دس} \right|$$

(بضرب البسط والمقام بالمقدار  $\text{قاس} + \text{ظاس}$ )

$$\text{فيكون } \left| \frac{\text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس})}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \text{ دس} \right| = \left| \frac{\text{قاس}^2 + \text{قاس} \text{ ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \text{ دس} \right|$$

$$= \left| \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \right| + \text{ج} \text{ (لماذا؟)}$$

مثال ٦ : جد  $\left| \frac{\text{جاس}^3}{\text{جتاس} + 2} \right|$  دس

الحل :  $\left| \frac{\text{جاس}^3}{\text{جتاس} + 2} \right| = \left| \frac{\text{جاس}(\text{جتاس} - 1)}{\text{جتاس} + 2} \right|$  دس ..... (لماذا؟)

نفرض أن: ص = جتاس ومنها دص = -جاس دس

$$\left| \frac{\text{جاس}^3}{\text{جتاس} + 2} \right| = \left| \frac{\text{جاس}(\text{جتاس} - 1)}{\text{جتاس} + 2} \right| \times \frac{\text{دص}}{\text{جاس}^-} = \left| \frac{\text{ص}^2 - 1}{\text{ص} + 2} \right| \text{ دص} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$= \left| (\text{ص} - 2 + 2 + \frac{3}{\text{ص} + 2}) \text{ دص} \right| \quad (\text{بعد إجراء القسمة المطولة})$$

$$= \frac{\text{ص}^2}{2} - 2\text{ص} + 3 + \frac{3}{\text{ص} + 2} + \text{ج} =$$

= ..... (أكمل بكتابة الناتج بدلالة س)

## تمارين ٤ - ٤ ج

١ جد التكمالات الآتية:

أ  $\left| \frac{\text{س} + 2}{\text{س}^2 - 2\text{س} - 3} \right|$  دس

ب  $\left| \frac{\text{س}^2 + 2}{\text{س}^2 + \text{س} - 6} \right|$  دس

ج  $\left| \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - 2} \right|$  دس

د  $\left| \frac{\text{س} + 2}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 1)} \right|$  دس

هـ  $\left| \frac{1}{\text{قتاس دس}} \right|$

و  $\left| \frac{1}{\text{س} - \text{س}(\text{لوس})^2} \right|$  دس

٢ جد التكمالات الآتية:

أ  $\left| \frac{\text{س}^2 + 7}{\text{س}^2 + \text{س} - 2} \right|$  دس

ب  $\left| \frac{\text{جاس}}{16 - \text{جتاس}^2} \right|$  دس

ج  $\left| \frac{\text{قتاس}^2}{2 - \text{قتاس}^2} \right|$  دس

د  $\left| \frac{\text{س}^2}{\text{س}^3 + \text{س}^2} \right|$  دس

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان م (س)، هـ (س) اقترانين أصليين مختلفين للاقتران ق (س)،

فماذا يمثل  $(م(س) - هـ(س))$  دس؟

أ) اقتراناً ثابتاً ب) اقتراناً تربيعياً ج) اقتراناً خطياً د) صفراً

٢ إذا كان ق (س) =  $(٣س٢ - ٢)$  دس، وكان ق (٢) = ٩، فما قيمة ق (-٢)؟

أ) -١ ب) -٩ ج) ٤ د) ١

٣ إذا كان  $٢س لو س دس = س٢ لو س - ع دق$ ، فما قيمة ع دق؟

أ) لو س دس ب) س٢ دس ج) س دس د) س لو س دس

٤ ما قيمة  $\left[ قتا س ظتاس دس \right]$ ؟

أ)  $\frac{١}{٥} قتا س + ج$  ب)  $\frac{١}{٤} قتا س + ج$

ج)  $\frac{١}{٣} قتا س + ج$  د)  $\frac{١}{٣} قتا س + ج$

٢ أثبت أن: الاقتران م (س) =  $\sqrt{١٧ - ٢س}$  هو اقتران أصلي للاقتران ق (س) =  $\frac{س-}{١٧ - ٢س}$

٣ إذا كانت ق (س) =  $٢س + ٣$  جاس، ق (٠) = ٣، ق (٠) = ٢، فجد ق (س).

٤ إذا كانت سرعة جسيم ع بعد ن دقيقة تعطى بالقاعدة:  $ع = ٤ن + لو (ن + ١)$

جد إزاحة الجسيم بعد ٣ دقائق، علماً بأنه قطع مسافة ٨ أمتار بعد دقيقة واحدة.

٥ جد كلاً من التكاملات الآتية:

١  $\int \sqrt{s^2 - 3} \, ds$

٢  $\int \frac{1}{s + 10} \, ds$

٣  $\int \sqrt{s} \, ds$

٤  $\int \frac{1}{(s+1)(s+3)} \, ds$

٥  $\int (s^2 + 1) \, ds$

٦  $\int \frac{1}{s^2 - 1} \, ds$

٧  $\int \frac{s^2 + 1}{s^3 + s} \, ds$

٨  $\int \frac{s^2}{s^2 - 1} \, ds$

٩  $\int (s^2 - 1) \, ds$

١٠  $\int (s^2 + 1) \, ds$

١١  $\int (s^2 - 1) \, ds$

٦ يتحرك جسيم حسب العلاقة  $s = \sqrt{t}$  عددياً، حيث  $s$  السرعة (م/ث)،  $t$  المسافة (م) فإذا كان  $s(2) = 9$  أمتار،  $s(4) = 16$  متراً، فما قيمة الثابت  $A$ ؟

٧ إذا كانت  $s = C_1 t + C_2$ ، فجد قاعدة الاقتران  $C_1$  و  $C_2$  علماً بأن  $C_1 = \pi$ .

٨ أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			اجد تكامل اقترانات غير محدودة
			اوظف قواعد التكامل في حل مسائل متممة
			اكامل اقترانات باحد طرق التكامل

الوحدة



Definite Integration  
and its Applications

التكامل المحدود  
وتطبيقاته



قلعة برقوق تاريخ و تراث، تقاوم من أجل البقاء، فهي شاهد حقيقي على التطور الحضاري والثقافي لمدينة خان يونس عبر العصور. يراد تغطية قوس القلعة بزجاج، اقترح طريقة لحساب مساحة الزجاج المستخدم.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل المحدود وتطبيقاته في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى التجزئة، وحساب مجموع ريمان.
- ٢ إيجاد التكامل لاقتران خطّي باستخدام التعريف.
- ٣ التعرف إلى النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.
- ٤ التعرف إلى خصائص التكامل المحدود.
- ٥ حساب التكامل المحدود.
- ٦ إيجاد مساحة منطقة مستوية باستخدام التكامل المحدود.
- ٧ توظيف التكامل المحدود في حساب حجم الجسم الدوراني، الناتج من الدوران لمنطقة محدّدة حول محور السينات.



للحفاظ على جودة البيئة، وتجميل شوارع مدينة غزة، قررت البلدية تزيين شارع صلاح الدين بزراعة أشجار النخيل على امتداد الشارع بطول ١ كم، فكم شجرة نخيل يلزم لزراعة شجرة كل ٥٠م؟

نشاط ١:

تعريف:



إذا كانت [أ، ب] فترة مغلقة، وكانت:

$\sigma_n = \{a = s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n = b\}$  حيث:

$s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_n$  فإننا نسمى  $\sigma_n$  تجزئة نونية للفترة [أ، ب]

وتسمى الفترة  $[s_{r-1}, s_r]$  الفترة الجزئية الرائية، وطولها  $\Delta s_r = s_r - s_{r-1}$

طول الفترة الكلية = مجموع أطوال جميع الفترات الجزئية

وبالرموز  $\sum_{r=1}^n (s_r - s_{r-1}) = b - a$

نلاحظ من التعريف، أنه لكتابة أي تجزئة  $\sigma_n$  لفترة ما يجب أن تكون:

- ١ الفترة مغلقة.
- ٢ تبدأ التجزئة من بداية الفترة، وتنتهي بنهايتها.
- ٣ عناصر التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

مثال ١ :

أي من الآتية يعتبر تجزئة للفترة  $[-1, 3]$ .

- ١  $\sigma = \{-1, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$       ٢  $\sigma = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$   
٣  $\sigma = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$       ٤  $\sigma = \{-1, 1, 0, 2, 3\}$

الحل :

- ١  $\sigma$  تعتبر تجزئة للفترة، لأن  $s = -1$ ،  $s = 3$  وعناصرها مرتبة تصاعدياً  
٢  $\sigma$  ليست تجزئة، لأن  $s \neq -1$   
٣  $\sigma$  ليست تجزئة، لأن  $4 \notin [-1, 3]$   
٤  $\sigma$  ليست تجزئة للفترة  $[-1, 3]$  لأن عناصرها ليست مرتبة ترتيباً تصاعدياً

مثال ٢ :

اكتب ٣ تجزئات خماسية للفترة  $[2, 7]$

الحل :

- $\sigma = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$   
 $\sigma = \{2, \frac{5}{2}, 4, 6, 7\}$   
 $\sigma = \{2, \frac{7}{3}, 3, 6, 7\}$

فكر وناقش:



كم تجزئة خماسية للفترة  $[2, 7]$  يمكن تكوينها؟

مثال ٣ :

إذا كانت  $\sigma = \{-1, 3, 4, 6\}$  تجزئة ثلاثية للفترة  $[-1, 6]$   
اكتب جميع الفترات الجزئية الناتجة عن  $\sigma$ ، ثم احسب طول كل منها.

الحل :

الفترات الجزئية الناتجة عن  $\sigma$  هي:  $[-1, 3]$ ،  $[3, 4]$ ،  $[4, 6]$   
وأطوالها على الترتيب ٤، ١، ٢  
تلاحظ من المثال السابق أن:

عدد عناصر التجزئة  $\sigma = 4$ ، عدد الفترات الجزئية = ٣  
مجموع أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن  $\sigma = 7 = 2 + 1 + 4 = 7$  = طول الفترة الكلية.

## نشاط ٢:

- إذا كانت  $\sigma = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  تجزئة رباعية للفترة  $[2, 10]$
- ١ الفترات الجزئية الناتجة عن  $\sigma$  هي  $\{[2, 4], [4, 6], [6, 8], [8, 10]\}$
  - ٢ العلاقة بين أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن  $\sigma$  هي: .....
  - ٣ عدد الفترات الجزئية = .....
  - ٤ عدد عناصر التجزئة = ..... (ماذا تلاحظ؟)

## تعريف:

تسمى التجزئة  $\sigma_n$  تجزئة نونية منتظمة للفترة  $[أ، ب]$ ، إذا كانت أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عنها متساوية، ويكون طول الفترة الجزئية =  $\frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{عدد الفترات الجزئية}} = \frac{ب - أ}{ن}$



## مثال ٤:

اكتب تجزئة خماسية منتظمة للفترة  $[-2, 13]$

$$\text{الحل :} \quad \text{طول الفترة الجزئية} = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{13 - (-2)}{5} = 3$$

ومنها تكون  $\sigma = \{-2, 1, 4, 7, 10, 13\}$

## فكر وناقش:

هل هناك تجزئات خماسية منتظمة أخرى للفترة  $[-2, 13]$ ؟



## مثال ٥:

إذا كانت  $\sigma_6$  تجزئة منتظمة للفترة  $[٥، ب]$  وكان طول الفترة الجزئية =  $\frac{1}{3}$ ، جد قيمة ب

$$\text{الحل :} \quad \text{طول الفترة الجزئية} = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{1}{3}$$

ومنها  $\frac{1}{3} = \frac{ب - ٥}{٦}$  فيكون  $ب = ٦ - ١٥ = ٦$  وينتج أن  $ب = ٧$

لإيجاد قيمة أي عنصر في التجزئة المنتظمة  $\sigma_n$

يكون العنصر الأول  $s_1 = أ$

العنصر الثاني  $s_2 = أ + \frac{أ-ب}{ن}$

والعنصر الثالث  $s_3 = s_2 + \frac{أ-ب}{ن} = أ + 2 \times \frac{أ-ب}{ن}$  ..... (لماذا؟)

:

العنصر الرائي  $s_{1-r} = أ + (1-r) \times \frac{أ-ب}{ن}$

وبشكل عام، فإن:  $s_r = أ + r \times \frac{أ-ب}{ن}$  حيث  $r = 0, 1, 2, \dots, ن$

وتكون الفترة الجزئية الرائية هي  $[s_{1-r}, s_r]$

لتكن  $\sigma_{12}$  تجزئة منتظمة للفترة  $[-1, 19]$ ، فجد كلاً من:

مثال ٦ :

١  $s_3, s_4$  ٢ العنصر الثامن ٣ الفترة الجزئية الخامسة

١  $s_r = أ + r \times \frac{أ-ب}{ن}$  ومنها  $s_3 = -1 + 3 \times \frac{1+19}{12} = \frac{7}{3}$

الحل :

$s_4 = -1 + 4 \times \frac{1+19}{12} = 14$

٢ العنصر الثامن  $s_8 = -1 + 8 \times \frac{1+19}{12} = \frac{32}{3}$

٣ الفترة الجزئية الخامسة  $= [s_5, s_6] = [\frac{17}{3}, \frac{22}{3}]$  (تحقق من ذلك)

الشكل المجاور يبين التجزئة  $\sigma_n$  للفترة  $[2, 8]$ ، لاحظ أن التجزئة  $\sigma_n$  منتظمة وطول الفترة

نشاط ٣ :

الجزئية فيها  $= \frac{6}{ن}$



١ طول الفترة الكلية = ..... ٢ عدد عناصر التجزئة  $\sigma_n =$  .....

٣  $s_7 =$  ..... ٤ العنصر السابع = .....

٥ الفترة الجزئية السابعة = .....



### تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراً معرفاً في الفترة [أ، ب]، وكانت  $\sigma$  تجزئةً نونيةً للفترة [أ، ب]،

$$\text{فإن المقدار } \sum_{r=1}^n \text{ق}(s_r^*) (s_r - s_{r-1}) \text{ حيث } s_r^* \in [s_{r-1}, s_r]$$

يسمى مجموع ريمان، ويرمز له بالرمز  $\int (ق، \sigma)$

$$\text{وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن } \int (ق، \sigma) = \sum_{r=1}^n \frac{ب-أ}{ن} \text{ق}(s_r^*)$$

إذا كان ق(س) = س - ٢، وكانت  $\sigma = \{٣، ٤، ٥، ٦\}$  تجزئةً ثلاثية

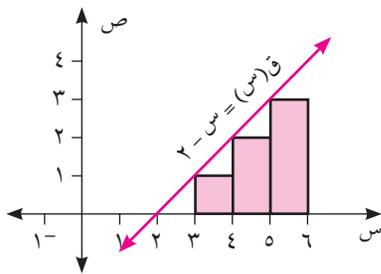
للفترة [٣، ٦]، فاحسب  $\int (ق، \sigma)$  معتبراً  $s_r^* = s_{r-1}$

نكوّن الجدول الآتي:

مثال ٧:

الحل:

الفترة الجزئية	$s_r - s_{r-1}$	$s_r^*$	ق(س <sub>ر</sub> <sup>*</sup> )	ق(س <sub>ر</sub> <sup>*</sup> ) × (س <sub>ر</sub> - س <sub>ر-١</sub> )
[٣، ٤]	١	٣	١	١
[٤، ٥]	١	٤	٢	٢
[٥، ٦]	١	٥	٣	٣
المجموع				٦



$$\text{أي أن } \int (ق، \sigma) = \sum_{r=1}^3 \text{ق}(s_r^*) (s_r - s_{r-1}) = ٦$$

لاحظ من الشكل المجاور أن مجموع مساحات المستطيلات

$$\text{تساوي } \int (ق، \sigma) = ٦$$

إذا كان ق(س) = س<sup>٢</sup> - ٢س، وكانت  $\sigma$  تجزئةً رباعيةً منتظمةً للفترة [٣، ٥]،

فاحسب  $\int (ق، \sigma)$  حيث  $s_r^* = s_{r-1}$

مثال ٨:

الحل:

بما أن التجزئة منتظمة فإن: طول الفترة الجزئية =  $\frac{٥-٣}{٤} = ٢$ ،

وتصبح  $\sigma = \{٣، ١، ١، ٣\}$

الفترة الجزئية الناتجة عن  $\sigma$  هي:

$$[5, 3], [3, 1], [1, 1^-], [1^-, 3^-]$$

س<sub>ر</sub>\* المناظرة = 3, 1, 1<sup>-</sup>, 3<sup>-</sup> (لماذا؟)

$$م(\sigma, ق) = \sum_{i=1}^n ق(س_r^*) = (س_r - س_{r-1}) = \frac{ب-أ}{ن}$$

$$م(\sigma, \xi, ق) = \sum_{i=1}^{\xi} 2 = 2(ق(س_r^*) + ق(س_{r-1}^-) + ق(س_{r-2}^-) + \dots + ق(س_1^-))$$

$$40 = 2(3 + 1^- + 3 + 15) =$$



مثال ٩: إذا علمت أن ق(س) = لوس وكانت  $\sigma = \{1, ه, ه^2, ه^3\}$  تجزئة للفترة [1, ه<sup>3</sup>], فاحسب م(σ, ق, س<sub>ر</sub>\*)

مثال ٩:

الفترة الجزئية الناتجة عن  $\sigma$  هي: [1, ه], [ه, ه<sup>2</sup>], [ه<sup>2</sup>, ه<sup>3</sup>]

الحل:

$$م(\sigma, ق, س_r) = (ق(ه) - ق(1)) + (ق(ه^2) - ق(ه)) + (ق(ه^3) - ق(ه^2))$$

$$= (ق(ه) - 1) + (ق(ه^2) - ق(ه)) + (ق(ه^3) - ق(ه^2))$$

$$= 3ق(ه) - 3ق(ه^2) + 3ق(ه^3) - 1$$



مثال ١٠: إذا كان ق(س) = أس، س ∈ [1, 1<sup>-</sup>], وكانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة [1, 1<sup>-</sup>]

مثال ١٠:

فجد قيمة أ علماً بأن م(σ, ق, س<sub>ر</sub>\*) = 2, س<sub>ر</sub> = س<sub>ر-1}</sub>

الحل: طول الفترة الجزئية =  $\frac{1}{p}$ ,  $\sigma = \{1, \frac{1}{p}, 0, \frac{1^-}{p}, 1^-\}$

الحل:

$$م(\sigma, \xi, ق) = \sum_{i=1}^{\xi} \frac{1}{p} = ق(س_r^*) = ق(س) + ق(س_1) + ق(س_2) + \dots + ق(س_p)$$

$$\frac{1}{p} = ق(1^-) + ق(\frac{1^-}{p}) + ق(0) + ق(\frac{1}{p}) + ق(1)$$

$$2 = \frac{1}{p}(أ^- + أ\frac{1^-}{p} + 0 + أ\frac{1}{p} + أ)$$

$$أ^- = 4 \text{ ومنها } أ = 4^-$$



١ إذا كانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة  $[-1, 2]$ ، فجد:

أ العنصر الثالث في التجزئة      ب الفترة الجزئية الرابعة

٢ إذا كان العنصر الخامس في التجزئة المنتظمة  $\sigma$  للفترة  $[-7, 4]$  يساوي ٤، جد قيمة ج.

٣ إذا كان  $q = (s) = 6 - s$  معرفاً في الفترة  $[1, 5]$ ، وكانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة نفسها،

$$\text{فجد } m(\sigma, q) \text{ معتبراً } s_r^* = s_r$$

٤ إذا كان  $q = (s) = 2 + s$  معرفاً في الفترة  $[-1, 2]$ ، وكانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة نفسها،

$$\text{فجد } m(\sigma, q) \text{ معتبراً } s_r^* = s_{r-1}$$

٥ إذا كان  $q = (s) = \frac{As}{s+2}$  معرفاً على  $[-1, 8]$ ، وكانت  $\sigma = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$  تجزئة

للفترة  $[-1, 8]$ ، فاحسب قيمة  $A$  علماً بأن  $m(\sigma, q) = 5, 6$ ، اعتبر  $s_r^* = s_{r-1}$

٦ إذا كانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة  $[A, B]$  والعنصر الثالث فيها يساوي ٢، وكانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة

للفترة  $[A, B]$  والعنصر الخامس فيها يساوي ٤، جد قيم  $A, B$ .

٧ إذا كان  $q = (s) = \text{جاس}$ ،  $s \in [\frac{\pi}{2}, 0]$ ، وكانت  $\sigma = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$

$$\text{أوجد } m(\sigma, q) \text{ معتبراً } s_r^* = s_r$$

٨ إذا كان  $q = (s)$  اقتراناً معرفاً ومحدوداً في الفترة  $[0, 1]$  وكانت  $\sigma$  تجزئة نونية منتظمة للفترة نفسها،

وكانت  $m(\sigma, q) = L$ ، عندما  $s_r^* = s_r$  و  $m(\sigma, q) = K$ ، عندما  $s_r^* = s_{r-1}$

$$\text{أثبت أن: } L - K = \frac{1}{n} (q(1) - q(0))$$



## نشاط ١:

يعتبر تل العاصور من الجبال العالية الواقعة شرق رام الله، يريد السيد جهاد حساب مساحة قطعة أرض له واقعة هناك (المنطقة المحدودة باللون الأحمر في الشكل المجاور)، لاحظ أنه لا يمكن تقسيمها إلى أشكال منتظمة، ولا يمكن إيجاد مساحتها باستخدام قوانين المساحة المعروفة. كيف يمكنك مساعدة جهاد في حساب مساحة قطعة الأرض؟

## مثال ١:

\* إذا كان  $ق(س) = ٢س + ٣$  معرفاً في الفترة  $[٢, ٦]$ ، ولتكن  $٥$  تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة نفسها فاحسب  $م(٥, ق)$  معتبراً  $س_r^* = س_r$

## الحل:

$$م(٥, ق) = \sum_{r=1}^٥ \frac{ب-أ}{ن} ق(س_r^*) = \sum_{r=1}^٥ \frac{٤}{ن} ق(س_r^*)$$

$$لكن س_r^* = س_r = أ + ر \frac{ب-أ}{ن}$$

$$فيكون س_r = ٢ + ر \frac{٤}{ن}$$

$$م(٥, ق) = \sum_{r=1}^٥ \frac{٤}{ن} ق\left(٢ + ر \frac{٤}{ن}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^٥ \frac{٤}{ن} \left(٢ + ر \frac{٤}{ن}\right) = \sum_{r=1}^٥ \frac{٨}{ن} + ٧ \sum_{r=1}^٥ \frac{٤}{ن}$$

$$وبعد التبسيط  $\frac{٨(٥)}{٥} + ٧ \times \frac{٤}{٥} = \frac{٤٠}{٥} + \frac{٢٨}{٥} = \frac{٦٨}{٥}$$$

$$يكون  $م(٥, ق) = \frac{٦٨}{٥}$$$

\* سوف نقتصر دراستنا في إيجاد  $م(٥, ق)$  (ن غير محددة) على اقترانات كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الأكثر.

مثال ٢ :

إذا كان  $ق(س) = ٥س - ٢$  معرفاً في الفترة  $[١، ب]$ ، وكانت  $٥$  تجزئةً خماسيةً منتظمةً لهذه الفترة بحيث،  $م(٥، ق) = ٣٦$ ، جد قيمة  $ب$  حيث  $س_r^* = س_r$

الحل :

$$م(٥، ق) = \sum_{r=1}^n \frac{ب-أ}{ن} = ق(س_r^*)$$

$$س_r^* = س_r = ١ + \frac{ب-١}{٥}$$

$$م(٥، ق) = \sum_{r=1}^٥ \frac{ب-١}{٥} = ق(س_r^*) = \sum_{r=1}^٥ (١ + \frac{ب-١}{٥})$$

$$= \sum_{r=1}^٥ \frac{ب-١}{٥} + ٣ = (١-ب) + ٣$$

$$ومن هنا يكون  $\frac{ب-١}{٥} = \frac{٣ + (١-ب)}{٥} = \frac{٤-ب}{٥}$$$

وينتج بعد التبسيط أن:  $٢ - ب - ١٢ = ٠$ ، وبحل المعادلة، ينتج أن:

$$ب = ٤، ب = ٣ - (مفروضة) ..... (لماذا؟)$$

### تعريف التكامل المحدود:

إذا كان الاقتران  $ق(س)$  معرفاً ومحدوداً\* في الفترة  $[أ، ب]$ ،

وكانت  $م(٥، ق) = ل$  لجميع قيم  $س_r^* \in [س_{r-١}، س_r]$  فإن الاقتران  $ق(س)$

يكون قابلاً للتكامل في الفترة  $[أ، ب]$ ، ويكون  $\int_A^B ق(س) دس = ل$

(نسمي  $أ، ب$  حدود التكامل)



\* يكون الاقتران  $ق(س)$  محدوداً إذا وجد عدداً حقيقيين  $م، ن$  حيث  $٢ \geq ق(س) \geq ١$   $\forall س \in$  مجال الاقتران

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = ٥ - ٤س حيث  $s \in [0, 3]$ ، معتبراً  $s_r^* = s_r$ ، احسب  $\int_0^3$  ق(س) دس باستخدام تعريف التكامل المحدود.

الحل :  $\int_0^3$  ق(س) دس =  $\sum_{r=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$  ق(س<sub>r</sub><sup>\*</sup>)

إذن  $\int_0^3$  ق(س) دس =  $\sum_{r=1}^n \frac{3-0}{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$  ق(س<sub>r</sub>)

=  $\sum_{r=1}^n \frac{3}{n} (5 - 4 \cdot \frac{r}{n})$  (لماذا؟)

=  $\frac{3}{n} \left( \sum_{r=1}^n 5 - \sum_{r=1}^n \frac{12}{n} \right)$  (لماذا؟)

=  $\frac{3}{n} \left( 5n - \frac{12}{n} \times n \cdot \frac{(1+n)}{2} \right)$

=  $\frac{3}{n} (5n - 6n)$

=  $3 - \frac{18}{n}$

### أذكر:

- إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً، فإن  $f\left(\frac{r}{n}\right)$  ق(س<sub>r</sub><sup>±</sup>) = عدداً حقيقياً ≠ ٠، إذا كانت درجة البسط = درجة المقام، وتكون قيمة النهاية = معامل س<sup>n</sup> في البسط ÷ معامل س<sup>n</sup> في المقام حيث ن أعلى أس في البسط والمقام.
- صفرًا إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- إما ∞، أو -∞، إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

**مثال ٤ :** إذا علمت أن  $\int_{1^-}^4 q(s) ds = 9$  ، وكان  $m(\sigma_n, q) = \frac{(1+n)(1+2n)}{2n}$  حيث  $\sigma_n$  تجزئة نونية منتظمة للفترة  $[-1, 4]$  ، فجد قيمة الثابت أ .

**الحل :**  $\int_{1^-}^4 q(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} m(\sigma_n, q) = 9$   
 إذن  $\int_{1^-}^4 q(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)(1+2n)}{2n} = 9$   
 ومنها يكون  $2 = 9$  ومنها  $\frac{9}{2} = \dots$  (لماذا؟)

## قابلية الاقتران ق(س) للتكامل في الفترة [أ، ب]

**نظرية (١):**

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في الفترة [أ، ب]، فإنه يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ، ب].



**مثال ٥ :** هل الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> + ٥ قابل للتكامل في الفترة [-٢، ٤]. ولماذا؟

**الحل :** ق(س) = س<sup>٢</sup> + ٥ قابل للتكامل في الفترة [-٢، ٤] لأنه متصل في الفترة [-٢، ٤] كونه كثير حدود.

**نظرية (٢):**

إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ، ب]، وكان الاقتران ه(س) = ق(س) لجميع قيم س ∈ [أ، ب]، عدا عند مجموعة منتهية من قيم س في تلك الفترة، فإن ه(س) يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ، ب]

ويكون  $\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} h(s) ds = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} q(s) ds$



**مثال ٦ :** ابحث في قابلية التكامل للاقتران ق (س) =  $\left[ \frac{1}{2} \right]$  في الفترة [٤، ٦].

**الحل :** تعلم أن ق (س) =  $\left[ \frac{1}{2} \right]$  =  $\left. \begin{matrix} 2 \leq s < 4 \\ 3 \leq s < 6 \end{matrix} \right\}$

نفرض أن هـ (س) = ٢ حيث  $s \in [4, 6]$ ، لاحظ أن هـ (س) قابل للتكامل لأنه متصل  
وبما أن هـ (س) = ق (س) لجميع قيم  $s \in [4, 6]$  ما عدا عند  $s = 6$   
فإن الاقتران ق (س) =  $\left[ \frac{1}{2} \right]$  يكون قابلاً للتكامل على [٤، ٦].

**مثال ٧ :** بيّن أن الاقتران ق (س) =  $\frac{1-s^2}{1+s}$  قابل للتكامل في الفترة [٢، ٢-].

**الحل :** نفرض أن هـ (س) =  $1 - s$  حيث  $s \in [2, 2^-]$   
لاحظ أن هـ (س) اقتران متصل؛ لأنه كثير حدود فهو قابل للتكامل في الفترة [٢، ٢-]  
وبما أن هـ (س) = ق (س) عند جميع قيم  $s \in [2, 2^-]$  ما عدا عند  $s = 2^-$   
فإن الاقتران ق (س) يكون قابلاً للتكامل في [٢، ٢-].

## تمارين ٥ - ٢

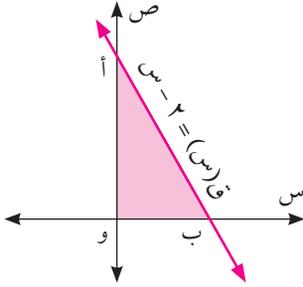
- ١ إذا كان ق (س) =  $2 - 5s$ ، وكانت  $\sigma_n$  تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة [١، ٣]،  
فاحسب  $m(\sigma_n, c)$  معتبراً  $s_r^* = s_r$
- ٢ إذا كان ق (س) =  $A + B$  وكانت  $\sigma_n$  تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة [٠، ١]،  
فأثبت أن:  $m(\sigma_n, c) = m(\sigma_n, h) + B$  لجميع اختيارات  $s_r^*$
- ٣ إذا كان ق (س) =  $2s$  معرفاً في الفترة [١، ب]، وكان  $m(\sigma_n, c) = 35 + \frac{25}{n}$ ، فما قيمة الثابت ب؟
- ٤ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة كل من:

$$\text{أ} \int_{-1}^4 \frac{1}{2} \text{ دس} \quad \text{ب} \int_1^2 (6 - 4s) \text{ دس}$$

- ٥ بيّن أن الاقتران ق (س) =  $\frac{\text{جتا}^3 \text{س} - 1}{\text{جتا} \text{س} - 1}$  قابل للتكامل في الفترة  $\left[ \frac{\pi}{2}, \pi - \frac{\pi}{2} \right]$

نشاط ١ :

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ - س،  
والمار بالنقطتين أ، ب



١ مساحة المثلث أ و ب = .....

٢ إذا كان م(س) هو الاقتران الأصلي للاقتران ق(س)

$$\text{فإن م(س)} = \int (٢ - س) دس = ٢س - \frac{س^٢}{٢} + ج$$

٣ قيمة م(٢) - م(٠) = ..... ماذا تلاحظ؟

تعريف:

إذا كان م(س) هو أحد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [أ، ب]،  
فإن المقدار م(ب) - م(أ) يساوي التكامل المحدود للاقتران ق(س) في الفترة [أ، ب]

$$\text{ونرمز له بالرمز } \int_a^b \text{ ق(س) دس}$$



النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

١ إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ، ب]، وكان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران

$$\text{ق(س) فإن } \int_a^b \text{ ق(س) دس} = \text{م(ب)} - \text{م(أ)}$$

٢ إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ، ب]،

$$\text{فإن ت(س)} = \int_a^b \text{ ق(ص) دص لجميع قيم س} \in [أ، ب]$$

ويسمى ت(س) الاقتران المكامل للاقتران ق(س).

ب إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، فإن ت(س) = ق(س) لكل س  $\in [أ، ب]$



مثال ١ :

جد قيمة كل مما يأتي:

١  $\int_{-2}^3 (4s^3 - 1) ds$

٢  $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{s} ds$

٣  $\int_{\frac{1}{2}}^2 s^2 ds$

الحل : ١ ق (س) =  $4s^3 - 1$  متصل على ح ، م (س) = س -  $s^4$  س اقتران أصلي للاقتران ق (س)

$$\text{إذن } \int_{-2}^3 (4s^3 - 1) ds = \left[ s^4 - \frac{1}{2}s^2 \right]_{-2}^3 = (3^4 - \frac{1}{2} \cdot 3^2) - ((-2)^4 - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2) =$$

$$60 = [(2^4) - \frac{1}{2}(2^2)] - [(-2)^4 - \frac{1}{2}(-2)^2] =$$

٢ لاحظ أن أحد الاقترانات الأصلية للاقتران  $\sqrt[3]{s}$  هو  $\frac{3}{2}s^{\frac{2}{3}}$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{9}{4}} \sqrt[3]{s} ds = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{9}{4}} s^{\frac{1}{3}} ds = \frac{3}{2} s^{\frac{2}{3}} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{9}{4}} = \dots \dots \dots \text{ (أكمل)}$$

٣  $\int_{\frac{1}{2}}^2 s^2 ds = \left[ \frac{1}{3}s^3 \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{3}(2^3 - (\frac{1}{2})^3) = \dots \dots \dots \text{ (لماذا؟)}$

مثال ٢ :

إذا كان م (س) اقتران أصلي للاقتران ق (س)

وكانت م (٣-) = ٤ ، م (٧) = ١٢ ، فجد  $\int_{-3}^7$  ق (س) دس

الحل :

$$\int_{-3}^7 \text{ق (س) دس} = \left[ \text{م (س)} \right]_{-3}^7 =$$

$$= \text{م (٧)} - \text{م (٣-)} = 8$$

**مثال ٣ :** إذا كان ق(س) = ٤س<sup>٣</sup> معرّفاً في الفترة  $[-٢، ٤]$ ، فجدت(س)، ثم احسب ت(٢-)، ت(١)

**الحل :** ت(س) =  $\int_1^s$  ق(ص) دص

$$= \int_{2-}^s$$

$$= \int_{2-}^s ٤ص^٣ دص = ٤ \left| \frac{ص^٤}{٤} \right|_{2-}^s$$

$$= ١٦ - ٤ =$$

ومنها ت(٢-) = ١٦ - ١٦ = ٠ ، ت(١) = ١٦ - ١ = ١٥-

**فكّر وناقش:**



كيف يمكنك إيجاد ت(١) دون إيجاد ت(س)؟

**مثال ٤ :** إذا كان ق(س) = ٢س<sup>٢</sup> + جا٢س ، س ∈  $[٠، \frac{\pi}{٢}]$ ، فجد:

- ١ الاقتران المكامل ت(س)      ٢ ت(٠)      ٣  $\int_0^{\frac{\pi}{٤}}$  ق(س) دس

**الحل :** ١ ت(س) =  $\int_0^s$  ق(ص) دص =  $\int_0^s$  (ص<sup>٢</sup> + جا٢ص) دص

$$= \frac{١}{٢} + \frac{ص٢ جا٢ص}{٢} - \frac{٣ص^٣}{٣} =$$

(لماذا؟)

$$٢ ت(٠) = \frac{١}{٢} + \frac{(٠)٢ جا٢(٠)}{٢} - \frac{٣(٠)^٣}{٣} = ٠$$

$$٣ \int_0^{\frac{\pi}{٤}} ق(س) دس = \left( \frac{\pi}{٤} \right) = \frac{١}{٢} + \frac{٣\pi}{١٩٢} =$$

(لماذا؟)

سوف نقدم الاقتران المكامل لاقتران متعدد القاعدة في الدرس التالي:

### نظرية:

إذا كان ت (س) هو الاقتران المكامل للاقتران ق (س) المعرف في الفترة [أ، ب] فإن:

١ ت (س) اقتران متصل دائماً في الفترة [أ، ب].

٢ ت (أ) = ٠



جد  $\int \csc^2 x \, dx$

مثال ٥ :

نفرض  $\sin x = u$  فيكون  $\cos x = \sqrt{1-u^2}$  ومنها  $\frac{du}{\cos x} = \frac{dx}{\sqrt{1-u^2}}$

الحل :

$\int \csc^2 x \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{1}{u^2 \sqrt{1-u^2}} \, du$

$\int \csc^2 x \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{1}{u^2 \sqrt{1-u^2}} \, du$

ومنها  $\int \frac{1}{u^2 \sqrt{1-u^2}} \, du = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$\int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x} + C$  (لماذا؟)

١ جد قيم التكاملات المحدودة الآتية:

$$\begin{aligned} \text{أ} \int_0^4 (3 + \sqrt{s})^2 ds & \quad \text{ب} \int_1^2 s(s^2 - 3)^3 ds \\ \text{ج} \int_0^1 s \ln s ds & \quad \text{د} \int_0^2 120s^2(s-1)^3 ds \end{aligned}$$

٢ إذا كان ق(س) =  $\frac{s}{1+s}$ ،  $s \in [0, 4]$ ، أوجدت(س)

٣ إذا كانت (س) =  $\left. \begin{aligned} 2s^2 + أ & \quad 2^- \geq s \geq 3 \\ ب + س + 1 & \quad 3 > s \geq 5 \end{aligned} \right\}$ ، هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س) في الفترة  $[-2, 5]$ ، فجد قيم الثابتين أ، ب.

٤ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا، وكان  $\int_{\frac{1}{2}}^s$  ق(ص) دص = س + جا  $\pi$  س + ج

فجد قيمة الثابت ج، ثم ق(٢) حيث  $s \leq \frac{1}{4}$

٥ إذا كانت (س) =  $\int_0^s (أ + هـ ص) دص$  وكان ت(٢) =  $1^-$ ، احسب قيمة أ.

٦ جد  $\int_0^1 (s^2 - 2s)(s-1)^0 ds$

للتكامل المحدود خصائص مهمة تسهل حساب قيمته، ومنها:

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ، ب] فإن:

$$1 \quad \int_a^b \text{ق(س) دس} = - \int_b^a \text{ق(س) دس}$$

$$2 \quad \int_a^a \text{ق(س) دس} = 0$$

$$3 \quad \int_a^b \text{ك دس} = \int_a^c \text{ك دس} + \int_c^b \text{ك دس} \quad \text{حيث } c \in [a, b]$$

$$4 \quad \int_a^b \text{ك ق(س) دس} = \int_a^b \text{ق(س) ك دس} \quad \text{حيث } c \in [a, b]$$

$$5 \quad \int_a^b (\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}) دس = \int_a^b \text{ق(س) دس} \pm \int_a^b \text{هـ(س) دس} \quad \text{(يمكن تعميمها على أكثر من اقترانين)}$$

مثال ١: جد قيمة ما يأتي:

$$3 \quad \int_1^2 \frac{5 + 2س^2 - 3س^3}{س^2} دس$$

$$2 \quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3 - \text{جاس دس}$$

$$1 \quad \int_{-4}^6 \text{دس}$$

$$1 \quad \int_{-4}^6 \text{دس} = ((-4) - 6) = -10$$

$$2 \quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3 - \text{جاس دس} = 0 \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$3 \quad \int_1^2 \frac{5 + 2س^2 - 3س^3}{س^2} دس = \int_1^2 \left( \frac{5}{س^2} + \frac{2س^2}{س^2} - \frac{3س^3}{س^2} \right) دس$$

$$\int_1^2 (5س^{-2} + 2 - 3س) دس = \left[ -5س^{-1} + 2س - \frac{3س^2}{2} \right]_1^2 \quad \text{(أكمل)}$$

مثال ٢ : إذا كان  $\int_{1+3}^{أ+٢} ٤ \text{ دس} = ٣٦$ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ؟

الحل : حسب الخاصية (٣) يكون  $\int_{1+3}^{أ+٢} ٤ \text{ دس} = ٤((١ + ٣) - (أ + ٢)) = ٣٦$   
أي أن  $٣٦ = ٤ + ٨$  ومنها  $٤ = أ$

مثال ٣ : إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان  $\int_{٣}^{٦} \text{ق(س) دس} = ١٠$ ، فجد:

١  $\int_{٣}^{٣} \text{ق(س) دس}$       ٢  $\int_{٣}^{٣} \text{ق(س) دس}$

١  $\int_{٣}^{٣} \text{ق(س) دس} = ٠$

٢  $\int_{٣}^{٣} \text{ق(س) دس} = - \int_{٣}^{٦} \text{ق(س) دس} = -١٠$

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ، ب]، وكان ق(س)  $\leq ٠$   
لكل س  $\exists [أ، ب]$  فإن:  $\int_{أ}^{ب} \text{ق(س) دس} \leq ٠$



مثال ٤ : بدون حساب التكامل بين أن:  $\int_{٤+٢}^{٣} \text{س دس} \leq ٠$

الحل : نبحث في إشارة المقدار  $\frac{٣}{٤+٢} \text{س}$  في الفترة [٥، ٠]، وبما أن  $٣ \leq ٠$ ،  $\forall \text{س} \in [٥، ٠]$

وكذلك  $٤ + ٢ \leq ٤ < ٠$ ،  $\forall \text{س} \in [٥، ٠]$

إذن  $\int_{٤+٢}^{٣} \text{س دس} \leq ٠$   $\forall \text{س} \in [٥، ٠]$  ومنها  $\int_{٤+٢}^{٣} \text{س دس} \leq ٠$

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ، ب]،

وكان ق(س) ≤ هـ(س) لكل س ∈ [أ، ب]، فإن  $\int_a^b ق(س) دس \leq \int_a^b هـ(س) دس$

**مثال ٥:** بدون إجراء عملية التكامل بيّن أن:  $\int_1^2 (س - ٢) دس \geq \int_1^2 (٢ + س) دس$

**الحل:** نفرض أن ق(س) = (س - ٢) و هـ(س) = (٢ + س) = ٣ - س - ٢

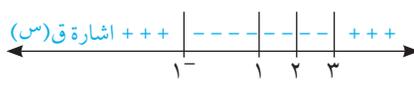
نبحث في إشارة الاقتران ق(س) = س - ٢ - س = ٣ - س

فلاحظ أن ق(س) ≥ ٠ في الفترة [١، ٢]،

أي أن س - ٢ - س = ٣ - س ≥ ٠ (انظر الشكل المجاور)

وبالتالي يكون (س - ٢) ≥ (٢ + س) في الفترة [١، ٢]

أي أن  $\int_1^2 (س - ٢) دس \geq \int_1^2 (٢ + س) دس$



**مثال ٦:** إذا كان ق(س) ≥ ٤ لجميع قيم س ∈ [١، ٣]، فما أكبر قيمة للمقدار  $\int_1^3 هـ(س) دس$ ؟

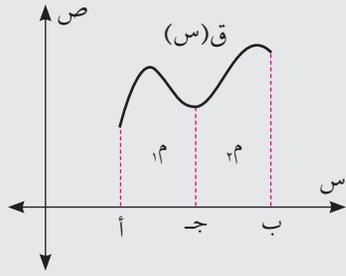
**الحل:** بما أن ق(س) ≥ ٤ لجميع قيم س ∈ [١، ٣]،

فإن  $\int_1^3 ق(س) دس \geq \int_1^3 ٤ دس$

أي أن:  $\int_1^3 ق(س) دس \geq ٨$

إذن المقدار  $\int_1^3 هـ(س) دس = \int_1^3 ٥ دس \geq ٨ \times ٥$

أكبر قيمة للمقدار  $\int_1^3 هـ(س) دس$  هي ٤٠.



إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة ف  $\exists$  ح  
وكان أ، ب، ج أي ثلاثة أعداد تنتمي للفترة ف فإن:

$$\int_a^b \text{ق(س) دس} = \int_a^c \text{ق(س) دس} + \int_c^b \text{ق(س) دس}$$

مثال ٧: عبر بتكامل واحد عما يأتي:  $\int_{-1}^4 \text{ق(س) دس} + \int_4^9 \text{ق(س) دس}$

الحل:  $\int_{-1}^9 \text{ق(س) دس} = \int_{-1}^4 \text{ق(س) دس} + \int_4^9 \text{ق(س) دس}$

مثال ٨: إذا كان  $\int_2^6 \text{ق(س) دس} = 3$ ، وكان  $\int_8^6 \text{ق(س) دس} = 5^-$ ، فجد  $\int_2^8 \text{ق(س) دس}$

الحل:  $\int_2^8 \text{ق(س) دس} = \int_2^6 \text{ق(س) دس} + \int_6^8 \text{ق(س) دس}$

$$= \int_2^6 \text{ق(س) دس} - \int_8^6 \text{ق(س) دس} = 3 - (5^-) = 8$$

أي أن  $\int_2^8 \text{ق(س) دس} = 2 \int_2^6 \text{ق(س) دس} = 16$

مثال ٩: إذا كان ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} 3س^2, \quad 1^- \leq س \leq 2 \\ 2س + 2, \quad 2 < س \leq 4 \end{array} \right\}$ ، فجد الاقتران المكاملت (س)

الحل: ١) عندما  $1^- \leq س \leq 2$  فإن ت(س) =  $\int_{1^-}^س \text{ق(ص) دص} = \int_{1^-}^س 3ص^2 دص = 3س^3 + 1$   
٢) عندما  $2 < س \leq 4$  فإن:

$$\text{ت(س)} = \int_{1^-}^س \text{ق(ص) دص} = \int_{1^-}^2 \text{ق(ص) دص} + \int_2^س \text{ق(ص) دص}$$

$$= 9 + \int_2^س (2ص + 2) دص = 2س^2 + 2س - 3 \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s \geq 1^- , \quad 1 + s^3 \\ 4 \geq s > 2 , \quad 3 - s^2 + 2s^2 \end{array} \right\} = \text{ومنها ت (س)}$$

لاحظ أن ت (س) متصل ، ت (1-) = 0

**نشاط :**

$$\left. \begin{array}{l} 2 < s , \quad 7 - 2s^3 \\ 2 \geq s , \quad 2s^2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فإن ق (س) دس =  $\int_{2^-}^2 2s^2 \, ds + \int_2^3 (7 - 2s^3) \, ds$  (.....) دس

$$= \left[ \frac{2s^3}{3} \right]_{2^-}^2 + \left[ 7s - \frac{2s^4}{4} \right]_2^3 = \text{صفر} + \dots\dots\dots$$

**مثال ١٠ :**

جد  $\int \frac{1}{h^2 + 1} \, dh$  دس

**الحل :**

بإضافة وطرح  $h$  للبسط يصبح  $\int \frac{h - h + 1}{h^2 + 1} \, dh$  دس

$$= \int \left( \frac{h}{h^2 + 1} - 1 \right) \, dh$$

$$= \int \left( \frac{1}{2} \ln|h^2 + 1| - h \right) \, dh$$

$$= \left( \frac{1}{2} \ln|h^2 + 1| - h \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln|h^2 + 1| - h + C \quad (\text{لماذا؟})$$

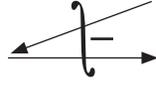
فكر وناقش:

جد التكامل السابق بالتكامل بالتعويض بفرض  $v = h^2 + 1$



مثال ١١: إذا كان  $\sin^2 C = 8$  ،  $\cos^2 C = 5$  ، فجد  $\sin^2 C - \cos^2 C$  دس

الحل : نفرض أن:  $\sin^2 C = م$  ،  $\cos^2 C = ع$



ومنها ينتج أن:  $\sin^2 C - \cos^2 C = م - ع$  دس

$$\sin^2 C - \cos^2 C = م - ع \quad | \quad \sin^2 C = 8 \quad | \quad \cos^2 C = 5$$

$$8 - 5 = م - ع$$

$$3 = م - ع$$

مثال ١٢: إذا كان  $\sin^2 C = \frac{4}{1-2}$  دس  $\cos^2 C = \frac{3}{2}$  فما قيمة الثابت  $A < 1$  ؟

الحل : نجد  $\sin^2 C = \frac{4}{1-2}$  دس بطريقة الكسور الجزئية

نفرض أن  $\frac{4}{1-2} = \frac{ب}{1+س} + \frac{ل}{1-س}$  ، فتكون  $ل = 2$  ،  $ب = -2$  (تحقق من ذلك)

$$\sin^2 C = \frac{4}{1-2} = \frac{ب}{1+س} + \frac{ل}{1-س} = \frac{-2}{1+س} + \frac{2}{1-س}$$

$$\frac{4}{1-2} = \frac{-2}{1+س} + \frac{2}{1-س} \quad | \quad \text{ومنها } 3 = أ \quad (\text{لماذا؟})$$

١ جد قيمة التكاملات الآتية:

أ  $\int_0^{\pi} \text{جا } s \, ds$       ب  $\int_0^2 (1 + \sqrt{s})^2 \, ds$   
 ج  $\int_{\sqrt[3]{-7}}^{\sqrt[3]{7}} (s + 1)(s + 2)(s + 4) \, ds$       د  $\int_{-2}^1 \frac{s^3 - 27}{s^2 + 3s + 9} \, ds$

٢ أثبت بدون حساب قيمة التكامل فيما يأتي:

أ  $\int_1^2 (s^2 + 2) \, ds \leq \int_1^2 (2 - s) \, ds$   
 ب  $\int_2^3 (s^2 + 2) \, ds \leq 0$

٣ عبّر عن كل مما يأتي بتكامل واحد:

أ  $\int_0^7 s^3 \, ds + \int_1^3 s^3 \, ds$   
 ب  $\int_1^2 \sqrt{s+2} \, ds - \int_4^2 \sqrt{s+2} \, ds$   
 ج  $\int_1^2 s^2 \, ds - \int_1^4 s \, ds + \int_4^2 (s+2) \, ds$   
 د  $\int_1^2 (s-1) \, ds + \int_1^2 \frac{s^2-1}{s+1} \, ds$

٤ إذا كان  $\int_1^2 q(s) \, ds = 7$

أ جد  $\int_1^2 (2q(s) - (s^3 + 1)) \, ds$   
 ب احسب قيمة أعلماً بأن  $\int_1^2 2q(s) \, ds = 1$

٥ إذا كان  $\int_1^0 \text{ق}(س) دس = ٨$  فما قيمة؟

أ  $\int_1^0 \text{ق}(س) دس = ٢$

ب  $\int_1^0 \text{ق}(س) دس = ٢ - ٢$

٦ إذا كان  $\int_1^0 \text{ق}(س) دس = ٩$ ، وكان  $\int_1^0 \text{ق}(س) دس = ١٠$ ، فما قيمة  $\int_1^0 \text{ق}(س) دس$ ؟

٧ إذا كان  $\text{ق}(س) = \begin{cases} ١ + س ، ١ \leq س \leq ٢ \\ ٣س^٢ ، ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$ ، فجد قيمة الثابت أ علماً بأن  $\int_1^3 \text{ق}(س) دس = ١٨$

٨ إذا كان  $\int_1^0 \text{ق}(س) دس = ١٢$ ، فما قيمة/ قيم الثابت ب؟

٩ إذا كان  $\text{ق}(س) = |س - ٢|$ ،  $س \in [٥، ٠]$ ، أوجد الاقتران المكامل ت(س).

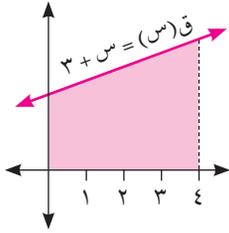
أولاً:

المساحة (Area)



**نشاط ١:** الشكل المجاور يبين مبنى وزارة التربية والتعليم العالي الفلسطينية، يراد طلاء المنطقة المحددة بالألوان فوق مدخل المبنى، فإذا علمت أن المنحني الأزرق يمثل تقريباً منحني الاقتران  $ق(س) = ٦ - ٣س^٢$ ، فكيف يمكننا تحديد المساحة المراد طلاؤها؟

**نشاط ٢:** إذا مثلنا منحني الاقتران  $ق(س) = ٣ + س$  بيانياً في الفترة  $[٠, ٤]$  كما في الشكل المجاور، فإن:



١ المساحة المحصورة بين منحني الاقتران  $ق(س)$  ومحور السينات والمستقيمين  $س = ٠$ ،  $س = ٤$  هي مساحة شبه منحرف طولي قاعدتيه .....، وارتفاعه ٤ وحدات، وتكون قيمتها ..... وحدة مربعة.

٢ قيمة  $\int_0^4 (٣ + س) دس = \dots\dots\dots$

٣ العلاقة بين مساحة شبه المنحرف وناتج التكامل للاقتران  $ق(س)$  في  $[٠, ٤]$  هي .....، ماذا تستنتج؟

الحالة الأولى: مساحة منطقة محصورة بين منحني اقتران ومحور السينات في الفترة  $[أ, ب]$

نظرية (١):

إذا كان  $ق(س)$  اقتراناً قابلاً للتكامل في  $[أ, ب]$  فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحني

الاقتران  $ق(س)$  ومحور السينات في  $[أ, ب]$  تعطى بالعلاقة:  $\int_A^B |ق(س)| دس = م$

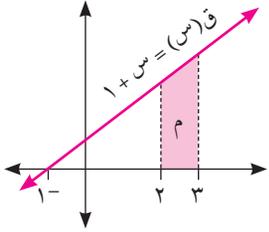


مثال ١ :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١ + س ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣

الحل :

نجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات وذلك بوضع س + ١ = ٠ ومنها س = -١ ∉ [٢، ٣] و س + ١ < ٠ ، ∇ س ∈ [٢، ٣]



$$م = \int_2^3 |ق(س)| دس = \int_2^3 |١ + س| دس = \int_2^3 \left| س + \frac{٢}{٢} \right| دس = \int_2^3 \left( س + \frac{٢}{٢} \right) دس = \frac{٧}{٢} = (٢ - ٣)١ + \frac{٢٢ - ٢٣}{٢} =$$

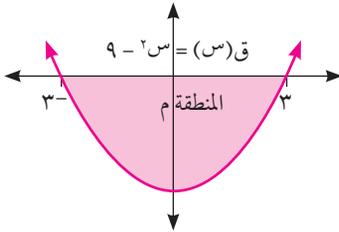
وحدة مربعة.

مثال ٢ :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٩ - س<sup>٢</sup> ومحور السينات

الحل :

نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران ومحور السينات بوضع س<sup>٢</sup> - ٩ = ٠ ومنها س = ±٣



$$م = \int_{-3}^3 |ق(س)| دس = \int_{-3}^3 |(٩ - س^٢)| دس$$

$$= \int_{-3}^3 \left( ٩ - \frac{س^٣}{٣} \right) دس = \frac{١٠٨}{٣} = ٣٦ = \frac{١٠٨}{٣} = \left| \frac{١٠٨}{٣} \right| = \left| \int_{-3}^3 \left( ٩ - \frac{س^٣}{٣} \right) دس \right|$$

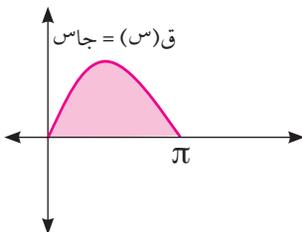
وحدة مربعة

مثال ٣ :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ومحور السينات في [٠، π]

الحل :

نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات بوضع جاس = ٠ ومنها س = ٠ ، π



$$م = \int_0^{\pi} |ق(س)| دس = \int_0^{\pi} |جاس| دس$$

$$= \int_0^{\pi} -جاس دس = ٢ = ١ + ١ = \left| \int_0^{\pi} -جاس دس \right|$$

وحدة مربعة

## الحالة الثانية: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين، أو أكثر:

### نظرية (٢):

إذا كان ق (س)، هـ (س) اقرانين قابلين للتكامل في [أ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنبي ق (س)، هـ (س) في [أ، ب] تعطى بالعلاقة:

$$M = \int_a^b |ق(س) - هـ(س)| دس$$



جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنبي الاقترانين ق (س) = ٨ - س<sup>٢</sup> ، هـ (س) = س<sup>٢</sup>

مثال ٤ :

نجد نقاط التقاطع بين منحنبي الاقترانين ق (س)، هـ (س)

الحل :

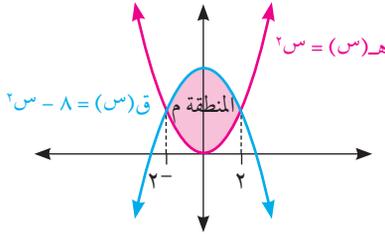
بوضع ق (س) = هـ (س) فتكون ق (س) - هـ (س) = ٠

أي أن ٨ - س<sup>٢</sup> = س<sup>٢</sup> ومنها س = ±٢

$$M = \int_{-2}^2 |ق(س) - هـ(س)| دس$$

$$M = \int_{-2}^2 |٨ - س^٢| دس$$

$$= \left| \int_{-2}^2 (٨ - س^٢) دس \right| = \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$



احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنبي الاقترانين ق (س) = |س| ، هـ (س) = ٢ - س<sup>٢</sup>

مثال ٥ :

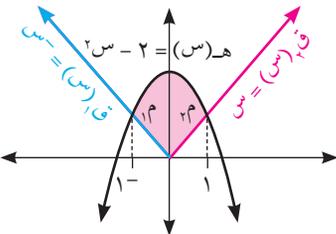
نجد نقاط التقاطع بين منحنبي الاقترانين ق (س)، هـ (س) بوضع ق (س) = هـ (س)

الحل :

$$\left. \begin{aligned} &س \geq ٠ ، س^- \\ &س < ٠ ، س \end{aligned} \right\} = ق(س)$$

عندما س ≥ ٠ ، ٢ - س<sup>٢</sup> = س^- ومنها س = ١^- (لماذا؟)

عندما س < ٠ ، ٢ - س<sup>٢</sup> = س ومنها س = ١ (لماذا؟)



$$\int_{-1}^1 |h(s) - q(s)| ds = 2 = 1 + 1$$

$$\int_{-1}^1 |(s^2 - 2) - (-s^2)| ds = 1$$

$$\int_{-1}^1 |(s^2 + 2) - (2s^2 - \frac{1}{3})| ds = \frac{7}{6} = \text{وحدة مربعة}$$

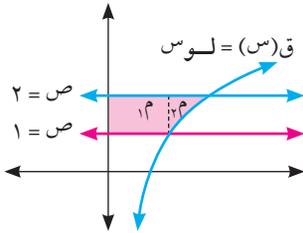
$$\int_{-1}^1 |(s^2 - 2) - (2s^2 - \frac{1}{3})| ds = \frac{7}{6} = \text{وحدة مربعة}$$

$$2 = 1 + 1 = \frac{7}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{7}{6} \times 2 = 1 \times 2 = 2 \text{ ، وبالتالي } 1 = 1 \text{ ، } 1 = 1$$

مثال ٦ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = لوس والمستقيمين: ص = ١ ، ص = ٢ ومحور الصادات.

الحل : نجد نقط تقاطع منحنى الاقتران مع المستقيمين ص = ١ ، ص = ٢ ، كما يأتي:



نضع لوس = ١ ومنها س = هـ

نضع لوس = ٢ ومنها س = هـ٢

$$\int_{1}^2 (1 - 2) ds = -1 \text{ وحدة مربعة}$$

$$\int_{1}^2 (2 - لوس) ds = 2 \int_{1}^2 (2 - لوس) ds = 2(2h - \frac{1}{2}h^2) = 2(2 - \frac{1}{2} \cdot 4) = 2(2 - 2) = 0$$

$$= 2 - 2 = 0 \text{ (لماذا؟)}$$

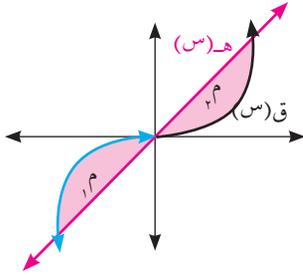
$$= 2 - 2 = 0$$

$$= 2 - 2 = 0$$

مساحة المنطقة المطلوبة = 1 + 1 = 2 وحدة مربعة

مثال ٧ :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = س<sup>٣</sup> ، هـ (س) = س



الحل :

نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقترانين ق (س) ، هـ (س)

بوضع ق (س) = هـ (س) اذن س<sup>٣</sup> - س = ٠

ومنها س = ٠ ، س = ١ ، س = -١

$$م = \int_{-1}^1 |ق(س) - هـ(س)| دس = \int_{-1}^1 (س^٣ - س) دس$$

$$م = \int_{-1}^1 (س^٣ - س) دس + \int_{-1}^1 (س - س^٣) دس$$

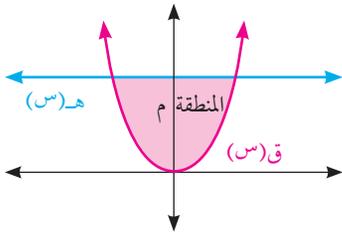
$$\frac{1}{٢} = \text{وحدة مربعة (لماذا؟)}$$



مثال ٨ :

إذا علمت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق (س) = س<sup>٢</sup> ، هـ (س) = جـ

جـ ∃ ح هي ٣٦ وحدة مربعة ، فجد قيمة / قيم جـ .



الحل :

نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقترانين ق (س) ، هـ (س) ،

بوضع ق (س) = هـ (س)

ومنها س<sup>٢</sup> - جـ = ٠ أي أن س = ±√جـ

$$م = \int_{-\sqrt{ج}}^{\sqrt{ج}} |ق(س) - هـ(س)| دس \text{ أي أن:}$$

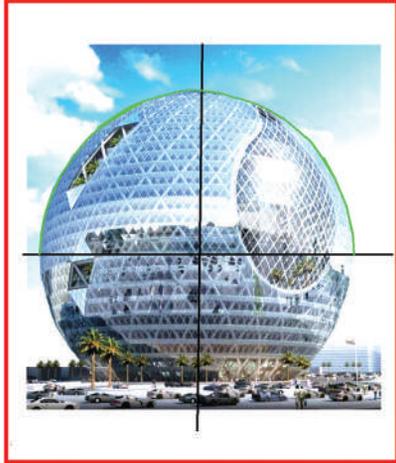
$$٣٦ = \int_{-\sqrt{ج}}^{\sqrt{ج}} (ق(س) - هـ(س)) دس \text{ ومنها } ٣٦ = \int_{-\sqrt{ج}}^{\sqrt{ج}} (ج - س^٢) دس$$

$$٣٦ = ج(\sqrt{ج} + (-\sqrt{ج})) - \frac{٣}{٣} (\sqrt{ج}^٣ - (-\sqrt{ج})^٣)$$

$$\text{ينتج } ٣٦ = \frac{٤ج\sqrt{ج}}{٣} \text{ ومنها } ٩ = ج$$



- ١ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس ومحوري السينات والصادات والواقعة في الربع الأول.
- ٢ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣ - س<sup>٢</sup> والمستقيم المار بالنقطتين أ(٠، ٠)، ب(١، ٢) ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول.
- ٣ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = (س<sup>٢</sup> - ٩)(س<sup>٢</sup> - ١) ومحور السينات والواقعة في الربع الثالث.
- ٤ جد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقترانين ق(س) = هـ<sup>س</sup>، ك(س) = لو<sup>س</sup> والمستقيمين ص = ١، س = ١<sup>-</sup> ومحور السينات.
- ٥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين ق(س) =  $\sqrt{٢ - س}$  حيث  $س \geq ٢$ ، ك(س) = س<sup>-</sup> ومحور السينات.
- ٦ احسب المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س<sup>٢</sup>، هـ(س) = ٤، ك(س) = ٢س



## نشاط :

تمثل الصورة المقابلة أحد المباني الغريبة في العالم، والذي يأخذ شكلاً كروياً. نلاحظ أن قاعدة الاقتران الممثل بالمنحنى المرسوم باللون الأخضر، هي:

$$ق(س) = \sqrt{س^2 - ٢} \text{ نق} \dots \text{ (لماذا؟)}$$

$$١ \text{ حجم المبنى} = \dots \dots \dots$$

$$٢ \text{ قيمة المقدار } \int_{\text{نق}^-}^{\text{نق}^+} \pi ق^2(س) دس = \dots \dots$$

ماذا تلاحظ؟

## نظرية:

إذا كان ق(س) : [أ ، ب] ← ح ، وكان الاقتران ق<sup>٢</sup>(س) قابلاً للتكامل على [أ ، ب] فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

$$\text{دورة كاملة حول محور السينات يعطى بالقاعدة: } \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi ق^2(س) دس$$

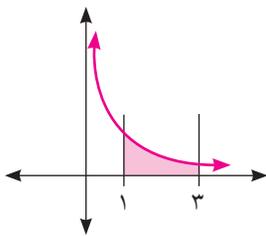


## مثال ١ :

جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة

$$\text{بين منحنى الاقتران ق(س) = } \frac{٢}{س} \text{ ومحور السينات}$$

والمستقيمين س = ١ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات.

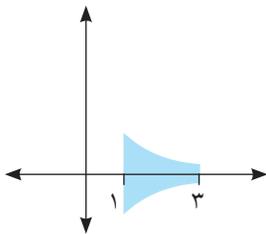


## الحل :

$$\text{ح} = \int_1^3 \pi ق^2(س) دس$$

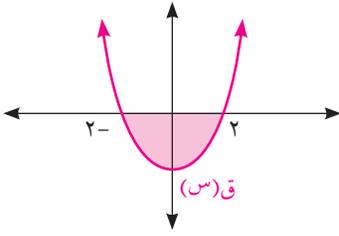
$$\text{ح} = \int_1^3 \pi \left(\frac{٢}{س}\right)^2 دس = \int_1^3 \pi \frac{٤}{س^2} دس$$

$$= \frac{\pi ٨}{٣} = \left(\frac{١^-}{١} - \frac{١^-}{٣}\right) \pi ٤ = \left|\frac{١^-}{س}\right| \pi ٤ =$$



مثال ٢ :

جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> - ٤ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات.



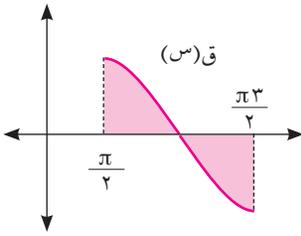
نجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات بوضع ق(س) = ٠ فيكون س<sup>٢</sup> - ٤ = ٠ ومنها س = ±٢

$$ح = \int_{-2}^2 \pi (س)^2 دس = \int_{-2}^2 \pi (س^2 - ٤) دس$$

$$ح = \int_{-2}^2 \pi (س^2 - ٤) دس = \pi \left( \frac{س^3}{٣} - ٤س \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{\pi}{١٥} (١٢ - ٥١٢) \text{ وحدة حجم}$$

مثال ٣ :

جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ومحور السينات في  $\left[ \frac{\pi}{٢}, \frac{٣\pi}{٢} \right]$  دورة كاملة حول محور السينات.



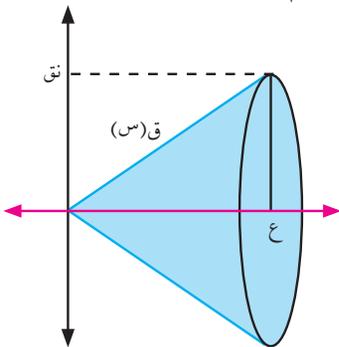
$$ح = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi (س)^2 دس$$

$$ح = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi \cos^2 س دس = \frac{1}{٢} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi (١ + \cos ٢س) دس$$

$$ح = \frac{\pi}{٢} \left( س + \frac{1}{٢} \sin ٢س \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{٣\pi}{٢} \text{ وحدة حجم}$$

الحل :

مثال ٤ : استخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم المخروط الدائري القائم الذي نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع يساوي  $\frac{\pi}{٣} ع^٢$



ينتج المخروط من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة. نفرض أن طول أحد ضلعي القائمة يساوي (نق) والآخر (ع) كما في الشكل المجاور، فيكون وتر المثلث هو الراسم للمخروط.

الحل :

نجد أولاً معادلة وتر المثلث (المستقيم المار بالنقطتين (٠، ٠)، (ع، نق))

$$\frac{ص}{س} = \frac{نق}{ع} \quad \text{إذن } ص = \frac{نق}{ع} س$$

$$ح = \int_a^c \pi \sqrt{ص^2} دص$$

$$= \frac{\pi}{2ع} \int_a^c س^2 دس = \frac{\pi}{2ع} \left[ \frac{س^3}{3} \right]_a^c = \frac{\pi}{3} \frac{ق^3 - ه^3}{2ع} \quad \text{وحدة حجم.}$$

### نظرية:

إذا كان ق<sup>٢</sup>(س)، ه<sup>٢</sup>(س) اقرانين قابلين للتكامل في [أ، ب] وكان منحنى الاقتران ه<sup>٢</sup>(س)، ومنحنى الاقتران ق<sup>٢</sup>(س) يقعان على جهة واحدة من محور السينات، فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بينهما دورة كاملة حول محور السينات هو

$$ح = \int_a^b \pi |ق^2(س) - ه^2(س)| دس$$



جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحني الاقترانين ق<sup>٢</sup>(س) = ه<sup>٢</sup>س، ك<sup>٢</sup>(س) = ه<sup>٢</sup> ومحور الصادات دورة كاملة حول محور السينات.

مثال ٥:

نجد نقاط التقاطع بين منحنبي الاقترانين ق<sup>٢</sup>(س)، ك<sup>٢</sup>(س)

بوضع ق<sup>٢</sup>(س) = ك<sup>٢</sup>(س) ينتج أن ه<sup>٢</sup>س = ه<sup>٢</sup>س ومنها س = ١

$$ح = \int_0^1 \pi |ك^2(س) - ق^2(س)| دس$$

$$ح = \int_0^1 \pi |ه^2 - ه^2س| دس = \pi \left| \frac{ه^2}{2} - \frac{ه^2س^2}{2} \right|_0^1$$

$$= \frac{\pi(ه^2 - ه^2)}{2} \quad \text{وحدة حجم.}$$

الحل:

مثال ٦ :

جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيات الاقترانات ق(س) = س<sup>٢</sup> - ٤س ، هـ(س) = -س<sup>٣</sup> دورة كاملة حول محور السينات.

الحل :

نجد نقاط التقاطع بين منحنىي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) بوضع

$$ق(س) = هـ(س) \text{ ومنها } س^٢ - ٤س = -س^٣$$

$$\text{أي أن } س^٢ - ٤س = ٠ \leftarrow س = ٠ ، س = ٤$$

$$\text{ومنها } \int_0^4 \pi |ق(س) - هـ(س)| دس = \int_0^4 \pi |س^٢ - ٤س - (-س^٣)| دس$$

$$= \int_0^4 \pi |س^٣ - ٤س + س^٢| دس$$

$$= \pi \left| \left( \frac{س^٤}{٤} + \frac{س^٣}{٣} - ٢س^٢ \right) \right|_0^4 = \frac{\pi \cdot ١٠٨}{٥} \text{ وحدة حجم}$$

- ١ احسب حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = ٤ ومحوري السينات والصادات والمستقيم س = ٥ دورة كاملة حول محور السينات.
- ٢ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) =  $\frac{٤}{\sqrt{س}}$  ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٢ دورة كاملة حول محور السينات.
- ٣ استخدم التكامل المحدود لإيجاد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بشبه المنحرف أب ج د حيث أ(٠، ٠) ، ب(٠، ٣) ، ج(١، ٣) ، د(٤، ٠) دورة كاملة حول محور السينات.
- ٤ احسب حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحني الاقترانين ق(س) = س<sup>٢</sup> + ٦ ، هـ(س) = ٥س دورة كاملة حول محور السينات.
- ٥ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = لو<sub>١</sub> س ومحور السينات والمستقيم س = ٥ دورة كاملة حول محور السينات.
- ٦ استخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم الاسطوانة الدائرية القائمة التي نصف قطرها (نق) وارتفاعها (ع) يساوي  $\pi$  نق<sup>٢</sup>ع.
- ٧ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) =  $\frac{٤}{\sqrt{١ - س^٢}}$  ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات.

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت  $\sigma = \{1, \dots, 17, b\}$  تجزئة منتظمة للفترة [أ، ب]، فما قيمة أ؟

أ) صفر (ب) ١- (ج) ٢- (د) ٣-

٢ إذا كان ق(س) = ٥ معرفاً في الفترة [١، ٢] وكانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة [١، ٢] فما قيمة

م(س، ق)؟

أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٢٠ (د) ٥٠

٣ إذا كان ق(س) = ٢س + ١ معرفاً في الفترة [١، ٢] وكانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة [١، ٢] فما

قيمة  $m_{\infty}$  (س، ق)؟

أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) غير موجودة

٤ إذا كان  $\int_1^2$  ق(س) دس = ٦،  $\int_1^4$  (ق(س) + ٤) دس = ٣٠، فما قيمة  $\int_1^2$  ق(س) دس؟

أ) ٨ (ب) ١٦ (ج) ٦٠ (د) ١٢

٥ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا على مجاله وكان  $\int_1^2$  ق(س) دس = ق٢س - ظ٢س + س٢ + ج،

فما قيمة  $\int_1^2$  ق(س) دس؟

أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

٦ ما قيمة  $\int_1^2 \sqrt{2س - ٢س + ١} دس$ ؟

أ)  $\frac{1}{6}$  (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{1}{2}$  (د) ١

٧ إذا كان  $\int_1^2 \frac{س٢ + ٢س + ١}{س + ٢} دس = أ$ ،  $\int_1^2 \frac{س + ١}{س + ٢} دس = ب$ ، فما قيمة أ + ب؟

أ)  $\frac{11}{2}$  (ب)  $\frac{5}{2}$  (ج) ١ (د)  $\frac{1}{2}$

٨ إذا كان  $Q(s) = \int_1^s \frac{ص}{ص^2 + ١} دص + \int_1^٤ ج^٢ س دس$  فما قيمة  $Q(٤)$ ؟

(أ)  $\frac{٤}{٥}$  (ب)  $\frac{٤}{١٧}$  (ج)  $\frac{٨}{١٧}$  (د)  $\frac{١٦}{٦٥}$

٩ إذا كان  $Q(s)$  كثير حدود بحيث  $Q(s) = ٣س - ٢$ ، فما قيمة  $Q(٣) - Q(١)$ ؟

(أ) ٠ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

١٠ إذا كان  $Q(s) = س لـ س$ ، فما قيمة  $\int_{\frac{١}{٣}}^{\frac{١}{٢}} Q(s) دس$ ؟

(أ) ١- (ب) ٠ (ج) ١ (د) هـ

أجب عن الأسئلة الآتية :

٢ إذا كانت  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة  $[١، ٢]$ ، وكان العنصر السابع فيها يساوي ١٢، والعنصر الرابع فيها يساوي ٧، فما قيم الثابتين  $\alpha$ ،  $\beta$ ؟

٣ إذا كان  $Q$ ، هـ اقترانين معرفين في الفترة  $[٢، ١٠]$  وكان هـ  $(س) = ٣س + س$ ، بحيث  $م(س) = ٦$ ، جد  $م(س)$ ، هـ) معتبراً  $س^*$  =  $س$  علماً بأن  $\sigma$  تجزئة منتظمة للفترة  $[٢، ١٠]$

٤ استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد  $\int_1^٣ س دس$

٥ أثبت أن:  $\int_{-٢}^٢ \sqrt{٤ - س^٢} دس \geq ٨$

٦ إذا كان  $Q(s)$  متصلاً على مجاله وكان  $\int_1^٣ Q(ص) دص = س^٢ - \sqrt{س}$ ، فجد  $Q(٤)$ ،  $Q(٤)$ .

٧ إذا كان  $T(s) = \left. \begin{array}{l} ٢س^٢ + ٢جس ، ٢ \leq س \leq ٣ \\ أس - ب ، ٣ > س \geq ٥ \end{array} \right\}$  هو الاقتران المكامل،

للاقتران المتصل  $Q(s)$  في الفترة  $[٢، ٥]$ . جد:

(أ) قيم  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  (ب)  $\int_1^٤ Q(s) دس$

٨ جد التكاملات الآتية:

أ  $\int_1^2 56(2-s)^2(1-s)^\circ \text{ دس}$

ب  $\int_1^2 \text{ لو } \text{ دس}$

ج  $\int_1^2 \frac{5+s}{s-2} \text{ دس}$

د  $\int_1^2 \sqrt{s^2+s^4} \text{ دس}$

هـ  $\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{s^2}} \text{ دس}$

٩ إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [١، ٥] وكان ق(س)  $\leq$  هـ(س)

لكل س  $\in [١، ٥]$ ، أثبت أن:  $\int_1^3 \text{ ق}(س) \text{ دس} \geq \int_1^3 \text{ هـ}(س) \text{ دس}$

١٠ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين ق(س)، هـ(س) فيما يأتي:

أ  $\left. \begin{array}{l} \text{ق}(س) = 2 + س \\ \text{هـ}(س) = س - ٤ \end{array} \right\} = (س) ، \quad س \geq ٠ ، س - ٤ < ٠$

ب  $\text{ق}(س) = ٢ \text{ جاس} ، \text{هـ}(س) = ١$  في الفترة  $[\pi، ٠]$

١١ إذا كان  $\int_1^3 (\text{جاس} + \text{هـ}^س) \text{ دس} = \text{أ}$ ،  $\int_1^3 (\text{جتاس}) \text{ دس} = \text{ب}$ ، فجد قيمة أ + ب.

١٢ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) =  $\frac{1}{٤} س^٢$  والمماس المرسوم له عند النقطة (٤، ٤) ومحور السينات.

١٣ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، والمستقيم ص = ٣ - س والمحورين الإحداثيين.

١٤ انطلق جسيم في خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) بحيث تعطى سرعته ع وفق العلاقة:

ع(ن) =  $\left. \begin{array}{l} ٥ن^٢ ، ٠ \geq ن \geq ٢ \\ ٢٤ - ٢ن ، ٢ > ن \geq ١٢ \end{array} \right\}$

أ فجد: بعد الجسيم عن النقطة (و) عندما ن = ٥ ثوان.

ب متى يتوقف الجسم عن الحركة، وما المسافة المقطوعة عندئذ؟

١٥ إذا كان  $ق(س) = ق(س)$  ،  $ق(س) \neq ٠$  ، جد:

أ  $\int (ق(س))^n دس$  ب قاعدة الاقتران  $ق(س)$

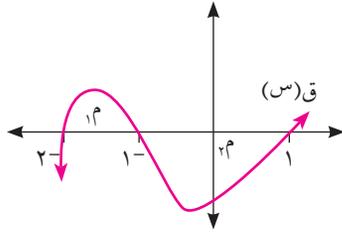
١٦ إذا كان  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{س^2 دس}{(١+س)}$  ، فما قيمة  $\int_0^{\pi} \frac{جتاس دس}{٢(٢+س)}$  بدلالة أ؟

١٧ إذا كان  $ك(٣) = ٣ك(١) = ٦$  ، فما قيمة  $\int_1^3 \frac{س ك(س) - ك(س) س}{س^2} دس$ ؟

١٨ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى  $س ص = ٤ + س^٢$  ومحور السينات والمستقيمين  $س = ١$  ،  $س = ٤$  دورة كاملة حول محور السينات.

١٩ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى  $ص = ١$  ،  $ظاس$  ومنحنى  $ص = ٣$  قاس والمستقيمين  $س = \frac{\pi}{٦}$  ،  $س = \frac{\pi}{٣}$  دورة كاملة حول محور السينات.

٢٠ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين  $ق(س) = س^٣$  ،  $هـ(س) = س$  دورة كاملة حول محور السينات.



٢١ في الشكل المجاور، احسب  $\int_{-1}^2 س ق(س-٢) دس$

علماً بأن  $٤ م = ١٢ م$  وحدة مربعة ،  $١٢ م = ٣ م$  وحدة مربعة

٢٢ أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			اجد التجزئة ومجموع ريمان لاقترانات محددة
			اوظف العلاقة بين التفاضل والتكامل
			اوظف خواص التكامل المحدود في حل المسائل المنتمية

الوحدة

٦

Complex Numbers

الأعداد المركبة

طلبت شركة للاتصالات من مكتب للإعلانات تصميم لوحة إعلانية مستطيلة الشكل محيطها ٨م ومساحتها ٨م<sup>٢</sup>، رفض المكتب ذلك؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الأعداد المركبة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى مجموعة الأعداد المركبة.
- ٢ إيجاد ناتج: الجمع، والطرح، والضرب على الأعداد المركبة.
- ٣ التعرف إلى خصائص العمليات على الأعداد المركبة.
- ٤ التعرف إلى مقياس العدد المركب، ومرافقه، وخصائصهما.
- ٥ إيجاد ناتج قسمة عددين مركبين.
- ٦ حل المعادلات التربيعية في مجموعة الأعداد المركبة.
- ٧ تمثيل العدد المركب بيانياً (بنقطة و متجه).
- ٨ كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.
- ٩ إيجاد الجذور التربيعية للأعداد المركبة.

**نشاط ١:** أراد أبو محمود شراء قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها  $(س^2 - ٥س + ٨)م^2$  وأحد أبعادها  $(س + ٣)م$ . لم يقبل محمود فكرة أبيه وقال له إن هذه القطعة ليست مستطيلة الشكل، كيف عرف محمود ذلك؟

درست في السنوات السابقة مجموعة الأعداد الطبيعية، ثم الأعداد الصحيحة، إلى أن تعرفت أخيراً إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، وقد لاحظت وجود قصور في نظام الأعداد الحقيقية، حيث إننا لا نستطيع إيجاد حلول للمعادلات كافة باستخدام هذا النظام، وخاصةً المعادلة التربيعية التي مميزها سالب، فمن أجل وجود حلول للمعادلة التربيعية في نظام الأعداد الحقيقية، لا بد أن يكون المميز غير سالب؛ لأن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف في هذا النظام.

في القرن السادس عشر قام العالم كاردانو (Gerolamo Cardano) بتعريف نظام جديد في محاولته لإيجاد حلول للمعادلة التربيعية بشكل عام، فقام بتعريف عدد جديد هو  $\sqrt{-١}$  ثم قام بتعريف نظام جديد للأعداد أسماه الأعداد المركبة (ك) والتي لها تطبيقات مهمة في مختلف العلوم، مثل: الهندسة، والفيزياء وغيرها...

**نشاط ٢:** لإيجاد مجموعة حل المعادلة  $س^٣ + س = ٠$  في ك، فإننا نضع  $س^٣ + س = ٠$  ومنها  $س(س^٢ + ١) = ٠$  وينتج أن:  $س = ٠$ ،  $س^٢ + ١ = ٠$  فتكون:  $س^٢ = -١$ ، .....،  $س = \pm \dots$  ومنها  $س = \pm \dots$  مجموعة الحل =  $\{٠، \dots، \dots\}$

### تعريف:

- ١ العدد المركب هو مقدار جبري على الشكل  $ع = س + ص ت$  حيث  $س، ص \in \mathbb{R}$ ،  $ت = \sqrt{-١}$  ويسمى  $س$  الجزء الحقيقي للعدد المركب، ويسمى  $ص$  الجزء التخيلي له.
- ٢ مجموعة الأعداد المركبة =  $\{س + ص ت، س، ص \in \mathbb{R}، ت = \sqrt{-١}\}$ ، ويرمز لها بالرمز ك.



جد الجزء الحقيقي، والجزء التخيلي لكل من:

مثال ١:

١  $ع = ٤ - ت$

٢  $ع = \frac{ت + ٢\sqrt{٧}}{٢}$

١ الجزء الحقيقي للعدد  $ع = ٤ - ت$  هو ٤ ، بينما الجزء التخيلي هو -١

الحل :

٢ الجزء الحقيقي للعدد  $ع = \frac{ت + ٢\sqrt{٧}}{٢}$  هو  $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$

بينما الجزء التخيلي هو  $\frac{١}{٢}$

ملاحظة:



يكون العدد المركب  $ع = س + ص ت$

• عدداً حقيقياً إذا كانت  $ص = ٠$

• عدداً تخيلياً إذا كانت  $س = ٠$

• صفراً إذا كانت  $ص = ٠$  ،  $س = ٠$

أكمل بناء الجدول الآتي:

نشاط ٣:

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	العدد المركب
٠		$\frac{١}{٢}$
		٢ت
	١	$\frac{٢ - ٣ت}{٢}$
		$\sqrt{١٢} - \sqrt{٧}$
	٣	٣ + ت <sup>٧</sup>

**نشاط ٤:** أوجد كل من أشرف و خالد قيمة المقدار  $\sqrt{9} \times \sqrt{4}$

كانت إجابة أشرف كما يلي: أما إجابة خالد فكانت كما يلي:

$$\sqrt{9} \times \sqrt{4}$$

$$\sqrt{9} \times \sqrt{4}$$

$$\sqrt{1 \times 9} \times \sqrt{1 \times 4} =$$

$$\sqrt{9 \times 4} =$$

$$\sqrt{1} \times \sqrt{9} \times \sqrt{1} \times \sqrt{4} =$$

$$36 =$$

$$6 = 2 \times 3 = 6 = 6$$

$$6 =$$

أيهما كانت إجابته صحيحة؟ ولماذا؟

**فكر وناقش:**



إذا كان  $s$ ،  $\exists$  ح فإن  $\sqrt{s} \times \sqrt{s} \neq \sqrt{s \times s}$  دائماً. ولماذا؟

تعلم من التعريف أن  $\sqrt{1} = 1$  ومنها  $1 = 1 \times 1 = \sqrt{1} \times \sqrt{1} = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{1} = 1$  وكذلك فإن  $(\sqrt{t})^3 = t$ ،  $t = 1 = 1^4$  ..... (لماذا؟)

وبشكل عام إذا كانت  $n \exists$  ص  $^+ \sqrt[n]{t} = t^n$  حيث  $m$  هي باقي قسمة  $n$  على  $4$ ،  $0 \leq m < 4$

٣  $t^{-2+4n}$

٢  $\frac{1}{t^{22}}$

١  $t^{99}$

**مثال ٢:** جد قيمة:

١ لاحظ أن باقي قسمة ٩٩ على ٤ يساوي ٣، ومنها فإن  $t^{99} = t^{-3} = -t$

٢  $1^- = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^{22}}$  (لماذا؟)

٣  $t^{-2+4n} = t^{-2} \times t^{4n} = t^{-2} = 1^- = 1^- \times t^{-4n} = t^{-2}$

مثال ٣: جد قيمة  $١ + ت + ت^٢ + ت^٣$

الحل: بالتبسيط والاختصار فإن:

$$١ + ت + ت^٢ + ت^٣ = ١ + ت + ١ + ت = ٢ + ٢ت = ٢(١ + ت)$$

طريقة أخرى: باستخدام التحليل للعوامل:

$$(١ + ت + ت^٢ + ت^٣) = (١ + ت)(١ + ت + ت^٢)$$

$$٠ = (١ + ت)(١ + ت + ت^٢) \text{ (لماذا؟)}$$

## تمارين ٦ - ١

١ اكتب ما يلي على الصورة  $س + ص ت$ :

ج  $\sqrt{٢-٧} \times \sqrt{٨-٧}$

ب  $\sqrt{٢-٧} + \sqrt{٣٢-٧}$

أ  $\sqrt{٢-٧} + ٢$

٢ حدد الجزء الحقيقي، والجزء التخيلي لكل مما يأتي:

ج  $١ - \sqrt{٧} - ١$

ب  $\sqrt{٩-٧}$

أ  $٣ - \frac{٢}{٥} ت$

و  $\frac{١}{٣}$

هـ  $٢ - ت$

د  $\sqrt{٤ - ٩ \times ٧}$

٣ بين أن:  $١ = (١ + ت + ت^٢)^٣ (١ - ت + ت^٢)^٣$

٤ اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

ج  $ت^{٢٧} + \frac{١}{ت^{٢٧}}$

ب  $\frac{١}{ت^{٦٥}}$

أ  $ت^{٤٣}$

٥ أثبت أن:  $١ - \frac{١ + ٢ت^٢ + ٣ت^٢ + ٢ت^٢ + ١}{ت^٣ + ت^٤} =$

نشاط ١:

يستخدم الفيزيائيون الأعداد المركبة في الدارات الكهربائية ذات التيار المتردد لحساب الجهد حيث أن: فرق الجهد يعرف بالقانون  $J = M \text{ ش}$  حيث م: المقاومة، ش: شدة التيار ولإيجاد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد عندما تكون: شدة التيار = ٣ أمبير، المقاومة = ٧ أوم، فإن  $J = M \text{ ش} = ٣ \times ٧ = ٢١$  فولت والآن إذا كانت شدة التيار = ٢ + ٢ ت أمبير، المقاومة = ٩ - ٣ أوم. فإن  $J = M \text{ ش} = (٢ + ٢) \times (٩ - ٣) = \dots$  أكمل

بما أن العدد المركب هو مقدار جبري يُكتب على الصورة  $S + V \text{ ت}$  فإنه يمكن تعريف الجمع والضرب على الأعداد المركبة، من خلال عملية جمع وضرب مقدارين جبريين، ويكون لهما نفس خصائص عمليتي الجمع والضرب للمقادير الجبرية، مع مراعاة خصائص قوى ت.

تساوي عددين مركبين:

تعريف:

يتساوى العددين المركبان  $a + b \text{ ت}$ ،  $c + d \text{ ت}$ ،  $a = c$ ،  $b = d$  إذا وفقط إذا كان لهما الجزء الحقيقي نفسه، والجزء التخيلي نفسه، أي أن  $a = c$ ،  $b = d$



مثال ١:

إذا كان  $٢س + ٣ت = (س + ص) + ص \text{ في ح}$

الحل:

بما أن العددين متساويان، فإن  $٢س = س + ص$  ..... (١)

$٣ = ص$  ..... (٢)

بالتعويض في (١) ينتج أن:  $٣ = س$

## جمع الأعداد المركبة، وطرحها:

تعريف:

إذا كان  $ع_1 = ص_1 + س_1$ ،  $ع_2 = ص_2 + س_2$   
فإن  $ع_1 \pm ع_2 = (ص_1 \pm ص_2) + (س_1 \pm س_2)$



جد ناتج  $(2 - 3) + (3 - 4) ت$

مثال ٢:

الحل:  $(2 - 3) + (3 - 4) = (3 + 2) + (4 - 3) ت$

$$= 7 - 5 ت$$

إذا كان  $ع_1 = 3 - ت$ ،  $ع_2 = 1 + 2 ت$ ،  $ع_3 = 5 - ت$ ، جد:

مثال ٣:

$$① (ع_1 - ع_2) \quad ② (ع_1 + ع_2) - ع_3$$

الحل:  $① ع_1 - ع_2 = (3 - ت) - (1 + 2 ت) = 2 - 3 ت$

$$② (ع_1 + ع_2) - ع_3 = (3 - ت) + (1 + 2 ت) - (5 - ت) = 6 + 4 ت$$

$$= 6 + 4 ت$$

### خصائص عملية الجمع على الأعداد المركبة:

- ١ عملية الجمع عملية مغلقة: أي أنه  $\forall ع_1، ع_2 \exists ع_3$  فإن  $ع_1 + ع_2 = ع_3$
- ٢ عملية الجمع عملية تجميعية:
- ٣ أي أنه  $\forall ع_1، ع_2، ع_3 \exists ك$  فإن  $(ع_1 + ع_2) + ع_3 = ع_1 + (ع_2 + ع_3)$   
العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع على الأعداد المركبة هو الصفر  
حيث  $\forall ع \exists ك، ع + 0 = ع + 0 = ع$
- ٤ لكل عنصر نظير جمعي: إذا كان  $ع \exists ك$  فإن  $ع - ع = 0$  ويكون  $ع + (-ع) = (-ع) + ع = 0$  ويسمى  $-ع$  النظير الجمعي للعدد  $ع$ .
- ٥ عملية الجمع عملية تبديلية:  $\forall ع_1، ع_2 \exists ك$ ،  $ع_1 + ع_2 = ع_2 + ع_1$

## ضرب الأعداد المركبة:

تعريف:

إذا كان  $ع_1 = س_1 + ص_1 ت$  ،  $ع_2 = س_2 + ص_2 ت$  ،  $س_1 ، ص_1 ، س_2 ، ص_2$  ،  $ت \in \mathbb{C}$   
 فإن  $ع_1 ع_2 = (س_1 س_2 - ص_1 ص_2 ت) + (س_1 ص_2 ت + ص_1 س_2 ت)$



نتيجة:

إذا كانت  $ج \in \mathbb{C}$  فإن  $ج(س + ص ت) = ج س + ج ص ت$



مثال ٤ : جد ناتج: ١  $(ت + ٣)(٥ - ٢)$  ٢  $ت(ت + ٥)(٣ - ت)$

مثال ٤ :

١  $(ت + ٣)(٥ - ٢)$

الحل :

$$ت(٢ \times ١ + ٥ \times ٣) + (٥ \times ١ - ٢ \times ٣) =$$

$$١٣ - ١١ = ت$$

(من تعريف عملية الضرب)

٢  $ت(ت + ٥)(٣ - ت)$

$$= (ت - ٣)(ت + ٥)$$

$$= ١٦ + ٢ = ت$$

(لماذا؟)

مثال ٥ : ليكن  $ع_1 = ٣ + ٥ ت$  ،  $ع_2 = ٦ - ٥ ت$  فجد قيمة كل مما يأتي:

مثال ٥ :

١  $ع_١ ع_٢$  ٢  $٣ ع_١ + ٥ ع_٢ - ٢ ت$

٣  $٤ - ت ع_١ = م(٣ - ت)$  ،  $م \in \mathbb{C}$

١  $ع_١ ع_٢ = (٥ + ٣)٥$

الحل :

$$= ١٥ + ٢٥ ت$$

٢  $٣ ع_١ + ٥ ع_٢ - ٢ ت$

$$= ٣(٥ - ٦) + ٥(٥ + ٣) - ٢ ت$$

$$= ٣٣ + ٨$$

$$\begin{aligned} 3 \quad 4 - 4 = 3 - 4 &= (3 + 5) - 4 \\ 4 - 4 = 3 - 4 &= 3 - 4 \\ 4 - 4 = 3 - 4 &= 3 - 4 \\ \text{أي أن } 3 - 4 &= 3 - 4 \\ \text{ومنها } 3 &= 4 \end{aligned}$$

### خصائص عملية الضرب على الأعداد المركبة:

- ١ عملية الضرب مغلقة:  $\forall a, b \in \mathbb{C}, a \times b \in \mathbb{C}$
- ٢ عملية الضرب تجميعية:  $\forall a, b, c \in \mathbb{C}, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- ٣ العنصر المحايد لعملية الضرب هو العدد ١، حيث  $\forall a \in \mathbb{C}, 1 \times a = a \times 1 = a$
- ٤ النظير الضربي:  $\forall a \in \mathbb{C}, a \neq 0$  يوجد  $\frac{1}{a} \in \mathbb{C}$  بحيث  $\frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a} = 1$  ويسمى  $\frac{1}{a}$  النظير الضربي للعدد  $a$  ونرمز له بالرمز  $a^{-1}$
- ٥ عملية الضرب تبديلية:  $\forall a, b \in \mathbb{C}, a \times b = b \times a$

**نشاط ٢:** لإيجاد النظير الضربي  $a^{-1}$  للعدد المركب  $a = 3 + 4i$  باستخدام التعريف

$$\begin{aligned} \text{نفرض } a^{-1} &= s + it \text{ فيكون } a^{-1} \times a = 1 \\ \text{أي أن } (s + it)(3 + 4i) &= 1 \\ \text{ومنها } 3s - 4t &= 1, \quad 4s + 3t = \dots \\ \text{وبحل المعادلتين، ينتج أن } s &= \dots, \quad t = \dots \\ \text{ومنها النظير الضربي } a^{-1} &= \dots \end{aligned}$$

**ملاحظة:**

$$\text{النظير الضربي للعدد المركب } (s + it) \text{ هو } \frac{s - it}{s^2 + t^2} + \frac{it - is}{s^2 + t^2}$$



مثال ٦ : جد النظير الضربي للعدد  $ع = ١ + ٢\sqrt{٢}$  ت

الحل : باستخدام القاعدة السابقة، حيث  $س = ١$ ،  $ص = ٢\sqrt{٢}$ ، وينتج أن:

$$ع^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} + \frac{-ص}{س^٢ + ص^٢}$$

$$ع^{-١} = \frac{١}{٩} - \frac{٢\sqrt{٢}}{٩} \quad (\text{تحقق من ذلك})$$

## تمارين ٦-٢

١ اكتب كلاً مما يأتي على الصورة  $أ + ب ت$

أ  $٤(٢ + ٤ت) + ٥(٣ - ٢ت)$  ب  $(٣ + ٤ت)(٥ - ٣ت)$

ج  $٣(٤ + ٣ت)$  د  $٤ت(٥ - ١ت)$

هـ  $(١ - ت)^٦$

٢ إذا كانت  $س = أ + ب ت$ ، فما قيم  $س$  التي تحقق المعادلة  $س + ٢س ت = ٥(س - ٤ت)$ ؟

٣ جد قيم  $س$ ،  $ص \exists ح$  والتي تحقق المعادلة  $س - ص - ٢ = ص^٢ ت - س ت$

٤ بين أن:  $ع = ت$  تحقق المعادلة  $ع^٥ + ٢ع = ١ - ع$

٥ بين أن:  $ع = ١ - ت$  تحقق المعادلة  $ع^٢ + ٢ع + ٢ = ٠$

٦ إذا كان  $\frac{ت}{٣ + ت} = \frac{١ + ٣ت}{أ}$ ، جد قيمة الثابت  $أ$  حيث  $أ \exists ح$ .

٧ جد  $ع^{-١}$  لكل مما يأتي، واكتبه على الصورة  $أ + ب ت$ :

أ  $٢ + \sqrt{١٢} ت$  ب  $\frac{ت}{٣ - ت}$  ج  $(١ + ت)^{١٣}$

٨ حل النظام الآتي:

$$ع + ١٤٣ = \sqrt[٢]{٨} ت$$

$$ع - ١٤٣ = \sqrt[٢]{٥٠} ت \quad \text{حيث } ع, ت \exists$$

## ٦ - ٣ قسمة الأعداد المركبة (Division Of Complex Numbers)

**نشاط ١:** رسم محمد لوحة مستطيلة الشكل مستخدماً الألوان الزيتية أبعادها  $(28 + 14\sqrt{5})$  سم،  $\frac{14}{2 - 5\sqrt{5}}$  سم. وعندما رآها معلم الرياضيات قال إنها مربعة الشكل. ما رأيك؟

**نشاط ٢:** لإنطاق المقام للمقدار  $\frac{1}{2\sqrt{5}-1}$  نعلم أن مرافق العدد  $2\sqrt{5}-1$  هو  $2\sqrt{5}+1$  نضرب كلا من البسط والمقام بمرافق المقام أي أن  $\frac{1}{2\sqrt{5}-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}-1} \times \frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}+1} = \frac{2\sqrt{5}+1}{20-1}$  ..... (أكمل)

تعتبر عملية القسمة في الأعداد المركبة مشابهة إلى حد كبير لعملية إنطاق المقام، وذلك بكتابة  $\frac{1}{2\sqrt{5}-1}$  على الصورة  $\frac{1}{2\sqrt{5}+1}$  = ص + ص ت

### تعريف:

إذا كان  $ع = ص + ص ت$

١ نسمي المقدار  $\sqrt{ص^2 + ٢ص ت + ٢ت^2}$  مقياس العدد المركب  $ع$  ويرمز له  $|ع|$

أي أن:  $|ع| = \sqrt{ص^2 + ٢ص ت + ٢ت^2}$

٢ ونسمي العدد  $ص - ص ت$  مرافق (conjugate) العدد المركب  $ع = ص + ص ت$

ويرمز له  $\overline{ع}$  أي أن:  $\overline{ع} = ص - ص ت$



٣  $|ع|$

٢  $|ع|$

١  $\overline{ع}$  إذا كان  $ع = ٣ + ٤ت$ ، جد:

**مثال ١:**

١  $\overline{ع} = ٤ - ٣ت$

٢  $٥ = \sqrt{٤ + ٢٣\sqrt{٥}} = |ع| = |٤ + ٣ت|$

٣  $٥ = \sqrt{٤ + ٢٣\sqrt{٥}} = |ع| = |٤ - ٣ت|$  ماذا تلاحظ؟

**الحل:**

نشاط ٣: إذا كان  $\sqrt{2} = 1,4142$  ،  $\sqrt{3} = 1,7320$  ، فإن:

- ١  $\sqrt{5} = 1,4142$
- ٢ ..... =  $\sqrt{2}$
- ٣ ماذا تلاحظ؟ ..... =  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$
- ٤  $\sqrt{2} = 1,4142$
- ٥ ماذا تلاحظ؟ ..... =  $\sqrt{2} - 1$

نشاط ٤: أكمل ما يأتي:

- ١ ..... =  $\sqrt{1 + t}$
- ٢  $\sqrt{t - 1} = \sqrt{t + 1}$
- ٣  $\sqrt{5} = \sqrt{5}$
- ٤ ..... =  $\sqrt{-3}$
- ٥ ..... =  $\sqrt{t}$
- ٦ ..... =  $\sqrt{2t + 2}$

خصائص المقياس، والعدد المرافق:

إذا كان  $a \in \mathbb{R}$  فإن:

- ١  $\overline{\overline{a}} = a$
- ٢  $\overline{a} = \overline{\overline{a}}$
- ٣  $|\overline{a}| = |a|$
- ٤  $|a + b| = |a| + |b|$  ،  $a, b \in \mathbb{R}$
- ٥ إذا كان  $a = \overline{b}$  ،  $b = \overline{a}$  ،  $a, b \in \mathbb{R}$
- ٦ إذا كان  $a, b \in \mathbb{R}$  ، فإن  $|\overline{a}| = |a|$  ،  $|\overline{b}| = |b|$
- ٧ إذا كان  $a, b \in \mathbb{R}$  ،  $a \neq 0$  ، فإن  $\left| \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \right| = \left| \frac{a}{b} \right|$

أكمل الجدول الآتي:

نشاط ٥:

العدد المركب ع	المرافق $\bar{ع}$	المقياس  ع	النظير الضربي $ع^{-١}$
ت + ٢		$\sqrt{٥}$	
ت - $\sqrt{٣}$	ت + $\sqrt{٣}$		
ت <sup>٢</sup>			$\frac{١}{٢} ت^{-١}$

تعريف:

$$\frac{\bar{ع}١ع}{٢ع١ع} = \frac{\bar{ع}١ع}{٢ع٢ع} = \frac{١ع}{٢ع} = \frac{١}{٢}ع \div ١ع \neq ٠, \text{ فإن } ١ع \neq ٠, \text{ ك } ٣ع, \text{ إذا كان } ١ع \neq ٠$$



ملاحظة:

$$\frac{\bar{ع}}{٢|ع|} = \frac{\bar{ع}}{عع} = \frac{١}{ع} = ١ع^{-١} \text{ فإن } ١ع \neq ٠$$



اكتب المقدار  $\frac{٣-٢}{٤+٣} ت$  على الصورة س + ص ت:

مثال ٢:

١ باستخدام الضرب بالمرافق ٢ باستخدام النظير الضربي

١ باستخدام الضرب بالمرافق:

الحل:

$$\frac{(١٢ - ت٩ - ت٨ - ٦)}{(١٦ + ٩)} = \frac{(ت٤ - ٣)(ت٣ - ٢)}{(ت٤ - ٣)(ت٤ + ٣)} = \frac{ت٣ - ٢}{ت٤ + ٣}$$

$$ت \frac{١٧}{٢٥} + \frac{٦}{٢٥} = \frac{ت١٧ - ٦}{٢٥}$$

٢ باستخدام النظير الضربي:

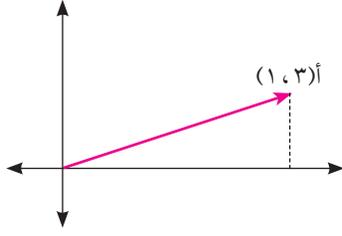
النظير الضربي للعدد ٤ + ٣ ت هو  $\frac{٤}{٢٥} - \frac{٣}{٢٥} ت$

$$\text{إذن: } \frac{ت٣ - ٢}{ت٤ + ٣} = \left( \frac{٤}{٢٥} - \frac{٣}{٢٥} ت \right) (ت٣ - ٢)$$

$$= \frac{ت١٧}{٢٥} + \frac{٦}{٢٥} \text{ (ماذا تلاحظ؟)}$$

## التمثيل البياني والتمثيل القطبي للأعداد المركبة Cartesian and Polar Representation

أولاً: التمثيل البياني للأعداد المركبة:



يمكن تمثيل العدد المركب  $ع = س + ص ت$  بيانياً في المستوى الديكارتي بالنقطة، أ (س، ص)\*، فالعدد المركب  $٣ + ت$  يمثل بالنقطة أ (٣، ١) في المستوى كما في الشكل المجاور. يسمى هذا المستوى الإحداثي بالمستوى المركب (مستوى أرجاند).

فكر وناقش:

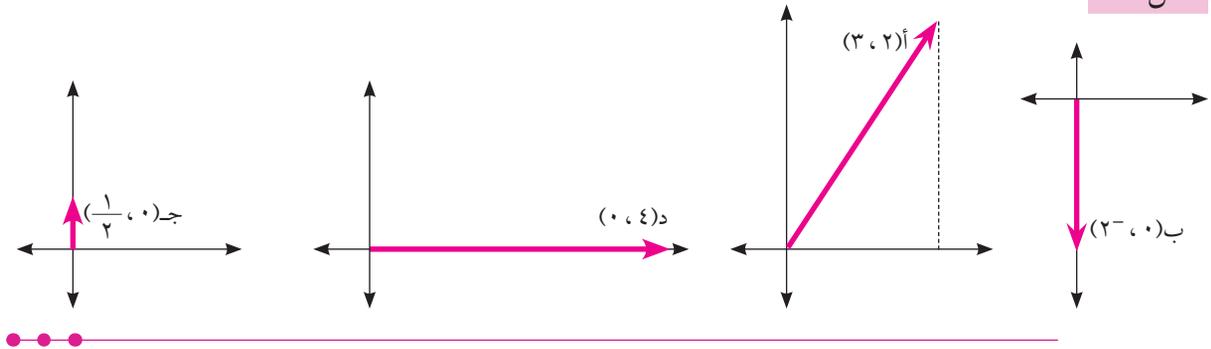


ماذا يمثل كل من المحور الأفقي والمحور الرأسبي في المستوى المركب؟

مثال ٣: مثل بيانياً كلا من الأعداد الآتية في المستوى المركب:

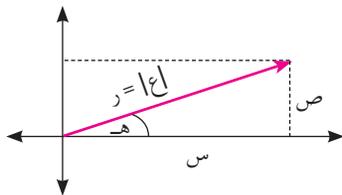
$$٢- ت، ٣ + ت، ٤، \sqrt{\frac{١}{٤}}$$

الحل:



ثانياً: التمثيل القطبي للأعداد المركبة (Complex Plane and Polar Representation)

كما أشرنا أعلاه، بأنه يمكن تمثيل العدد المركب  $ع = س + ص ت$  بيانياً في مستوى الأعداد المركبة بالنقطة، أو الزوج المرتب (س، ص) وتذكر أيضاً أن كل زوج مرتب، يمكن تمثيله بمتجه قياسي بدايته النقطة (٠، ٠) ونهايته النقطة (س، ص) ويصنع زاوية هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (المحور الأفقي) وتسمى هـ السعة الأساسية للعدد المركب،



\* يعتبر الزوج المرتب في الأعداد المركبة متجهاً قياسياً.

حيث ظاهر =  $\frac{ص}{س}$  ،  $0 \leq \theta < 2\pi$  كما في الشكل ويكون طول المتجه =  $r$  ، ويساوي مقياس العدد المركب  $ع = س + ص ت$  حيث  $ر = |ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$  .

نلاحظ من الشكل أعلاه أن  $س = رجتاه$  ،  $ص = رجاه$  وبذلك فإن العدد  $ع = س + ص ت$  يمكن كتابته على الصورة  $ع = ر(جتاه + ت جاه)$  ويسمى هذا التمثيل بالتمثيل القطبي للعدد المركب.

### تعريف:



الصورة القطبية للعدد المركب  $ع = س + ص ت$  ،  $ع \neq 0$  هو  $ع = ر(جتاه + ت جاه)$  حيث  $ر = |ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$  ، ظاهر =  $\frac{ص}{س}$

مثال ٤ : اكتب العدد  $ع = 1 + \sqrt{3} ت$  بالصورة القطبية.

الحل :  $ر = |ع| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$  ،  $جاه = \frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ،  $جتاه = \frac{س}{ر} = \frac{1}{2}$  ومنها  $\theta = \frac{\pi}{3}$

الصورة القطبية للعدد  $ع = 2(جتاه \frac{\pi}{3} + ت جا \frac{\pi}{3})$

مثال ٥ : حوّل العدد المركب  $ع = \sqrt{2} (جتاه \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})$  إلى الصورة  $أ + ب ت$

الحل :  $ع = \sqrt{2} (جتاه \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})$   
 $= (\frac{ت}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) \sqrt{2} = ت + ١$

نشاط ٦ : إذا كان  $ع = ٤ - ٣ ت$  ، فإن  $\overline{ع} = \dots\dots\dots$

مثّل كلا من  $ع$  ،  $\overline{ع}$  هندسياً في المستوى المركب، ماذا تلاحظ؟

١ جد  $|\sqrt{4} + 1|$

٢ إذا كان  $ع = 1 + ت$  ،  $ع = 1 - ت$  ، جد ما يلي:

أ  $|1 - ع|$     ب  $|\frac{1}{ع} - ع|$     ج  $|\frac{٢ع}{١ع}|$     د  $|١٢ع, ٢٢ع|$

٣ إذا كان  $ع = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} ت$  ، جد:

أ  $١ - (ع)$     ب  $(ع٣)١$     ج  $١ - (ع)$     د  $|\frac{ع}{٥}|$

٤ اكتب المقادير الآتية على صورة  $أ + ب ت$ :

أ  $\frac{١ - \sqrt{٢} + ٢}{ت + ٢}$     ب  $\frac{٣ + ٤ ت}{٣ - ٢ ت} + \frac{٣ + ٤ ت}{٥ - ٣ ت}$

٥ أثبت أن:  $|ع - 1| = |ع - 1|$  حيث  $ع \in \mathbb{K}$

٦ مثل الأعداد الآتية في المستوى المركب:

أ  $٣٥ ت$     ب  $٢ - \sqrt{٢}$     ج  $\sqrt{٩} - \sqrt{٤} + \sqrt{٩}$     د  $\frac{١}{٥٢ ت}$

٧ إذا كان  $ع = \sqrt{ع}$  فأثبت أن  $ع$  إما أن تكون عدداً حقيقياً، أو أنها عدد تخيلي.

٨ اكتب ما يأتي على الصورة القطبية  $ع = ر(جتا هـ + ت جاهـ)$ :

أ  $ع = 1 + ت$     ب  $ع = \frac{١}{٢}$     ج  $ع = \frac{١ - \sqrt{٣} + ٢}{٢}$

٩ اكتب ما يأتي على الصورة  $أ + ب ت$ :

أ  $ع = ٧(جتا \frac{٣\pi}{٤} + ت جا \frac{٣\pi}{٤})$     ب  $ع = ٣(جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$     ج  $ع = ٢(جتا \frac{\pi}{٤} - ت جا \frac{\pi}{٤})$     د  $ع = ٣، هـ = \frac{\pi}{٣}$

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١ ما قيمة  $t^{0^7}$ ؟

- أ) ١      ب) ١-      ج)  $t$       د)  $t^{-}$

٢ ما قيمة  $(\sqrt{2} - t) - (t - \sqrt{2})$ ؟

- أ)  $2-$       ب)  $2t$       ج)  $2t-$       د)  $t$

٣ ما قيمة  $\frac{t+4}{t^3-2}$ ؟

- أ)  $\frac{t-5}{13}$       ب)  $\frac{t-5^-}{3}$       ج)  $\frac{t-5^-}{5}$       د)  $\frac{t+5}{13}$

٤ ما قيمة  $\frac{t-2}{t^5} + \frac{t^2+1}{t^4-3}$ ؟

- أ)  $\frac{2^-}{5}$       ب)  $\frac{2^-}{5}$       ج)  $\frac{2-2^-}{5}$       د)  $\frac{2}{5}$

٥ ما قيمة  $\overline{e+t}$ ؟

- أ)  $e+t$       ب)  $e-t$       ج)  $e^-+t$       د)  $e^- - t$

٦ ما الصورة القطبية للعدد  $e = 2 + 2i$ ؟

- أ)  $2\sqrt{2} (\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{تجا } \frac{\pi}{4})$       ب)  $2\sqrt{2} (\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{تجا } \frac{\pi}{4})$

- ج)  $2\sqrt{2} (\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{تجا } \frac{\pi}{4})$       د)  $2\sqrt{2} (\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{تجا } \frac{\pi}{4})$

٧ ما سعة العدد المركب  $(2 + 2i)^2$ ؟

- أ) ٠      ب)  $\frac{\pi}{3}$       ج)  $\frac{\pi}{4}$       د)  $\frac{\pi}{2}$

٢ إذا كان  $ع = ١ + ٢$  ،  $ع = ٢ - ٢$  ، جد ناتج ما يلي:

أ  $|ع|$     ب  $|ع|$     ج  $|ع| + |ع|$     د  $|ع| + |ع|$  (ماذا تلاحظ؟)

٣ جد  $س$  ،  $ص$   $\exists$  بحيث  $س^٢ + س + (١ - ص) = -س^٢$

٤ إذا كان  $ل = \frac{٥(٣ - ت)}{ت + ٣}$  ،  $م = \frac{١١ - ت}{ت + ١}$

أ بيّن أن:  $ل$  ،  $م$  مترافقان.    ب احسب  $ل + م$  ،  $ل$  ،  $م$  ، ثم جد قيمة  $ل + م$

٥ احسب قيمة  $\sqrt[٧]{\frac{ت - ٣\sqrt{٧}}{ت + ٣\sqrt{٧} + ١}}$

٦ أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			اجري عمليات حسابية على الاعداد المركبة
			احل المعادلات واجد الجذور للاعداد المركبة
			اتحرى دقة ومعقولية الحل

# إجابات تمارين الكتاب

## حل الوحدة الأولى: حساب التفاضل

### تمارين ١ - ١

- ١ أ  $\frac{78}{5}$       ب  $\frac{17}{4}$
- ٢  $\frac{4}{\pi}$       ٣ أ = ٤
- ٦ ب = ٢      ٨ أ  $1 + 1 - 2$  هـ      ٤ ١٦      ٥ ١      ٦ ب - ٢

### تمارين ٢ - ١

- ١ أ ٧      ب ٤٣١      ج - ٢٠
- ٢ أ ٩      ب - ٢
- ٣  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$       ٥ ١٦ -
- ٦ أولاً: أ ق (٠) = ٠      ب هـ (٠) غير موجودة

$$\left. \begin{array}{l} \text{ج} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ق} \times \text{هـ} = (\text{س}) \\ \text{هـ} \times \text{ق} = (\text{س}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س}^{-2} \\ \text{س} \end{array} \\ \text{س} \geq \frac{1}{2} \text{ و } \text{س} > 0 \\ \text{س} \geq 0 \text{ و } \text{س} > \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

د  $0 = (\text{ق} \times \text{هـ})$

ثانياً: نستنتج أنه لا يمكن الحكم على وجود أو عدم وجود المشتقة لذلك نعود إلى إيجاد قاعدة الاقتران الأصلي ثم نحدد قيمة المشتقة وهذا لا يتناقض مع القاعدة المذكورة.

- ٧ أ = ٥      ٨ أ = ٢٤      ٩ ١٠

### تمارين ٣ - ١

- ١ أ ٢- جاس - ٢ قاس      ب ٢- قاس ظاس
- ج  $\frac{(1 + \text{س قتاس})}{(\text{قتاس} + \text{ظتاس})}$       د س قاس (٢ + س ظاس)
- ٤ س =  $\pi$  ، س =  $\pi^-$

### تمارين ٤ - ١

- ١ أ ٠ ب ٤ ج  $\frac{1}{6}$  د ٢ هـ  $\frac{5-}{س٢}$  ٢ أ ١ - جاس هـ + هـ  $\frac{1}{س٢}$  ٣ أ ٢ ب ١ ٤ أ ٢ ج ٣ ٤ = س ١

### تمارين ٥ - ١

- ١ (١، ٢) ٢ ص = -٤س +  $\pi$  + ٢ ٣ ١ وحدة مساحة ٤ أ ٨ ، ٣٢ = أ ٥ - ٢٠ م/ث ٦ أ أقصى ارتفاع = ٤٥ م ب السرعة = -١٠ م/ث

### تمارين ٦ - ١

- ١ أ  $\frac{1-}{9}$  ب ٢- ج  $\frac{5-}{٢}$  د  $\pi^-$  هـ ٠ ٢  $١ - \frac{1}{هـ}$  ٣ أ (١ + س) هـ  $\frac{٣س٣ - ٢س٦}{س٣ - ٢س٣}$  ٤ ق (١) = ٤ ٥ - ٣٠ ٦ ١٤ ٨ أ قا ٢س ب  $\frac{٦-}{٥}$

### تمارين ٧ - ١

- ١ أ  $\frac{٣س٣ - ٢س}{س + ٤ص}$  ب  $\frac{٢-}{٥} س (١ - س)$  ج  $\frac{١}{(جتا(س + ص) - ١)}$  د  $\frac{٢ص-}{س٢}$  ٢ ص =  $\frac{١-}{٣} س + ٦$  ، ص =  $\frac{١}{٣} س + ٥$  ٣ أ ٣ ٥  $(\sqrt{٣} - \frac{١-}{٢})$  ،  $(\sqrt{٣} - \frac{١-}{٢})$  ٦ ص = -١ ٧ ص = -٥



## حل الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل

### تمارين ٢ - ١

- ١ أ ج = ٢
- ب ج = ١
- ج ج = ١
- د ج =  $\frac{\pi}{3}$  لا يحقق
- ٢ أ ج = ١
- ب ج = صفر
- ج ج =  $\frac{25}{4}$
- ٣ أ = ١ ، ب = ٦ ، ج =  $\frac{5}{2}$  (ترفض) ، ج =  $\sqrt{\frac{13}{3}}$  (تقبل)
- ٥ قيمة ج =  $\frac{\pi}{4}$  ،  $\frac{\pi}{4}$  ومنها نقط التماس هي  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  ،  $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$

### تمارين ٢ - ٢

- ١ أ ق (س) متناقص في  $[-2, 0]$  ،  $[0, 2]$  ،  $[5, 2]$  و متزايد في  $[2, 0]$
- ب ق (س) متزايد في  $[\pi, 0]$
- ج ق (س) متناقص في  $[-1, \infty]$  و متزايد في  $[1, \infty]$
- د ق (س) متناقص في  $[0, 9]$  و متزايد في  $[9, 0]$
- ٢ ق (س) متزايد على ح<sup>+</sup>
- ٣ ق (س) متزايد في  $[0, 1]$  ، كذلك ق (س) متزايد في  $[2, 1]$
- ٤ ق (س) متزايد في  $[0, \infty]$  ، كذلك ق (س) متناقص في  $[-\infty, 0]$
- ٥ ل (س) متزايد في  $[2, \infty]$  ، متناقص في  $[-\infty, 2]$
- ٧ ق (س) متناقص في  $[0, \frac{\pi}{2}]$



- ٢ أ  $(٠, ٠) = ((٠) ق, ٠)$  نقطة انعطاف
- ب  $(٠, \frac{\pi}{٢})$  ،  $(٠, \frac{\pi}{٢})$  نقط انعطاف
- ج يوجد نقطة انعطاف هي  $(٠, ٥)$
- ٣ أ  $٠ = (٠) ق$  قيمة صغرى محلية ،  $ق(-٤) = ٣٢$  قيمة عظمى محلية
- ب يفشل اختبار المشتقة الثانية ،  $ق(-٦) = ٠$  قيمة صغرى محلية وهي صغرى مطلقة
- ٤  $٣ = أ$
- ٥ أ  $ق(س)$  مقعر إلى أعلى في  $٣[$  ،  $∞[$  ومقعر إلى أسفل في  $∞-$  ،  $٣[$  ،  $٣)$  ،  $ق(٣)$  نقطة انعطاف.
- ب  $ق(٠)$  قيمة عظمى محلية ،  $ق(٦)$  قيمة صغرى محلية
- ج  $ق(س)$  متزايد في  $∞-$  ،  $٠[$  كذلك في  $٦[$  ،  $∞[$  ومتناقص في  $٠[$  ،  $٦[$
- ٦  $ق(س) = -س^٣ + ٦س^٢ - ١٥س + ١٥$
- ٧  $ع(١) = ٢٤٨$
- ٨ أ قيم  $س$  التي يكون للاقتران عندها قيمة قصوى هي  $س = ١$  ،  $س = ٢$  ،  $س = ٣$  ،  $س = ٢$
- ب  $ق(١)$  قيمة صغرى محلية و  $ق(-٢)$  قيمة عظمى محلية ،  $ق(٢)$  قيمة عظمى محلية ،  $ق(-٣)$  قيمة صغرى محلية
- ج  $ق(س)$  متزايد في  $[-٣, ٢]$  كذلك في  $[١, ٢]$  ومتناقص في  $[-٢, ١]$  ،  $٢]$

## تمارين ٢ - ٥

- ١  $س = ٢٠ م$  ،  $ص = ٢٠ م$  ، أكبر مساحة =  $٤٠٠ م^٢$
- ٢  $نق = ٤ سم$  ،  $ع = ١٢ سم$
- ٣  $و = (\sqrt{٣}, ٢)$
- ٤  $ب = ١٠$  ،  $أ = ١٠-$
- ٥ الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة
- ٦  $نق = \frac{٨}{٣}$  ،  $ح = \frac{\pi ٢٥٦}{٩ سم^٣}$
- ٧ أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف هي  $\sqrt[٣]{٢٧} سم^٢$
- ٨  $س = ٤$

١

١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	رقم الفقرة
أ	ج	ج	د	ج	أ	د	أ	ج	د	ب	ج	رمز الاجابة

٣ ق(س) متناقص في  $[-\infty, -3]$ ،  $[1, \infty]$

ق(س) متزايد في  $[-3, 1]$

ق  $(-3) = \frac{1}{6}$  قيمة صغرى محلية

ق  $(1) = \frac{1}{4}$  قيمة عظمى محلية

٤ أ = ٤

٥ أ س = -2، -1، 3، 6

ق  $(3) = -22$  صغرى مطلقة، ق  $(6) = 59$  عظمى مطلقة

ب ق مقعر إلى أسفل في  $[-2, 1]$ ، ومقعر إلى أعلى في  $[1, 6]$

ج  $(1, 6)$  نقطة انعطاف، ظل زاوية الانعطاف = ق  $(1) = -12$

٦ أ منحنى ق(س) مقعر إلى أعلى في  $[-\infty, -2]$  كذلك في  $[1, \infty]$  ومقعر إلى أسفل في  $[-2, 1]$

ب س = -2، س = 1

٨ ع  $= \frac{40}{3}$  سم، نق  $= \frac{2\sqrt{20}}{3}$

١١ ق(س)  $= \frac{1}{4}س^3 - 3س + 3$

١٢ طول المستطيل = 100 م، وعرض المستطيل =  $\frac{200}{\pi}$  م

١٣ طول ضلع المثلث الأول 3 سم، طول ضلع المثلث الثاني 3 سم

## حل الوحدة الثالثة: المصفوفات

### تمارين ٣ - ١

- ١ أ  $\begin{bmatrix} 750 & 600 & 800 \\ 650 & 450 & 900 \end{bmatrix}$  من الرتبة  $2 \times 3$  ب إنتاج فرع طولكرم
- ٢ أ  $3 \times 4$  ب ٢ ج ٣- ٥ ب  $\begin{bmatrix} 6 & 2- \\ 3- & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  ٤  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  ٣ س = ٣

### تدريبات:

- ١  $\begin{bmatrix} 3 & 11- & 14 \\ 10- & 8 & 1- \end{bmatrix}$  ،  $\begin{bmatrix} 16 & 5- & 0 \\ 12 & 17 & 4 \end{bmatrix}$
- ٢ س =  $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 10- & 1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$  ٣ أ  $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1- \\ \frac{3-}{2} & \frac{1-}{2} \end{bmatrix}$  ٤ س = ٦ ، ص = ٣
- ٥ س =  $\begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 3- & 2 \end{bmatrix}$  ، ص =  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4- & 2- \end{bmatrix}$

### تمارين ٣ - ٢

- ١ أ ب  $5 \times 3$  ب  $\begin{bmatrix} 30- & 6 & 11- \\ 29 & 18 & 35 \\ 10 & 12 & 18 \end{bmatrix}$  ٢ أ  $\begin{bmatrix} 27 & 24 & 40 \\ 11 & 12- & 6- \end{bmatrix}$  ج  $\begin{bmatrix} 25 & 6 \\ 9- & 10- \end{bmatrix}$
- ٣ س = ٢ ، ص = ٣ ٦ مجموعة الحل =  $\emptyset$  ٧ أ  $\begin{bmatrix} 1- \\ 2 \end{bmatrix}$

### تمارين ٣ - ٣

- ١ أ صفر  
 ٢ س = ٦ ، س = ٣-  
 ٥ - س ٥ + س ٢ + ص ١١ = ٠  
 ٦ أ ٢- ص ١ + ص ٢  
 ب إخراج عامل مشترك من كل من الصفين الأول والثاني فتساوى المدخلات المتناظرة في الصفين فتصبح قيمته صفرا.  
 ج تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة المحدد تضرب بـ (١-)
- ١ ج ١٢٥  
 ٤ س = ٣±
- ٢ ب ٣٢  
 ٣ - ٢٦

### تمارين ٤ - ٣

- ١ أ لها نظير ضربي  
 ٢ في المصفوفة أ تكون قيم ك = ٠ ، ٢ ، وفي المصفوفة ب تكون قيم ك = ٢ ، ٢-  
 ٣ أ  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$   
 ٤ س = ٥  
 ٥ س . ص = ٤- ، ٢-  
 ٦  $\begin{bmatrix} ٦- & ٨ \\ ٥ & ٥- \end{bmatrix}$   
 ب لها نظير ضربي.  
 ج ، د ليس لها نظير ضربي.
- ٣ ب  $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

### تمارين ٥ - ٣

- ١ أ س = ٣ ، ص = ٠  
 ٢ أ س = ٤ ، ص = ١-  
 ٣ س = ٤ ، ص = ١  
 ٤ أ س = ١ ، ص = ٢  
 ب س = ١ ، ص = ١  
 ب س = ٤- ، ص = ١  
 ب ع = ٣ ، ص = ١- ، س = ٢

١

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	رقم الفقرة
أ	د	ب	د	ب	أ	د	جـ	جـ	جـ	رمز الإجابة

٢ س = ٥ ، ص = ٣

$$\begin{bmatrix} \frac{٥-}{٤} & ١ \\ \frac{٣-}{٤} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \text{ جـ}$$

ب ١٨-

٣ أ  $\begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$

٤ س أي عدد حقيقي.

٥ أ س = ٥- ، ص = ٤ ب س = ١ ، ص =  $\frac{١-}{٤}$

٦ س = ٤ ، ص = ٣-

٨ أ ن = ٦ ، ك = ٢ ب س = ١ ، ص = ١

٩  ${}^٢(١-١) = {}^١(٢١)$

١٠ س = ٢- ، ص = ١

١١ ع = ١ ، ص = ٢- ، س = ٣

١٢ س =  $٥ \pm$

## حل الوحدة الرابعة: التكامل غير المحدود، وتطبيقاته

### تمارين ومسائل ٤ - ١

- ١ أ اقتران أصلي
- ب ليس اقترانا أصلياً
- ج اقتران أصلي
- ٢ هـ (١) = ٤
- ٣ (٣ - هـ) = (٤) = ١٤
- ٤ أ = ٢
- ٥ أ = ٢ ، ج = -٢

### تمارين ومسائل ٤ - ٢

- ١ أ ٨س + ج
- ب  $\frac{7}{3}س - ٢س - \frac{1}{3}س + ج$
- ج  $\frac{2}{5}س + \frac{2}{5}س + ج$
- د  $\frac{5}{2}س + قاس + ج$
- هـ  $\frac{3}{5}س + \frac{3}{4}س + \frac{4}{3}س + س + ج$
- و  $٢س + ٥س + \frac{1}{س} + ج$
- ز ظاس + ج
- ح  $٥هـ + ٢لوس + ج$
- ٢ ق (س) = جاس - هـ
- ٤ ق (١-) =  $\frac{١٥-}{٢}$

## تمارين ومسائل ٤ - ٣

- ١ ص = ق(س) = س<sup>٣</sup> - س<sup>٢</sup> + ١
- ٢ ق(س) = س<sup>٣</sup> + ٣
- ٣ ق(س) = ٢س<sup>٢</sup>
- ٤ ق(س) = -جتاس + س<sup>٢</sup> - ٢س
- ٥ ع(٥) =  $\frac{٣١}{٢}$  م/ث، ف(٥) =  $\frac{٢١٥}{٦}$  متراً
- ٦ ص =  $\frac{٢}{٣}$ س<sup>٢</sup> +  $\frac{٣}{٢}$ س<sup>٢</sup> - ٢
- ٧ ن = ٩ ثانية
- ٨ ص +  $\frac{٢}{٢}$ ص = لو<sub>٣</sub>|س| + ٤

## تمارين ٤ - ٤ أ

- ١ أ - (س + ٢)<sup>٤</sup> + ج
- ب  $\frac{١}{٢}$ جتا(س<sup>٢</sup> - ٢س) + ج
- ج  $\frac{٢(لو<sub>٣</sub>س)}{٢}$  + ج
- د  $\frac{٢}{٧}$ (س + ١) -  $\frac{٤}{٥}$ (س + ١) +  $\frac{٣}{٢}$ (س + ١) + ج
- هـ  $\frac{٩(١-س)}{٩}$  +  $\frac{٦(١-س)}{٨}$  +  $\frac{٩(١-س)}{٧}$  + ج
- و  $\frac{٣}{٨}$ س +  $\frac{١}{٤}$ جا٢س +  $\frac{١}{٣٢}$ جا٤س + ج
- ز ظاس - قاس + ج
- ح لو<sub>٣</sub>|١ + ه<sup>٣</sup>| + ج
- ٢ أ  $\frac{٢-}{٣}$ ( $\frac{١}{س} + ١$ ) + ج
- ب جتا  $\frac{١}{س}$  + ج
- ج  $\frac{٥}{٢}$ س -  $\frac{١}{٤}$ جا٢س - ظتاس + ج
- د  $\frac{١-}{١٢}$ ( $\frac{٢}{س} + ١$ ) + ج
- هـ  $\frac{٣}{١٦}$ (س + ٤) + ج
- و  $\frac{ظا٢س}{٢}$  + لو<sub>٣</sub>|جتاس| + ج

## تمارين ٤ - ٤ ب

١ أ  $\frac{س^2}{٢} - لو^2 س - \frac{س^2}{٤} + ج$

ب  $س ظاس + لو جتاس + ج$

ج  $٣س لو (س + ٢) - ٣س + ٦ لو (س + ٢) + ج$

د  $\frac{١^-}{٢} س جتاس + \frac{١}{٤} جا٢س + ج$

هـ  $\frac{١}{٢} س^٢ هـ س^{١+٢} - \frac{١}{٢} هـ س^{١+٢} + ج$

و  $٢- \sqrt{١+س} جتا \sqrt{١+س} + ٢ جا \sqrt{١+س} + ج$

ز  $\frac{٢- س هـ س}{١+س} + ٢ هـ س + ج$

حـ  $\frac{٢- هـ س جتاس}{٥} + \frac{١}{٥} هـ س جا٢س + ج$

ط  $هـ س قناس + ج$

ي  $\frac{١^-}{س} جا س - جتا \frac{١}{س} + ج$

## تمارين ٤ - ٤ ج

١ أ  $\frac{٥}{٤} لو^٢ |س - ٣| + \frac{١^-}{٤} لو^٢ |س + ١| + ج$

ب  $س + \frac{١١^-}{٥} لو^٢ |س + ٣| + \frac{٦}{٥} لو^٢ |س - ٢| + ج$

ج  $\sqrt{٢} س + \frac{٨}{٣} لو^٢ (٢ - \sqrt{س}) - \frac{٢}{٣} لو^٢ (١ + \sqrt{س}) + ج$

د  $٢- لو^٢ |س| + \frac{٣}{٢} لو^٢ |س - ١| + \frac{١}{٢} لو^٢ |س + ١| + ج$

هـ - لو<sub>٣</sub> | ق<sub>٣</sub> + ظ<sub>٣</sub> | + جـ

و  $\frac{1^-}{٢} | لو_{٣} | - لو_{٣} | + \frac{1}{٢} | لو_{٣} | + لو_{٣} | + جـ$

ز ٢ لو<sub>٣</sub> | س - | ١ - | ٣ لو<sub>٣</sub> | س + | ٢ + | جـ

حـ  $\frac{1^-}{٨} | لو_{٣} | + ٤ | ج<sub>٣</sub> | + \frac{1}{٨} | لو_{٣} | - ٤ | ج<sub>٣</sub> | + جـ$

ط  $\frac{1}{٢} | لو_{٣} | ظ<sub>٣</sub> - | ١ - | \frac{1}{٢} | لو_{٣} | ظ<sub>٣} + | ١ + | جـ</sub>$

ي  $\frac{1}{٣} (لو_{٣} | س^٣ - لو_{٣} | س + | ١ + | جـ$

٢  $\frac{1}{٦} | ص = (١ + \sqrt{٧})^٢ - (١ + \sqrt{٧}) | لو_{٣} | + | ١ + \frac{٥}{٣}$

### تمارين عامة: الوحدة الرابعة

١

٥	٤	٣	٢	١	رقم الفقرة
ب	ب	جـ	د	جـ	رمز الاجابة

٣ ق (س) =  $\frac{س^٤}{١٢} - ٣ | ج<sub>٣</sub> | + ٦ | س + ٢$

٤ ف (٣) =  $٢٢ + ٣ | لو_{٣} | ٤$  متراً

٥ ص =  $\frac{٤٧}{٤٨} + \frac{١^-}{٦(٢س^٣ - ٤س)}$

$$٦ \quad ١ \quad \frac{1}{3} (س^٢ - ٣) + ج$$

$$٢ \quad \frac{1}{9} (لور^٩س - لور^٩س + ١) + ج$$

$$٣ \quad ٢\sqrt{س} \sqrt{ظا} + ٢لور^٢\sqrt{جتا} + ج$$

$$٤ \quad \frac{1}{3} قا(س + ١) + ج$$

$$٥ \quad (س + ٢) جاس + ٢س جتاس - ٢جاس + ج$$

$$٦ \quad س لور^٢(س - ١) - ٢س + لور^٢س + ١ - لور^٢س - ١ + ج$$

$$٧ \quad لور^٢س + ج$$

$$٨ \quad -ظاس + لور^٢س + ١ - لور^٢ظاس + ١ + ج$$

$$٩ \quad \frac{1}{2} جا٢س + ج$$

$$١٠ \quad \frac{1-}{8} (قتاس + ظتاس) + ج$$

$$١١ \quad \frac{1}{49} (س^٧ - ٦) + ج$$

$$٧ \quad ا = ١$$

$$٨ \quad ص = \frac{-لور^٢س}{س} + \frac{١}{س} + \frac{٢}{ه}$$

$$٩ \quad ق(س) = \frac{جاس}{س}$$

## حل الوحدة الخامسة: التكامل المحدود، وتطبيقاته

### تمارين ١ - ٥

- ١ أ صفر      ب  $[1, \frac{1}{2}]$       ٢ ٢      ٣ ٣٠-  
 ٤  $\frac{1}{هـ} + ٧$       ٥ أ=٢      ٦ أ=-٤ ، ب=٢٠  
 ٧  $(\sqrt[3]{٢} + \sqrt{٧} + ١) \frac{\pi}{٢٤}$

### تمارين ٢ - ٥

- ١ ١٢- -  $\frac{٤٠}{ن}$       ٣ ب=٦      ٤ أ  $\frac{٥}{٢}$       ٥ ب ٥-

### تمارين ٣ - ٥

- ١ أ ٧٦      ب  $\frac{١٥-}{٨}$       ج ١      د ٩٦  
 ٢ ت (س) = س - لو (س + ١)  
 ٣ أ = ٨-      ب = ٣  
 ٤ ج =  $\frac{٣-}{٢}$  ، ق (٢) =  $\pi + ١$   
 ٥ أ = ١ - هـ-٢      ٦  $\frac{١}{٢٤}$

### تمارين ٤ - ٥

- ١ أ  $\frac{\pi}{٢}$       ب  $\frac{١}{٢} - ٢هـ + \frac{٤}{٢}$   
 ج  $\sqrt[٣]{١٠}$       د  $\frac{٢١-}{٢}$   
 ٣ أ  $\sqrt[٧]{س^٣ دس}$       ب  $\sqrt[٤]{٢ + س} دس$   
 ج  $\sqrt[٧]{(س + ٤) دس}$       د  $\sqrt[٧]{(س - ١) دس}$   
 ٤ أ ١٨-      ب أ =  $\frac{١}{١٤}$

$$٥ \text{ أ } ١٦ \quad \text{ب } ٨-$$

$$٦ \text{ ب } ٢$$

$$٧ \text{ ج } \frac{٤-}{٣}$$

$$٨ \text{ د } \text{ب} = \frac{١-}{٢}, ٥$$

$$٩ \text{ هـ} \left. \begin{array}{l} \text{ت (س)} = \\ \left. \begin{array}{l} ٢ \text{ س} - \frac{١}{٢} \text{ س}^٢, \text{ س} \in ]٢, ٠[ \\ \frac{١}{٢} \text{ س}^٢ - ٢ \text{ س} + ٤, \text{ س} \in ]٥, ٢[ \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

### تمارين ٥ - ٥ أ

$$٢ \text{ أ } \frac{٥}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

$$١ \text{ ب } ١ \text{ وحدة مساحة}$$

$$٤ \text{ ج } \text{هـ} - \frac{١}{\text{هـ}} \text{ وحدة مساحة}$$

$$٣ \text{ د } \frac{٣٠٤}{١٥} \text{ وحدة مساحة}$$

$$٦ \text{ هـ } \frac{٢٨}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

$$٥ \text{ و } \frac{١٠}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

### تمارين ٥ - ٥ ب

$$٢ \text{ أ } \pi ٣٢ \text{ وحدة حجم}$$

$$١ \text{ ب } \pi ٨٠ \text{ وحدة حجم}$$

$$٤ \text{ ج } \pi \frac{٦٢}{١٥} \text{ وحدة حجم}$$

$$٣ \text{ د } \pi ٢١ \text{ وحدة حجم}$$

$$٧ \text{ هـ } \pi ٨ \text{ لو } \frac{٣}{٢} \text{ وحدة حجم}$$

$$٥ \text{ و } \text{ح} = \pi (٢ - \text{هـ}) \text{ وحدة حجم}$$

١

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	ب	أ	ج	أ	د	ج	ب	ب	ج	ج

٢ أ = ٢ ، ب = ٢٢

٣ ٧٤

٦ ق(٤) =  $٧ \frac{٣}{٤}$  ، ق(٤) =  $\frac{٦٥}{٣٢}$

٧ أ = ٢- ، ب = ٨ ، ج = ١٨

٨ أ  $\frac{١}{٣}$  ب هـ  $١٤$  ج  $٥ \text{ لو} - \frac{٣}{٥} + ٦ \text{ لو} - ٢$

هـ  $\frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٥}}{٢}$

د  $\frac{١}{٣} (١ - \sqrt[٣]{٥})$

١٠ أ  $\frac{١٣}{٣}$  وحدة مساحة ب  $٤ - \frac{\pi}{٣} - \sqrt[٣]{٤}$  وحدة مساحة

١١ أ + ب = ٢ + هـ - ٣

١٢  $\frac{٤}{٣}$  وحدة مساحة

١٣  $\frac{٧}{٢}$  وحدة مساحة

١٤ أ ف(٥) =  $\frac{١٩٣}{٣}$  م ب ن = ١٢ ،  $\frac{٣٤٠}{٣}$  وحدة مسافة

١٥ أ  $\frac{١}{ن} (ق(س))^٢ + ج$  ب ق(س) =  $\pm \text{أه}^٣$

١٦ أ  $١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢ + \pi}$  ب ١٧ صفر

١٨  $٥٧\pi$  وحدة حجم ب ١٩  $\frac{٢\pi}{٢}$  وحدة حجم

٢٠  $\frac{\pi ٨}{٢١}$  وحدة حجم ب ٢١ ٤-

## حل الوحدة السادسة: الأعداد المركبة

### تمارين ١ - ٦

١ أ  $2\sqrt{7} + 2$  ت  $2\sqrt{7} + 2$  ب  $2\sqrt{7} + 5$  ج  $2 + 4 = 0$  ت

٢

$\frac{1}{3}$	٠	٠	١	٠	٣-	الجزء الحقيقي
٠	٢-	٦	١-	٣	$\frac{2}{5}$	الجزء التخيلي

٤ أ  $-$  ت ب  $-$  ت ج  $٠$

### تمارين ٢ - ٦

١ أ  $23 + 6$  ت ب  $29 - 3$  ج  $117 - 44$  ت د  $96 - 40$

٢ س  $3 + 1 = 3$  ت

٣  $(1, 1), (2, 4)$

٦  $10 = 10$

٧ أ  $\frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{8}$  ت ب  $3 + 1$  ج  $\frac{1}{128} + \frac{1}{128}$  ت

٨  $2\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$  ت

### تمارين ٣ - ٦

١  $5\sqrt{}$

٢ أ  $18\sqrt{}$

د ٤

ج ١

ب ١

د  $\frac{1}{5}$

ج ١

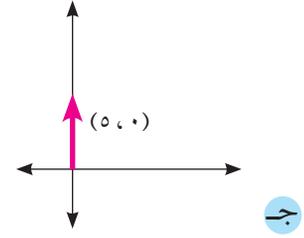
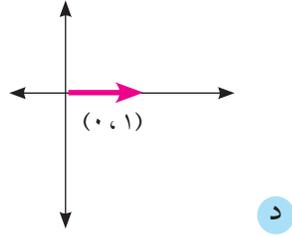
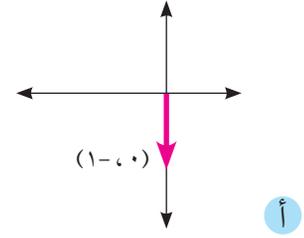
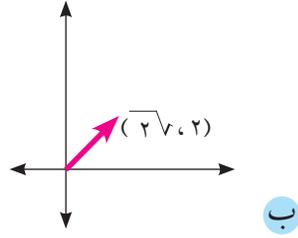
ب  $\frac{4}{15} + \frac{3}{15}$  ت

أ  $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$  ت

ب  $\frac{759}{442} + \frac{313}{442}$  ت

أ  $\frac{2\sqrt{2} + 1}{5} + \frac{2\sqrt{2} + 2}{5}$  ت

٦ تمثيله في مستوى الأعداد المركبة



٨ أ  $\varepsilon = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})$

ب  $\varepsilon = \frac{1}{2} (\cos \pi + j \sin \pi)$

ج  $\varepsilon = 1 (\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3})$

ب  $\varepsilon = \frac{3}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}$

٩ أ  $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{j\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

د  $\varepsilon = \frac{j\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$

ج  $\varepsilon = \sqrt{2} - j\sqrt{2}$

١

٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	رقم الفقرة
د	ب	ب	أ	د	ج	ج	الإجابة

٢٠√ د

١٠√ ج

٥√ ب

٥√ أ ٢

٣ (٠، ١-)، (١، ٠)

٤ ل + م = ٨، ل م = ٢٥، ل<sup>٢</sup> + م<sup>٢</sup> = ١٤

٥ ت

### أفكار رياضية

- \* تصميم دليل ارشادي لمدينة القدس للتعريف باهميتها، مع إبراز اهم معالمها التاريخية والسياحية.
- \* تصميم اداة لقياس اثر استخدام مواقع التواصل الاجتماعي على تحصيل الطلبة.
- \* تعاني المحافظات الجنوبية (قطاع غزة) من مشكلات الماء والكهرباء، اصمم مقترحا لعرضه على الحكومة للتخفيف من حدة هذه الازمات.
- \* إعداد رحلات معرفية (Web quest) عن وحدة التفاضل.
- \* إعداد دراسة عن كيفية الافادة من الاراضي البور لدعم السلة الغذائية .

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع. ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

### مميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيتهم ورغبتهم بالعمل.

### خطوات المشروع:

**أولاً: اختيار المشروع:** يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومرتبطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطَّط له مسبقاً.

### ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة. يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، (شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلي.

### ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

#### دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

#### دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

#### رابعاً: تقييم المشروع: يتضمن تقييم المشروع الآتي:

١. الأهداف التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيد بالوقت المحدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. الأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانيات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعية، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

#### يقوم المعلم بكتابة تقرير تقييمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التي استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

- بسيوني، جابر أحمد (2014) : الإحصاء العام، دار الوفاء لنديا الطباعة، الإسكندرية .
- حمدان، فتحي خليل (2012) ، الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية، دار وائل للنشر، عمان .
- شاهر، ثائر فيصل (2009) : الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية، دار الحامد للنشر والتوزيع عمان.
- رمضان، زياد (2001) : مبادئ الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2001.
- الجندي، حسن عوض (2014) :منهج الرياضيات المعاصر محتواه واساليب تدريسه، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة .
- المومني، غازي فلاح، الرياضيات المالية المعاصرة ، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2014
- الخطيب، روجي إبراهيم (2012) : التفاضل والتكامل ج1، دار المسيرة، عمان .
- الخطيب، روجي إبراهيم (2012) : التفاضل والتكامل ج2، دار المسيرة، عمان .
- عدنان عوض، أحمد علاونة ، مفيد عزام ،(1990) -دار الفكر - عمان -الأردن
- فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع
- فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني(ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع
- ابو أسعد ، صلاح عبد اللطيف (2010): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع
- الزغلول، عماد (2005): الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.
- حسين فرج، عبد اللطيف (2005): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان

Bostock&Perkins(1989 ) : Advanced Mathematics, volume1

Howard Anton, John Wiley ( 1999): Calculus, 6th Edition ,

Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N. Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N. Y

Bostock&Perkins(1989 ) : Advanced Mathematics, volume2

Edwards & Penny(1994): Calculus with Analytic Geometry, 4th Edition, Prentice hall

## لجنة المناهج الوزارية:

د. شهناز الفار	أ. ثروت زيد	د. صبري صيدم
د. سمية النخالة	أ. عزام أبو بكر	د. بصري صالح
م. جهاد دريدي	أ. عبد الحكيم أبو جاموس	م. فواز مجاهد

## اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

د. سمية النخالة	د. محمد مطر	أ. ثروت زيد
أ. أحمد سباعرة	د. علا الخليلي	د. محمد صالح (منسقاً)
أ. قيس شبانة	د. شهناز الفار	د. معين جبر
أ. مبارك مبارك	د. علي نصار	د. علي عبد المحسن
أ. عبد الكريم صالح	د. أيمن الأشقر	د. تحسين المغربي
أ. نادية جبر	أ. ارواح كرم	د. عادل فوارعة
أ. أحلام صلاح	أ. حنان أبو سكران	أ. وهيب جبر
أ. نشأت قاسم	أ. كوثر عطية	د. عبد الكريم ناجي
أ. نسرين دويكات	د. وجيه ضاهر	د. عطا أبو هاني
	أ. فتحي أبو عودة	د. سعيد عساف

## المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات للثاني عشر العلمي والصناعي:

عزيزة عيطة	محمد مسلم	أروى مشاركة	لبنى ابو باشا	خليل محيسن
صلاح الترك	محمد الفرا	آسيا العلامي	يوسف الحروب	نادية عباسي
باسم المدهون	فلاح الترك	صفية النجار	رهام مصلح	أحمد العملة
سمير عمران	رائد عبد العال	سناء أبو حماد	عريب الزبون	فداء أبو عرة
مصطفى قنيص	رفيق الصيفي	محمد ابو سليم	فهيم بشارت	جونى مصلح
نادر أبو عقيل	حسين عرفات	سهيلة بدر	خالد طقاطقة	توفيق السعدة
مريم الخوامدة	سميرة حنيف	هيثم مسالمة	صهيب عكر	رائد ملاك
وهيب جبر	مؤيد الخنجوري	عبير لعسوس	ماهر أبو بدر	أشجان جبر
عبد الحافظ الخطيب	سرين أبو عيشة	محمد عليان	خوله الشاعر	علي زايد
كفاية مضية	ابتسام اسليم	مطبعة صوافطه	فادي زيدان	ابتسام بعباع
محمد دراوشة	منال الصباغ	سوزان عبد الحميد	عبدالرحمن عزام	جميل معالي
عماد النابلسي	د. رحمة عودة	محمد موسى	خالد الدشت	سميه سلامه
نجدود ريجان	هانم النخالة	أيمن ابو زياد	هاشم عبيد	ايناس سباعنة

تم مناقشة الكتاب بورشات عمل على مستوى مديريات الوطن

تَمَّ بِحَمْدِ اللَّهِ