الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

12

إجابات الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب– مادة الرياضيات– الصف الثاني عشر العلمي ف1 طبعة 2023

الوحدة الأولى: التفاضل

الدرس الأول: الاشتقاق

	مسألة اليوم صفحة 8
	ملحوظة مهمة: نرجو تعديل اقتران موقع الجسم في هذه المسألة على النحو الآتي: $x(t) = 8\sin t$
1	$x(t) = 8\sin t \quad \rightarrow x\left(\frac{2}{3}\right) = 8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95\ cm$ $v(t) = \frac{dx}{dt} = 8\cos t \quad \rightarrow v\left(\frac{2}{3}\right) = 8\cos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 6.29\ cm/s$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = -8\sin t \quad \rightarrow a\left(\frac{2}{3}\right) = -8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx -4.95\ cm/s^2$
2	بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$
	أتحقق من فهمي صفحة 10
	الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_2, x = x_4, x = x_5$ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_7, x = x_8$ لأنه غير متصل عندهما، وغير قابل للاشتقاق عند $x = x_3$ نظرًا لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة.
	أتحقق من فهمي صفحة 12
a	$f(x) = 5e^x + 3$ $f'(x) = 5e^x$
b	$f(x) = \sqrt{x} - 4e^x = x^{\frac{1}{2}} - 4e^x$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4e^x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^x$
c	$y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}} = 8e^x + 4x^{-\frac{1}{5}}$ $y' = \frac{dy}{dx} = 8e^x - \frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}} = 8e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$

أتحقق من فهمي صفحة 14	
a	$f(x)=\sqrt{x}+\ln(4x)=x^{\frac{1}{2}}+\ln 4+\ln x$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0+\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$
b	$f(x)=\ln(2x^3)=\ln 2+3\ln x$ $f'(x)=\frac{3}{x}$
أتحقق من فهمي صفحة 16	
a	$y=\frac{\sin x}{2}+3\cos x=\frac{1}{2}\sin x+3\cos x$ $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cos x-3\sin x$
b	$f(x)=x^2+\cos x+\sin\frac{\pi}{2}$ $f'(x)=2x-\sin x+0=2x-\sin x$
أتحقق من فهمي صفحة 17	
a	$f(x)=\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2x}$ ميل المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هو : $f'(e)=\frac{1}{2e}$ معادلة المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هي: $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}(x-e)$ $y=\frac{1}{2e}x$
b	بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هو $\frac{1}{2e}$ إذن ميل العمودي على المماس عندها هو $-2e$ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هي: $y-\frac{1}{2}=-2e(x-e)$ $y=-2ex+2e^2+\frac{1}{2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 20
a	$s(t) = t^2 - 7t + 8$ $v(t) = 2t - 7 \quad \Rightarrow v(4) = 1\text{ m/s}$ $a(t) = 2 \quad \Rightarrow a(4) = 2\text{ m/s}^2$
b	$v(t) = 2t - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7}{2}\text{ s}$
c	$v(2) = -3\text{ m/s}$ بما أن إشارة السرعة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 2$
d	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 8\text{ m}$ $s(t) = 8 \quad \Rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8 \quad \Rightarrow t^2 - 7t = 0$ $t(t-7) = 0 \quad \Rightarrow t = 0 \text{ or } t = 7$ إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t = 7\text{ s}$، أي بعد 7 ثوانٍ من بدء حركته.
	أتحقق من فهمي صفحة 22
a	$s(t) = 7\sin t$ $v(t) = 7\cos t$ $a(t) = -7\sin t$
b	بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7\ m$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = -7\text{ m}, s = 7\text{ m}$ ، ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi\text{ s}$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7\text{ m/s}$ ويكون مقدار سرعة الجسم القياسية أكبر ما يمكن $\lvert 7\cos t \rvert = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان)، بينما تكون سرعة الجسم صفرًا (يسكن لحظيًا) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $\lvert s(t) \rvert = 7 \rightarrow v(t) = 0$ (عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون محصلة القوى المؤثرة على الجسم فيها صفرًا.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 22
1	الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3, x = x_4, x = x_6$ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط. وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ لأنه غير متصل عندها، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$ نظرًا لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة
2	الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_1, x = x_2, x = x_4$ لأنه غير متصل عندها
3	$f'(x) = 2\cos x - e^x$
4	$f'(x) = \frac{1}{4x} + \pi \sin x$

5	$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$ $= \ln 1 - \ln x^3 + x^4$ $= -3\ln x + x^4$ $f'(x) = -\frac{3}{x} + 4x^3$
6	$f(x) = e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1$ $f'(x) = e \times e^x = e^{x+1}$
7	$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$
8	$f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$ $= \ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n\ln x$ $f'(x) = 0 - n\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{n}{x}$
9	$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$ ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$: $f'(\pi) = \cos\pi + \frac{1}{2}e^{\pi} = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$ معادلة المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$: $y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)(x - \pi)$ $y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}e^{\pi}$
10	بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ هو $-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $\frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^{\pi}} = \frac{-2}{-2+e^{\pi}} = \frac{2}{2-e^{\pi}}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{2}{2-e^{\pi}}(x - \pi) \Rightarrow y = \frac{2}{2-e^{\pi}}x - \frac{2\pi}{2-e^{\pi}} + \frac{1}{2}e^{\pi}$
11	$f(x) = e^x - 2x \Rightarrow f'(x) = e^x - 2$ $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \approx 0.69$

12	$f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$ عندما $x = \pi$، فإن: $y = f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = -1$ ميل المماس عند النقطة $(\pi, -1)$ هو: $f'(\pi) = \cos\pi - \sin\pi = -1$ بما أن ميل المماس هو -1 إذن ميل العمودي على المماس هو 1 معادلة العمودي على المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \quad \Rightarrow y = x - \pi - 1$ الإجابة الصحيحة هي b
13	$f(x) = \ln kx = \ln k + \ln x$ $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$
14	$f'(x) = \frac{1}{x}$ ميل المماس عند النقطة $(e, 1)$ هو: $f'(e) = \frac{1}{e}$ معادلة المماس هي: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \quad \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$ وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0, 0)$ تحقق معادلته.
15	بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$ معادلة العمودي على المماس: $y - 1 = -e(x - e) \quad \rightarrow y = -ex + e^2 + 1$ لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته $0 = -ex + e^2 + 1$ $ex = e^2 + 1 \quad \Rightarrow x = \frac{e^2+1}{e} = e + \frac{1}{e}$
16	$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$ $v(t) = 3t^2 - 8t + 5 \quad \Rightarrow v(5) = 40\ \mathrm{m/s}$ $a(t) = 6t - 8 \quad \Rightarrow a(5) = 22\ \mathrm{m/s^2}$

17	$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0$ $(3t - 5)(t - 1) = 0$ $\rightarrow\ t = \frac{5}{3}\ \text{s}\ \ or\ t = 1\ \text{s}$
18	$v(4) = 21\ \text{m/s}$ بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 4$
19	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 0\ \text{m}$ $s(t) = 0\ \ \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 5t = 0$ $\Rightarrow t(t^2 - 4t + 5) = 0$ $\Rightarrow t = 0$ العبارة التربيعية $t^2 - 4t + 5$ مميزها سالب وبالتالي ليس لها جذور حقيقية. إذن، لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبدًا.
20	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = e^0 - 4(0) = 1\ \text{m}$
21	$v(t) = e^t - 4$ $v(t) = 0\ \Rightarrow\ e^t = 4\ \ \Rightarrow t = \ln 4$ $a(t) = e^t\ \ \Rightarrow\ a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4\ \text{m/s}^2$
22	$s(t) = 4\cos t$ $v(t) = -4\sin t$ $a(t) = -4\cos t$
23	$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\ 2\sqrt{2}\ \text{m/s}$ $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\ 2\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$

24	من خصائص اقتران الموقع $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = 4\text{ m}, s = -4\text{m}$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين 4 m/s، و-4 m/s ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان. نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفرًا.
25	$y = e^x - ax$ $x = 0 \Rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$ نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور y هي: $(0,1)$ $\frac{dy}{dx} = e^x - a$ ميل المماس عند هذه النقطة هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$ معادلة معادلة المماس هي: $y - 1 = (1-a)(x-0) \quad \rightarrow y = (1-a)x + 1$
26	ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو $y' = 2e^x + 3 + 15x^2$ لكل x فإن $2e^x > 0$ و لكل x فإن $15x^2 \geq 0$ بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$ بإضافة 3 للطرفين: لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أنّ $y' > 3$ إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x.

27	الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أنّ $y = ke^0 = k$ ، أي أنّ إحداثيي P هما $(0, k)$ $\frac{dy}{dx} = ke^x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = ke^0 = k$ معادلة المماس هي: $y - k = k(x - 0) \Rightarrow y = kx + k$ ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$ $0 = kx + k \Rightarrow x = -1$ إذن، نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي: $(-1, 0)$
28	ميل العمودي على المماس عند النقطة P هو $-\frac{1}{k}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y - k = -\frac{1}{k}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + k$ وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أنّ: $0 = -\frac{1}{k}(100) + k \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = \mp 10$ ولأنّ $k > 0$ ، فإن $k = 10$
29	$y = \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}\ln x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$
30	$y = \log ax^2 = \log a + 2\log x$ $\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \frac{1}{x \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$
31	$s(t) = 4 - \sin t$ $v(t) = -\cos t$ $a(t) = \sin t$

32	$v(t) = -\cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ يكون الجسم في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$ ويكون موقعه عندها هو $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3 \text{ m}$
33	$a(t) = v'(t) = \sin t \Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$ وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أنَّ: $s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$ أي أن الجسيم يكون عند $s = 4 \text{ m}$ عندما يكون تسارعه صفرًا.

الدرس الثاني: مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

مسألة اليوم صفحة 26
$A(b)=\dfrac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$ $A'(b)=\dfrac{(1+4b^{0.4})(9.6b^{-0.6})-(40+24b^{0.4})(1.6b^{-0.6})}{(1+4b^{0.4})^2}$ $=\dfrac{9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2}-64b^{-0.6}-38.4b^{-0.2}}{(1+4b^{0.4})^2}$ $=\dfrac{-54.4b^{-0.6}}{(1+4b^{0.4})^2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 28
a	$f(x)=(x^3-2x^2+3)(7x^2-4x)$ $f'(x)=(x^3-2x^2+3)(14x-4)+(7x^2-4x)(3x^2-4x)$ $=14x^4-4x^3-28x^3+8x^2+42x-12+21x^4-28x^3-12x^3+16x^2$ $=35x^4-72x^3+24x^2+42x-12$
b	$f(x)=\ln x\cos x$ $f'(x)=(\ln x)(-\sin x)+(\cos x)\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x\sin x+\dfrac{\cos x}{x}$

	أتحقق من فهمي صفحة 30
a	$f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$ $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(1)-(x+1)(2)}{(2x+1)^2}=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}$
b	$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$ $f'(x)=\dfrac{e^x(\cos x)-(\sin x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$

<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 32</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$
$P'(t) = \frac{(2t+9)(1000t) - (500t^2)(2)}{(2t+9)^2} = \frac{9000t + 1000t^2}{(2t+9)^2}$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$P'(12) = \frac{9000(12) + 1000(12)^2}{(24+9)^2} \approx 231.405$
إذن في السنة 12 يتزايد عدد سكان هذه المدينة بمعدل 231 ألف نسمة سنويًا تقريبًا.</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 33</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$f(x) = \frac{1}{5x - x^2}$
$f'(x) = \frac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2} = \frac{2x-5}{(5x-x^2)^2}$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$
$f'(x) = \frac{-\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x + \sqrt{x}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}\left(e^x + \sqrt{x}\right)^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 35</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$f(x) = x \cot x$
$f'(x) = (x)(-\csc^2 x) + (\cot x)(1) = -x\csc^2 x + \cot x$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin x}$
$f'(x) = \frac{(1+\sin x)(\sec^2 x) - (\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$
$= \frac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \sin x}{(1+\sin x)^2}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 36</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$f(x) = x\sin x$$
$$f'(x) = x\cos x + \sin x$$
$$f''(x) = -x\sin x + \cos x + \cos x$$
$$= 2\cos x - x\sin x$$
$$f'''(x) = -2\sin x - (x\cos x + \sin x)$$
$$= -3\sin x - x\cos x$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتدرب وأحل المسائل صفحة 36</td></tr>
<tr><td>1</td><td>

$$f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$$
$$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x^2) - (x^3)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

$$f(x) = x^3 \sec x$$
$$f'(x) = (x^3)(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$$
$$= x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$$

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

$$f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$$
$$f'(x) = \frac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x\sin x + \sin x}{\cos^2 x}$$

</td></tr>
<tr><td>4</td><td>

$$f(x) = e^x(\tan x - x)$$
$$f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)$$
$$= e^x \tan^2 x + e^x \tan x - xe^x$$

</td></tr>
<tr><td>5</td><td>

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$$
$$f'(x) = \frac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{-2\sin x}{e^x}$$

</td></tr>
<tr><td>6</td><td>

$$f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$$
$$f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)$$
$$= x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x\cos x$$

</td></tr>
</table>

7	$f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+3) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
8	$f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$ $f'(x) = \frac{(1-\sec x)(\sec x \tan x) - (1+\sec x)(-\sec x \tan x)}{(1-\sec x)^2}$ $= \frac{2\sec x \tan x}{(1-\sec x)^2}$
9	$f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{x-3} = \frac{2x-1}{x^2-3x}$ $f'(x) = \frac{(x^2-3x)(2)-(2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$
10	$f(x) = (x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$ $f'(x) = (x^3-x)\left((x^2+2)(2x+1)+(x^2+x+1)(2x)\right)$ $+ (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$ $= (x^3-x)(x^2+2)(2x+1) + (x^3-x)(x^2+x+1)(2x)$ $+ (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$
11	$f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1} = \frac{1}{\csc x + \cot x}$ $f'(x) = \frac{-1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2}$ $= \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$ $= \frac{\csc x(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2}$ $= \frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$
12	$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$ $= 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$
13	$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-1 \times -3 - 5 \times 2}{(-1)^2} = -7$

14	$(7f-2fg)'(0)=7f'(0)-2(fg)'(0)=7(-3)-2(13)=-47$
15	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ $f'(x)=\dfrac{(x^2+4)(2x)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}=\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$ $f''(x)=\dfrac{(x^2+4)^2(16)-(16x)(2)(x^2+4)^1(2x)}{(x^2+4)^4}$ $=\dfrac{(16)(x^2+4)-(16x)(2)(2x)}{(x^2+4)^3}$ $f''(-2)=\dfrac{(16)(8)-(-32)(2)(-4)}{(8)^3}=-\dfrac{1}{4}$
16	$f(x)=\dfrac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}=\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}}=1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$ $f'(x)=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ $f''(x)=\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ $f''(8)=\dfrac{2}{9\sqrt[3]{8^5}}-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{8^4}}=\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{1}{32}-\dfrac{1}{16}\right)=-\dfrac{1}{144}$

$$f(x)=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{-1(1+\sqrt{x})-(1-x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})-(1-x)}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-2\sqrt{x}-2x-1+x}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=-\frac{x+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x)=-\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}x^{-3/2}=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

17

$$f''(4)=\frac{1}{4\sqrt{4^3}}=\frac{1}{32}$$

طريقة ثانية:

يمكن تبسيط $f(x)=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$ بتحليل بسطه في صورة فرق بين مربعين واختصار العامل المشترك.

$$f(x)=\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}x^{-3/2}=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f''(4)=\frac{1}{4\sqrt{4^3}}=\frac{1}{32}$$

18	$f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$ $f'(x) = \frac{(1+e^x)(1) - (1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}$ ميل المماس عند النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هو: $f'(0) = \frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0) \quad \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
19	$f(x) = e^x \cos x + \sin x$ $f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + \cos x$ ميل المماس عند النقطة $(0, 1)$ هو: $f'(0) = (1)(0) + (1)(1) + 1 = 2$ معادلة المماس هي: $y - 1 = 2(x - 0) \quad \Rightarrow y = 2x + 1$
20	$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ $= \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ $= -\frac{1}{\sin^2 x}$ $= -\csc^2 x$
21	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ $= \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$ $= \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \sec x \tan x$

22	$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ $= \frac{-(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$ $= -\csc x \cot x$
23	$f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$ $f'''(x) = \frac{2}{x^2}$
24	$f'''(x) = 2\sqrt{x}$ $f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
25	$f^{(4)}(x) = 2x + 1$ $f^{(5)}(x) = 2$ $f^{(6)}(x) = 0$
26	$h(t) = \frac{3t^2}{4 + t^2}$ $h'(t) = \frac{(4 + t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4 + t^2)^2} = \frac{24t}{(4 + t^2)^2}$
27	$y = e^x \sin x$ $\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) = e^x(\cos x + \sin x)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \cos x$
28	$2\frac{dy}{dx} - 2y = 2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x$ $= 2e^x \cos x$ $= \frac{d^2y}{dx^2}$

29	$\csc\theta = \dfrac{r+h}{r} \Rightarrow r+h = r\csc\theta$ $\Rightarrow h = r(\csc\theta - 1)$
30	$\dfrac{dh}{d\theta} = r(-\csc\theta\cot\theta)$ $\left.\dfrac{dh}{d\theta}\right\|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-\csc\dfrac{\pi}{6}\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$ $= 6371(-2\times\sqrt{3}) \approx -22070\ \text{km/rad}$
31	$f(x) = 9\ln x + \dfrac{1}{2x^2}$ $f'(x) = 9\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{-1(4x)}{4x^4}$ $= \dfrac{9}{x} - \dfrac{1}{x^3}$ $= \dfrac{9x^2-1}{x^3}$ $= \dfrac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$
32	$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$ $G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,2)$و$(4,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$ $F'(2)$ ميل المماس الأفقي، ويساوي صفرًا $P'(2) = 3\times\dfrac{1}{2} + 2\times 0 = \dfrac{3}{2}$
33	$Q'(7) = \dfrac{G(7)F'(7) - F(7)G'(7)}{G^2(7)} = \dfrac{1\times\frac{1}{4} - 5\times -\frac{2}{3}}{1} = \dfrac{43}{12}$

34	$y=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$ $=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{(e^x+1)(e^x)-(e^x-1)(e^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0}=\frac{2(1)}{(1+1)^2}=\frac{1}{2}$
35	إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفرًا، أي أنّ : $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=0$ ، وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان $e^x=0$، ولكن $e^x>0$ لجميع الأعداد الحقيقية x، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية.
36	$y=\frac{x+1}{x-1}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$
37	$y=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow x+1=y(x-1)\Rightarrow x(1-y)=-y-1$ $\Rightarrow x=\frac{y+1}{y-1}$ $\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{(y-1)^2}$
38	$\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{(y-1)^2}$ $=\frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2}$ $=\frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}=\frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}}=\frac{(x-1)^2}{-2}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

39	$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ $f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(2x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ $f''(x)=\frac{x^3\left(-\frac{2}{x}\right)-(1-2\ln x)(3x^2)}{x^6}$ $=\frac{-5x^2+6x^2\ln x}{x^6}$ $=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$
40	$x^4f''(x)+4x^3f'(x)+2x^2f(x)+1$ $=x^4\times\frac{-5+6\ln x}{x^4}+4x^3\times\frac{1-2\ln x}{x^3}+2x^2\times\frac{\ln x}{x^2}+1$ $=-5+6\ln x+4-8\ln x+2\ln x+1=0$

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

مسألة اليوم صفحة 39	
$P(t)=\dfrac{100}{1+e^{3-t}}$ $P'(t)=\dfrac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$ $P'(3)=\dfrac{100}{4}=25$ أي أن الانفلونزا تنتشر في المدرسة بعد 3 أيام بمعدل 25 طالبًا/يوم	
أتحقق من فهمي صفحة 41	
a	$f(x)=\tan 3x^2$ $f'(x)=6x\sec^2(3x^2)$
b	$f(x)=e^{\ln x}=x$ $f'(x)=1$
c	$f(x)=\ln\cot x$ $f'(x)=\dfrac{-\csc^2 x}{\cot x}$
أتحقق من فهمي صفحة 42	
a	$f(x)=\sqrt[5]{(x^2-1)^2}=(x^2-1)^{\frac{2}{5}}$ $f'(x)=\dfrac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}}(2x)=\dfrac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$
b	$f(x)=\sqrt{\cos x}$ $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$
c	$f(x)=(\ln x)^5$ $f'(x)=5(\ln x)^4\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $=\dfrac{5(\ln x)^4}{x}$

أتحقق من فهمي صفحة 44

a	$f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1) = (\cos(7x^3+6x-1))^2$ $f'(x) = 2(\cos(7x^3+6x-1))^1(-\sin(7x^3+6x-1)(21x^2+6))$ $= -2(21x^2+6)\sin(7x^3+6x-1)\cos(7x^3+6x-1)$ $= -(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$
b	$f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$ $f'(x) = 3(2+(x^2+1)^4)^2\left(4(x^2+1)^3(2x)\right)$ $= 24x(x^2+1)^3(2+(x^2+1)^4)^2$

أتحقق من فهمي صفحة 45

a	$f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ $f'(x) = (2x+1)^5(4)(x^3-x+1)^3(3x^2-1)$ $+ (x^3-x+1)^4(5)(2x+1)^4(2)$ $f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2) = 2754$
b	$f(x) = \dfrac{(\cos x)^2}{e^{2x}}$ $f'(x) = \dfrac{e^{2x}\times 2(\cos x)^1(-\sin x) - (\cos x)^2 \times 2e^{2x}}{e^{4x}}$ $= \dfrac{-\sin 2x - 2(\cos x)^2}{e^{2x}}$ $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-\sin\pi - 2\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}} = 0$ ميل المماس يساوي صفرًا أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسيًا وميله غير معرف.

أتحقق من فهمي صفحة 46

a	$U(x) = 80\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x+4}}$ $U'(x) = 80 \times \dfrac{\dfrac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x+4}}} = \dfrac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x+1}}$
b	$U'(20) = \dfrac{200}{(64)^2}\sqrt{\dfrac{64}{41}} \approx 0.061$ وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/قطعة تقريبًا

أتحقق من فهمي صفحة 48	
a	$f(x) = \pi^{\pi x}$ $f'(x) = (\pi \ln \pi)\pi^{\pi x} = \pi^{\pi x+1}\ln\pi$
b	$f(x) = 6^{1-x^3}$ $f'(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$
c	$f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$ $f'(x) = 4e^{4x} + (2\ln 4)4^{2x}$
أتحقق من فهمي صفحة 49	
a	$f(x) = \log \sec x$ $f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\ln 10 \sec x} = \frac{\tan x}{\ln 10}$
b	$f(x) = \log_8(x^2 + 3x)$ $f'(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$
أتحقق من فهمي صفحة52	

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \ , \qquad \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$x = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \ , \ y = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

معادلة المماس هي: $y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - 1$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 53	
1	$f(x) = e^{4x+2}$ $f'(x) = 4e^{4x+2}$
2	$f(x) = 50e^{2x-10}$ $f'(x) = 100e^{2x-10}$
3	$f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$ $f'(x) = -(2x-3)\sin(x^2 - 3x - 4) = (3-2x)\sin(x^2 - 3x - 4)$
4	$f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$ $f'(x) = (10x^2)\left(-2xe^{-x^2}\right) + \left(e^{-x^2}\right)(20x) = 20xe^{-x^2}(1-x^2)$
5	$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
6	$f(x) = x^2 \tan\frac{1}{x}$ $f'(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$ $= -\sec^2\frac{1}{x} + 2x\tan\frac{1}{x}$
7	$f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$ $f'(x) = 3 + 5(2)(\pi x)(\pi)\sin(\pi x)^2 = 3 + 10\pi^2 x \sin(\pi x)^2$
8	$f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$ $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$
9	$f(x) = (\ln x)^4$ $f'(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$
10	$f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$ $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$
11	$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x} = (x^2 + 8x)^{\frac{1}{5}}$ $f'(x) = \frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$

12	$f(x)=\dfrac{3^{2x}}{x}$ $f'(x)=\dfrac{(x)(2\ln 3)3^{2x}-3^{2x}}{x^2}=\dfrac{(-1+2x\ln 3)3^{2x}}{x^2}$
13	$f(x)=2^{-x}\cos\pi x$ $f'(x)=(2^{-x})(-\pi\sin\pi x)+(\cos\pi x)(-\ln 2)2^{-x}$ $=-\pi\, 2^{-x}\sin\pi x-2^{-x}(\cos\pi x)\ln 2$
14	$f(x)=\dfrac{10\log_4 x}{x}$ $f'(x)=\dfrac{\frac{10x}{x\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}=\dfrac{\frac{10}{\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}$
15	$f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$ $f'(x)=2\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1\times\dfrac{(1+\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$ $=2\times\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\times\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$ $=2\times\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\times\dfrac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$ $=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$
16	$f(x)=\log_3(1+x\ln x)$ $f'(x)=\dfrac{(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)}{(\ln 3)(1+x\ln x)}=\dfrac{1+\ln x}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$
17	$f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$ $f'(x)=2e^{\sin 2x}\cos 2x+2e^{2x}\cos(e^{2x})$
18	$f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))=(\tan(\sec(\cos x)))^4$ $f'(x)=4(\tan(\sec(\cos x)))^3\sec^2(\sec(\cos x))$ $\times\sec(\cos x)\tan(\cos x)\times(-\sin x)$ $=-4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$

19	$f(x) = 4e^{-0.5x^2}$ $f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2} = \frac{4}{e^2}$ $f'(x) = -4xe^{-0.5x^2}$ ميل المماس هو: $m = f'(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2} = \frac{8}{e^2}$ معادلة المماس هي: $y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x+2) \Rightarrow y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$
20	$f(x) = x + \cos 2x$ $f(0) = 0 + \cos(0) = 1$ $f'(x) = 1 - 2\sin 2x$ ميل المماس هو: $m = f'(0) = 1 - 2\sin 2(0) = 1$ معادلة المماس هي: $y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$
21	$f(x) = 2^x$ $f(0) = 2^0 = 1$ $f'(x) = (\ln 2)2^x$ ميل المماس هو: $m = f'(0) = (\ln 2)2^0 = \ln 2$ معادلة المماس هي: $y - 1 = (\ln 2)(x - 0) \Rightarrow y = (\ln 2)x + 1$
22	$f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$ $f(3) = 2\sin\frac{3\pi}{2} = -2$ $f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$ ميل المماس هو: $m = f'(3) = (2)(0) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$
23	$A(x) = f(g(x))$ $A'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $A'(5) = f'(g(5)) \times g'(5)$ $= f'(-2) \times g'(5)$ $= 4 \times 6 = 24$

24	$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $f'(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1})(1)-(x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$ $=\frac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$ $=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$
25	$A(t)=Ne^{0.1t}$ $A'(t)=0.1Ne^{0.1t}$ $A'(3)=0.1Ne^{0.3}$
26	$A'(k)=0.1Ne^{0.1k}$ $0.2=0.1Ne^{0.1k}$ $e^{0.1k}=\frac{0.2}{0.1N}=\frac{2}{N}$ $0.1k=\ln\frac{2}{N} \Rightarrow k=10\ln\frac{2}{N}$
27	$f(x)=\sin\pi x$ $f'(x)=\pi\cos\pi x$ $f''(x)=-\pi^2\sin\pi x$ $f'''(x)=-\pi^3\cos\pi x$
28	$f(x)=\cos(2x+1)$ $f'(x)=-2\sin(2x+1)$ $f''(x)=-4\cos(2x+1)$ $f'''(x)=8\sin(2x+1)$ $f^{(4)}(x)=16\cos(2x+1)$ $f^{(5)}(x)=-32\sin(2x+1)$
29	$f(x)=\cos x^2$ $f'(x)=-2x\sin x^2$ $f''(x)=(-2x)(2x\cos x^2)+(\sin x^2)(-2)$ $=-4x^2\cos x^2-2\sin x^2$

30	$y = e^{\sin x}$ $\frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cos x$ $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = e^{\sin 0}\cos 0 = 1$	ميل المماس هو:
31	$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$ $A'(t) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$ $A'(2) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}} \approx -0.098$ إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل $0.098g$ كل يوم عندما $t = 2$	
32	$s(t) = 0.1\sin 2.4t$ $v(t) = 2.4 \times 0.1\cos 2.4t = 0.24\cos 2.4t$ $v(1) = 0.24\cos 2.4 \approx -0.177\ cm/s$	
33	$v(t) = 0 \Rightarrow 0.24\cos 2.4t = 0$ $\Rightarrow \cos 2.4t = 0$ وهذا يعني أن: $\|\sin 2.4t\| = 1$ أي أن : $\sin 2.4t = 1, or -1$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1\sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(1) = 0.1$ or, $s = 0.1(-1) = -0.1$ إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفرًا يكون موقعها عند $0.1cm$ أو -0.1 cm	
34	$a(t) = -0.24 \times 2.4\sin 2.4t = -0.576\sin 2.4t$ $a(t) = 0 \Rightarrow \sin 2.4t = 0$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1\sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$ إذن، عندما يكون تسارع الكرة صفرًا يكون موقعها عند $s = 0$، أي عند مرورها بموقع الاتزان.	

35	$\frac{dy}{dt} = 2t \;, \qquad \frac{dx}{dt} = 1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$ ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\vert_{t=1} = 2 \times 1 = 2$ نقطة التماس: $x = 1 + 2 = 3 \;\;,\;\; y = (1)^2 - 1 = 0$ معادلة المماس: $y - 0 = 2(x - 3) \;\;\Rightarrow\;\; y = 2x - 6$
36	$\frac{dy}{dt} = 2t \;, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$ ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\vert_{t=-1} = 4 \times -1 = -4$ نقطة التماس: $x = -\frac{1}{2} \;\;,\;\; y = (-1)^2 - 4 = -3$ معادلة المماس: $y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \;\;\Rightarrow\;\; y = -4x - 5$

37	$\frac{dy}{dt} = \sin t \;,\quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ نقطة التماس: $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \;,\quad y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ معادلة المماس: $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$
38	$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \;,\quad \frac{dx}{dt} = 2 \times \sec t \times \sec t \tan t = 2\sec^2 t \tan t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t \tan t} = \frac{1}{2}\cot t$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ نقطة التماس: $x = \sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1 \;,\quad y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ معادلة المماس: $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

39	$\frac{dy}{dt} = 2\sin t \ , \quad \frac{dx}{dt} = 2(1-\cos t)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t}{2(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$ ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\vert_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$ ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 1-\sqrt{2}$
40	$h(x) = f(g(x))$ $h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $h'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times g'(1)$ $g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1 $f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$ و $(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$ $h'(1) = -\frac{1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$
41	$p(x) = g(f(x))$ $p'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$ $p'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1)$ $g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1 $f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$ ويساوي 2 $p'(1) = -1 \times 2 = -2$

42	$y=\ln(ax+b)$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{ax+b}$ ليكن إحداثيا P هما (x_1, y_1)، فيكون ميل المماس عند P هو: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=x_1}=\dfrac{a}{ax_1+b} \quad \Rightarrow \dfrac{a}{ax_1+b}=1$ $\Rightarrow a=ax_1+b$ $\Rightarrow x_1=\dfrac{a-b}{a}=1-\dfrac{b}{a}$ المقدار $\left(1-\frac{b}{a}\right)$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين. إذن، الإحداثي x للنقطة P أقل من 1
43	$y=f(x)=\ln(ax+b)$ $y'=f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}$ ميل المماس عند$P(0, 2)$ يساوي 1، أي أنّ: $f'(0)=1$ $f'(0)=\dfrac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b$ $f(0)=\ln b=2 \Rightarrow b=e^2$ $\Rightarrow a=b=e^2$
44	أفترض أن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي$(x_1,\ y_1)$، بتعويض قيمة كل من a، وb نجد أن: $f(x)=\ln(e^2x+e^2)=\ln(e^2(x+1))=\ 2+\ln(x+1)$ $f'(x)=\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x_1)=\dfrac{1}{x_1+1}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1=1$ $y_1=f(x_1)=f(1)=\ln(e^2+e^2)=\ln(2e^2)=\ln 2+\ln e^2\ =\ln 2+2$ إذن، النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي$(1,\ 2+\ln 2)$.
45	$\dfrac{dy}{dt}=2\ , \qquad \dfrac{dx}{dt}=2t$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2}{2t}=\dfrac{1}{t}$

46	ميل المماس: $m=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$ ميل العمودي على المماس: $m=\frac{-1}{\frac{1}{t}}=-t$ معادلة العمودي على المماس : $y-2t=-t(x-t^2) \;\;\Rightarrow\;\; y=-tx+t^3+2t$
47	لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y=0$ في معادلته: $0=-tx+t^3+2t \;\;\Rightarrow\;\; x=\frac{t^3+2t}{t}=t^2+2$ لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x=0$: $y=-t(0)+t^3+2t=t^3+2t$ مساحة المثلث: $A=\frac{1}{2}\lvert t^2+2\rvert\lvert t^3+2t\rvert$ $=\frac{1}{2}\lvert t^2+2\rvert\lvert t(t^2+2)\rvert$ $=\frac{1}{2}\lvert t(t^2+2)^2\rvert$ $=\frac{1}{2}\lvert t\rvert(t^2+2)^2$
48	$y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$
49	$y=e^x\sin^2x\cos x=(e^x\sin^2x)(\cos x)$ $\frac{dy}{dx}=(e^x\sin^2x)(-\sin x)+(\cos x)\Big((e^x)(2\sin x\cos x)+(\sin^2x)(e^x)\Big)$ $=-e^x\sin^3x+2e^x\cos^2x\sin x+e^x\cos x\sin^2x$

50	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$ $\Rightarrow \cos 3t = 0 \Rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ $x_A = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $y_A = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ إذن، إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.
51	عند النقطة B يكون المماس موازيًا لمحور y، أي إن ميله غير معرف، ومنه يكون: $\cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ $x_B = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ $y_B = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن، إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
52	عند نقطة الأصل $x = y = 0$ أي أنّ: $\sin 2t = \sin 3t = 0$ تتحقق هاتان المعادلتان معًا عندما $t = 0$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} = \frac{3}{2}$ كما تتحققان أيضًا عندما $t = \pi$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} = \frac{3\cos \pi}{2\cos 0} = \frac{-3}{2}$
53	$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$ $v(t) = \frac{2t-2}{t^2 - 2t + 1.9}$ $a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t-2)(2t-2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2} = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$

54	$v(t)=0 \quad \Rightarrow 2t-2=0 \quad \Rightarrow t=1$ $s(1)=\ln(1-2+1.9)=\ln 0.9 \text{ m}$ $a(1)=\dfrac{-2+4-0.2}{(1-2+1.9)^2}=\dfrac{1.8}{(0.9)^2}\approx 2.2 \text{ m/s}^2$
55	الموقع الابتدائي هو: $s(0)=\ln(1.9)$ $s(t)=\ln(1.9) \quad \Rightarrow \ln(t^2-2t+1.9)=\ln(1.9)$ $\Rightarrow t^2-2t+1.9=1.9$ $\Rightarrow t^2-2t=0$ $\Rightarrow t(t-2)=0$ $\Rightarrow t=0 \text{ or } t=2$ يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

مسألة اليوم صفحة 56
$\tan\theta = \dfrac{4x}{x^2+252}$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $\sec^2\theta \times \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{(x^2+252)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+252)^2}$ $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1008-4x^2}{\sec^2\theta\,(x^2+252)^2}$ $= \dfrac{1008-4x^2}{(1+\tan^2\theta)(x^2+252)^2}$ $= \dfrac{1008-4x^2}{\left(1+\dfrac{16x^2}{(x^2+252)^2}\right)(x^2+252)^2}$ $= \dfrac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2+16x^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 58	
a	$x^2+y^2=13$ $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{2y}=-\dfrac{x}{y}$
b	$2x+5y^2=\sin y$ $2+10y\dfrac{dy}{dx}=\cos y\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}(10y-\cos y)=-2$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2}{10y-\cos y}$

أتحقق من فهمي صفحة 60	
a	$3xy^2 + y^3 = 8$ $6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy + 3y^2}$
b	$\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$ $\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)\sec^2(x - y) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\sec^2(x - y) - \sec^2(x - y)\frac{dy}{dx} = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\frac{dy}{dx}(6xy^2 + \sec^2(x - y)) = \sec^2(x - y) - 2y^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x - y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x - y)}$
c	$x^2 = \frac{x - y}{x + y}$ $2x = \frac{(x + y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) - (x - y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)}{(x + y)^2}$ $2x(x + y)^2 = x - x\frac{dy}{dx} + y - y\frac{dy}{dx} - x - x\frac{dy}{dx} + y + y\frac{dy}{dx}$ $2x\frac{dy}{dx} = 2y - 2x(x + y)^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x + y)^2}{2x} = \frac{y - x(x + y)^2}{x}$
أتحقق من فهمي صفحة 61	
a	$y^2 = \ln x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}$

نجد قيمة y عندما $x = 6$

$$(y-3)^2 = 4(6-5) \Rightarrow (y-3)^2 = 4$$

$$\Rightarrow y-3 = \pm 2$$

$$\Rightarrow y = 5 \text{ or } y = 1$$

باشتقاق طرفي العلاقة $(y-3)^2 = 4(x-5)$ بالنسبة إلى x ينتج أنّ:

b

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

ميل المماس عند النقطة الأولى هو:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} = -1$$

وميل المماس عند النقطة الثانية هو:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} = 1$$

أتحقق من فهمي صفحة 63

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

بتعويض $x = 2$، و $y = 3$ ينتج أنّ:

$$3(2)^2 + 3(3)^2\frac{dy}{dx} - 3(2)\frac{dy}{dx} - 3(3) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,3)} = -\frac{1}{7}$$

ميل المماس هو: $-\frac{1}{7}$

إذن، معادلة المماس هي:

$$y-3 = -\frac{1}{7}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$$

أتحقق من فهمي صفحة 64

$$xy + y^2 = 2x \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2-y)\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)\left(\frac{y-2}{x+2y}\right) - (2-y)\left(1+2\times\frac{2-y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)(y-2) - (2-y)(x+4)}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x+2y)^3}$$

أتحقق من فهمي صفحة 65

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 4t}{6t} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} = \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

أتحقق من فهمي صفحة 67	
a	$y = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow \ln y = \sqrt{x}\ln x$ $\Rightarrow \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ln x$
b	$y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}} \Rightarrow \ln y = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$ $\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x^4+1}$ $\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}(\ln(x-1) - \ln(x^4+1))$ $\Rightarrow \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2x^3}{x^4+1}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2x^3}{x^4+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 67	
1	$x^2 - 2y^2 = 4$ $2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$
2	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$ $\frac{-2x}{x^4} + \frac{-2y\frac{dy}{dx}}{y^4} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^4} \times \frac{y^4}{-2y} = -\frac{y^3}{x^3}$

3	$(x^2+y^2)^2=50(x^2-y^2)$ $2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=50\left(2x-2y\frac{dy}{dx}\right)$ $\frac{dy}{dx}(yx^2+y^3+25y)=25x-x^3-xy^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{25x-x^3-xy^2}{yx^2+y^3+25y}$
4	$e^xy=xe^y$ $(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(e^x)=(x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right)+(e^y)(1)$ $\frac{dy}{dx}(e^x-xe^y)=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y-ye^x}{e^x-xe^y}$
5	$3^x=y-2xy$ $3^x\ln 3=\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}-2y$ $\frac{dy}{dx}(1-2x)=2y+3^x\ln 3$ $\frac{dy}{dx}=\frac{2y+3^x\ln 3}{1-2x}$
6	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=0$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
7	$x=\sec\frac{1}{y}$ $1=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}}=-y^2\cos\frac{1}{y}\cot\frac{1}{y}$

8	$(\sin \pi x + \cos \pi y)^3 = 8$ $3(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 \left(\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi y \frac{dy}{dx}\right) = 0$ $3\frac{dy}{dx}(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 3(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2}{3(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2} = \frac{\cos \pi x}{\sin \pi y}$
9	$\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$ $\frac{y^2(1) - x\left(2y\frac{dy}{dx}\right)}{y^4} + \frac{2y\frac{dy}{dx}(x) - 1(y^2)}{x^2} = 0$ $\frac{y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} = -\frac{2xy\frac{dy}{dx} - y^2}{x^2}$ $x^2(y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}) = -y^4(2xy\frac{dy}{dx} - y^2)$ $2xy^5\frac{dy}{dx} - 2x^3y\frac{dy}{dx} = y^6 - x^2y^2$ $(2xy^5 - 2x^3y)\frac{dy}{dx} = y^6 - x^2y^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - x^2y^2}{2xy^5 - 2x^3y} = \frac{y^2(y^4 - x^2)}{2xy(y^4 - x^2)} = \frac{y}{2x}$
10	$x + y = \cos xy$ $1 + \frac{dy}{dx} = -\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\sin xy$ $\frac{dy}{dx}(-x \sin xy - 1) = 1 + y \sin xy$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y \sin xy}{x \sin xy + 1}$

11	$x^2+y^2=\ln(x+y)^2$ $2x+2y\frac{dy}{dx}=\frac{2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$ $x+y\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}$ $\frac{dy}{dx}(xy+y^2-1)=1-x^2-xy$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2-xy}{xy+y^2-1}$
12	$\sin x\cos y=x^2-5y$ $(\sin x)\left(-\sin y\frac{dy}{dx}\right)+(\cos y)(\cos x)=2x-5\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}(\sin x\sin y-5)=\cos x\cos y-2x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\cos y-2x}{\sin x\sin y-5}$
13	$2y^2+2xy-1=0$ أجد قيمة y عندما $x=\frac{1}{2}$: $2y^2+2\left(\frac{1}{2}\right)y-1=0 \Rightarrow 2y^2+y-1=0$ $\Rightarrow (2y-1)(y+1)=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}, y=-1$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $4yy'+2xy'+2y=0$ $y'=\frac{-y}{2y+x}$ $y'\|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}$ $y'\|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=\frac{1}{-2+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$

14	$y^3 + 2x^2 = 11y$ أجد قيمة x عندما $y = 1$: $1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $3y^2y' + 4x = 11y'$ $y' = \dfrac{4x}{11 - 3y^2}$ $y'\vert_{(-\sqrt{5},1)} = \dfrac{-\sqrt{5}}{2}$ $y'\vert_{(\sqrt{5},1)} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
15	$x^2 + y^2 = 25$ $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ $2(3) + 2(-4)\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}\Big\vert_{(3,-4)} = \dfrac{3}{4}$
16	$x^2y = 4(2 - y)$ $x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = -4\dfrac{dy}{dx}$ $4\dfrac{dy}{dx} + 2(2)(1) = -4\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}\Big\vert_{(2,1)} = -\dfrac{1}{2}$
17	$e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1$ $e^{\sin x}\cos x - e^{\cos y}\sin y\dfrac{dy}{dx} = 0$ $e^{\sin\frac{\pi}{2}}\cos\dfrac{\pi}{2} - e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}\Big\vert_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = 0$

18	$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=5$ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5$ $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}(1)\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(8,1)}=-\frac{1}{2}$
19	$x^2+xy+y^2=13$ $2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}=0$ $-8-4\frac{dy}{dx}+3+6\frac{dy}{dx}=0$ ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(-4,3)}=\frac{5}{2}$ معادلة المماس هي: $y-3=\frac{5}{2}(x+4) \Rightarrow y=\frac{5}{2}x+13$
20	$x+y-1=\ln(x^2+y^2)$ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$ بالتعويض ينتج أنّ: $1+\frac{dy}{dx}=2$ ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(1,0)}=1$ معادلة المماس هي: $y-0=1(x-1) \Rightarrow y=x-1$
21	$x+y=\sin y$ $1+\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-1+\cos y}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin y\frac{dy}{dx}}{(-1+\cos y)^2}=\frac{\sin y\left(\frac{1}{-1+\cos y}\right)}{(-1+\cos y)^2}=\frac{\sin y}{(-1+\cos y)^3}$

22	$4y^3 = 6x^2 + 1$ $12y^2 \frac{dy}{dx} = 12x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} = \frac{y - 2x\left(\frac{x}{y^2}\right)}{y^3} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$
23	$xy + e^y = e$ $x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) + y\left(1 + e^y\frac{dy}{dx}\right)}{(x + e^y)^2}$ $= \frac{(x + e^y)\left(\frac{y}{x + e^y}\right) + y\left(1 + e^y\frac{-y}{x + e^y}\right)}{(x + e^y)^2}$ $= \frac{(x + e^y)(y) + y(x + e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3}$ $= \frac{2yx + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$
24	$(x - 6)(y + 4) = 2$ $(x - 6)\frac{dy}{dx} + (y + 4) = 0$ $(7 - 6)\frac{dy}{dx} + (-2 + 4) = 0 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(7,-2)} = -2$ إذن ميل العمودي على المماس هو $\frac{1}{2}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$

25	$3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ $6x + 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x - y}{x + y}$ $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{-3x - y}{x + y} = 0 \Rightarrow -3x - y = 0 \Rightarrow y = -3x$ $3x^2 + 2x(-3x) + (-3x)^2 = 6 \Rightarrow 6x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm 1$ إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1, -3), (-1, 3)$
26	$x + y^2 = 1$ $1 + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{2y}$ ميل المستقيم $x + 2y = 0$ هو $-\frac{1}{2}$ $\dfrac{-1}{2y} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 1$ $\Rightarrow x + (1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0$ النقطة المطلوبة هي $(0, 1)$
27	$y^3 = x^2$ $3y^2\dfrac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y^2}, y \neq 0$ ميل المستقيم $y + 3x - 5 = 0$ هو -3 إذن ميل العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$ $\dfrac{2x}{3y^2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 2x = y^2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}y^2$ $y^3 = x^2 \Rightarrow y^3 = \dfrac{1}{4}y^4 \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{4}y \Rightarrow y = 4$ $\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}(4)^2 \rightarrow x = 8$ النقطة المطلوبة هي $(8, 4)$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10\ , x>0\ , y>0$$

$$\frac{\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0 \Rightarrow \frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\Rightarrow \left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

28

$$x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx}=y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$=\frac{y(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}=\frac{y}{x}$$

يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام لأنه لا يساوي صفرًا إلاّ إذا كان $y = x$ وهذا لا يتسق مع العلاقة الأصلية.

$$y=x^{\frac{1}{x}}\quad , x>0$$

$$\ln y=\ln x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$$

29

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-\ln x)}{x^2}$$

$$\frac{y(1-\ln x)}{x^2}=0 \ \Rightarrow \ln x=1 \ \Rightarrow x=e \ \Rightarrow y=e^{\frac{1}{e}}$$

النقطة المطلوبة هي $\left(e, e^{\frac{1}{e}}\right)$

	$x^2 + y^2 = 100$
	$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$
	$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
	$-\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$
30	$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 100$
	$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 100$
	$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$
	إذا كانت $x = 6$، فإن $y = -\frac{4}{3}(6) = -8$
	وإذا كانت $x = -6$، فإن $y = -\frac{4}{3}(-6) = 8$
	إذن، هناك نقطتان تحققان المطلوب هما $(6, -8), (-6, 8)$

<table>
<tr><td>31</td><td>

$s(t) = t^{1/t}$

$\ln s(t) = \ln t^{1/t}$

$\ln s(t) = \frac{1}{t}\ln t$

$\frac{v(t)}{s(t)} = \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1-\ln t}{t^2}$

$\Rightarrow v(t) = s(t) \times \frac{1-\ln t}{t^2}$

باشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة إلى الزمن t نجد أنّ:

$a(t) = v(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + s(t)\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$

$= s(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + s(t)\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$

$= t^{1/t}\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + t^{1/t}\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$

$= t^{1/t}\frac{(1-\ln t)^2}{t^4} + t^{1/t}\left(\frac{-t - 2t + 2t\ln t}{t^4}\right)$

$\Rightarrow a(t) = t^{1/t}\left(\frac{(1-\ln t)^2 - 3t + 2t\ln t}{t^4}\right)$

</td></tr>
<tr><td>32</td><td>

$y = \ln x\,,\ x > 0$

بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن: $e^y = x$

باشتقاق الطرفين ضمنيًا بالنسبة إلى x ينتج أنّ:

$e^y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$

بتعويض $e^y = x$ ينتج أنّ:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

</td></tr>
</table>

33	$y=(x^2+3)^x \Rightarrow \ln y=\ln(x^2+3)^x$ $\Rightarrow \ln y = x\ln(x^2+3)$ $\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y}=(x)\left(\dfrac{2x}{x^2+3}\right)+\ln(x^2+3)$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{2x^2}{x^2+3}+\ln(x^2+3)\right)(x^2+3)^x$
34	$y=\dfrac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1} \Rightarrow \ln y=\ln\dfrac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1}$ $\Rightarrow \ln y=\ln(x^4+1)+\ln(\sqrt{x+2})-\ln(2x^2+2x+1)$ $\Rightarrow \ln y=\ln(x^4+1)+\dfrac{1}{2}\ln(x+2)-\ln(2x^2+2x+1)$ $\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y}=\dfrac{4x^3}{x^4+1}+\dfrac{1}{2x+4}-\dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{4x^3}{x^4+1}+\dfrac{1}{2x+4}-\dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)\dfrac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1}$
35	$y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)} \Rightarrow \ln y=\ln\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$ $\Rightarrow \ln y=\dfrac{1}{2}\ln x^2(x+1)(x+2)$ $\Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln x^2+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$ $\Rightarrow \ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$ $\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}\right)\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$
36	$y=x^{\sin x} \Rightarrow \ln y=\ln x^{\sin x}$ $\Rightarrow \ln y=(\sin x)\ln x$ $\Rightarrow \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y}=(\sin x)\left(\dfrac{1}{x}\right)+(\ln x)(\cos x)$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{\sin x}{x}+(\ln x)(\cos x)\right)x^{\sin x}$

37	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{\cos t}=-\sec^3 t$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\vert_{t=\frac{\pi}{4}}=-\sec^3\frac{\pi}{4}=-2\sqrt{2}$
38	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{-e^{-t}}=e^t(-3t^2-1)$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(e^t)(-6t)+(-3t^2-1)(e^t)}{-e^{-t}}=e^{2t}(1+6t+3t^2)$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\vert_{t=0}=e^0(1)=1$
39	$x^3+y^3=6xy$ $y=x \Rightarrow x^3+x^3=6x^2$ $\Rightarrow x^3=3x^2$ $\Rightarrow x^2(x-3)=0$ $\Rightarrow x=0 \text{ or } x=3$ نقطة التقاطع في الربع الأول هي $(3,3)$ $3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6x\frac{dy}{dx}+6y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$ ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{(3,3)}=\frac{6-9}{9-6}=-1$ معادلة المماس هي: $y-3=-(x-3) \Rightarrow y=-x+6$

40

بما أنّ المماس أفقي، فإن $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = 0 \Rightarrow 2y - x^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$$

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0$$

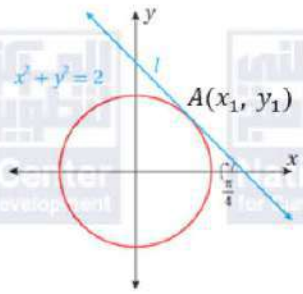
$$\Rightarrow x^6 - 16x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^3(x^3 - 16) = 0 \Rightarrow x = 0 , x = \sqrt[3]{16}$$

$$\Rightarrow y = 0 , y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$$

النقطة المطلوبة في الربع الأول هي: $\left(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}\right)$

41



لتكن نقطة التماس $A(x_1, y_1)$

باشتقاق طرفي العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ بالنسبة إلى x نجد أنّ:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

إذن، ميل المماس l هو $-\frac{x_1}{y_1}$

لكن ميل المماس l هو $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$

إذن، $-\frac{x_1}{y_1} = -1 \Rightarrow x_1 = y_1$

وبتعويض (x_1, y_1) في المعادلة المعطاة نجد أنّ:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = 2$$

وبتعويض $x_1 = y_1$ في هذه المعادلة نجد أنّ:

$$x_1{}^2 + x_1{}^2 = 2 \Rightarrow 2x_1{}^2 = 2 \Rightarrow x_1{}^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$$

إذن، نقطة التماس هي: $A(1, 1)$، ومعادلة المماس l هي:

$$y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

42

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

43

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

44	$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}$ المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان، لأنه من نص السؤال: $x=\sec t$ و $y=\tan t$ ومنه فإن $\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}$
45	$\frac{dy}{dx}=2 \ \Rightarrow \frac{x}{y}=2 \ \Rightarrow x=2y$ $x^2-y^2=1 \ \Rightarrow (2y)^2-y^2=1$ $\Rightarrow y^2=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $y=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 هي: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
46	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=0 \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ نفرض نقطة التماس هي (x_1,y_1) فيكون ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(x_1,y_1)}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$ معادلة المماس: $y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$ المقطع x والمقطع y للمماس: $x=0 \ \Rightarrow \ y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(-x_1) \ \Rightarrow y=y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$ $y=0 \ \Rightarrow \ y_1=\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1) \ \Rightarrow x=x_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$ مجموع المقطعين: $y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}=y_1+2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1$ $=\left(\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1}\right)^2$ $=\left(\sqrt{k}\right)^2=k$

$y = (x-3)^{\sqrt{x}}$

$\ln y = \ln(x-3)^{\sqrt{x}}$

$\ln y = \sqrt{x}\ln(x-3)$

$\dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = (\sqrt{x})\left(\dfrac{1}{x-3}\right) + \ln(x-3)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-3} + \dfrac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = (x-3)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-3} + \dfrac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$

ميل المماس:

47 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(4,1)} = (1)^2\left(\dfrac{2}{1} + \dfrac{\ln 1}{2(2)}\right) = 1(2+0) = 2$

معادلة المماس:

$y - 1 = 2(x-4) \Rightarrow y = 2x - 7$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$x = 0 \Rightarrow y = -7$

$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 7 \Rightarrow x = 3.5$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي:

$A = \dfrac{1}{2} \times 3.5 \times |-7| = 12.25$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 70	
1	c
2	b
3	d
4	d
5	c
6	a
7	d
8	$f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$ $f'(x) = (e^x)\left(1 + (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(1)\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$ $= e^x\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}\right)$
9	$f(x) = \frac{x}{\tan x}$ $f'(x) = \frac{(\tan x)(1) - (x)(\sec^2 x)}{\tan^2 x} = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x}$
10	$f(x) = \frac{1}{x} - 12\sec x$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 12\sec x\tan x$
11	$f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ $f'(x) = \frac{(\ln x)(e^x) - (e^x)\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = \frac{e^x(x\ln x - 1)}{x\ln^2 x}$
12	$f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$ $f'(x) = \frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8} = \frac{1 - 4\ln x}{x^5}$
13	$f(x) = 5^{2-x}$ $\ln f(x) = \ln 5^{2-x}$ $\ln f(x) = (2 - x)\ln 5$ $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln 5$ $f'(x) = -(\ln 5)f(x) = -(\ln 5)(5^{2-x})$

14	$f(x) = 10\sin 0.5x$ $f'(x) = 5\cos 0.5x$
15	$f(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ $f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)$ $= -\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8+5x+4x^2+x^3}{x^4}\right)$
16	$f(x) = e^{-1.5x}\cos x^2$ $f'(x) = (e^{-1.5x})(-2x\sin x^2)+(\cos x^2)(-1.5e^{-1.5x})$ $= -e^{-1.5x}(2x\sin x^2 + 1.5\cos x^2)$
17	$(fg)'(2) = f(2)g'(2) + g(2)f'(2)$ $= 3\times 2 + 1\times -4 = 2$
18	$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2)f'(2)-f(2)g'(2)}{g^2(2)} = \frac{1\times -4 - 3\times 2}{(1)^2} = -10$
19	$(3f-4fg)'(2) = 3f'(2) - 4(fg)'(2) = 3(-4) - 4(2) = -20$
20	$f(x) = x^7\ln x$ $f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(7x^6) = x^6 + 7x^6\ln x$ $f''(x) = 6x^5 + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(42x^5) = 13x^5 + 42x^5\ln x$
21	$f(x) = \frac{\cos x}{x}$ $f'(x) = \frac{(x)(-\sin x)-(\cos x)(1)}{x^2} = \frac{-\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$ $f''(x) = -\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} - \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^4}$ $= \frac{-x^3\cos x + 2x^2\sin x + 2x\cos x}{x^4}$ $= \frac{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x}{x^3}$

22	$f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$ $f'(x)=\dfrac{(1+\sqrt{x})(1)-(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=\dfrac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$ $f''(x)=\dfrac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})\right)}{(1+\sqrt{x})^4}$ $=\dfrac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$
23	$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ $f'(x)=\dfrac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ $f''(x)=\dfrac{(1+x^2)^2(-4)-(-4x)\left(2\times 2x(1+x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$ $=\dfrac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}$
24	$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ نقطة التماس: $f(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ ميل المماس: $f'(x)=\dfrac{(1+x)(2x)-(x^2)(1)}{(1+x)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}$ $f'(1)=\frac{3}{4}$ معادلة المماس: $y-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}(x-1)\ \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

25	$f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$ نقطة التماس: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\right)$ ميل المماس: $f'(x)=\frac{(\cos x)(2x)-(x^2)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi^2}{16}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}$ معادلة المماس: $y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}=\frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
26	$f(x)=\ln(x+5)$ نقطة التماس: $f(0)=\ln(0+5)=\ln(5) \Rightarrow (0,\ln 5)$ ميل المماس: $f'(x)=\frac{1}{x+5}$ $f'(0)=\frac{1}{5}$ معادلة المماس: $y-\ln 5=\frac{1}{5}(x-0) \Rightarrow y=\frac{1}{5}x+\ln 5$

27	$f(x) = \sin x + \sin 3x$ نقطة التماس: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ ميل المماس: $f'(x) = \cos x + 3\cos 3x$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + 3\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ معادلة المماس: $y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}\left(\frac{\pi+4}{4}\right)$
28	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2t}$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=4} = \frac{1}{8}$ نقطة التماس: $x = (4)^2 = 16 \;,\; y = 4 + 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad (16, 6)$ معادلة المماس: $y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}x + 4$
29	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos t}{-4\sin t} = -\frac{3}{4}\cot t$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}$ نقطة التماس: $x = 4\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \;,\; y = 3\sin\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \left(2\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ معادلة المماس: $y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + 3\sqrt{2}$

30	$y = x\ln x$ ميل المماس: $f'(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$ $f'(1) = 1 + \ln 1 = 1$ معادلة المماس: $y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow y = x - 1$
31	$f'(x) = 2 \Rightarrow 1 + \ln x = 2$ $\Rightarrow \ln x = 1$ $\Rightarrow x = e \Rightarrow y = e\ln e = e$ النقطة المطلوبة هي (e, e)
32	$x(x+y) = 2y^2 \Rightarrow x^2 + xy = 2y^2$ $\Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y = 4y\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{4y-x}$
33	$x = \frac{2y}{x^2 - y}$ $1 = \frac{2\frac{dy}{dx}(x^2-y) - 2y(2x - \frac{dy}{dx})}{(x^2-y)^2}$ $(x^2-y)^2 + 4xy = 2x^2\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-y)^2+4xy}{2x^2}$
34	$y\cos x = x^2 + y^2 \Rightarrow -y\sin x + \frac{dy}{dx}\cos x = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\sin x}{-2y + \cos x}$
35	$2xe^y + ye^x = 3 \Rightarrow 2xe^y\frac{dy}{dx} + 2e^y + ye^x + e^x\frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2e^y + ye^x}{2xe^y + e^x}$

36

$$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)(3x^2) - (x^3)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$2(-1)\frac{dy}{dx} = \frac{(2-1)(3) - (1)(-1)}{(2-1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$$

ميل المماس:

$$m = -2$$

ميل العمودي على المماس:

$$m = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

معادلة العمودي على المماس :

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

37

$$y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\ln y = \ln\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x-1) - \ln(x+2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)y$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \left(\frac{-2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \left(\frac{2x^2+4}{(x^2-1)(x^2-4)}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

38	$y = x^{\ln x}$ $\ln y = \ln x^{\ln x}$ $= (\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2$ $\dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = 2(\ln x) \times \dfrac{1}{x}$ $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2\ln x}{x}\right) y$ $= \left(\dfrac{2\ln x}{x}\right) x^{\ln x}$
39	$x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y$ $2x + 3x\dfrac{dy}{dx} + 3y + 2y\dfrac{dy}{dx} = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$ ميل المماس عند (2, -1): $4 + 6\dfrac{dy}{dx} - 3 - 2\dfrac{dy}{dx} = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(2,-1)} = 0$ معادلة المماس: $y + 1 = 0(x - 2) \Rightarrow y = -1$
40	$x^2 e^y = 1$ ميل المماس: $x^2 e^y \dfrac{dy}{dx} + 2xe^y = 0$ $\dfrac{dy}{dx} + 2 = 0 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(1,0)} = -2$ معادلة المماس: $y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2$
41	$p'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1) = 2 \times 1 + 3 \times -2 = -4$
42	$p'(4) = f(4)g'(4) + g(4)f'(4) = 1 \times 0 + 8 \times 0.5 = 4$
43	$q'(7) = \dfrac{g(7)f'(7) - f(7)g'(7)}{\left(g(7)\right)^2} = \dfrac{4 \times 2 - 4 \times -1}{(4)^2} = \dfrac{3}{4}$

44	$R(t) = 200(0.9)^t$ $\frac{dR}{dt} = 200(0.9)^t \ln 0.9$ $\left.\frac{dR}{dt}\right\|_{t=2} = 200(0.9)^2 \ln 0.9 \approx -17.1 \text{ g/day}$
45	$s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ $v(t) = \frac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$ $a(t) = -25\pi^2 \sin(10\pi t)$

الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل

الدرس الأول: المعدلات المرتبطة

مسألة اليوم صفحة 76

$$S=\frac{\sqrt{hm}}{19}=\frac{\sqrt{170m}}{19}=\frac{\sqrt{170}}{19}\sqrt{m}$$

معدل التغير المعطى: $\frac{dm}{dt}=-2\ \text{kg/month}$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{m=70}$

العلاقة بين الكتلة ومساحة سطح الجسم: $S=\frac{\sqrt{170}}{19}\sqrt{m}$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{m}}\frac{dm}{dt}$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{m=70}=\frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}}\times -2$$

$$\approx -0.082\ \text{cm}^2/\text{month}$$

أتحقق من فهمي صفحة 76

ليكن حجم الكرة V وطول نصف قطرها r

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt}=80\ \text{cm}^3/\text{s}$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}$

حجم البالون الكروي: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=6}=4\pi(6)^2\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}$$

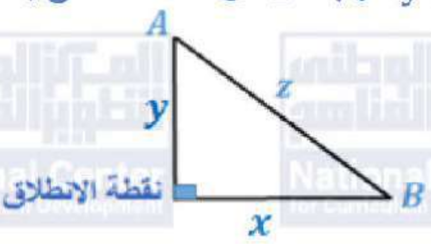
$$80=144\pi\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}=\frac{80}{144\pi}$$

$$=\frac{5}{9\pi}\ \text{cm/s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 78

ليكن بعد A عن نقطة الانطلاق يساوي y ، و بعد B عن نقطة الانطلاق يساوي x، والبعد بين A، و B يساوي z



معدلات التغير المعطاة:

$$\frac{dx}{dt} = 40\text{km/h}\,,\quad \frac{dy}{dt} = 45\text{ km/h}$$

معدل التغير المطلوب:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}$$

بعد ساعتين من الحركة يكون:

$$x = 40 \times 2 = 80\text{ km}\ ,y = 45 \times 2 = 90\text{ km}$$

من نظرية فيثاغورس:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = \frac{80 \times 40 + 90 \times 45}{\sqrt{6400 + 8100}}$$

$$= \frac{7250}{10\sqrt{145}} = \frac{725}{\sqrt{145}} \approx 60.21\text{ km/h}$$

<u>الحل بطريقة ثانية:</u>

بعد t ساعة من الحركة يكون:

$$x = 40t\text{ km}\ ,y = 45t\text{ km}$$

من نظرية فيثاغورس:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

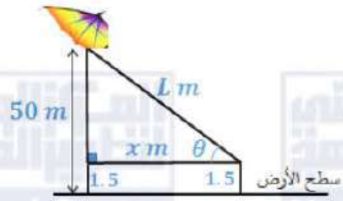
$$z = \sqrt{(40t)^2 + (45t)^2} = \sqrt{3625}\,t$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{3625} \approx 60.21$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} \approx 60.21\text{ km/h}$$

أتحقق من فهمي صفحة 80

ليكن طول الخيط L وقياس الزاوية بين الخيط والأفقي θ ، و بعد الطائرة أفقيًا هو x .



المعطى: $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100}$

$$\tan\theta = \frac{50 - 1.5}{x} = \frac{48.5}{x}$$

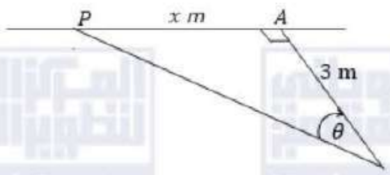
$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{L^2}{x^2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{x^2} \times \frac{x^2}{L^2} = \frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{L^2}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100} = -\frac{48.5(2)}{(100)^2} \approx -0.0097 \text{ rad/s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 82



لتكن الأبعاد والقياسات كما في الشكل أعلاه

المعطى: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4(2\pi) = -8\pi \text{ rad/min}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1}$

$$\tan\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

نجد قيمة $\sec^2\theta$ عندما $x = 1$

$$x = 3\tan\theta \Rightarrow 1 = 3\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1} = 3\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = 3 \times \frac{10}{9} \times -8\pi = -\frac{80\pi}{3}$$

سرعة بقعة ضوء المصباح على الجدار هي $-\frac{80\pi}{3}$ m/min عندما تبعد 1 m عن A، أثناء حركتها مقتربة من النقطة A

أتحقق من فهمي صفحة 84

معدل التغير المعلوم: $\frac{dx}{dt} = -120 \text{ cm/s}$

معدل التغير المطلوب: $\frac{d\theta}{dt}$ عندما $x = 11 \text{ cm}$

المعادلة التي تربط x مع θ هي:

$$14^2 = x^2 + 5^2 - 2(5x)\cos\theta$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن t:

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 10\frac{dx}{dt}\cos\theta + 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$(10\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(10\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt}}{10x\sin\theta}$$

نجد قيمة $\cos\theta$ ، و$\sin\theta$:

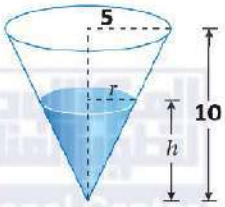
$$\cos\theta = \frac{11^2 + 5^2 - 14^2}{110} = \frac{-5}{11}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - (\frac{-5}{11})^2} = \frac{\sqrt{96}}{11}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(10(\frac{-5}{11}) - 2(11))(-120)}{10(11)(\frac{\sqrt{96}}{11})} \approx 32.5 \text{ rad/s}$$

إذن، يدور العمود المرفقي بسرعة 32.5 rad/s تقريبًا.

أتحقق من فهمي صفحة 86



ليكن حجم الماء في الخزان V ونصف قطر قاعدته r وارتفاعه h

المعطى: $\frac{dV}{dt} = \pi \text{ m}^3/\text{min}$

المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8}$

من التشابه: $\frac{r}{h} = \frac{5}{10} \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{2}h$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8} = \frac{1}{16} \text{ m/min}$$

إذن، يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}$ m/min عندما يكون ارتفاعه 8 m

أتدرب وأحل المسائل صفحة 86

1

ليكن طول المستطيل x وعرضه y ومساحته A ومحيطه P وطول قطره R

المعطى: $\frac{dy}{dt} = -3\text{cm/s}, \quad \frac{dx}{dt} = 2\text{cm/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=20,y=50}$

$$A = xy \quad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=20,y=50} = 20(-3) + 50(2) = 40 \text{ cm}^2/\text{s}$$

2

$$P = 2x + 2y \quad \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dP}{dt}\right|_{x=20,y=50} = 2(2) + 2(-3) = -2 \text{ cm/s}$$

3	$R^2 = x^2 + y^2$ $2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ $\sqrt{(20)^2+(50)^2}\ \frac{dR}{dt}\Big\vert_{x=20,y=50} = 20(2) + 50(-3)$ $\frac{dR}{dt}\Big\vert_{x=20,y=50} = -\frac{110}{10\sqrt{29}} = -\frac{11}{\sqrt{29}}\text{ cm/s}$
4	في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب)، بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر(لأن معدل تغير كل منهما سالب).
5	ليكن حجم المكعب V وطول ضلعه (حرفه) x المعطى: $\frac{dx}{dt} = 6\text{ cm/s}$ المطلوب: $\frac{dV}{dt}\Big\vert_{t=4}$ بعد مرور t ثانية يصبح طول ضلع المكعب: $x = 10 + 6t$ ويكون حجمه: $V = x^3 = (10+6t)^3$ $\frac{dV}{dt} = 3(10+6t)^2 \times 6$ $\frac{dV}{dt}\Big\vert_{t=4} = 3(34)^2(6) = 20808\text{ cm}^3/\text{s}$
6	لتكن مساحة سطح المكعب A بعد مرور t ثانية تصبح مساحة سطح المكعب: $A = 6x^2 = 6(10+6t)^2$ $\frac{dA}{dt} = 12(10+6t) \times 6$ $\frac{dA}{dt}\Big\vert_{t=6} = 12(46)(6) = 3312\text{ cm}^2/\text{s}$

7	ليكن ارتفاع الوقود في الخزان h ، سيكون طول نصف قطر قاعدته 1 m، ويكون حجمه: $V = \pi r^2 h = \pi h$ المعطى: $\frac{dV}{dt} = 500\text{L/min} = 0.5\ \text{m}^3/\text{min}$ المطلوب: $\frac{dh}{dt}$ العلاقة التي تربط الحجم بالارتفاع: $V = \pi h$ $\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}$ $0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$ $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ \text{m/min}$
8	$A = 2\pi r h = 2\pi h$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt}$ $= 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1\ \text{m}^2/\text{min}$
9	المعطى: $\frac{dx}{dt} = 2\ m/s$ المطلوب: $\left.\frac{dT}{dt}\right\|_{x=5}$ $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ $\frac{dT}{dt} = -\frac{400x\frac{dx}{dt}}{(1+x^2)^2}$ $\left.\frac{dT}{dt}\right\|_{x=5} = -\frac{400(5)(2)}{(1+(5)^2)^2} = -5.9\ ^\circ\text{C}/s$ أي أن درجة الحرارة التي يشعر بها ستقل بمعدل 6 °C/s تقريبًا عندما يكون على بعد 5 أمتار من مصدر النار.

10	ليكن حجم كومة الرمل V ، وارتفاعها h ، وطول نصف قطر قاعدتها r المعطى: $\frac{dV}{dt} = 10\ \mathrm{m^3/min}$, $h = \frac{3}{8}(2r)$ المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right\vert_{h=4}$ $h = \frac{3}{8}(2r) \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}h$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2 h$ $V = \frac{16}{27}\pi h^3$ $\frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$ $10 = \frac{16}{9}\pi(4)^2\frac{dh}{dt}$ $\left.\frac{dh}{dt}\right\vert_{h=4} = \frac{45}{128\pi}\ \mathrm{m/min}$ إذن يزداد ارتفاع الكومة المخروطية عند تلك اللحظة بمعدل 0.112 مترًا لكل ثانية تقريبًا.
11	$r = \frac{4}{3}h$ $\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$ $\left.\frac{dr}{dt}\right\vert_{h=4} = \frac{4}{3}\left.\frac{dh}{dt}\right\vert_{h=4} = \frac{4}{3}\times\frac{45}{128\pi} = \frac{15}{32\pi}\ \mathrm{m/min}$ إذن يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل 0.149 مترًا لكل ثانية تقريبًا.

12	لتكن A مساحة قاعدة الكومة، وطول نصف قطرها r المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{h=4}$ $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ لكن $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{h=4} = \frac{15}{32\pi}$ من سؤال 11، لكن $h = \frac{3}{8}(2r)$ ، فعندما يكون الارتفاع 4 m يكون : $4 = \frac{3}{8}(2r) \Rightarrow r = \frac{16}{3}$ $\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right\|_{h=4} = 2\pi \times \frac{16}{3} \times \frac{15}{32\pi} = 5\ \mathrm{m^2/min}$ إذن، تزداد مساحة قاعدة الكومة بمعدل $5\ \mathrm{m^2/min}$ عندما يكون ارتفاعها 4 أمتار.
13	ليكن بعد الطائرة الأولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو x، وبعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في تلك اللحظة هو y، والبعد بين الطائرتين هو s. المعطى: $\frac{dy}{dt} = -600\ \mathrm{km/h}$ $\quad \frac{dx}{dt} = -450\ \mathrm{km/h}$ المطلوب: $\left.\frac{ds}{dt}\right\|_{x=225, y=450}$ $s^2 = x^2 + y^2$ $2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{s} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\left.\frac{ds}{dt}\right\|_{x=225, y=450} = \frac{225(-450) + 450(-600)}{\sqrt{(225)^2 + (450)^2}} \approx -737.9\ \mathrm{km/h}$ إذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل 738 كيلومترًا تقريبًا في الساعة.

نحسب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين:

14

$$t_1 = \frac{x}{v_x} = \frac{225}{450} = 0.5\ h$$

$$t_2 = \frac{y}{v_y} = \frac{450}{600} = 0.75\ h$$

لن تصل الطائرتان لنقطة التقاء المسارين في وقت واحد بعد رصدهما من قبل المراقب الجوي، فإن اصطدامهما غير متوقع، ولا يجب على مراقب الحركة الجوية اتخاذ أي إجراء بخصوص الطائرتين.

15

لتكن المسافات كما في الشكل أدناه:

المعطى: $\frac{dy}{dt} = 20\ \text{km/h}$ $\qquad$ $\frac{dx}{dt} = 15\ \text{km/h}$

المطلوب: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}$

بعد t ساعة من انطلاقهما يكون: $x = 15t, \quad y = 20t$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5\sqrt{13}t$$

$$\frac{dz}{dt} = 5\sqrt{13}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = 5\sqrt{13}\ \text{km/h}$$

إذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الاخرى بسرعة $5\sqrt{13}$ كيلومتر كل ساعة

عندما $R_1 = 80$، $R_2 = 100$: يكون:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{80} + \frac{1}{100} = \frac{180}{8000}$$

$$R = \frac{800}{18} = \frac{400}{9}\ \Omega$$

المعطى: $\frac{dR_1}{dt} = 0.3, \frac{dR_2}{dt} = 0.2$

المطلوب: $\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R_1=80, R_2=100}$

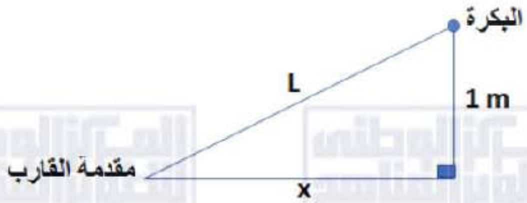
16 العلاقة المعطاة: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$-\frac{\frac{dR}{dt}}{R^2} = -\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2} - \frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}$$

$$\frac{dR}{dt} = R^2\left(\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2} + \frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}\right)$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R_1=80, R_2=100} = \frac{160000}{81}\left(\frac{0.3}{6400} + \frac{0.2}{10000}\right) \approx 0.132\ \Omega/s$$

لتكن الأبعاد كما في الشكل:



المعطى: $\frac{dL}{dt} = -1 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8}$

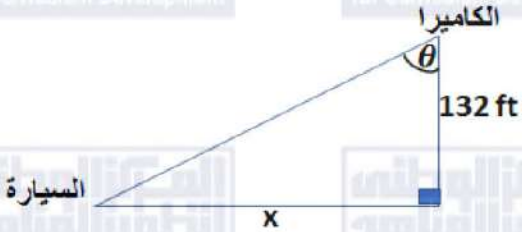
17 $L^2 = x^2 + 1$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

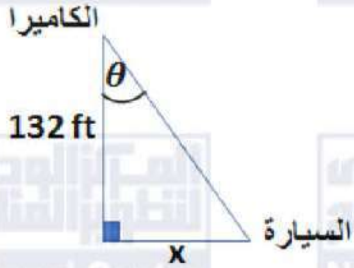
$$\frac{dx}{dt} = \frac{L}{x} \times \frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \times \frac{dL}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8} \times -1 = -\frac{\sqrt{65}}{8} \text{ m/s}$$

إذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف بسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}$ m/s

18	لتكن x كما في الشكل:  المعطى: $\frac{dx}{dt} = -264$ ft/s المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right\vert_{\theta=0}$ $\tan\theta = \frac{x}{132}$ $\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$ $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$ $\left.\frac{d\theta}{dt}\right\vert_{\theta=0} = \frac{1}{132}(-264)\cos^2 0 = -2$ rad/s

لتكن x كما في الشكل:



بعد تجاوز السيارة للكاميرا تتزايد المسافة x حيث يصبح $\frac{dx}{dt} = 264 \text{ ft/s}$

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0.5\,s}$

بعد نصف ثانية: $x = 0.5 \times 264 = 132$

$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

19

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

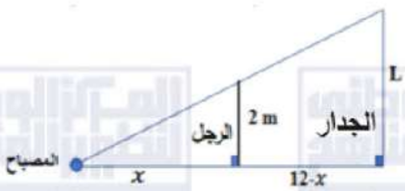
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0.5\,s} = \frac{1}{132}(264) \times \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \text{ rad/s}$$

يزداد قياس الزاوية θبسرعة 1 rad/s في تلك اللحظة.

20	ليكن الجسيم عند النقطة $P\left(x, 2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ في أي لحظة، O نقطة الأصل، وليكن $PO = L$ المعطى: $\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{x=\frac{1}{3}} = \sqrt{10}$ units/s المطلوب: $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=\frac{1}{3}}$ $L^2 = (x-0)^2 + \left(2\sin\frac{\pi x}{2} - 0\right)^2$ $L^2 = x^2 + 4\sin^2\frac{\pi x}{2}$ $2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 8\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\frac{dx}{dt}$ $\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\left(x + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin \pi x\right)\frac{dx}{dt}$ عندما $x = \frac{1}{3}$ ، فإن: $L = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + 4\sin^2(\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}\left(\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{10}$ $= 1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$ إذن يزداد بعد الجسيم عن نقطة الأصل في تلك اللحظة بسرعة $\left(1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right)$ وحدة/ثانية
21	المعطى: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10 \times 2\pi = 20\pi$ rad/s المطلوب: $\frac{dx}{dt}$ $\cos\theta = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30\cos\theta$ $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$ $= -30(20\pi)\sin\theta = -600\pi\sin\theta$
22	$\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -600\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{600\pi}{\sqrt{2}}$ cm/s

23	ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقيا x ، وطول ظله على الجدار L  المعطى: $\frac{dx}{dt} = 1.6 \text{ m/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=8}$ من تشابه المثلثات: $\frac{L}{2} = \frac{12}{x} \rightarrow L = \frac{24}{x}$ $\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2}$ $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=8} = \frac{-24(1.6)}{64} = -0.6 \text{ m/s}$ إذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر لكل ثانية
24	يصل الطرف العلوي للذراع إلى أعلى نقطة عندما يكون وضع الذراع رأسيا، وتكون النقطة المطلوبة هي $(0, 1)$

المعطى: $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$

المطلوب: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}$

عندما $x = \frac{1}{4}$، فإن:

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi t}{6} = \pm\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

يكون $\cos\frac{\pi t}{6}$ لبعض قيم t موجبًا ولبعضها الآخر سالبًا، مع بقاء $\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$ ، فمثلًا عندما $t = 1$ يكون $\cos\frac{\pi t}{6}$ موجبًا وعندما $t = 5$ يكون سالبًا.

العلاقة المعطاة: $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{6}$$

25 $$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\times(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pm\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$

هذا يعني أن الطرف الواقع على المحور x قد يتحرك بالاتجاه الموجب أو بالاتجاه السالب عندما $x = \frac{1}{4}$.

من نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = 1$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dt} = 0$$

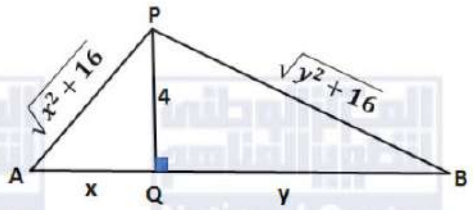
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = -\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\pm\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}$$

$$= \mp\frac{\sqrt{3}\pi}{96}\times\frac{4}{\sqrt{15}} = \mp\frac{\pi}{24\sqrt{5}}\ \text{m/s}$$

إذن، يتحرك طرف الذراع الواقع على المحور y للأسفل أو للأعلى بمعدل $\frac{\pi}{24\sqrt{5}}$ m/s عندما $x = \frac{1}{4}$.

لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



المعطى: $\frac{dx}{dt} = 0.5 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3}$

طول الحبل: $AP + BP = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$

26 عندما $x = 3$ فإن: $\sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \Rightarrow \sqrt{y^2+16} = 7 \Rightarrow y = \sqrt{33}$

$$\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

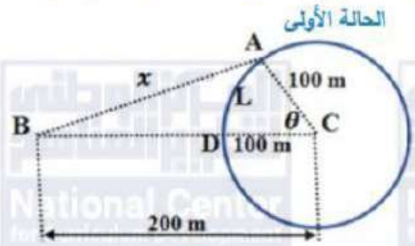
$$\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = 0$$

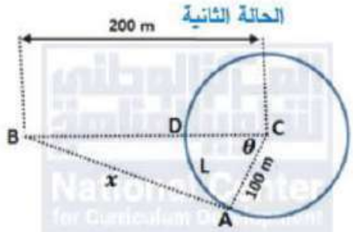
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = -\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{25}} \times 0.5 = -\frac{21}{10\sqrt{33}} \text{ m/s}$$

إذن، تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها $\frac{21}{10\sqrt{33}}$ m/s

ليكن العداء عند A، وصديقه عند B، والبعد بينهما x كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD.
توجد حالتان لموقع العداء كما في الرسمين الآتيين:





الحالة الأولى:

المعطى: (تكون L متناقصة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = -7 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200\ m}$

$$L = r\theta = 100\theta \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -0.07 \text{ rad/s}$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$
$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$
$$2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

27 $$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{x}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

عندما $x = 200$ فإن:

$$\cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000} = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times -0.07 = -\frac{7\sqrt{15}}{4} \text{ m/s}$$

الحالة الثانية:

عندئذ يتزايد طول القوس L، ويكون $\frac{dL}{dt} = 7 \text{ m/s}$، ويكون $\frac{d\theta}{dt} = 0.07 \text{ rad/s}$، وعليه فإن:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times 0.07 = \frac{7\sqrt{15}}{4} \text{ m/s}$$

إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 m، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ m/s

الدرس الثاني: القيم القصوى والتقعر

مسألة اليوم صفحة 90
$C(t) = 3.95 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ المطلوب هو قيمة t التي يكون عندها للاقتران $C(t)$ قيمة عظمى مطلقة في $[0,12]$، لذا نجد القيم الحرجة: $C'(t) = 8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0 \Rightarrow e^{-0.4t-1} = e^{-0.6t}$ $\Rightarrow 0.4t + 1 = 0.6t$ $\Rightarrow t = 5$ توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $t = 5$ نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي مجاله باستخدام الآلة الحاسبة: $C(0) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(0)-1} - e^{-0.6(0)}\right) \approx 0.005$ $C(5) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(5)-1} - e^{-0.6(5)}\right) \approx 3.79$ $C(12) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(12)-1} - e^{-0.6(12)}\right) \approx 3.62$ وبما أن $C(5)$ هو أكبر هذه القيم فإن تركيز الدواء يكون أكبر ما يمكن بعد 5 ساعات من تناوله.
أتحقق من فهمي صفحة 93

a	ليس للاقتران f قيم قصوى مطلقة للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$ وله قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -4$
b	للاقتران f قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$ و $x = -1$ هي $f(\pm1) = 1$ وله قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

	أتحقق من فهمي صفحة 99
a	$f(x)=x^3-6x^2+5, \qquad [-3,5]$ $f'(x)=3x^2-12x=0 \Rightarrow 3x(x-4)=0 \Rightarrow x=0, x=4$ وتكون قيم x الحرجة هي: $x=0, x=4,$ نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة وعند طرفي مجاله. $f(-3)=-27-54+5=-76\,,\, f(0)=5$ $f(4)=64-96+5=-27\,,\, f(5)=125-150+5=-20$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-3$ هي $f(-3)=-76$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=5$
b	$f(x)=x^{\frac{1}{3}}, \qquad [-8,8]$ $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي قيمة في $(-8,8)$، وهي غير موجودة عند $x=0$ وهذه هي القيمة الحرجة فقط. $f(-8)=-2$ $f(0)=0$ $f(8)=2$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-8$ هي $f(-8)=-2$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=2$ هي $f(8)=2$

c

$f(x)=\sin^2 x+\cos x, \qquad [0,2\pi]$

أجد القيم الحرجة في الفترة $(0,\ 2\pi)$

$$f'(x)=2\sin x\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x\,(2\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow \sin x=0 \quad or \quad \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=\pi, or\ x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}$$

وتكون قيم x الحرجة هي: $x=\pi, x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}$

أجد قيم الاقتران عند القيم الحرجة وطرفي مجاله.

$f(0)=1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

$f(\pi)=-1$

$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

$f(2\pi)=1$

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x=\pi$ هي $f(\pi)=-1$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}$ هي $\frac{5}{4}$

أتحقق من فهمي صفحة 102

$f(x)=(x-1)e^x$

$f'(x)=(x-1)e^x+e^x=0 \Rightarrow xe^x=0 \Rightarrow x=0$

للاقتران قيمة حرجة وحيدة هي $x=0$

بما أن إشارة المشتقة الأولى تغيرت من السالب إلى الموجب عند هذه القيمة، لذا يكون للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(0)=-1$

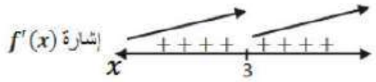
أتحقق من فهمي صفحة 103

$$f(x) = \sqrt[3]{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

$f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي عدد حقيقي x ، لكن $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 3$

إذن القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$



الاقتران f متزايد على R ولا يوجد له قيم قصوى محلية ولا مطلقة. النقطة $(3, 0)$ نقطة حرجة لكنها ليست نقطة قيمة قصوى لعدم تغير إشارة المشتقة حولها.

أتحقق من فهمي صفحة 108

a

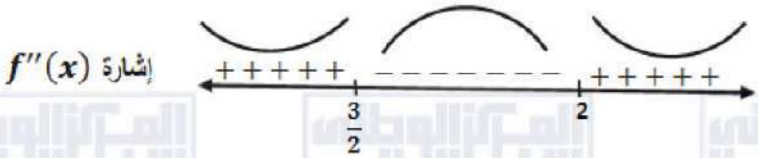
$$f(x) = (x-2)^3(x-1)$$

$$f'(x) = (x-2)^3 + 3(x-1)(x-2)^2$$

$$f''(x) = 3(x-2)^2 + 6(x-1)(x-2) + 3(x-2)^2$$

$$= 3(x-2)\big((x-2) + 2(x-1) + (x-2)\big)$$

$$= 3(x-2)(4x-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \;\; or \;\; x = \frac{3}{2}$$



إذن منحنى $f(x)$ مقعر للأعلى في $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ و $(2, \infty)$، ومقعر للأسفل في $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

وله نقطتا انعطاف هما $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ و $(2, 0)$

b

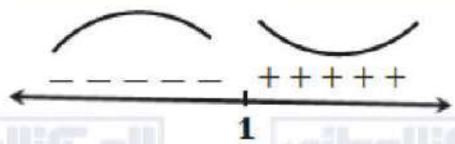
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(x)$ لا تساوي صفرًا لأي عدد حقيقي x ، لكن $f''(x)$غير موجودة عند $x = 1$

إشارة $f''(x)$



إذن منحنى $f(x)$ مقعر للأسفل في $(-\infty, 1)$، ومقعر للأعلى في $(1, \infty)$

ولا توجد نقاط انعطاف مع أن المنحنى غيّر من اتجاه تقعره عند $x = 1$ وذلك لأنها خارج مجال $f(x)$

أتحقق من فهمي صفحة110

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = xe^x + e^x = 0 \ \rightarrow e^x(x+1) = 0 \ \Rightarrow x = -1$$

القيمة الحرجة هي $x = -1$

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2)$$

$$f''(-1) = e^{-1} > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية للاقتران f هي $f(-1) = -e^{-1}$

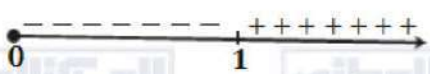
أتحقق من فهمي صفحة112

a

$$s(t) = t^3 - 3t + 3 \, , t \geq 0$$

$$v(t) = 3t^2 - 3 = 0 \ \Rightarrow t = 1$$

إشارة $v(t)$



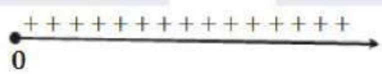
يتحرك الجسم في الاتجاه السالب في الفترة $(0, 1)$

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب في الفترة $(1, \infty)$

b

$$a(t) = 6t = 0 \ \Rightarrow t = 0$$

إشارة $a(t)$



تكون سرعة الجسم متزايدة في الفترة $(0, \infty)$ ولا تتناقص أبدًا.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 112	
1	قيم x الحرجة هي: $x = 3$(المشتقة عندها غير موجودة) ، ولا توجد قيم تكون عندها $f'(x) = 0$ توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$ توجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = 3.5$
2	ألاحظ أن المشتقة تساوي صفرًا عند $x = 3$، و$x = 6$، وأنها غير موجودة عند $x = 4$، إذن توجد 3 قيم حرجة هي $x = 3$، و$x = 4$، و$x = 6$ توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 4$ هي $g(4) = 1$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ هي $g(3) = 4$ ، وعند $x = 6$ هي$g(6) = 3$ لا توجد قيمة عظمى مطلقة.
3	قيم x الحرجة هي: $x = 1, x = 2$ (المشتقة عندهما غير موجودة) توجد قيمة صغرى مطلقة هي $h(-1) = -2$ توجد قيمة عظمى مطلقة هي $h(3) = 3$ لا توجد قيم قصوى محلية
4	$f(x) = 1 + 6x - 3x^2, \qquad [0, 4]$ $f'(x) = 6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1$ وتكون قيم x الحرجة هي: $x = 1$ $f(0) = 1$ $f(1) = 4$ $f(4) = -23$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 4$ هي $f(4) = -23$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 1$ هي $f(1) = 4$

5	$f(x) = (x+3)^{\frac{2}{3}} - 5, \quad [-3, 3]$ $f'(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+3}}$ $f'(x)$ لا تساوي صفرًا لأي قيمة في الفترة $(-3, 3)$، وهي غير موجودة عند $x = -3$ ولا توجد قيم حرجة في الفترة $(-3, 3)$. $f(-3) = -5$ $f(3) = \sqrt[3]{36} - 5$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3$ هي $f(-3) = -5$ للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = \sqrt[3]{36} - 5 \approx -1.7$
6	$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad [-2, 2]$ $f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ القيم الحرجة هي: $x = 0$ $f(-2) = \frac{4}{5}$ $f(0) = 0$ $f(2) = \frac{4}{5}$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$ و $x = -2$ هي $\frac{4}{5}$
7	$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad [8, 64]$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(x)$ موجودة ولا تساوي صفرًا لأي عدد x،وهي موجبة لجميع قيم x في $(8, 64)$، و$f(x)$ متزايد $f(8) = 2, \quad f(64) = 4$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 8$ هي $f(8) = 2$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 64$ هي $f(64) = 4$

8	$f(x) = 2\cos x + \sin 2x, \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x) = -2\sin x + 2\cos 2x = -2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x) = 0$ $\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$ $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ $or \;\; \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$ القيمة الحرجة في الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$هي $x = \frac{\pi}{6}$ فقط. $f(0) = 2$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{2}$ هي $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = \frac{\pi}{6}$ هي $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$

9	$f(x)=\frac{e^x}{1+x^2},\quad [0,3]$ $f'(x)=\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}=0\Rightarrow e^x(x^2-2x+1)=0$ $\Rightarrow e^x(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$ القيم الحرجة هي $x=1$ $f(0)=1$ $f(1)=\frac{1}{2}e$ $f(3)=\frac{1}{10}e^3$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=1$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=3$ هي $f(3)=\frac{1}{10}e^3\approx 2.0$
10	$f(x)=\frac{\ln x}{x^2},\quad \left[\frac{1}{2},4\right]$ $f'(x)=\frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right)-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{e}$ القيمة الحرجة هي $x=\sqrt{e}$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=-4\ln 2\approx -2.8$ $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}\approx 0.18$ $f(4)=\frac{1}{16}\ln 4=\frac{1}{8}\ln 2\approx 0.09$ للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=\frac{1}{2}$ هي $f\left(\frac{1}{2}\right)=-4\ln 2\approx -2.8$ للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=\sqrt{e}$ هي $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}\approx 0.18$

11

$f(x) = \cos x, \quad \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$f'(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$

القيمة الحرجة هي $x = 0$

$f(0) = \cos(0) = 1$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(\frac{\pi}{3}) = 0.5$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$

وله قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}$ هي $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$

12

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad [-2, 2]$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

القيمة الحرجة هي $x = 0$

$f(-2) = 0$

$f(0) = 2$

$f(2) = 0$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2, x = 2$ هي 0

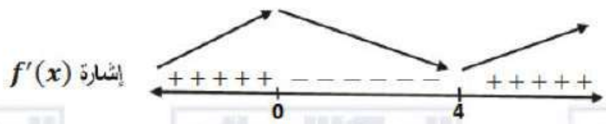
للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 2$

13

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 4$

القيم الحرجة هي $x = 0, x = 4$



f متزايد على $(-\infty, 0), (4, \infty)$

f متناقص على $(0, 4)$

له قيمة عظمى محلية هي $f(0) = -135$

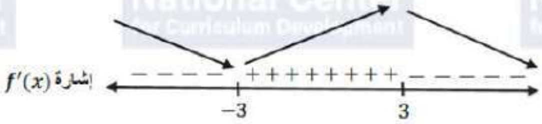
له قيمة صغرى محلية هي $f(4) = -167$

14

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+9)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow \frac{18-2x^2}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow x = 3 \;\; or \;\; x = -3$$

القيم الحرجة هي $x = 3, x = -3$



f متناقص على $(-\infty, -3), (3, \infty)$

f متزايد على $(-3, 3)$

له قيمة عظمى محلية هي $f(3) = \frac{1}{3}$

له قيمة صغرى محلية هي $f(-3) = -\frac{1}{3}$

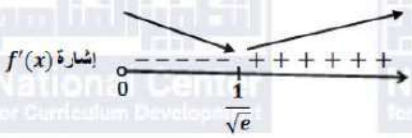
15

$$f(x) = x^2 \ln x \;, \qquad x > 0$$

$$f'(x) = (x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2x) = 0 \Rightarrow x(1 + 2\ln x) = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

القيمة الحرجة هي $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$



f متزايد على $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$

f متناقص على $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

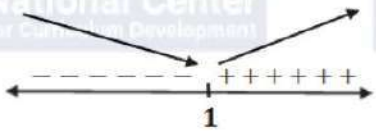
<table>
<tr>
<td>16</td>
<td>

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}=0 \quad \Rightarrow x=1$

القيمة الحرجة هي $x=1$

إشارة $f'(x)$



f متزايد على $(1,\infty)$

f متناقص على $(-\infty,1)$

له قيمة صغرى محلية هي $f(1)=1$

</td>
</tr>
<tr>
<td>17</td>
<td>

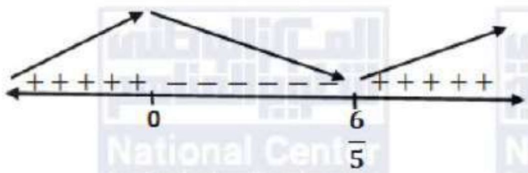
$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-3)=\ x^{\frac{5}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x)=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow 5x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{6}{5}$

وكذلك $f'(x)$ غير موجودة عند $x=0$

يوجد له قيمتان حرجتان هما $x=0$، و $x=\frac{6}{5}$

إشارة $f'(x)$



f متزايد على $(-\infty,0),\left(\frac{6}{5},\infty\right)$

f متناقص على $\left(0,\frac{6}{5}\right)$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{6}{5}\right)=-\frac{9}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

له قيمة عظمى محلية هي $f(0)=0$

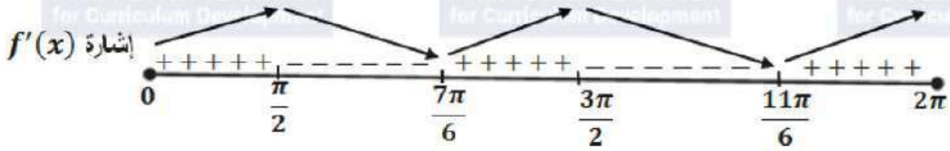
</td>
</tr>
</table>

18

$f(x) = \sin^2 x + \sin x, [0, 2\pi]$

$f'(x) = 2\cos x \sin x + \cos x = \cos x\,(2\sin x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \; or \; \sin x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$



f متزايد على $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$

f متناقص على $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}, f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

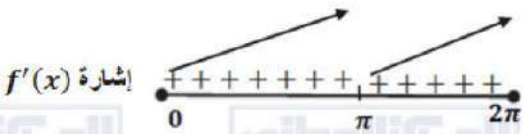
له قيمتان عظميان محليتان هما $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

19

$f(x) = x + \sin x, [0, 2\pi]$

$f'(x) = 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

القيمة الحرجة هي $x = \pi$



f متزايد على $(0, 2\pi)$
ليس له قيم قصوى محلية

20

$f(x) = x^3 - 12x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12$
$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

f مقعر للأعلى في $(0, \infty)$
f مقعر للأسفل في $(-\infty, 0)$
للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0, 1)$

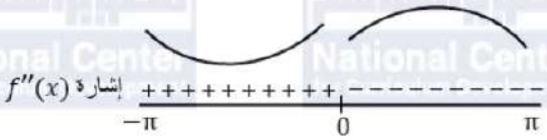
21

$f(x) = \sin x \ , [-\pi, \pi]$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\pi, x = 0, x = \pi$



إذن، منحنى $f(x)$ مقعر لأعلى في $(-\pi, 0)$، ومقعر لأسفل في $(0, \pi)$،

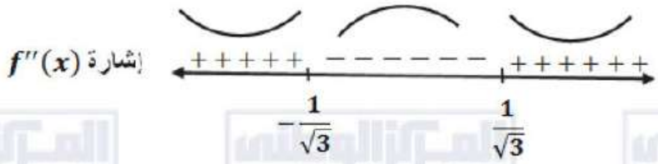
وتوجد له نقطة انعطاف هي $(0, 0)$.

22

$$f(x) = \frac{3}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(-6) - (-24x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{18x^2-6}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



f مقعر للأعلى على $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

f مقعر للأسفل على $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

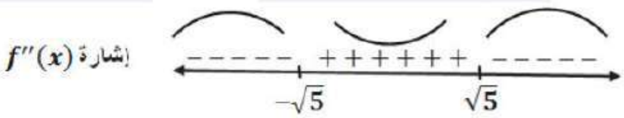
وله نقطتا انعطاف هما: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$

23

$$f(x) = \ln(x^2+5)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+5)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{10-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$



f مقعر للأعلى على $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$ ،

f مقعر للأسفل على $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right), \left(\sqrt{5}, \infty\right)$ ،

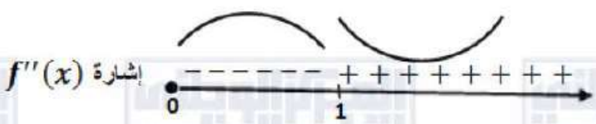
وله نقطتا انعطاف هما: $\left(\sqrt{5}, \ln 10\right)$ و $\left(-\sqrt{5}, \ln 10\right)$

24

$$f(x) = \sqrt{x}(x+3) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}, \quad x \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad x > 0$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow x = 1$$



f مقعر للأعلى على $(1, \infty)$ ،

f مقعر للأسفل على $(0, 1)$ ،

وله نقطة انعطاف هي: $(1, 4)$

<table>
<tr><td>25</td><td>

$f(x) = xe^x$

$f'(x) = xe^x + e^x$

$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$

fمقعر للأعلى على$(-2, \infty)$ ،

fمقعر للأسفل على$(-\infty, -2)$،

وله نقطة انعطاف هي: $(-2, -2e^{-2})$

</td></tr>
<tr><td>26</td><td>

$f(x) = 6x - x^2$

$f'(x) = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(3) = -2 < 0$

للاقتران f قيمة عظمى محلية هي 9 $f(3) = 9$

</td></tr>
<tr><td>27</td><td>

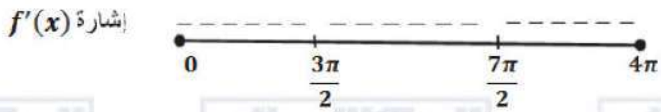
$f(x) = \cos x - x, [0, 4\pi]$

$f'(x) = -\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}$

$f''(x) = -\cos x$

$\Rightarrow f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 , f''\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0$

ويكون اختبار المشتقة الثانية قد فشل في تحديد نوع القيم $f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى والذي يعتمد على دراسة إشارتها:



نلاحظ أن $f'(x)$ لا تغير إشارتها أبدًا، إذن ليس للاقتران f قيم قصوى محلية .

</td></tr>
</table>

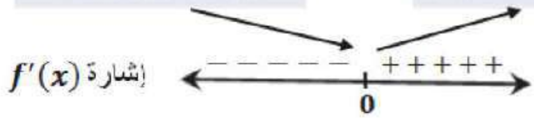
28	$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ $f'(x)=\frac{(x-1)(2x)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2$ $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$ $f''(0)=-2<0 \quad ,f''(2)=2>0$ للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(0)=0$ وله قيمة صغرى محلية هي $f(2)=4$
29	$f(x)=x\ln x$ $f'(x)=(x)\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=1+\ln x=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}$ $f''(x)=\frac{1}{x}$ $\rightarrow f''(e^{-1})=e>0$ للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(e^{-1})=-e^{-1}$
30	$f(x)=\frac{x}{2^x}$ $f'(x)=\frac{2^x-(x)(2^x\ln 2)}{2^{2x}}=2^{-x}-(x)(2^{-x}\ln 2)=2^{-x}(1-x\ln 2)=0$ $\Rightarrow x=\frac{1}{\ln 2}$ $f''(x)=(2^{-x})(-\ln 2)+(1-x\ln 2)(-2^{-x}\ln 2)$ $=-2^{-x}\ln 2\,(2-x\ln 2)$ $\Rightarrow f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=-2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2\left(2-\frac{1}{\ln 2}\times\ln 2\right)=-2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2<0$ للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$

31

$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

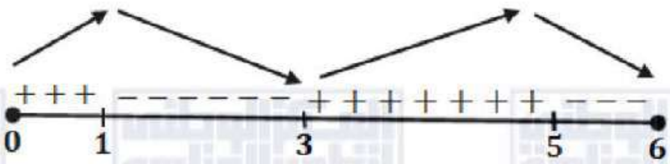
$f'(x)$ لا تساوي صفرًا أبدًا، لكنها غير موجودة عند $x = 0$ ، فلا يمكن تطبيق اختبار المشتقة الثانية لمعرفة القيم القصوى، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى بدراسة إشارتها:



للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(0) = -3$

32

نلاحظ من الرسم المعطى أن $f'(x) = 0$ عند $x = 1, x = 3, x = 5$، وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:



للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x = 3$

للاقتران f قيمة عظمى محلية عند $x = 1, x = 5$

33

الاقتران f متزايد على $(0, 1), (3, 5)$، ومتناقص على $(1, 3), (5, 6)$

34

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

الاقتران f كثير حدود فهو قابل للاشتقاق على R ، بما أن كل نقطة قيمة قصوى هي نقطة حرجة، فإن $f'(1) = 0$ و $f'(-3) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-3) = 27 - 6a + b = 0 \quad ....(1)$

$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \quad ....(2)$

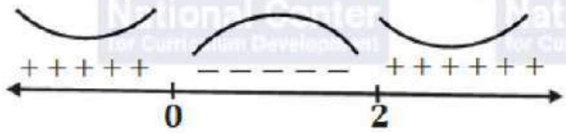
النقطة (1, -14) تقع على منحنى الاقتران، لذا فإن $f(1) = -14$

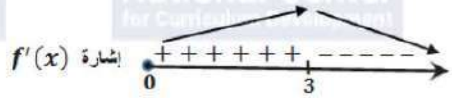
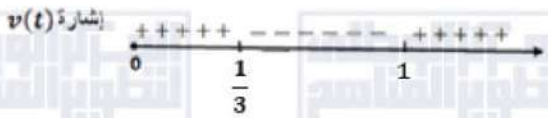
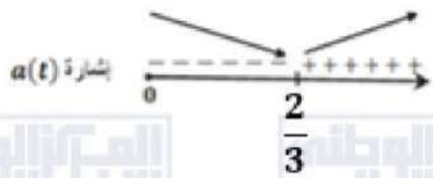
$f(1) = 1 + a + b + c = -14 \quad ....(3)$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد أنّ: $a = 3$

ثم بتعويض قيمة a في المعادلة (2) نجد أنّ: $b = -9$

ثم بتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أنّ: $c = -9$

35	$f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{b}{x}$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{b}{x^2}$ $f''(x)=\frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}+\frac{2b}{x^3}$ بما أنه يوجد نقطة انعطاف عند $x=3$ فإما أن يكون $f''(3)=0$ أو $f''(3)$ غير موجودة، لكن بالنظر إلى قاعدة الاقتران f'' فإن $f''(x)$ غير موجودة عند $x=-1$ و $x=0$ ، إذن $f''(3)=0$ ، ومنه: $f''(3)=\frac{-1}{32}+\frac{2b}{27}=0 \quad \Rightarrow b=\frac{27}{64}$
36	نلاحظ من الشكل أنّ $f''(x)=0$ عند $x=0$ و $x=2$ ، وأنّ إشارة $f''(x)$ على النحو الآتي: إشارة $f''(x)$  fمقعر للأسفل على $(0,2)$ ، fمقعر للأعلى على $(-\infty,0),(2,\infty)$
37	توجد نقطتا انعطاف عند $x=0$ و $x=2$
38	يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t)=0$ أي: $s'(t)=0$ وهذا يحدث عندما يكون لمنحنى $s(t)$ مماس أفقي، أي عند $t=2$ و $t=6$
39	يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أو السالب تبعًا لإشارة $s'(t)=v(t)$، وهذه الإشارة ترتبط بكون منحنى $s(t)$ متزايدًا أو متناقصًا: يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: $(6,7)$,$(0,2)$لأن اقتران الموقع متزايد فيهما. ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(2,6)$ لأن اقتران الموقع متناقص فيها.
40	تتزايد $v(t)$ عندما $s''(t)=v'(t)$ يكون موجبًا أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرًا للأعلى، أي في الفترة $(4,7)$ تتناقص $v(t)$ عندما $s''(t)=v'(t)$ يكون سالبًا أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرًا للأسفل، أي في الفترة $(0,4)$

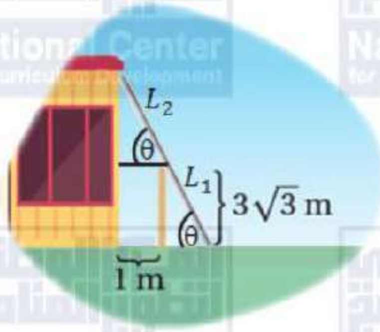
41	$f(x) = \dfrac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150$ $f'(x) = \dfrac{-1500(2x-6)}{(x^2-6x+10)^2} = 0 \quad \Rightarrow x = 3$ القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$ لأن المقام لا يساوي صفرًا  بدراسة إشارة $f'(x)$ نلاحظ أن للاقتران f قيمة عظمى عندما $x = 3$ ، أي أنّ عدد مكبرات الصوت اللازم إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح أسبوعي ممكن هو 3
42	$s(t) = t^3 - 2t^2 + t, t \geq 0$ $v(t) = 3t^2 - 4t + 1 = 0 \quad \Rightarrow (3t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow t = 1, t = \dfrac{1}{3}$  يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: $\left(0, \frac{1}{3}\right), (1, \infty)$ ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
43	تتزايد $v(t)$ وتتناقص وفقًا لإشارة $a(t) = v'(t)$ $a(t) = 6t - 4 = 0 \quad \Rightarrow t = \dfrac{2}{3}$  تتزايد سرعة الجسم في الفترة $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ وتتناقص على الفترة $\left(0, \frac{2}{3}\right)$
44	تكون $f'(x) > 0$ ، و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متزايدًا ومنحناه مقعرًا للأعلى. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: l
45	تكون $f'(x) < 0$ ، و $f''(x) < 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصًا ومنحناه مقعرًا للأسفل. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: p

46	تكون $f'(x) < 0$ ، و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصًا ومنحناه مقعرًا للأعلى. النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي k:
47	نلاحظ من الرسم أنّ $f'(x) = 0$ عند $x = -3\ , x = 1, x = 5$ ، وأنّ إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:  للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x = -3$ وله قيمة عظمى محلية عند $x = 5$
48	الاقتران f متزايد على $(-3, 5)$ ومتناقص على $(-\infty, -3), (5, \infty)$
49	يكون منحنى f مقعرًا للأعلى في الفترة (أو الفترات) التي يكون فيها f' متزايدًا حيث تكون في هذه الفترات مشتقة f' أي f'' موجبة. يتضح من الرسم أنّ f' متزايدة في الفترتين: $(-\infty, -2), (1, 4)$ وعندما تكون f' متناقصة في فترة ما تكون f'' سالبة ويكون منحنى f مقعرًا للأسفل، ويتضح من الرسم أنّ f' متناقصة في الفترتين: $(-2, 1), (4, \infty)$ إذن، منحنى f مقعر للأسفل في الفترتين $(-2, 1), (4, \infty)$ ومقعر للأعلى في الفترتين $(-\infty, -2), (1, 4)$.
50	f له ثلاث نقاط انعطاف عند $x = -2, x = 1, x = 4$ لأن للاقتران f' قيم قصوى عندها.
51	$h(x)$ هو مشتقة $g(x)$ أي $g'(x) = h(x)$ وليس العكس. التبرير: بما أن أحدهما هو مشتقة الآخر (من المعطيات)، يكفي ملاحظة الفترة $x < -2$ حيث g متزايد و h أكبر من الصفر، وهذا ينسجم مع كون h هو مشتقة g بينما في هذه الفترة نفسها h متناقص و g لا يحافظ على الإشارة السالبة، وهذا يؤكد أن g ليس مشتقة h والنظر لباقي الفترات بالمنهجية نفسها يؤدي إلى ذات النتيجة. كذلك للاقتران g قيمة عظمى محلية عند $x = -2$، ونلاحظ أن $h(-2) = 0$، ما يؤكد أن $g'(x) = h(x)$.

الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم صفحة 116

ليكن θ قياس الزاوية بين السلم والأرض، L طول السلم، كما في الشكل:



$$\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{L_1}\ ,\cos\theta = \frac{1}{L_2}\ ,0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \ \Rightarrow 3\sqrt{3}\cos^3\theta = \sin^3\theta$$

$$\Rightarrow \tan^3\theta = 3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ قيمة حرجة وحيدة، نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{d\theta}$:

للاقتران L قيمة صغرى محلية عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$

إذن أقل طول ممكن للسلم هو $L\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 6 + 2 = 8\text{ m}$

أتحقق من فهمي صفحة 118

ليكن حجم الصندوق V ومساحة سطحه الكلية A

$$A = 4xh + x^2 = 1080 \quad \Rightarrow h = \frac{1080 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{1080 - x^2}{4x}\right) = \frac{1}{4}(1080x - x^3), \quad 0 \le x \le \sqrt{1080}$$

$$V'(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{360}$$

القيمة الحرجة هي: $\sqrt{360}$

أجد حجم الصندوق عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$V(0) = 0$$

$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}(1080\sqrt{360} - 360\sqrt{360}) = 180\sqrt{360} = 1080\sqrt{10}$$

$$V(\sqrt{1080}) = 0$$

إذن يكون الحجم أكبر ما يمكن عندما $x = 6\sqrt{10}$ cm وعندها يكون الارتفاع $h = 3\sqrt{10}$ cm

أتحقق من فهمي صفحة 121

ليكن طول السياج L ومساحة الحظيرة A

$$A = xy = 245000 \quad \Rightarrow y = \frac{245000}{x}$$

$$L = x + 2y$$

$$L(x) = x + \frac{490000}{x}, x > 0$$

$$L'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$

$$L'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = 700$$

قيمة x الحرجة هي: 700

$$L''(x) = \frac{980000}{x^3} \Rightarrow \quad L''(700) = \frac{980000}{(700)^3} > 0$$

إذن، يكون طول سياج أقل ما يمكن عندما $x = 700$ m و $y = \frac{245000}{700} = 350$ m

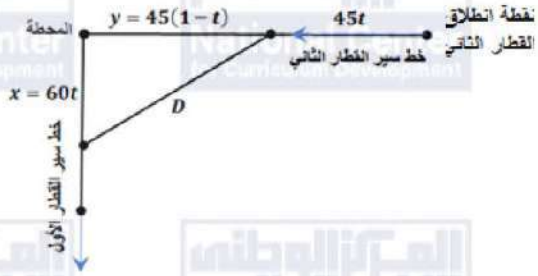
أتحقق من فهمي صفحة 123

نفرض x بعد القطار الأول عن المحطة، y بعد القطار الثاني عن المحطة

ونفرض D البعد بين القطارين،

القطار الثاني استغرق ساعة واحدة للوصول إلى المحطة،

إذن فقد انطلق من نقطة تبعد 45 كيلومترًا عنها،



بعد t ساعة من انطلاقهما يكون: $x = 60t$ ، ويكون $y = 45 - 45t = 45(1-t)$

$$D(t) = \sqrt{(60t)^2 + \left(45(1-t)\right)^2} = \sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2} \quad ,0 \le t \le 1$$

$$D'(t) = \frac{7200t - 4050(1-t)}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}} = \frac{11250t - 4050}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$D'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{4050}{11250} = \frac{9}{25}$$

القيمة الحرجة هي: $t = \frac{9}{25}$

أجد المسافة D عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$D(0) = \sqrt{2025} = 45$$

$$D(1) = \sqrt{3600} = 60$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{3600\left(\frac{9}{25}\right)^2 + 2025\left(1 - \frac{9}{25}\right)^2} = 36$$

إذن يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما عندما $t = \frac{9}{25}\ h$ أي بعد 21 دقيقة و36 ثانية

وتكون الساعة حينئذ $10:21:36$

أتحقق من فهمي صفحة 125

ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة هو x دينار

أي إن مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو $350 - x$ دينار

وبالتالي تحصل زيادة في عدد الشاشات المبيعة مقدارها :

$\frac{20}{10}(350 - x) = 700 - 2x$ شاشة

إذن عدد الشاشات المبيعة سيكون: $200 + 700 - 2x = 900 - 2x$

الإيراد= عدد الشاشات المبيعة x سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم:

$$R(x) = (900 - 2x)x = 900x - 2x^2$$
$$R'(x) = 900 - 4x$$
$$R'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = 225$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي 225

$$R''(x) = -4 \quad \rightarrow \quad R''(225) = -4 < 0$$

نلاحظ أن اقتران الإيراد له قيمة عظمى عندما $x = 225$

إذن يحقق المتجر أعلى إيراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 دينارًا

حل آخر:

نفرض أنه تم إجراء الخصم x مرة، فسيكون سعر بيع الشاشة (350−10x)، وسيكون عدد الشاشات المبيعة (200 + 20x)

وليكن الإيراد R(x)، فإن:

$$R(x) = (350 - 10x)(200 + 20x), 0 \le x \le 35$$
$$= 70000 + 5000x - 200x^2$$
$$R'(x) = 5000 - 400x = 0 \Rightarrow x = 12.5$$

قيمة x الحرجة هي 12.5 ، ولإيجاد السعر الذي يحقق أعلى إيراد نقارن قيمة الإيراد عند القيمة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

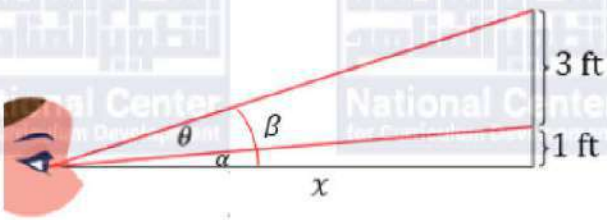
$$R(0) = 70000, \ R(35) = 0$$
$$R(12.5) = (350 - 125)(200 + 250) = 101250$$

إذن، يكون الإيراد أعلى ما يمكن عندما $x = 12.5$، ويكون سعر بيع الشاشة

$(350 - 125)$ أي 225 دينارًا

أتحقق من فهمي صفحة 129

نسمي الأبعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل:



$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{4}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} \quad , x > 0$$

$$= \frac{3x}{x^2 + 4}$$

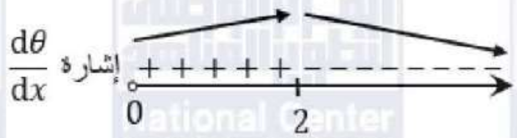
$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+4)(3) - 3x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-3x^2 + 12}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-3x^2 + 12}{(x^2+4)^2}\cos^2\theta = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

لكن $\cos^2\theta \neq 0$ لأن $\theta < \frac{\pi}{2}$.

إذن، يوجد قيمة حرجة وحيدة هي $x = 2$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى، وندرس إشارة $\frac{d\theta}{dx}$



إذن، يجب أن تبتعد سارة عن الجدار مسافة 2 ft لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن.

أتحقق من فهمي صفحة 128

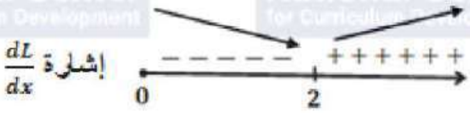
لتكن النقطة (x,y) على منحنى $f(x)=\sqrt{8x}$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(4,2)$ هي L حيث:

$$L=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x-4+\left(\sqrt{8x}-2\right)\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}}=\frac{x-\frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx}=0\Rightarrow x=\frac{8}{\sqrt{8x}}\Rightarrow x\sqrt{8x}=8\Rightarrow 8x^3=64\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{dx}$



إذن أقرب نقطة من نقاط المنحنى f للنقطة $(4,2)$ هي: $(2,4)$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 128

1

$$V(x)=(12-x)(9-2x)x=2x^3-33x^2+108x$$

2

أصفار الاقتران $V(x)$ هي: $x=0, x=\frac{9}{2}, x=12$

مجال اقتران الحجم هو قيم x التي تجعل $V(x)\geq 0$، ومجال هذا الاقتران هنا هو: $0\leq x\leq\frac{9}{2}$

لأنه عندما يكون $\frac{9}{2}<x<12$ ، يكون $V(x)<0$.

3

$$V'(x)=6x^2-66x+108$$

$$V'(x)=0\quad\Rightarrow 6(x-9)(x-2)=0\quad\Rightarrow x=9\ ,x=2$$

القيمة 9 خارج المجال، إذن تُهمل، فتكون القيمة الحرجة الوحيدة ضمن المجال هي $x=2$

$$V''(x)=12x-66$$

$$V''(2)=12(2)-66=-42<0$$

وعليه فإن حجم الصندوق يكون أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده: 2 cm, 5 cm, 10 cm،

ويكون حجمه عندئذ $V(2)=100\ \text{cm}^3$

4

لتكن النقطة (x, y) على منحنى العلاقة $4x^2 + y^2 = 4$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(0, 1)$ هي L حيث:

$$L = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{\frac{4-y^2}{4} + y^2 - 2y + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2} \quad , y \in [-2, 2]$$

$$\frac{dL}{dy} = \frac{\frac{3}{4}y - 1}{\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}}$$

$$\frac{dL}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

إذن توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال $L(y)$ هي $y = \frac{4}{3}$

وبمقارنة $L(\frac{4}{3})$، مع $L(-2)$، و $L(2)$ نجد أن $L(\frac{4}{3})$ قيمة صغرى مطلقة لأن:

$$L(-2) = \sqrt{3 + 4 + 2} = 3$$

$$L(2) = \sqrt{3 - 4 + 2} = 1$$

$$L\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.82$$

تكون L قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $y = \frac{4}{3}$، وتكون $x = \mp\sqrt{\frac{4-y^2}{4}} = \mp\sqrt{\frac{4-\frac{16}{9}}{4}} = \mp\frac{\sqrt{5}}{3}$

إذن أقرب نقطتين من نقاط المنحنى إلى النقطة $(0, 1)$ هما: $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$، و $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$

5

المثلث قائم ومتطابق الضلعين، إذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته $\frac{\pi}{4}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ وهو يمر بالنقطة $A(1, 0)$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = 1 - x$

إذن، الإحداثي y للنقطة P هو $1 - x$

6

مساحة المستطيل = طوله × عرضه

$$A = 2xy = 2x(1 - x) = 2x - 2x^2 \quad , 0 \le x \le 1$$

7

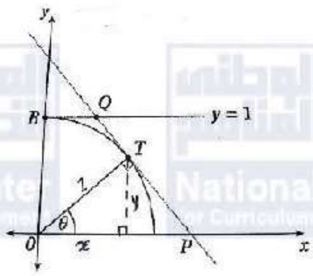
$$A'(x) = 2 - 4x$$

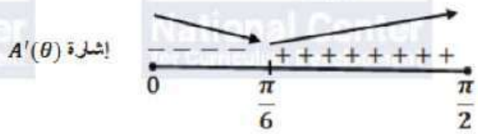
$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow 2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$A(0) = A(1) = 0, \quad A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

للاقتران A قيمة عظمى مطلقة هي: $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ، إذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

8	الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن هي: الطول: $2x = 1$، والعرض: $y = 1 - x = \frac{1}{2}$
9	$R(x) = x \times s(x) = 150x - 0.5x^2$
10	$P(x) = R(x) - C(x) = 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$ $= 150x - 0.75x^2 - 4000$
11	$P'(x) = 150 - 1.5x$ $P'(x) = 0 \Rightarrow 150 - 1.5x = 0 \Rightarrow x = 100$ $P''(x) = -1.5 \Rightarrow P''(100) = -1.5 < 0$ إذن لتحقيق أكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدلة، وتكون عندها قيمة الربح: $P(100) = 15000 - 7500 - 4000 = 3500$ JD
12	عندما $x = 100$ ، فإن سعر البدلة الواحدة يساوي: $s(100) = 150 - 0.5(100) = 100$ JD
13	نفرض زراعة x شجرة إضافية في كل فدّان، فسيكون عدد الأشجار في الفدّان $(20 + x)$ شجرة، ويصبح إنتاج كل شجرة $(30 - x)$ صندوقًا. ليكن $T(x)$ اقتران الانتاج الذي يساوي عدد الأشجار مضروبًا في إنتاج كل شجرة، فإن: $T(x) = (20 + x)(30 - x)$ $= 600 + 10x - x^2$ $T'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$ $T''(x) = -2 \Rightarrow T''(5) = -2 < 0$ إذن، يكون الانتاج أكبر ما يمكن عندما يكون عدد الشجرات الإضافية في الفدّان 5 شجرات، أي عند زراعة 25 شجرة في كل فدّان.
14	ليكن L طول قوس القطاع الدائري المظلل، إذن: $P = r + r + L = 2r + r\theta = r(2 + \theta)$
15	لتكن A مساحة القطاع الدائري المظلل، إذن: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ وبما أن $P = r(2 + \theta)$ فإن $\theta = \frac{P-2r}{r} = \frac{P}{r} - 2$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r} - 2\right) = \frac{1}{2}Pr - r^2$

16	$A'(r) = \frac{1}{2}P - 2r$ $A'(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}P - 2r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4}P$ $A''(r) = -2 \Rightarrow A''\left(\frac{1}{4}P\right) = -2 < 0$ تكون مساحة الحقل أكبر ما يمكن عندما $r = \frac{1}{4}P$
17	 $\sin\theta = \frac{y}{1}$,$\cos\theta = \frac{x}{1}$ $\rightarrow T(\cos\theta, \sin\theta)$ ميل OT يساوي $\tan\theta$ لأن زاوية ميله θ ؛ ومنه فإن ميل TP يساوي $\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-1}{\tan\theta}$ لأنه يعامد OT معادلة TP : $y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta) \Rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -\cos\theta\,(x - \cos\theta)$ $\Rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta$ $\Rightarrow y\sin\theta + x\cos\theta = 1$

18	$A = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB)$ لإيجاد OP نضع y=0 في معادلة المستقيم TP فنجد أنّ : $0 + x\cos\theta = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\cos\theta} = OP$ لإيجاد BQ نضع y=1 في معادلة المستقيم TP فنجد أنّ: $\sin\theta + x\cos\theta = 1 \Rightarrow x = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = BQ$ ومنه تكون مساحة شبه المنحرف هي: $A(\theta) = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1) = \frac{2-\sin\theta}{2\cos\theta}$
19	$A'(\theta) = \frac{(2\cos\theta)(-\cos\theta) - (2-\sin\theta)(-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos^2\theta}$ $A'(\theta) = 0 \ \Rightarrow 2\sin\theta - 1 = 0 \ \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$  تكون مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$

20	لتكن كمية الضوء المارّة خلال النافذة كاملة Q $Q = 3xy + \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3xy + \frac{1}{8}\pi x^2$ محيط النافذة بالإضافة إلى القطعة الفاصلة بين الجزأين هو L $L = 2x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 10 \Rightarrow y = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$ ومنه فإن كمية الضوء تصبح: $Q(x) = 3x\left(5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x\right) + \frac{1}{8}\pi x^2$ $= 15x - \left(3 + \frac{5\pi}{8}\right)x^2$ $Q'(x) = 15 - \left(6 + \frac{5\pi}{4}\right)x$ $Q'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{60}{24 + 5\pi}$ $Q''(x) = -(6 + \frac{5\pi}{4}) \Rightarrow Q''\left(\frac{60}{24 + 5\pi}\right) = -(6 + \frac{5\pi}{4}) < 0$ إذن تكون كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن عندما: $x = \frac{60}{24+5\pi}\ ,\ y = \frac{60+10\pi}{24+5\pi}$
21	$L = AE + EB = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(9 - x)^2 + 49}\ \ ,0 \leq x \leq 9$
22	$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{-(9 - x)}{\sqrt{(9 - x)^2 + 49}}$ $\frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} = \frac{9 - x}{\sqrt{(9 - x)^2 + 49}} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$

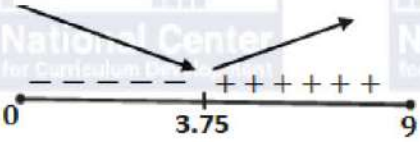
23

من السؤال السابق، بما أن $\sin\alpha = \sin\beta$ ، والزاويتان α و β حادتان، إذن $\beta = \alpha$

ومنه فإن $\tan\alpha = \tan\beta$ أي:

$$\frac{x}{5} = \frac{9-x}{7} \Rightarrow 7x = 45 - 5x \Rightarrow 12x = 45 \Rightarrow x = \frac{15}{4} = 3.75$$

إشارة $\frac{dL}{dx}$



إذن قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن هي 3.75 km

24

ليكن L طول AB ، النقاط A و B و P على استقامة واحدة، إذن المثلثان القائمان AQP, PRB متشابهان،

ينتج عن ذلك: $\frac{BR}{1} = \frac{8}{x} \to BR = \frac{8}{x}$

$$L = AP + PB = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{64 + \left(\frac{8}{x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\frac{64x^2 + 64}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{8}{x}\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\left(1 + \frac{8}{x}\right) \quad , x > 0$$

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1+x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(1 + \frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

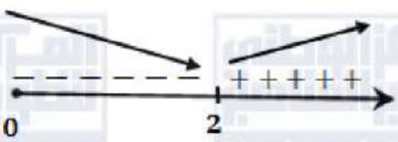
$$= \frac{-8\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

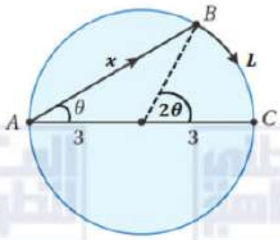
$$\Rightarrow 8(1+x^2) = 8x^2 + x^3$$

$$\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

إشارة $\frac{dL}{dx}$



إذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي: $x = 2$ km



المثلث ABC قائم الزاوية في B لأن الزاوية ABC محيطية على قطر، ومنه

فإن: $\cos\theta = \frac{x}{6}$

قياس الزاوية COB يساوي 2θ لأنها مركزية مشتركة مع المحيطية CAB

بالقوس نفسه.

ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول إلى النقطة C هو T

$$T = T_{A\to B} + T_{B\to C} = \frac{x}{3} + \frac{L}{6}$$

$$= \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6} = 2\cos\theta + \theta \quad ,0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

25 $$\frac{dT}{d\theta} = 1 - 2\sin\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

نقارن الزمن عند النقطة الحرجة مع الزمن عند طرفي المجال وهما $0, \frac{\pi}{2}$

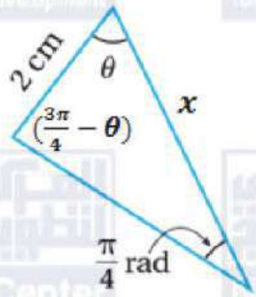
$$T(0) = 2 \text{ h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.25 \text{ h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \text{ h}$$

إذن القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، أي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس $\widehat{AB}$

كاملًا راكضًا على اليابسة دون تجديف في الماء.

26	ليكن طول الضلع الآخر من ضلعي الزاوية θ هو x، فيكون قياس الزاوية المقابلة له هو $(\pi - \theta - \frac{\pi}{4})$ أي $\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$ ولتكن مساحة هذا المثلث A ، فإنّ: $A = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\theta$ وبتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث ينتج أن:  $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)}$ $x = 2\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)$ $= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right)$ $= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$ $= 2(\cos\theta + \sin\theta)$ $A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$ $= 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$ $= 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta$ $= 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$ $= 2\cos\theta\sin\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$ $= \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$ **إذن، مساحة المثلث المعطى هي:** $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$
27	**المجال هو الفترة التي تكون فيها مساحة المثلث عددًا حقيقيًا موجبًا وهو هنا الفترة $(0, \frac{3\pi}{4})$ التي طرفاها جذري اقتران المساحة لأن المساحة عند هذين الحدين تكون صفرًا وعند أي عدد بينهما تكون عددًا موجبًا، فإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{6}$، تكون مساحة المثلث:** $A = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 \approx 1.37 > 0$

28	$A'(\theta) = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$ $2\sin 2\theta = -2\cos 2\theta$ $\tan 2\theta = -1 \Rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8}$ توجد قيم حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $\theta = \frac{3\pi}{8}$ لذلك نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال. $A(0) = \sin 0 - \cos 0 + 1 = 0$ $A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$ $A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2} + 1 = -1 - 0 + 1 = 0$ إذن، أكبر قيمة ممكنة (العظمى المطلقة) لمساحة المثلث هي : $A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = (1+\sqrt{2})\ \text{cm}^2$

اختبار نهاية الوحدة الثانية صفحة 132

1	b
2	c
3	c
4	d
5	b
6	b
7	d
8	c
9	$f(x) = 3x^2 - 2x^3 \quad , [-5, 1]$ $f'(x) = 6x - 6x^2$ $f'(x) = 0 \;\Rightarrow 6x(1 - x) = 0 \;\Rightarrow x = 0 \,, x = 1$ مجموعة قيم x الحرجة ضمن الفترة $(-5, 1)$ هي: $x = 0$ نقارن قيم الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي الفترة: $f(0) = 0$ $f(1) = 1$ $f(-5) = 75 + 250 = 325$ إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(-5) = 325$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(0) = 0$
10	$f(x) = \dfrac{x}{x+3} \quad , [-1, 6]$ $f'(x) = \dfrac{x + 3 - x}{(x+3)^2} = \dfrac{3}{(x+3)^2}$ $f'(x) > 0$ لجميع قيم x ولذا فإن $f(x)$ متصل ومتزايد على مجاله. ولا يوجد له قيم حرجة ضمن $(-1, 6)$، قيمه القصوى تكون عند طرفي مجاله. $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$ $f(6) = \dfrac{2}{3}$ إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(6) = \frac{2}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-1) = \frac{-1}{2}$

11

$f(x) = xe^{\frac{x}{2}} \quad , [-3, 1]$

$f'(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

$f'(x) = 0 \ \Rightarrow x = -2$

له قيمة حرجة وحيدة هي: $x = -2$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$f(-3) = -3e^{\frac{-3}{2}} = \frac{-3}{\sqrt{e^3}} \approx -0.6694$

$f(-2) = -2e^{-1} = \frac{-2}{e} \approx -0.7358$

$f(1) = e^{\frac{1}{2}} \quad \approx 1.6487$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(1) = e^{\frac{1}{2}}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-2) = \frac{-2}{e}$

12

$f(x) = 3\cos x \quad , [0, 2\pi]$

$f'(x) = -3\sin x$

$f'(x) = 0 \ \Rightarrow \sin x = 0 \ \Rightarrow x = 0 \, , x = \pi \, , 2\pi$

له قيمة حرجة وحيدة هي: $x = \pi$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$f(0) = 3$

$f(\pi) = -3$

$f(2\pi) = 3$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(0) = f(2\pi) = 3$ ،

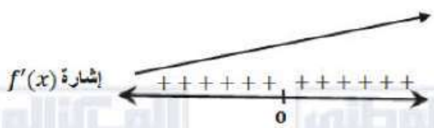
وقيمة صغرى مطلقة هي $f(\pi) = -3$

13

$f(x) = x^5 + x^3$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$

$f'(x) = 0 \ \Rightarrow x^2(5x^2 + 3) = 0 \ \Rightarrow x = 0$



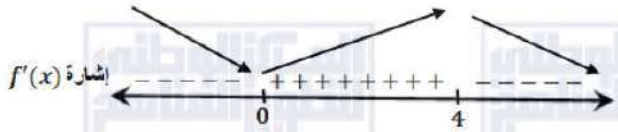
الاقتران f متزايد على R وليس له قيم قصوى محلية ولا مطلقة.

14

$f(x) = x^4 e^{-x}$

$f'(x) = -x^4 e^{-x} + 4x^3 e^{-x} = e^{-x} x^3 (4 - x)$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow x = 0 \,, x = 4$



الاقتران f متزايد على $(0,4)$ ومتناقص على $(-\infty,0)$ و$(4,\infty)$

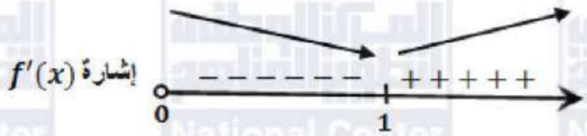
وله قيمة عظمى محلية هي $f(4) = \frac{256}{e^4}$ ، وقيمة صغرى محلية ومطلقة هي $f(0) = 0$

15

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x \,, \qquad x > 0$

$f'(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow \; x^3 = 1 \;\Rightarrow x = 1$



الاقتران f متزايد على $(1,\infty)$ ومتناقص على $(0,1)$

وله قيمة صغرى محلية ومطلقة هي $f(1) = \frac{1}{3}$

16

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow x = 1$

الاقتران مقعر للأعلى في $(1,\infty)$ ومقعر للأسفل في $(-\infty,1)$

وله نقطة انعطاف هي: $(1,-7)$

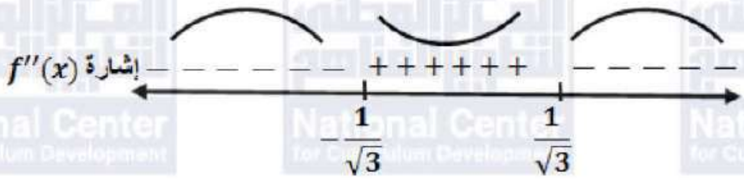
17

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\ \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



الاقتران مقعر للأعلى في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ومقعر للأسفل في $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$

وله نقطتا انعطاف هما: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$

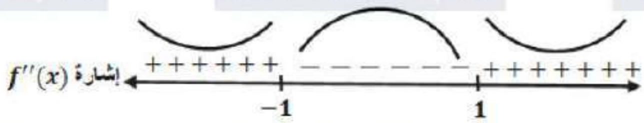
18

$$f(x)=(3-x^2)^2$$

$$f'(x)=2(3-x^2)(-2x)=4x^3-12x$$

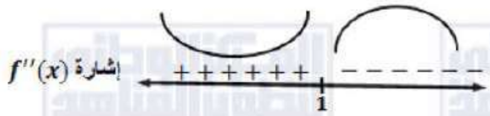
$$f''(x)=12x^2-12$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow x^2=1\ \Rightarrow x=\pm 1$$



الاقتران مقعر للأسفل في $(-1,1)$ ومقعر للأعلى في $(-\infty,-1)$ و $(1,\infty)$

وله نقطتا انعطاف هما: $(1,4)(-1,4)$

19	نلاحظ من الشكل أن إشارة الاقتران f'' كالآتي:  إذن منحنى f مقعر للأعلى في الفترة $(-\infty, 1)$ ومقعر للأسفل في الفترة $(1, \infty)$
20	للاقتران f نقطة انعطاف عند $x = 1$
21	سعر المنتج الواحد هو: $s(x) = 5 - 0.002x$ إذن اقتران الإيراد: $R(x) = x \times s(x) = 5x - 0.002x^2$
22	$P(x) = R(x) - C(x) = 5x - 0.002x^2 - 3 - 1.1x$ $= 3.9x - 0.002x^2 - 3$
23	$P'(x) = 3.9 - 0.004x$ $P'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3.9}{0.004} = \frac{3900}{4} = 975$ $P''(x) = -0.004 \Rightarrow P''(975) = -0.004 < 0$ إذن أكبر ربح ممكن يتحقق عند إنتاج وبيع 975 قطعة أكبر ربح ممكن يساوي: $P(975) = 3.9(975) - 0.002(975)^2 - 3 = 1898.25$ JD
24	$s(975) = 5 - 0.002(975) = 5 - 1.950 = 3.05$ JD
25	$(b, f(b))$ نقطة قيمة صغرى محلية $(c, f(c))$ نقطة قيمة عظمى محلية $(r, f(r))$ نقطة قيمة صغرى محلية ومطلقة $(s, f(s))$ نقطة قيمة عظمى مطلقة

26

ليكن y طول الضلع الثالث لهذا الحقل

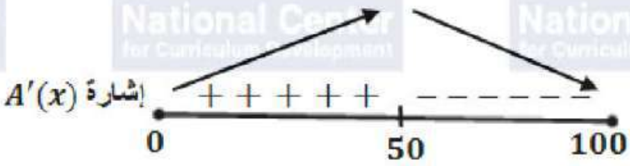
$$400 = x + 3x + y \Rightarrow 4x + y = 400$$

$$A = \frac{1}{2}(x + 3x)(y) = \frac{1}{2}(4x)(400 - 4x)$$

$$A(x) = 800x - 8x^2 \quad , 0 \le x \le 100$$

$$A'(x) = 800 - 16x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{800}{16} = 50$$



إذن أكبر مساحة ممكنة هي: $A(50)$

$$A(50) = 800(50) - 8(50)^2 = 20000 \text{ m}^2$$

27

المعدلات المعطاة: سرعة البالون $\frac{dy}{dt} = 1$ ft/s ، وسرعة الدراجة $\frac{dx}{dt} = 17$ ft/s

المطلوب: $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3}$

بعد t ثانية من مرور الدراجة يكون ارتفاع البالون فوق سطح الأرض هو: $y = 65 + t$

وتكون الدراجة قطعت مسافة أفقية هي: $x = 17t$

وتكون المسافة بين الدراجة والبالون هي s

ومن نظرية فيثاغورس نجد أن:

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$s^2 = (17t)^2 + (65 + t)^2$$

$$s = \sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(17t)(17) + 2(65 + t)(1)}{2\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}} = \frac{289t + 65 + t}{\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}}$$

$$= \frac{290t + 65}{\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}}$$

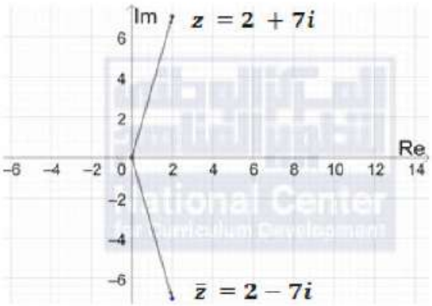
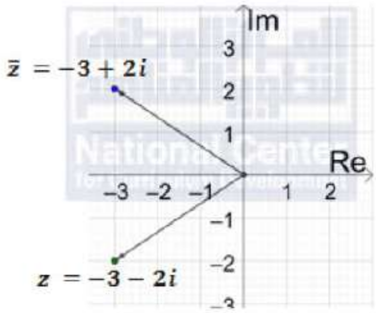
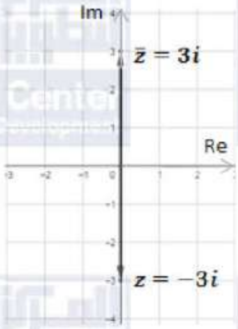
$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = \frac{290(3) + 65}{\sqrt{(17 \times 3)^2 + (65 + 3)^2}} = \frac{935}{85} = 11 \text{ ft/s}$$

إذن تتزايد المسافة بين البالون والدراجة بمعدل 11 قدمًا في الثانية وذلك بعد مرور 3 ثوانٍ من لحظة مرور الدراجة تحت البالون.

الوحدة الثالثة: الأعداد المركبة

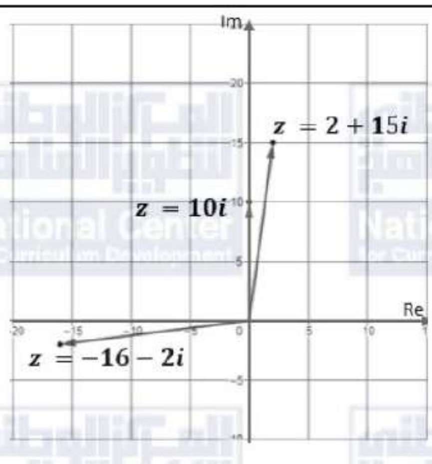
الدرس الأول: الأعداد المركبة

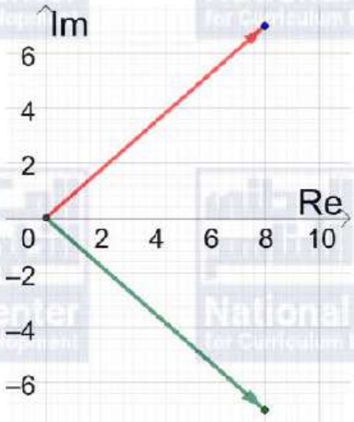
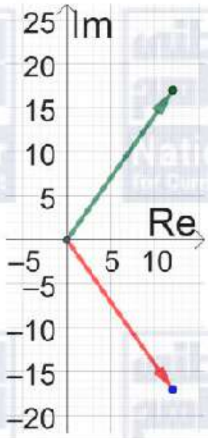
مسألة اليوم صفحة 136	
إذا تصورنا وجود جذر تربيعي للعدد -1 في مجموعة ما من مجموعات الأعداد، فإن: $\left(\sqrt{-1}\right)^2+1=-1+1=0$ وبالتالي يكون $\sqrt{-1}$ حلًا للمعادلة $x^2+1=0$	
أتحقق من فهمي صفحة 137	
a	$\sqrt{-75}=\sqrt{-1\times25\times3}=\sqrt{-1}\times\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5i\sqrt{3}$
b	$\sqrt{-49}=\sqrt{-1\times49}=\sqrt{-1}\times\sqrt{49}=7i$
أتحقق من فهمي صفحة 138	
a	$\sqrt{-27}\times\sqrt{-48}=\sqrt{-1\times27}\times\sqrt{-1\times48}$ $=i\sqrt{9\times3}\times i\sqrt{16\times3}$ $=i^2\sqrt{9\times3\times16\times3}$ $=36i^2=-36$
b	$\sqrt{-50}\times-4i=\sqrt{-1\times50}\times(-4i)$ $=5i\sqrt{2}\times(-4i)=-20\sqrt{2}i^2=20\sqrt{2}$
c	$i^{2021}=(i^2)^{1010}\times i=(-1)^{1010}\times i=i$
أتحقق من فهمي صفحة 140	
$x+5+(4y-9)i=12-5i \Rightarrow x+5=12$ و $4y-9=-5$ $\Rightarrow x=7, y=1$	

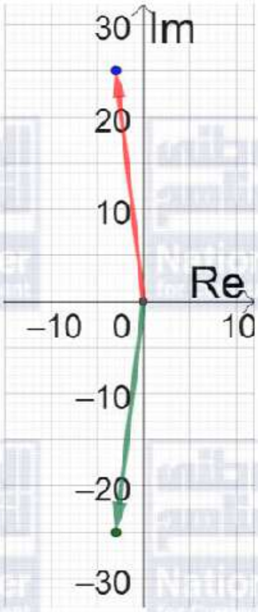
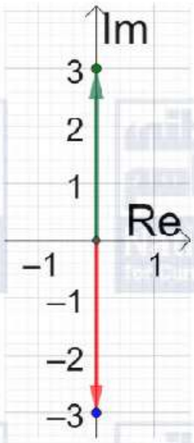
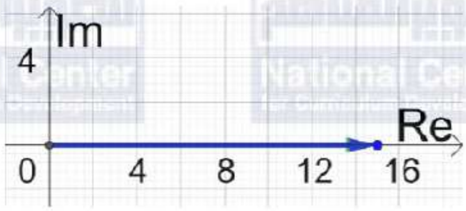
أتحقق من فهمي صفحة 141	
a	$z = 2 + 7i\ , \bar{z} = 2 - 7i$ 
b	$z = -3 - 2i\ , \bar{z} = -3 + 2i$ 
c	$z = -3i\ , \bar{z} = 3i$ 
أتحقق من فهمي صفحة 142	
a	$z = -3 - 6i\sqrt{2} \ \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{(-3)^2 + \left(-6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{81} = 9$
b	$z = -2i \ \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$
c	$z = 4 + \sqrt{-20} = 4 + \sqrt{-1} \times \sqrt{20} = 4 + i\sqrt{20}$ $\Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{(4)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$

	أتحقق من فهمي صفحة 146
a	$z = 8 + 2i$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) \approx 0.24$
b	$z = -5 + 12i$ $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1.97$
c	$z = -2 - 3i$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx -2.16$
d	$z = 8 - 8i\sqrt{3}$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = -\frac{\pi}{3} \approx -1.05$
	أتحقق من فهمي صفحة 148
a	$\|z\| = 4\sqrt{2}, Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
b	$z = -4 - 4i$ $\Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right) \approx -\frac{3\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
c	$z = 2i$ $\Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 148
1	$\sqrt{-19} = \sqrt{-1 \times 19} = \sqrt{-1} \times \sqrt{19} = i\sqrt{19}$
2	$\sqrt{-\frac{12}{25}} = \sqrt{-1 \times \frac{12}{25}} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}i$

3	$\sqrt{-\frac{9}{32}} = \sqrt{-1\times\frac{9}{32}} = \sqrt{-1}\times\sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}i$
4	$\sqrt{-53} = \sqrt{-1\times 53} = \sqrt{-1}\times\sqrt{53} = i\sqrt{53}$
5	$i^{26} = (i^2)^{13} = -1$
6	$i^{39} = (i^2)^{19}\times i = (-1)^{19}\times i = -i$
7	$(i)(2i)(-7i) = (2i^2)(-7i) = (-2)(-7i) = 14i$
8	$\sqrt{-6}\times\sqrt{-6} = \sqrt{-1\times 6}\times\sqrt{-1\times 6}$ $= i\sqrt{6}\times i\sqrt{6}$ $= 6i^2 = -6$
9	$\sqrt{-4}\times\sqrt{-8} = \sqrt{-1\times 4}\times\sqrt{-1\times 8}$ $= 2i\times 2\sqrt{2}i$ $= 4\sqrt{2}i^2 = -4\sqrt{2}$
10	$2i\times\sqrt{-9} = 2i\times\sqrt{-1\times 9}$ $= 2i\times 3i$ $= 6i^2 = -6$
11	$\frac{2+\sqrt{-4}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$
12	$\frac{8+\sqrt{-16}}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4+2i$
13	$\frac{10-\sqrt{-50}}{5} = \frac{10-5i\sqrt{2}}{5} = 2-i\sqrt{2}$
14	$z = 2+15i$ $\Rightarrow Re(z) = 2, Im(z) = 15$
15	$z = 10i$ $\Rightarrow Re(z) = 0, Im(z) = 10$
16	$z = -16-2i$ $\Rightarrow Re(z) = -16, Im(z) = -2$



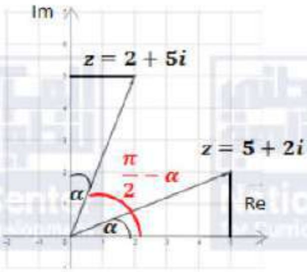
17	$z = -15 + 3i$, $\bar{z} = -15 - 3i$ 
18	$z = 8 - 7i$, $\bar{z} = 8 + 7i$ 
19	$z = 12 + 17i$, $\bar{z} = 12 - 17i$ 

20	$z = -3 - 25i$, $\bar{z} = -3 + 25i$ 
21	$z = 3i$, $\bar{z} = -3i$ 
22	$z = 15$, $\bar{z} = 15$ 
23	$z = -5 + 5i$ $\bar{z} = -5 - 5i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$
24	$z = 3 + 3\sqrt{3}i$ $\bar{z} = 3 - 3\sqrt{3}i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$

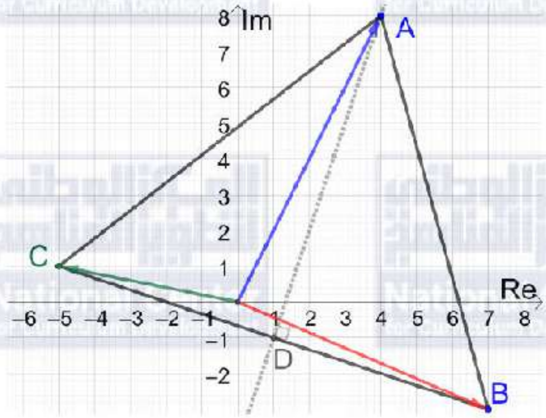
25	$z = 6 - 8i$ $\bar{z} = 6 + 8i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$
26	$x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i \Rightarrow x^2 - 1 = 8$ و $2y - 5 = 9$ $\Rightarrow x = \pm 3$ و $y = 7$
27	$2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i \Rightarrow 2x + 3y = 8$ و $x - 2y = -3$ $\Rightarrow x = 1$ و $y = 2$
28	$y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i\,(y - 4) \Rightarrow y - 3 = 9$ و $3x + 2 = y - 4$ $\Rightarrow y = 12$ و $x = 2$
29	$i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i \Rightarrow 2x - 5y = 3$ و $3x + 5y = 7$ $\Rightarrow x = 2$ و $y = \frac{1}{5}$
30	$z = 1$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$
31	$z = 3i$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$
32	$z = -5 - 5i$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4} \approx -2.36$
33	$z = 1 - i\sqrt{3}$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3} \approx -1.05$
34	$z = 6\sqrt{3} + 6i$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$
35	$z = 3 - 4i$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.93$

36	$z = -12 + 5i$ $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 2.75$
37	$z = -58 - 93i$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{93}{58}\right)\right) \approx -2.13$
38	$z = -4 + 2i$ $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) \approx 2.68$
39	$r = \|z\| = 2$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
40	$r = \|z\| = 3, \quad Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
41	$r = \|z\| = 7, Arg(z) = \frac{5\pi}{6}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
42	$r = \|z\| = 1, Arg(z) = \frac{\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
43	$z = 6$ $\Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{(6)^2 + (0)^2} = 6$ $Arg(z) = 0$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 6(\cos(0) + i\sin(0))$
44	$z = 1 + i$ $\Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

45	$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i \Rightarrow \overline{z_1} = 4\sqrt{3} + 4i$ $Arg(z_2) = Arg(\overline{z_1}) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ $z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 40\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $= 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 20\sqrt{3} + 20i$ إذن، $z_2 = 20\sqrt{3} + 20i$
46	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -10 + 10i$ إذن، $z = -10 + 10i$
47	بما أن z في الربع الثاني إذن $\bar{z}$ في الربع الثالث  فيكون قياس الزاوية الصغرى بينهما هو $\frac{\pi}{2}$
48	$z = -8 + 8i$ $\|z\| = \sqrt{(-8)^2 + (8)^2} = 8\sqrt{2}$
49	$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{3\pi}{4}$
50	$\|\bar{z}\| = \|z\| = 8\sqrt{2}$
51	$\bar{z} = -8 - 8i \rightarrow Arg(\bar{z}) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4}$ أو نكتب مباشرة: $Arg(\bar{z}) = -Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$

52	$Arg(5+2i) = \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ $Arg(-5-2i) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right) = -(\pi-\alpha) = -\pi+\alpha$
53	$Arg(5-2i) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = -\alpha$
54	$Arg(-5+2i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \pi - \alpha$
55	 يوضح الرسم المجاور العلاقة بين سعة كل من العددين $z = 5+2i$ ، و $z = 2+5i$ $Arg(2+5i) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$
56	$Arg(-2+5i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha$
57	$z = 5 + im \quad , \quad \lvert z\rvert = 6 , \quad 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(5)^2 + (m)^2} = \sqrt{25+m^2} = 6 \quad \rightarrow 25 + m^2 = 36 \quad \rightarrow m = \pm\sqrt{11}$ لكن $0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن z في الربع الأول، ومنه $m = \sqrt{11}$
58	$z = 5 + 3ik \quad , \lvert z\rvert = 13$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(5)^2 + (3k)^2} = \sqrt{25+9k^2} = 13 \quad \Rightarrow 25 + 9k^2 = 169 \quad \Rightarrow k = \pm 4$
59	$\lvert z_1\rvert = r = 4\sqrt{5} , \quad Arg(z_1) = \tan^{-1}(2) = \theta$ (نستنتج هنا أن z_1 يقع في الربع الأول، ففي الأرباع الأخرى تكون السعة بإشارة سالبة أو تحتوي π) $\tan\theta = 2 \quad \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \ , \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{5}(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 4 + 8i$

$z_1 = 4 + 8i$, $z_2 = 7 - 3i$, $z_3 = -5 + i$



$$AC = \sqrt{(4-(-5))^2 + (8-1)^2}$$
$$= \sqrt{130}$$
$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (8-(-3))^2}$$
$$= \sqrt{130}$$
$$BC = \sqrt{(7-(-5))^2 + (-3-1)^2}$$
$$= \sqrt{160}$$

60 ومنه فإن المثلث ABC متطابق الضلعين، نتّخذ BC قاعدةً له ونجد إحداثيي النقطة D نقطة منتصف القاعدة BC:

$$D\left(\frac{7-5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \rightarrow D(1,-1)$$

ارتفاع هذا المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأس ومنتصف القاعدة وهو $\overline{AD}$

$$AD = \sqrt{(4-1)^2 + (8--1)^2} = \sqrt{90}$$

لتكن مساحة المثلث ABCهي A فإن:

$$A = \frac{1}{2} \times \sqrt{160} \times \sqrt{90} = 60$$

إذن، مساحة المثلث ABC تساوي 60 وحدة مربعة.

الدرس الثاني: العمليات على الأعداد المركبة

مسألة اليوم صفحة 151
$A=-1+3i, \quad B=3+i$ $AB=(-1+3i)(3+i)$ $=-3-i+9i-3=-6+8i$ $\lvert AB\rvert=\sqrt{36+64}=10$ $Arg(AB)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right)\approx 2.21$

	أتحقق من فهمي صفحة 152
a	$(7+8i)+(-9+14i)=-2+22i$
b	$(11+9i)-(4-6i)=7+15i$
	أتحقق من فهمي صفحة 153
a	$-3i(4-5i)=-12i+15i^2=-15-12i$
b	$(5+4i)(7-4i)=35-20i+28i-16i^2=35+8i+16=51+8i$
c	$(3+6i)^2=9+36i+36i^2=9+36i-36=-27+36i$
	أتحقق من فهمي صفحة 154
a	$\frac{-4+3i}{1+i}=\frac{-4+3i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$ $=\frac{-4+4i+3i-3i^2}{1-i^2}$ $=\frac{-4+7i+3}{1+1}$ $=\frac{-1+7i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$

b	$\frac{2-6i}{-3i}=\frac{2-6i}{-3i}\times\frac{i}{i}$ $=\frac{2i-6i^2}{-3i^2}$ $=\frac{2i+6}{3}=2+\frac{2}{3}i$
c	$\frac{7i}{4-4i}=\frac{7i}{4-4i}\times\frac{4+4i}{4+4i}$ $=\frac{28i+28i^2}{16-16i^2}$ $=\frac{28i-28}{16+16}$ $=\frac{28i-28}{32}=-\frac{7}{8}+\frac{7}{8}i$
أتحقق من فهمي صفحة 156	
a	$6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $=6\times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
b	$6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ $=\frac{6}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)\right)$ $=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

	أتحقق من فهمي صفحة 157
a	$\sqrt{-5-12i} = x + iy \Rightarrow -5-12i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ $\Rightarrow -5-12i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow -5 = x^2 - y^2$ و $-12 = 2xy$ $y = -\frac{6}{x}$ $x^2 - y^2 = -5 \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$ $\Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ $\Rightarrow (x^2+9)(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ عندما $x = 2$ ، فإن $y = -3$، وعندما $x = -2$ ، فإن $y = 3$، إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5-12i$ هما: $-2+3i$, $2-3i$
b	$\sqrt{-9i} = x + iy \Rightarrow -9i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ $\Rightarrow -9i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow 0 = x^2 - y^2$ و $-9 = 2xy$ $y = -\frac{9}{2x}$ $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0$ $\Rightarrow 4x^4 - 81 = 0$ $\Rightarrow (2x^2+9)(2x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ عندما $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$، وعندما $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$، إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-9i$ هما: $-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$, $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$

c

$$\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=x+iy \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=x^2-y^2+2ixy$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}=x^2-y^2 \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}=2xy$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4x}$$

$$x^2-y^2=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow x^2-\frac{3}{16x^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 16x^4+8x^2-3=0$$

$$\Rightarrow (4x^2-1)(4x^2+3)=0 \quad \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

عندما $x=\frac{1}{2}$ ، فإن $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$، وعندما $x=-\frac{1}{2}$ ، فإن $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$،

إذن، الجذران التربيعيان للعدد المركب $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ هما: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أتحقق من فهمي لمثال 6 صفحة 161

$$z^3-z^2-7z+15=0$$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

بالتعويض، نجد أن العدد -3 يحقق المعادلة لأن: $(-3)^3-(-3)^2-7(-3)+15=0$

إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ:

$$z^3-z^2-7z+15=(z+3)(z^2-4z+5)=0$$

$$z=-3 \ , z=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=2\pm i$$

إذن لهذه المعادلة 3 جذور هي: $-3, 2+i, 2-i$

أتحقق من فهمي لمثال 7 صفحة 161
$x = 2 \pm i$ $x - 2 = \pm i$ $(x-2)^2 = -1$ $x^2 - 4x + 4 = -1$ $x^2 - 4x + 5 = 0$ بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة المعطاة$(x^2 + ax + b = 0)$ نجد أنّ: $a = -4, \quad b = 5$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 161	
1	$(7+2i)+(3-11i) = 10-9i$
2	$(5-9i)-(-4+7i) = 9-16i$
3	$(4-3i)(1+3i) = 4+12i-3i+9 = 13+9i$
4	$(4-6i)(1-2i)(2-3i) = (4-6i)(2-3i-4i-6)$ $= (4-6i)(-4-7i)$ $= -16-28i+24i-42$ $= -58-4i$
5	$(9-2i)^2 = 81-36i-4 = 77-36i$
6	$\frac{10}{3-i} = \frac{10}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$ $= \frac{30+10i}{9+1}$ $= \frac{30+10i}{10}$ $= 3+i$
7	$6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $= 12\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 12\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

8	$\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ $=\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}\right)$ $=\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$
9	$12\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\div 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $=\frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$
10	$11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
11	$(a+6i)+(7-bi)=-2+5i$ $a+7+(6-b)i=-2+5i \Rightarrow a+7=-2$ و $6-b=5$ $\Rightarrow a=-9\,,b=1$
12	$(11-ia)-(b-9i)=7-6i$ $11-b+(9-a)i=7-6i \Rightarrow 11-b=7$ و $9-a=-6$ $\Rightarrow b=4\,,a=15$

13	$(a+ib)(2-i)=5+5i$ $2a+b+(2b-a)i=5+5i \Rightarrow 2a+b=5$ و $2b-a=5$ $\Rightarrow b=3\,,a=1$ طريقة ثانية للحل: $a+ib=\dfrac{5+5i}{2-i}$ $=\dfrac{5+5i}{2-i}\times\dfrac{2+i}{2+i}$ $=\dfrac{10+5i+10i-5}{4+1}$ $=\dfrac{5+15i}{5}$ $=1+3i$ $\Rightarrow a=1\,,b=3$
14	$\dfrac{a-6i}{1-2i}=b+4i \Rightarrow \dfrac{a-6i}{1-2i}\times\dfrac{1+2i}{1+2i}=b+4i$ $\Rightarrow \dfrac{a+2ai-6i+12}{1+4}=b+4i$ $\Rightarrow \dfrac{a+12}{5}+\dfrac{2a-6}{5}i=b+4i$ $\Rightarrow \dfrac{a+12}{5}=b\,, \quad \dfrac{2a-6}{5}=4 \Rightarrow a=13$ بتعويض قيمة a في المعادلة الأولى ينتج أن: $b=5$ طريقة ثانية للحل: $a-6i=(b+4i)(1-2i) \Rightarrow a-6i=b+8+(-2b+4)i$ $\Rightarrow a=b+8\,, \quad -6=-2b+4$ $\Rightarrow b=5\,,a=13$

$$z=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \bar{z}=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z\bar{z}=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=64$$

الحل الثاني: نكتب كلا من العددين بالصورة المثلثية أولًا ثم نطبق القاعدة:

15

$$z=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \bar{z}=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z\bar{z}=64\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=64$$

الحل الثالث: كتابة العددين بالصورة القياسية أولًا ثم إجراء عملية الضرب:

$$z=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow \bar{z}=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow z\bar{z}=(4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i)(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)=32+32=64$$

16

$$\sqrt{3-4i}=x+iy \quad \Rightarrow 3-4i=x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$\Rightarrow 3-4i=x^2-y^2+2ixy$$

$$\Rightarrow 3=x^2-y^2 \quad \text{و} \quad -4=2xy$$

$$y=-\frac{2}{x}$$

$$x^2-y^2=3 \quad \Rightarrow x^2-\frac{4}{x^2}=3$$

$$\Rightarrow x^4-3x^2-4=0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-4)=0 \ \Rightarrow x=\pm 2$$

عندما $x=2$ ، فإن $y=-1$، وعندما $x=-2$ ، فإن $y=1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $3-4i$ هما: $2-i \ ,-2+i$

17	$\sqrt{-15+8i} = x+iy \Rightarrow -15+8i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\Rightarrow -15+8i = x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow -15 = x^2-y^2$ و $8 = 2xy$ $y = \frac{4}{x}$ $x^2-y^2 = -15 \Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$ $\Rightarrow x^4+15x^2-16 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ عندما $x = 1$ ، فإن $y = 4$، وعندما $x = -1$ ، فإن $y = -4$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-15+8i$ هما: $1+4i\ ,-1-4i$
18	$\sqrt{5-12i} = x+iy \Rightarrow 5-12i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\Rightarrow 5-12i = x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow 5 = x^2-y^2$ و $-12 = 2xy$ $y = -\frac{6}{x}$ $x^2-y^2 = 5 \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$ $\Rightarrow x^4-5x^2-36 = 0$ $\Rightarrow (x^2+4)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ عندما $x = 3$ ، فإن $y = -2$، وعندما $x = -3$ ، فإن $y = 2$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $5-12i$ هما: $3-2i\ ,-3+2i$

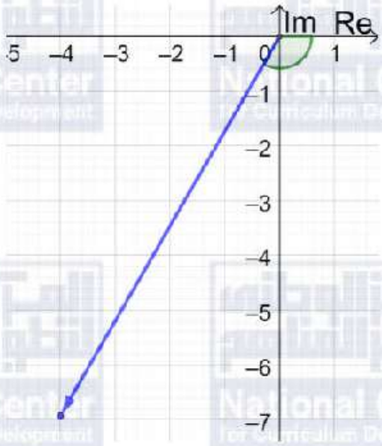
19	$\sqrt{-7-24i} = x + iy \Rightarrow -7-24i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ $\Rightarrow -7-24i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow -7 = x^2 - y^2$ و $-24 = 2xy$ $y = -\frac{12}{x}$ $x^2 - y^2 = -7 \Rightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} = -7$ $\Rightarrow x^4 + 7x^2 - 144 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ عندما $x = 3$ ، فإن $y = -4$، وعندما $x = -3$ ، فإن $y = 4$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-7-24i$ هما: $3-4i$, $-3+4i$
20	$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4})\right), w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $zw = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
21	$\frac{z}{w} = 1\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos(\frac{-7\pi}{12}) + i\sin(\frac{-7\pi}{12})$
22	$\frac{w}{z} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{4}\right)\right) = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$
23	$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
24	$w^2 = ww = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
25	$5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $5iz = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \times 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

26	$z^2 + 104 = 20z \Rightarrow z^2 - 20z + 104 = 0$ $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 416}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $z = \frac{20 \pm 4i}{2} = 10 \pm 2i$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $10 + 2i$، و $10 - 2i$
27	$z^2 + 18z + 202 = 0$ $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 808}}{2}$ $= \frac{-18 \pm \sqrt{-484}}{2}$ $= \frac{-18 \pm 22i}{2} = -9 \pm 11i$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $-9 + 11i$، و $-9 - 11i$
28	$9z^2 + 68 = 0 \Rightarrow z^2 = -\frac{68}{9} \Rightarrow z = \pm\sqrt{-\frac{68}{9}} = \pm i\frac{\sqrt{68}}{3}$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $i\frac{\sqrt{68}}{3}$، و $-i\frac{\sqrt{68}}{3}$

29	$3z^3-2z^2+2z+1=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm\frac{1}{3}$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-\frac{1}{3}$ يحقق المعادلة لأن: $3\left(-\frac{1}{3}\right)^3-2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)+1=0$ $z=-\frac{1}{3}\Rightarrow 3z=-1\Rightarrow 3z+1=0$ إذن $(3z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $3z^3-2z^2+2z+1=(3z+1)(z^2-z+1)=0$ $\Rightarrow z=-\frac{1}{3}\ ,z=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
30	$z^3+4z+10=5z^2\ \Rightarrow\ z^3-5z^2+4z+10=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-1$ يحقق المعادلة لأن: $(-1)^3-5(-1)^2+4(-1)+10=0$ إذن $(z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $z^3-5z^2+4z+10=(z+1)(z^2-6z+10)=0$ $\Rightarrow z=-1\ \ ,z=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm2i}{2}=3\pm i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-1,\ 3+i,\ 3-i$
31	$2z^3=8z^2+13z-87\ \Rightarrow\ 2z^3-8z^2-13z+87=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm3,\pm29,\pm\frac{29}{2},\frac{87}{2},\pm87$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-3$ يحقق المعادلة لأن: $2(-3)^3-8(-3)^2-13(-3)+87=0$ إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $2z^3-8z^2-13z+87=(z+3)(2z^2-14z+29)=0$ $\Rightarrow z=-3\ ,z=\frac{14\pm\sqrt{196-232}}{4}$ $\Rightarrow z=-3\ \ ,z=\frac{14\pm\sqrt{-36}}{4}=\frac{14\pm6i}{4}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-3,\ \frac{7}{2}+\frac{3}{2}i,\ \frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$

32	$x = 2 \pm 5i$ $x - 2 = \pm 5i$ $(x-2)^2 = -25$ $x^2 - 4x + 4 = -25$ $x^2 - 4x + 29 = 0$ طريقة أخرى للحل: نعلم أنه إذا كان h و k هما جذرا المعادلة التربيعية $x^2 - bx + c = 0$، فإن: $b = h + k$، و $c = hk$ مجموع الجذرين يساوي: 4، وناتج ضربهما يساوي: 4 + 25 = 29 إذن، المعادلة هي: $x^2 - 4x + 29 = 0$
33	$x = 7 \pm 4i$ $x - 7 = \pm 4i$ $(x-7)^2 = -16$ $x^2 - 14x + 49 = -16$ $x^2 - 14x + 65 = 0$ طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: 14، وناتج ضربهما يساوي: 49 + 16 = 65 إذن، المعادلة هي: $x^2 - 14x + 65 = 0$
34	$x = -8 \pm 20i$ $x + 8 = \pm 20i$ $(x+8)^2 = -400$ $x^2 + 16x + 64 = -400$ $x^2 + 16x + 464 = 0$ طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: 16−، وناتج ضربهما يساوي: 64 + 400 = 464 إذن، المعادلة هي: $x^2 + 16x + 464 = 0$

35	$x = -3 \pm 2i$ $x + 3 = \pm 2i$ $(x+3)^2 = -4$ $x^2 + 6x + 9 = -4$ $x^2 + 6x + 13 = 0$ طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: -6، وناتج ضربهما يساوي: $9 + 4 = 13$ إذن، المعادلة هي: $x^2 + 6x + 13 = 0$
36	$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \quad , \quad z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15} \quad , \quad z_3 = 2 - 2i$ $\lvert z_1 \rvert = \sqrt{12 + 4} = 4$ $\lvert z_2 \rvert = \sqrt{5 + 15} = 2\sqrt{5}$ $\lvert z_3 \rvert = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ $Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -\tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ $Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$ $\left\lvert \frac{z_2}{z_1} \right\rvert = \frac{\lvert z_2 \rvert}{\lvert z_1 \rvert} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1) = -\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$
37	$\left\lvert \frac{1}{z_3} \right\rvert = \frac{\lvert 1 \rvert}{\lvert z_3 \rvert} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = Arg(1) - Arg(z_3) = 0 - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

38	$\overline{z_2} = \sqrt{5} + i\sqrt{15} \ \rightarrow \ \lvert\overline{z_2}\rvert = \lvert z_2\rvert = 2\sqrt{5} \ , Arg(\overline{z_2}) = -Arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$ $\left\lvert\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right\rvert = \frac{\lvert z_3\rvert}{\lvert\overline{z_2}\rvert} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = Arg(z_3) - Arg(\overline{z_2}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$
39	$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(\cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})\right)$ إذن مقياس z يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$ 

40	$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$ $\sqrt{-4-4\sqrt{3}i} = x + iy \Rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$ $\Rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow -4 = x^2 - y^2$ و $-4\sqrt{3} = 2xy$ $y = -\frac{2\sqrt{3}}{x}$ $x^2 - y^2 = -4 \Rightarrow x^2 - \frac{12}{x^2} = -4$ $\Rightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0$ $\Rightarrow (x^2+6)(x^2-2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ عندما $x = \sqrt{2}$ ، فإن $y = -\sqrt{6}$، وعندما $x = -\sqrt{2}$ ، فإن $y = \sqrt{6}$، إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما: $\sqrt{2} - i\sqrt{6}\ \ ,-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$
41	بما أن $a - 3i$ هو جذر للعدد المركب $55 - 48i$، إذن: $(a-3i)^2 = 55 - 48i \Rightarrow a^2 - 6ia - 9 = 55 - 48i$ $\Rightarrow a^2 - 9 = 55, -6a = -48 \Rightarrow a = 8$ و بما أن $b + ic$ هو جذر للعدد المركب $55 - 48i$، إذن: $(b+ic)^2 = 55 - 48i \Rightarrow b^2 + 2ibc - c^2 = 55 - 48i$ $\Rightarrow b^2 - c^2 = 55, 2bc = -48$ $\Rightarrow c = -\frac{24}{b} \Rightarrow b^2 - \frac{576}{b^2} = 55$ $\Rightarrow b^4 - 55b^2 - 576 = 0$ $\Rightarrow (b^2 - 64)(b^2 + 9) = 0 \Rightarrow b = \pm 8$ عندما $b = 8$ ، فإن $c = -3$، وعندما $b = -8$ ، فإن $c = 3$ جذرا هذا العدد المركب هما $-8 + 3i$ و $8 - 3i$ وبمقارنة هذين الجذرين مع الجذرين المعطيين $(a - 3i, b + ic)$ نلاحظ أنّ: $a = 8, b = -8, c = 3$ الحل الأسهل هو: بما أن $a - 3i$ جذر للعدد المركب $55 - 48i$ إذن $-a + 3i$ هو أيضًا جذر له، ومنه: بالمقارنة مع الجذرين $a - 3i$ و $b + ic$ نجد أن: $b = -a$ و $c = 3$ ومنه: $(a-3i)^2 = 55 - 48i \Rightarrow a^2 - 6ia - 9 = 55 - 48i$ $\Rightarrow a^2 - 9 = 55, -6a = -48 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow b = -8$

42

$x^3 + x^2 + 15x = 225 \Rightarrow x^3 + x^2 + 15x - 225 = 0$

بما أن 5 جذر لهذه المعادلة، إذن $(x - 5)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على:

$x^3 + x^2 + 15x - 225 = (x - 5)(x^2 + 6x + 45) = 0$

$x = 5, x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-180}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{-6 \pm 12i}{2} = -3 \pm 6i$

حلول هذه المعادلة هي: $x = 5, x = -3 + 6i, x = -3 - 6i$

43

$x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0$

بما أن 9- جذر لهذه المعادلة، إذن $(x + 9)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على:

$x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = (x + 9)(x^2 - 2x + 5) = 0$

$x = -9, x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

حلول هذه المعادلة هي: $x = -9, x = 1 + 2i, x = 1 - 2i$

44

$3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37) \Rightarrow 3x^3 - 38x^2 - 135x - 74 = 0$

بما أن $(6 - i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(6 + i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة،

نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(6 - i)$، $(6 + i)$:

$x = 6 \pm i$

$x - 6 = \pm i$

$(x - 6)^2 = -1$

$x^2 - 12x + 36 = -1$

$x^2 - 12x + 37 = 0$

ثم نقسم كثير الحدود $3x^3 - 38x^2 - 135x - 74$ على $x^2 - 12x + 37$ فنجد أنّ:

$3x^3 - 38x^2 - 135x - 74 = (x^2 - 12x + 37)(3x - 2) = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}, x = 6 \pm i$$

حلول هذه المعادلة هي: $x = \frac{2}{3}, x = 6 + i, x = 6 - i$

45	$x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0$ بما أن $(-2 + i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(-2 - i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2 + i)$، $(-2 - i)$: $x = -2 \pm i$ $x + 2 = \pm i$ $(x + 2)^2 = -1$ $x^2 + 4x + 4 = -1$ $x^2 + 4x + 5 = 0$ ثم نقسم كثير الحدود $x^3 + 10x^2 + 29x + 30$ على $x^2 + 4x + 5$ فنجد أنّ: $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = (x^2 + 4x + 5)(x + 6) = 0$ $\Rightarrow x = -6, x = -2 \pm i$ حلول هذه المعادلة هي: $x = -6, x = -2 + i\ , x = -2 - i$
46	الجذر الآخر هو مرافق الجذر الأول، أي $4 - 11i$
47	$k = (4 - 11i)(4 + 11i) = 16 - 121i^2 = 16 + 121 = 137$
48	$(p + iq)^2 = p^2 + 2ipq + i^2q^2 = p^2 + 2ipq - q^2$

49	$(p+iq)^2 = 45 + im = p^2 - q^2 + 2ipq$ $\Rightarrow p^2 - q^2 = 45 \;,\; m = 2pq$ $\Rightarrow p^2 - q^2 = 45 \Rightarrow (p+q)(p-q) = 45$ بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p > q$ فإن $(p+q)$ و$(p-q)$ عددان صحيحان موجبان أيضًا و $(p+q) > (p-q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 إلى عاملين صحيحين موجبين أحدهما أكبر من الآخر، لدينا ثلاث حالات لتحليل 45 إلى عاملين صحيحين موجبين هي: الحالة الأولى: $1 \times 45 = 45$ فإن: $p+q = 45$ و $p-q = 1$ ومنه: $p = 23$ و $q = 22$ أي أنّ: $m = 2pq = 1012$ الحالة الثانية: $3 \times 15 = 45$ فإن: $p+q = 15$ و $p-q = 3$ ومنه: $p = 9$ و $q = 6$ أي أنّ: $m = 2pq = 108$ الحالة الثالثة: $5 \times 9 = 45$ فإن: $p+q = 9$ و $p-q = 5$ ومنه: $p = 7$ و $q = 2$ أي أنّ: $m = 2pq = 28$ قيم m المطلوبة هي: $28, 108, 1012$
50	المطلوب إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $45 - 108i$ بما أن $m = 2pq = -108$ إذن العددان p و q مختلفان بالإشارة، من السؤال السابق نجد أن: $p = 9 \,, q = -6$ أو $p = -9 \,, q = 6$ الجذران المطلوبان هما: $-9 + 6i \;, 9 - 6i$
51	ليكن $z = x + iy$ ، إذن: $\bar{z} = x - iy$ $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2+y^2}\,)^2 = \|z\|^2$

52

$$|z| = 5\sqrt{5} \ , Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \ , \frac{z}{3+4i} = p + iq$$

ليكن $z = x + iy$

بما أن $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, إذن يقع العدد المركب z في الربع الأول، ويكون $x = 2y$

$$\Rightarrow z = 2y + iy$$

$$|z| = 5\sqrt{5}$$

$$(2y)^2 + y^2 = 125 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5, x = 10$$

إذن، $z = 10 + 5i$

$$\frac{z}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$p + iq = \frac{30 - 40i + 15i + 20}{9+16} = \frac{50-25i}{25} = 2 - i$$

إذن، $p = 2 , q = -1$ ويكون: $p + q = 1$

$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

بما أن $(8 + 6i)$ جذر لهذه المعادلة، فإن مرافقه $(8 - 6i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة،
نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(8 + 6i)$، $(8 - 6i)$:

$(8 + 6i) + (8 - 6i) = 16$

$(8 + 6i) \times (8 - 6i) = 64 + 36 = 100$

$\Rightarrow z^2 - 16z + 100 = 0$

ثم نقسم كثير الحدود $z^3 - 20z^2 + 164z - 400$ على $z^2 - 16z + 100$ فنجد أنّ:

$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = (z^2 - 16z + 100)(z - 4) = 0$

$\Rightarrow z = 4, z = 8 \pm 6i$

حلول هذه المعادلة هي: $z = 4, z = 8 + 6i, z = 8 - 6i$

المعادلة الجديدة هي: $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$

إذا عوضنا $z = x^2$ ، تتحول هذه المعادلة إلى $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

إذن، حلول المعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $x = \pm 2$ ، $x = \pm\sqrt{8 + 6i}$ ، $x = \pm\sqrt{8 - 6i}$

53 نجد الجذرين التربيعيين للعدد $8 + 6i$

$\sqrt{8 + 6i} = h + ik \quad \Rightarrow 8 + 6i = h^2 - k^2 + 2ihk$

$\Rightarrow 8 = h^2 - k^2$ و $6 = 2hk$

$h = \dfrac{3}{k}$

$h^2 - k^2 = 8 \quad \Rightarrow h^2 - \dfrac{9}{k^2} = 8$

$\Rightarrow h^4 - 8h^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow (h^2 + 1)(h^2 - 9) = 0 \ \Rightarrow h = \pm 3 \ \Rightarrow k = \pm 1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8 + 6i$ هما: $3 + i \quad , -3 - i$

بالمثل نجد أنّ الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8 - 6i$ هما: $3 - i \quad , -3 + i$

ويكون للمعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ ستة حلول هي:

$x = 2 , x = -2, x = 3 + i, x = 3 - i, x = -3 + i, x = -3 - i$

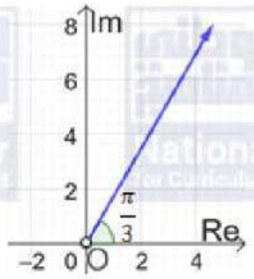
الدرس الثالث: المحل الهندسي في المستوى المركب

مسألة اليوم صفحة 164
المنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة التي تبعد عن العدد $(-2+3i)$ مسافة تقل عن 4 وحدات، فتكون المتباينة المطلوبة هي: $\lvert z-(-2+3i)\rvert < 4 \Rightarrow \lvert z+2-3i\rvert < 4$
أتحقق من فهمي صفحة 165
$\lvert z+5-4i\rvert = 7 \Rightarrow \lvert z-(-5+4i)\rvert = 7$ وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات. $\lvert z+5-4i\rvert = 7 \Rightarrow \lvert x+iy+5-4i\rvert = 7$ $\Rightarrow \lvert (x+5)+(y-4)i\rvert = 7$ $\Rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2} = 7$ $\Rightarrow (x+5)^2+(y-4)^2 = 49$ وهذه معادلة دائرة مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات.
أتحقق من فهمي صفحة 167
$\lvert z+1\rvert = \lvert z-5i\rvert \Rightarrow \lvert z-(-1)\rvert = \lvert z-(5i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-1,0),(0,5)$ $\lvert z+1\rvert = \lvert z-5i\rvert \Rightarrow \lvert x+iy+1\rvert = \lvert x+iy-5i\rvert$ $\Rightarrow \lvert (x+1)+iy\rvert = \lvert x+i(y-5)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-5)^2}$ $\Rightarrow (x+1)^2+y^2 = x^2+(y-5)^2$ $\Rightarrow x^2+2x+1+y^2 = x^2+y^2-10y+25$ $\Rightarrow 2x+10y-24=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x+5y-12=0$

أتحقق من فهمي صفحة 169

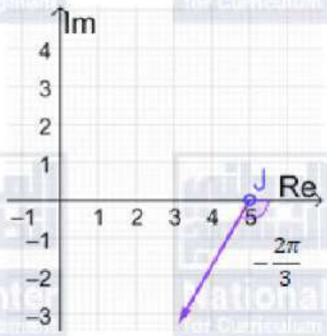
a $Arg(z) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow Arg\big(z - (0)\big) = \frac{\pi}{3}$

هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(0, 0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي



b $Arg(z - 5) = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow Arg\big(z - (5)\big) = -\frac{2\pi}{3}$

هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(5, 0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي



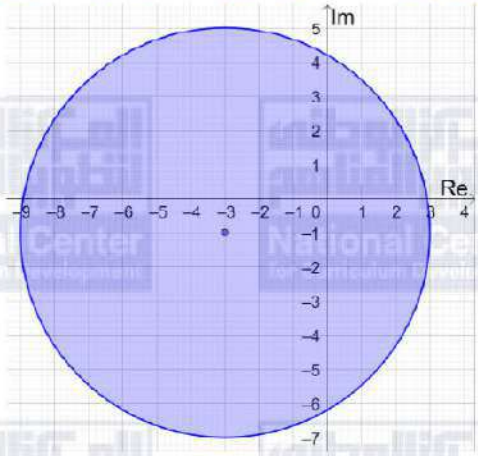
<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 172</td></tr>
<tr><td>a</td><td>

$|z+3+i| \leq 6$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3+i| = 6$ وهو دائرة مركزها $(-3,-1)$، وطول نصف قطرها 6 وحدات.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد مسافة تقل عن 6 وحدات عن مركز الدائرة أو تساويها.



</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$|z+3+i| < |z-4|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3+i| = |z-4|$

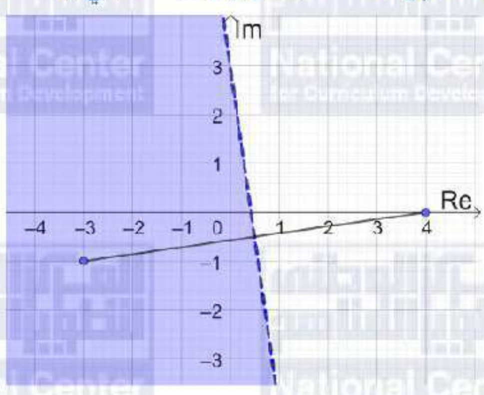
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-3,-1)$ و $(4,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

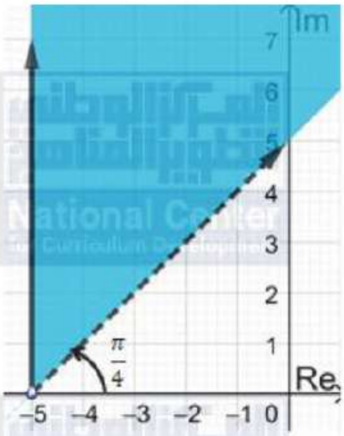
نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار نقطة الأصل مثلاً وتعويضها في المتباينة.

$|0+3+i| < |0-4| \Rightarrow \sqrt{10} < 4$ ✓

بما أن نقطة الأصل تحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.



</td></tr>
</table>

c	$\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+5) \leq \frac{\pi}{2}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+5) = \frac{\pi}{2}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5, 0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي. و يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+5) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5, 0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي. المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي: 

أتحقق من فهمي صفحة 173

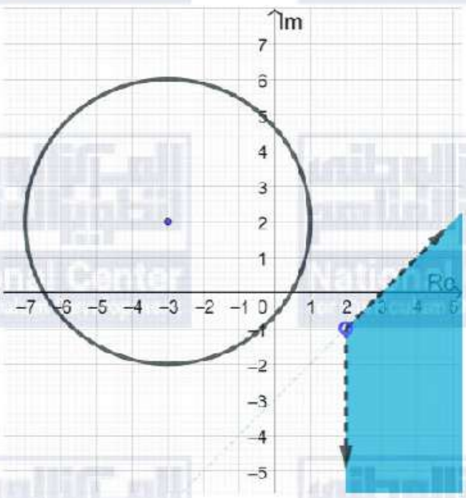
$|z+3-2i| \geq 4 \quad , \qquad -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$

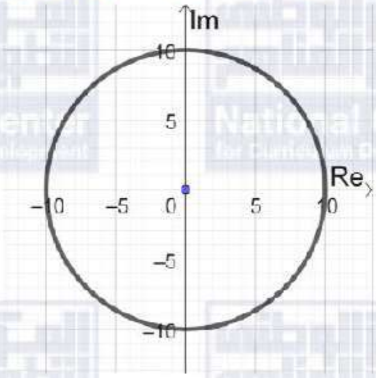
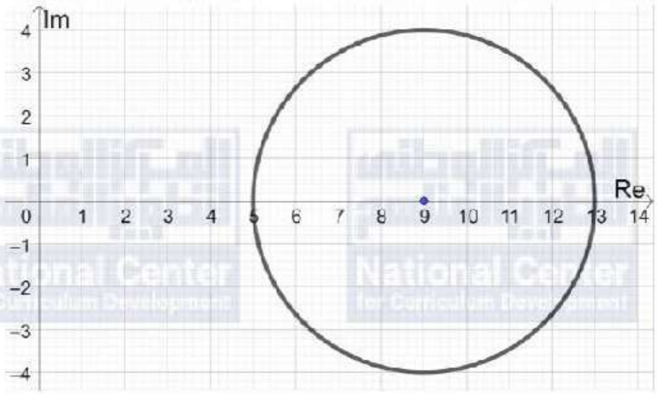
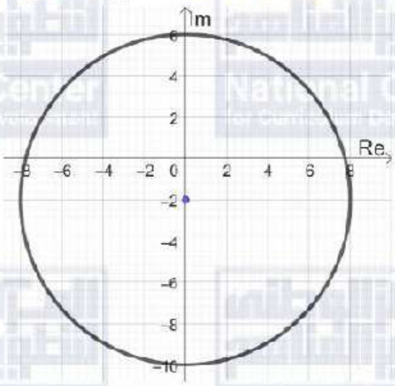
تمثل المعادلة $|z+3-2i| = 4$ دائرة مركزها النقطة $(-3,2)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

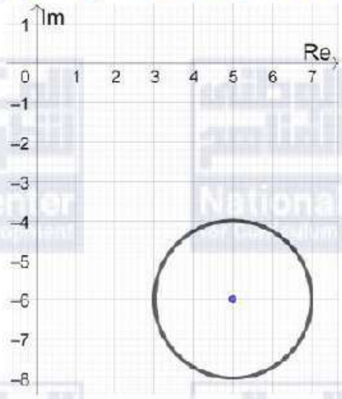
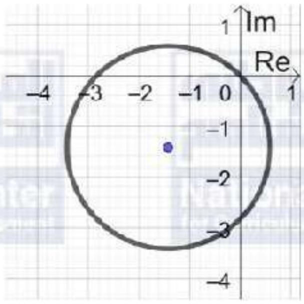
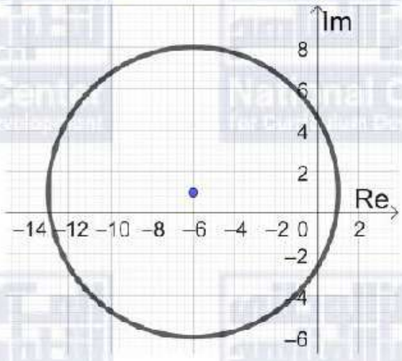
تمثل المعادلة $\text{Arg}(z-2+i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعًا.

تمثل المعادلة $\text{Arg}(z-2+i) > -\frac{\pi}{2}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعًا.

تمثل المتباينة $|z+3-2i| \geq 4$ النقاط الواقعة على الدائرة أو خارجها، وتمثل المتباينة $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين. المنطقة التي تحقق المتباينتين هي الجزء المظلل في الرسم أدناه.



	أتدرب وأحل المسائل صفحة 173
1	$\|z\| = 10 \quad \Rightarrow \|x + iy\| = 10 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = 100$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0, 0)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات 
2	$\|z - 9\| = 4 \quad \Rightarrow \|(x - 9) + iy\| = 4 \quad \Rightarrow (x - 9)^2 + y^2 = 16$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(9, 0)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات 
3	$\|z + 2i\| = 8 \quad \Rightarrow \|x + i(y + 2)\| = 8 \quad \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 64$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0, -2)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات 

4	$\lvert z-5+6i\rvert=2 \;\Rightarrow \lvert(x-5)+i(y+6)\rvert=2 \;\Rightarrow (x-5)^2+(y+6)^2=4$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(5,-6)$ وطول نصف قطرها وحدتان 
5	$\lvert z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\rvert=2 \;\Rightarrow \lvert(x+\sqrt{2})+i(y+\sqrt{2})\rvert=2$ $\Rightarrow (x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=4$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ وطول نصف قطرها وحدتان 
6	$\lvert z+6-i\rvert=7 \;\Rightarrow \lvert(x+6)+i(y-1)\rvert=7 \;\Rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2=49$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-6,1)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات 

7

$|z-5| = |z-3i| \Rightarrow |z-(5)| = |z-(3i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(5,0), (0,3)$

$$|z-5| = |z-3i| \Rightarrow |(x-5)+iy| = |x+i(y-3)|$$

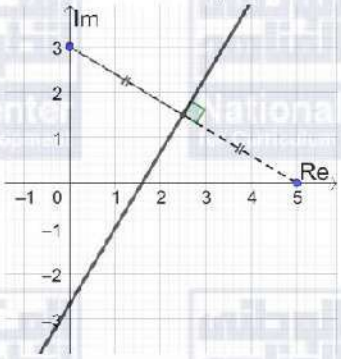
$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2+y^2 = x^2+(y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2-10x+25+y^2 = x^2+y^2-6y+9$$

$$\Rightarrow 10x-6y-16=0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $5x-3y-8=0$



8

$|z+3i| = |z-7i| \Rightarrow |z-(-3i)| = |z-(7i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3), (0,7)$

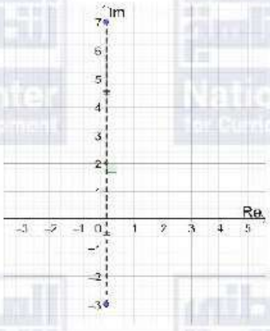
$$|z+3i| = |z-7i| \Rightarrow |x+i(y+3)| = |x+i(y-7)|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-7)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+(y+3)^2 = x^2+(y-7)^2$$

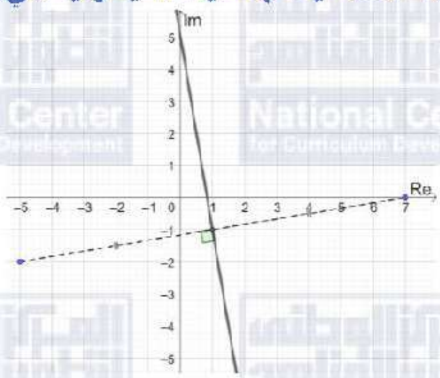
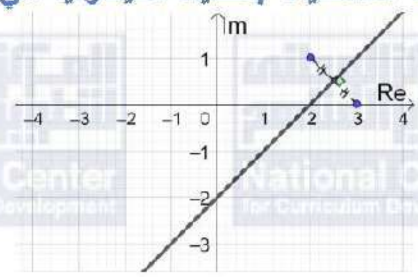
$$\Rightarrow x^2+y^2+6y+9 = x^2+y^2-14y+49$$

$$\Rightarrow 20y-40=0$$



إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي:

$y=2$

9	$\lvert z+5+2i\rvert = \lvert z-7\rvert \Rightarrow \lvert z-(-5-2i)\rvert = \lvert z-(7)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-5,-2),(7,0)$ $\lvert z+5+2i\rvert = \lvert z-7\rvert \Rightarrow \lvert (x+5)+i(y+2)\rvert = \lvert (x-7)+iy\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+y^2}$ $\Rightarrow (x+5)^2+(y+2)^2 = (x-7)^2+y^2$ $\Rightarrow x^2+10x+25+y^2+4y+4 = x^2-14x+49+y^2$ $\Rightarrow 24x+4y-20=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x+y-5=0$ 
10	$\lvert z-3\rvert = \lvert z-2-i\rvert \Rightarrow \lvert z-(3)\rvert = \lvert z-(2+i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(3,0),(2,1)$ $\lvert z-3\rvert = \lvert z-2-i\rvert \Rightarrow \lvert (x-3)+iy\rvert = \lvert (x-2)+i(y-1)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$ $\Rightarrow (x-3)^2+y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$ $\Rightarrow x^2-6x+9+y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$ $\Rightarrow 2x-2y-4=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x-y-2=0$ 

11

$$\frac{|z+6-i|}{|z-10-5i|}=1 \quad \Rightarrow |z+6-i|=|z-10-5i|$$

$$\Rightarrow |z-(-6+i)|=|z-(10+5i)|$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-6,1),(10,5)$

$$|z+6-i|=|z-10-5i| \Rightarrow |(x+6)-i(y-1)|=|(x-10)+i(y-5)|$$

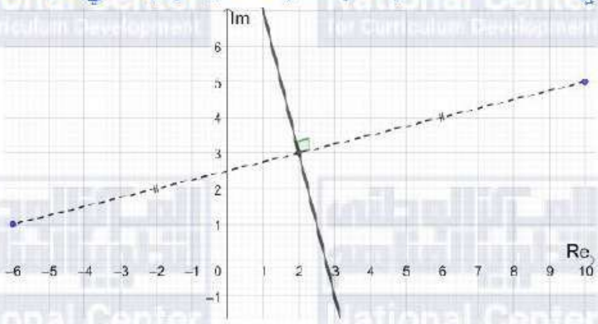
$$\Rightarrow \sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$$

$$\Rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2=(x-10)^2+(y-5)^2$$

$$\Rightarrow x^2+12x+36+y^2-2y+1=x^2-20x+100+y^2-10y+25$$

$$\Rightarrow 32x+8y-88=0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $4x+y-11=0$



12

$$|z+7+2i|=|z-4-3i| \Rightarrow |z-(-7-2i)|=|z-(4+3i)|$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-7,-2),(4,3)$

$$|z+7+2i|=|z-4-3i| \Rightarrow |(x+7)+i(y+2)|=|(x-4)+i(y-3)|$$

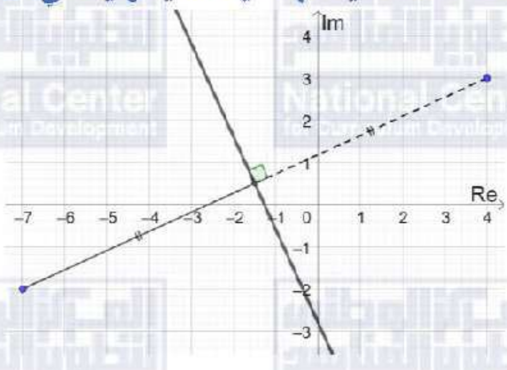
$$\Rightarrow \sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$$

$$\Rightarrow (x+7)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2+14x+49+y^2+4y+4=x^2-8x+16+y^2-6y+9$$

$$\Rightarrow 22x+10y+28=0$$

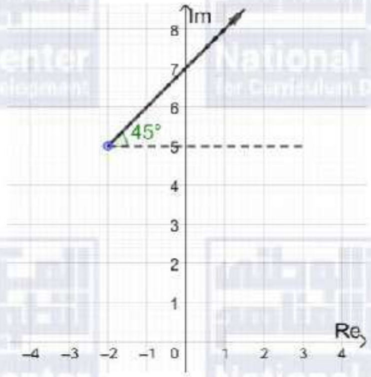
إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $11x+5y+14=0$



13

$$\mathbf{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}\quad \Rightarrow \mathbf{Arg}\big(z-(-2+5i)\big)=\frac{\pi}{4}$$

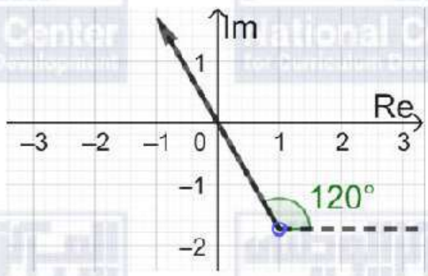
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



14

$$\mathbf{Arg}\left(z-1+i\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}\quad \rightarrow \mathbf{Arg}\left(z-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)=\frac{2\pi}{3}$$

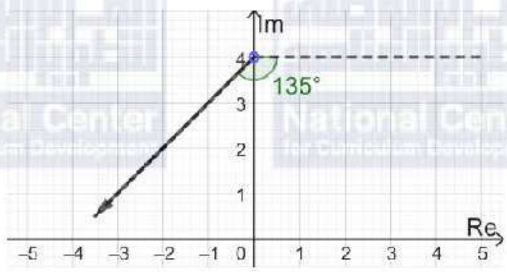
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



15

$$\mathbf{Arg}(z-4i)=-\frac{3\pi}{4}\quad \Rightarrow \mathbf{Arg}\big(z-(4i)\big)=-\frac{3\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(0,4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



16

$|z-2| < |z+2|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-2| = |z+2|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-2, 0)$ و $(2, 0)$.

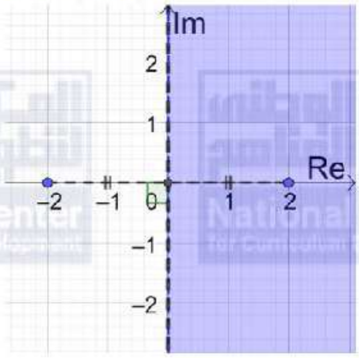
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 1 + i$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$|1+i-2| < |1+i+2| \Rightarrow |-1+i| < |3+i| \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{10}$ ✓

بما أن $z = 1 + i$ حقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 1 + i$

(أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(2, 0)$ أقل من بعدها عن النقطة $(-2, 0)$)



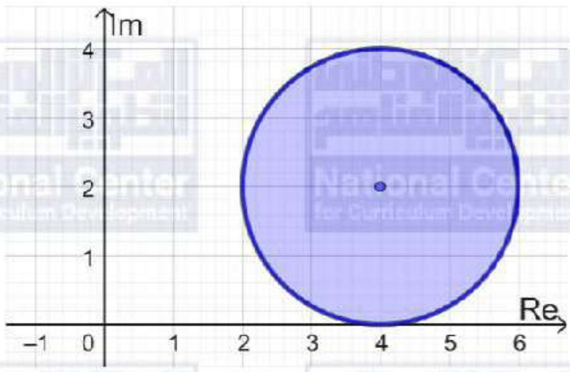
17

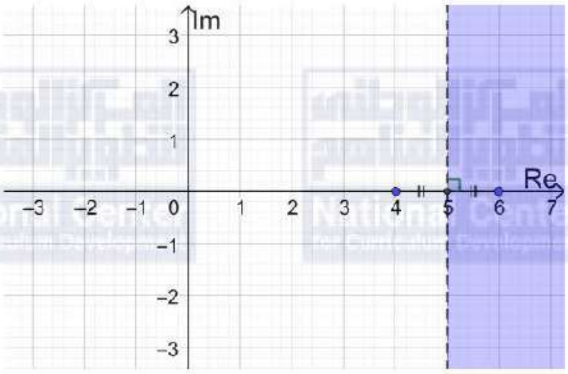
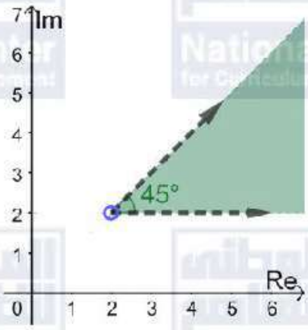
$|z-4-2i| \leq 2 \Rightarrow |z-(4+2i)| \leq 2$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4-2i| = 2$ ، وهو دائرة مركزها $(4, 2)$ وطول نصف قطرها وحدتان.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها.



18	$\|z-4\| > \|z-6\|$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z-4\| = \|z-6\|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(6,0)$ و $(4,0)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة، $\|0-4\| > \|0-6\| \rightarrow 2 > \sqrt{6}$ ✖ بما أن العدد $z=0$ لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$. (أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(4,0)$ أكبر من بعدها عن النقطة $(6,0)$) 
19	$0 < \mathrm{Arg}(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$ يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z-2-2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. ويمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z-2-2i) = 0$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويوازي المحور الحقيقي. المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين. 

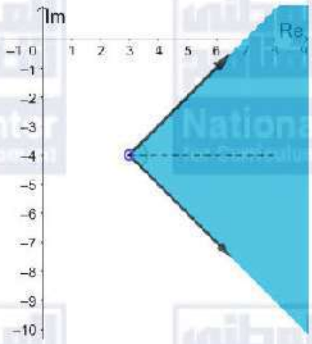
<table>
<tr>
<td>20</td>
<td>

$-\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(z-3+4i) \le \frac{\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-3+4i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي.

و يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-3+4i)=-\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المبيّن في الشكل:



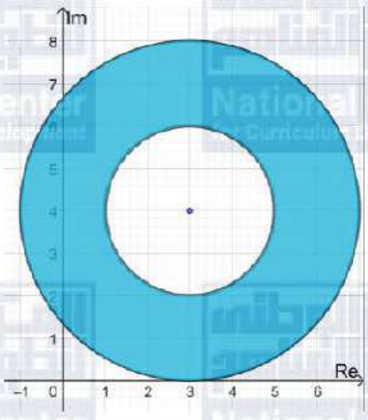
</td>
</tr>
<tr>
<td>21</td>
<td>

$2 \le |z-3-4i| \le 4 \;\Rightarrow 2 \le |z-(3+4i)| \le 4$

يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)|=2$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها وحدتان،
وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

ويمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)|=4$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها 4
وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

أما منطقة المحل الهندسي فهي المنطقة التي تحوي جميع الأعداد الواقعة على الدائرتين أو بينهما.



</td>
</tr>
</table>

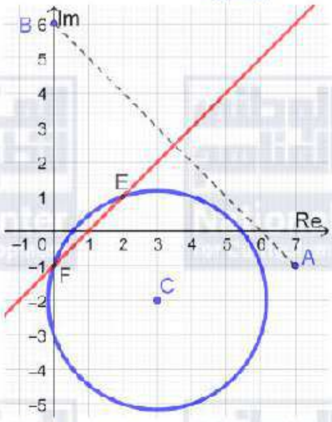
22

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-3+2i|=\sqrt{10}$ هو دائرة مركزها $(3,-2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$ وحدات، ومعادلتها الديكارتية هي: $(x-3)^2+(y+2)^2=10$

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-6i|=|z-7+i|$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ ، نستطيع إيجاد معادلته الديكارتية عن طريق ميل العمودي ونقطة منتصف القطعة المستقيمة:

ميل القطعة المستقيمة التى طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ هو -1 ، فميل المنصف العمودي لها هو 1

$$m=1,\ M(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2})\Rightarrow y-\tfrac{5}{2}=x-\tfrac{7}{2}\Rightarrow y=x-1$$



لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معًا، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

بالتعويض: $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ و $y=x-1$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10\ \Rightarrow (x-3)^2+(x-1+2)^2=10$$
$$\Rightarrow 2x^2-4x=0\ \Rightarrow 2x(x-2)=0$$
$$\Rightarrow x=0\ ,x=2\ \Rightarrow y=-1\ or\ y=1$$

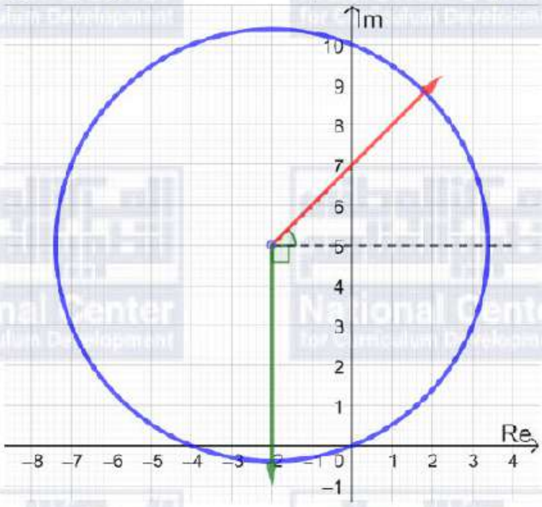
العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معًا هما: $z_1=-i, z_2=2+i$

23

$$|z-3|=|z+2i|\ \Rightarrow |(x-3)+iy|=|x+i(y+2)|$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+y^2=x^2+(y+2)^2$$
$$\Rightarrow -6x+9=4y+4$$
$$\Rightarrow 6x+4y=5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$|z+3-i|=|z-1+5i|\Rightarrow |(x+3)+i(y-1)|=|(x-1)+i(y+5)|$$
$$\Rightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+5)^2$$
$$\Rightarrow x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+10y+25$$
$$\Rightarrow 8x-12y-16=0$$
$$\Rightarrow 2x-3y=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد: $y=-\frac{7}{13}$ و $x=\frac{31}{26}$

ويكون العدد المركب الذي يحقق كلًّا من المعادلتين هو: $z=\frac{31}{26}-\frac{7}{13}i$

24	يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعًا يبدأ من النقطة $(-2, 5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي و يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ شعاعًا يبدأ من النقطة $(-2, 5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي و يمثل منحنى المعادلة $\lvert z+2-5i\rvert=\sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2, 5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$ 

1) $|z-3|>|z+2i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-3|=|z+2i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$و $(3,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$|0-3|>|0+2i| \rightarrow 3>2$ ✓

بما أن العدد 0 يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$ (نقطة الأصل)

2) $|z+3-i|<|z-1+5i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3-i|=|z-1+5i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(1,-5)$ و $(-3,1)$.

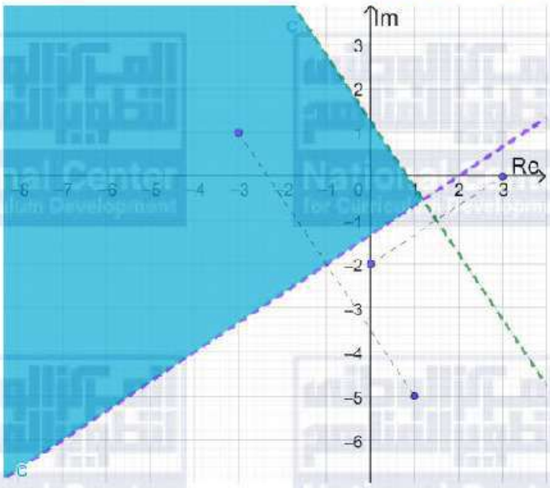
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

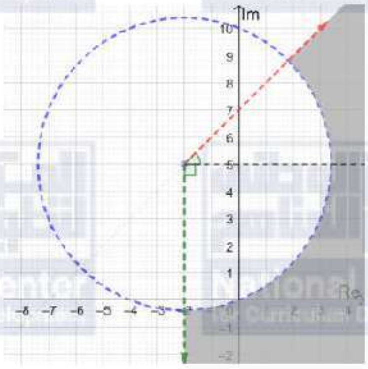
نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

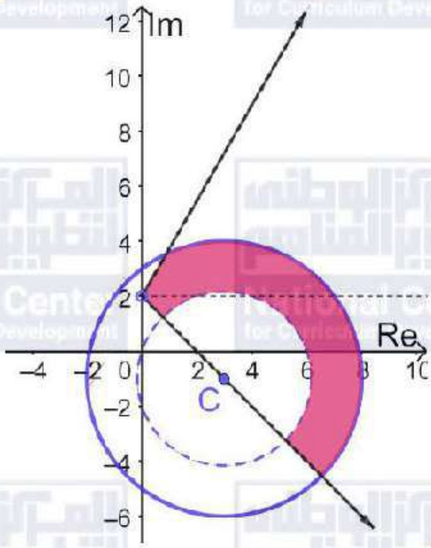
25 $|0+3-i|<|0-1+5i| \rightarrow \sqrt{10}<\sqrt{26}$ ✓

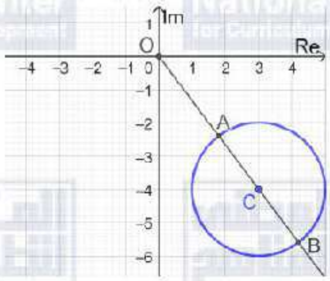
بما أن العدد 0 يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$ (نقطة الأصل)

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



26	1) $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$ يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2, 5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. ويمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+2-5i) = -\frac{\pi}{2}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2, 5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. 2) $\|z+2-5i\| > \sqrt{29}$ ويمثل منحنى المعادلة $\|z+2-5i\| = \sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2, 5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$ نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 

27	1) $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-2i) \leq \frac{\pi}{3}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2i) = \frac{\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. 2) $2 < \|z-3+i\| \leq 5$ ويمثل منحنى المعادلة $\|z-3+i\| = 5$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 5 نرسمها متصلة بسبب وجود مساواة في المتباينة ويمثل منحنى المعادلة $\|z-3+i\| = 2$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 2 نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 
28	$\|z-(1+i)\| = 3$
29	نبدأ بالتحقق من أن المستقيم المرسوم هو فعلًا العمود المنصف القطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,2)$ و $(-1,0)$: ميل القطعة المستقيمة يساوي $\frac{1}{2}$ وميل المستقيم يساوي -2 فهما متعامدان، معادلة المستقيم هي $y = 3-2x$ ، ونقطة منتصف القطعة المستقيمة هي $(1,1)$ وهي واقعة على المستقيم لأن إحداثييها يحققان معادلته، إذن المستقيم المرسوم هو المنصف العمودي للقطعة، ومعادلته: $\|z-(3+2i)\| = \|z-(-1)\| \Rightarrow \|z-3-2i\| = \|z+1\|$
30	$\text{Arg}(z+1-2i) = -\frac{3\pi}{4}$

31	$r=\sqrt{(4-4)^2+(1-8)^2}=\sqrt{49}\ =7$ $\lvert z-(4+i)\rvert \geq 7$
32	قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $-\frac{\pi}{4}$ لأن ميل الشعاع -1 $-\frac{\pi}{4}\leq \text{Arg}(z+2-i)<0$
33	الجزء المظلل يقع داخل دائرة مركزها$(-1\ ,-2)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات وهي مرسومة متصلة فالمتباينة المرتبطة بها هي: $\lvert z-(-1-2i)\rvert \leq 3 \Rightarrow \lvert z=1+2i\rvert \leq 3$ والمستقيم المرسوم متصل نجد أن ميله يساوي $\frac{6}{4}$ ، وميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-6,\ 0),\ (0,\ -4)$ هو $\frac{-4}{6}$ فهما متعامدان ونلاحظ أن المستقيم يمر بالنقطة $(-5,\ -5)$ فمعادلته هي: $y+5=\frac{6}{4}(x+5)$، وإذا عوضنا إحداثيي منتصف القطعة الواصلة بين $(-6,\ 0),\ (0,\ -4)$، وهي $(-3,-2)$ نجد أنها تحققها، ما يعني أن المستقيم هو المنصف العمودي للقطعة الواصلة بين $(-6,\ 0),\ (0,\ -4)$، والمنطقة المظلله تمثل الأعداد المركبة الأقرب إلى النقطة $(0,\ -4)$، فالمتباينة المرتبطة بهذا المستقيم هي: $\lvert z+6\rvert \geq \lvert z+4i\rvert$. إذن، نظام المتباينات الذي يمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المعطى هو: $\lvert z+1+2i\rvert \leq 3$ $\lvert z+6\rvert \geq \lvert z+4i\rvert$
34	$\lvert z-3+4i\rvert =2 \Rightarrow \lvert z-(3-4i)\rvert =2$ z يقع على الدائرة التي مركزها $(3,-4)$ وطول نصف قطرها 2 نفرض $z=x+iy$ فإن: $\lvert z\rvert$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو يمثل البعد بين النقطة (x,y) ونقطة الأصل في المستوى الديكارتي  من الشكل أعلاه نجد أن: $OC=\sqrt{9+16}=5$ أقل قيمة لـ $\lvert z\rvert$ هي مقياس العدد الذي تمثله النقطة A وهي: $\lvert z\rvert =OC-r=5-2=3$ أكبر قيمة لـ $\lvert z\rvert$ هي مقياس العدد الذي تمثله النقطة B وهي: $\lvert z\rvert =OC+r=5+2=7$

35	$\|z-6\|=2\|z+6-9i\| \Rightarrow \|x-6+iy\|=2\|(x+6)+i(y-9)\|$ $\Rightarrow (x-6)^2+y^2=4((x+6)^2+(y-9)^2)$ $\Rightarrow x^2-12x+36+y^2=4(x^2+12x+36+y^2-18y+81)$ $\Rightarrow x^2+y^2+20x-24y+144=0$ $\Rightarrow (x+10)^2+(y-12)^2=100$ وهي معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات.
36	$\text{Arg}(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(2,-3)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{8}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وهو الممثل بالشكل b. أما الشكل a فنقطة بداية الشعاع ليست صحيحة والشكل c فنقطة بداية الشعاع مشمولة، وهو ليس صحيحًا والشكل d فسعة العدد المركب هي $-\frac{\pi}{8}$ وهو مخالف للسعة المعطاة بالمعادلة.

اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	b
3	c
4	b
5	a
6	d
7	$\sqrt{45-28i} = x+iy \Rightarrow 45-28i = x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow x^2-y^2=45 \quad ,2xy=-28 \Rightarrow y=-\frac{14}{x}$ $\Rightarrow x^2-\frac{196}{x^2}=45$ $\Rightarrow x^4-45x^2-196=0$ $\Rightarrow (x^2-49)(x^2+4)=0 \Rightarrow x=\pm 7$ $\Rightarrow x=7, y=-2 \quad or\ x=-7, y=2$ الجذران التربيعيان للعدد $45-28i$ هما: $7-2i$، و $-7+2i$
8	$\lvert w\rvert = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}} \approx 0.76$ $Arg(w) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\right) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -2.43$
9	$z+w = a-8+10i \Rightarrow \lvert z+\omega\rvert = \sqrt{(a-8)^2+100} = 26$ $\Rightarrow (a-8)^2+100=676 \Rightarrow (a-8)^2=576 \Rightarrow a-8=\pm 24$ $\Rightarrow a=-16 \ \ or \ \ a=32$ ولأن $a<0$، فإنّ: $a=-16$.
10	$w = \frac{14-31i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{104-65i}{9+4} = 8-5i$

11

$$(8-5i)^2 + c(8-5i) + d = 0 \Rightarrow 64 - 80i - 25 + 8c - 5ci + d = 0$$
$$\Rightarrow 39 + d + 8c - i(80 + 5c) = 0$$
$$\Rightarrow 39 + d + 8c = 0\,, 80 + 5c = 0$$
$$\Rightarrow c = -16, d = 89$$

حل آخر:

$$w = 8 - 5i \Rightarrow \overline{w} = 8 + 5i$$
$$\Rightarrow c = -(w + \overline{w}) = -16$$
$$\Rightarrow d = w \times \overline{w} = 64 + 25 = 89$$

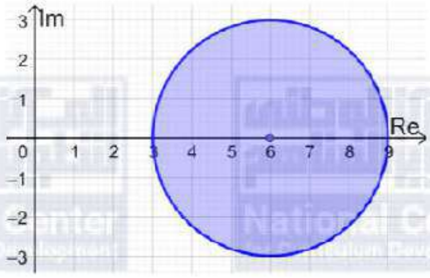
12

$$|z-6| \leq 3$$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-6| = 3$ ، وهو دائرة مركزها $(6,0)$ وطول نصف قطرها 3وحدات.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها.



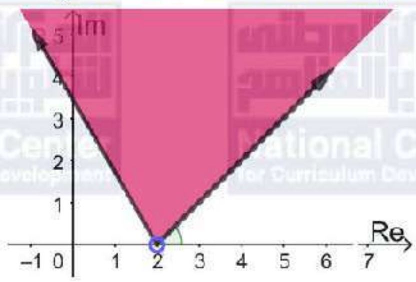
13

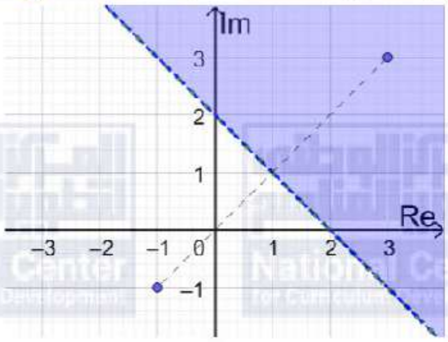
$$\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-2) \leq \frac{2\pi}{3}$$

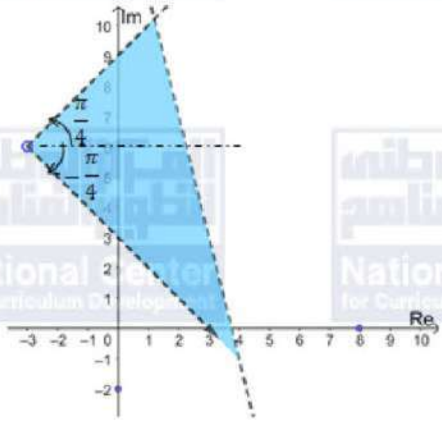
يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

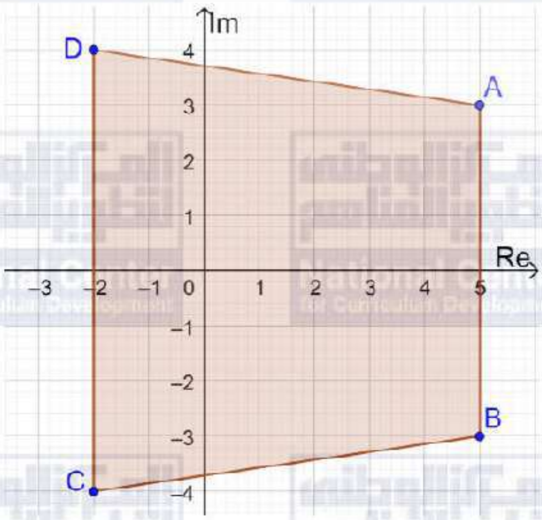
ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها$\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



14	$\lvert z+1+i\rvert > \lvert z-3-3i\rvert$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z+1+i\rvert = \lvert z-3-3i\rvert$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,3)$ و $(-1,-1)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة، $\lvert 0+1+i\rvert > \lvert 0-3-3i\rvert \Rightarrow \sqrt{2} > \sqrt{18}$ ✗ بما أن العدد $z=0$ لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$ 
15	$NO = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$ $MO = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$ إذن المثلث OMN متطابق الضلعين
16	باستخدام قانون جيوب التمام في المثلث OMN: $(NM)^2 = (NO)^2 + (MO)^2 - 2(NO)(MO)\cos\angle MON$ $\Rightarrow \cos\angle MON = -\frac{234-130}{130} = -\frac{4}{5}$
17	$A = \frac{1}{2}(NO)(MO)\sin\angle MON = \frac{1}{2} \times 65 \times \frac{3}{5} = \frac{39}{2}$

18	$\lvert z-8\rvert > \lvert z+2i\rvert$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z-8\rvert = \lvert z+2i\rvert$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(8,0)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. $-\frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$ يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+3-6i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي ويمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z+3-6i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 
19	$z = 5+2i \Rightarrow \bar{z} = 5-2i$ $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{5+2i}{5-2i} \times \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{25+20i-4}{25+4} = \frac{21+20i}{29} = \frac{1}{29}(21+20i)$
20	$Arg(z) = \tan^{-1}\frac{2}{5}$ $Arg(\bar{z}) = -\tan^{-1}\frac{2}{5}$ $Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \tan^{-1}\frac{20}{21}$ $Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = Arg(z) - Arg(\bar{z}) \Rightarrow \tan^{-1}(\frac{20}{21}) = \tan^{-1}(\frac{2}{5}) - (-\tan^{-1}(\frac{2}{5}))$ $\Rightarrow \tan^{-1}(\frac{20}{21}) = 2\tan^{-1}(\frac{2}{5})$

21	$z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$ بما أن العدد $-2 + 4i$ هو حل لهذه المعادلة، إذن مرافقه $-2 - 4i$ يكون حلًّا أيضًا لها والمعادلة التربيعية التي لها هذان الجذران هي أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بهذه المعادلة المعطاة. $\left(z-(-2+4i)\right)\left(z-(-2-4i)\right) = z^2 + 4z + 20$ نقسم $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680$ على $z^2 + 4z + 20$ فنجد أنّ: $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = (z^2 + 4z + 20)(z^2 - 10z + 34) = 0$ لإيجاد جذور المعادلة $z^2 - 10z + 34 = 0$ نستخدم القانون العام لحل هذه المعادلة التربيعية: $z = \dfrac{10 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{10 \pm 6i}{2} = 5 \pm 3i$ فتكون الجذور الثلاثة المطلوبة هي: $5 + 3i\, , 5 - 3i\, , -2 - 4i$
22	 الرباعي $ABCD$ هو شبه منحرف، مساحته بالوحدات المربعة تساوي: $A = \dfrac{1}{2}(7)(6+8) = 49$
23	$0 \leq \mathrm{Arg}(z - 3i) \leq \dfrac{\pi}{3}$
24	$z^2 + 2z + 10 = 0$ $\Delta = 4 - 40 = -36$ مميز المعادلة التربيعية سالب، إذن لهذه المعادلة جذران مركبان مترافقان، وحسب النظرية فإن العددان المركبان المترافقان لهما المقياس نفسه

25	$z_1 = \frac{-2+\sqrt{-36}}{2} = -1+3i \Rightarrow \text{Arg}(z_1) = \pi - \tan^{-1} 3 \approx 1.89$ $z_2 = \frac{-2-\sqrt{-36}}{2} = -1-3i \Rightarrow \text{Arg}(z_2) = -(\pi - \tan^{-1} 3) \approx -1.89$
26	$u + 2v = 2i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $iu + v = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $i \times (2) + (1): v(2+i) = 5i \;\; \Rightarrow v = \frac{5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{10i+5}{4+1} = 1+2i$ $\Rightarrow u = 2i - 2(1+2i) = -2-2i$
27	المتباينة الأولى تمثلها المنطقة بين الشعاعين المنطلقين من نقطة الأصل يصنع أحدهما زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب، ويصنع الآخر زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب. والمتباينة الثانية تمثلها النقاط الواقعة على دائرة مركزها النقطة$(0, 2)$، وطول نصف قطرها وحدتان مع النقاط الواقعة داخل الدائرة. فالمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو الجزء المظلل في الرسم المجاور.