عبد القادر الحسنات
078 531 88 77

# الرياضيات الأساسية

## للصف الثاني الثانوي

## الصناعي والفندقي

## 2014 / 2015

## المستوى الثاني

وحدة

# الاقترانات الأسية واللوغاريتمات

- شرح وأمثلة
- تمارين
- جميع أسئلة الوزارة ( ٢٠٠٨ - ٢٠١٥ )

المعلم : عبدالقادر الحسنات

078 531 88 77

اسم الطالب :

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )



# مراجعة + الأسس النسبية

١) لكل عدد حقيقي مثل أ :

$أ^{ن}$ = أ × أ × أ × أ × ... ← ن من المرات

أ : الأساس

ن : الأس ( القوة )

* عدد طبيعي

مثلاً : ① $٥^{٢} = ٥ \times ٥ = ٢٥$

② $٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$

③ $(-٣)^{٣} = -٣ \times -٣ \times -٣ = -٢٧$

④ $(-١)^{٤} = -١ \times -١ \times -١ \times -١ = +١$

٢) هنالك (٧) قواعد مهمة في الأسس

① عند الضرب بجمع الأسس : $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

② = القسمة نطرح ← : $س^{م} \div س^{ن} = س^{م-ن}$

③ في حالة قوة القوة نضرب الأسس : $(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

④ ( أي عدد غير الصفر )$^{٠} = ١$

⑤ عند اختلاف الأساسات نوزع القوة في حالتي الضرب والقسمة

$(س \times ص)^{م} = س^{م} \times ص^{م}$

$\left(\frac{س}{ص}\right)^{م} = \frac{س^{م}}{ص^{م}}$

⑥ عند تغيير مكان العدد من البسط إلى المقام أو العكس نعكس إشارة قوته $: س^{م} = \frac{١}{س^{-م}}$

⑦ القوة الكسرية : نحولها إلى جذر

$س^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{س})^{م}$ أو $\sqrt[ن]{س^{م}}$

ملاحظة ① $(س^{\frac{1}{ن}})^{ن} = \sqrt[ن]{س^{ن}} = \begin{cases} |س| \text{ ، } ن \text{ عدد زوجي} \\ س \text{ ، } ن \text{ عدد فردي} \end{cases}$

② إذا كان دليل الجذر زوجياً فيجب أن يكون ما بداخل الجذر موجباً وإلا فالناتج غير معرّفة

مثلاً : $\sqrt[4]{81} = 3$ ، $\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt[4]{-16}$ غير معرّف في ح

$\sqrt[5]{-32} = -2$ ، $\sqrt[3]{-27} = -3$ ، $\sqrt[3]{-8} = -2$

مثال ① $10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100}$

② $5^{-2}$ : قوة سالبة إذاً تنزلها إلى المقام

$\frac{1}{5^{+2}} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$

③ $(\frac{1}{2})^{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ أو $(\frac{1}{2})^{3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

④ $(27)^{\frac{2}{3}}$ : قوة كسرية إذاً نحوّلها إلى جذر

$= (\sqrt[3]{27})^{2} = (3)^{2} = 3 \times 3 = 9$

⑤ $\sqrt[5]{(-7)^5} = -7$ لأن دليل الجذر (5) عدد فردي

⑥ $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = +3$ لأن دليل الجذر عدد زوجي (2)

⑦ $(4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

⑧ $(0.64)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = 0.8$

⑨ $\sqrt[3]{125} = 5$ لأن $5 \times 5 \times 5 = 125$

⑩ $(16)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(16)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

الاختصار (أو التبسيط) : هو جعل أسئلة الوزارة دائماً تؤول القوى الكسرية إلى صيغة مـ
والقوى السالبة إلى موجبة بتغيير مكانها فوق وتحت

مثلاً: ① $\frac{(١٦)^{\frac{٣}{٤}}}{(٨)^{\frac{١}{٣}}} = \frac{(\sqrt[٤]{١٦})^{٣}}{\sqrt[٣]{٨}} = \frac{(٢)^{٣}}{٢} = \frac{٤ \times ٤ \times ٢}{٢} = ٣٢$

② $(\sqrt{١٢} \times \sqrt{٣})^{٣} = (\sqrt{٣٦})^{٣} = (\sqrt{٣ \times ١٢})^{٢} = ٦^{٣} = ٢١٦$

③ $(-١٢٥)^{\frac{٤}{٣}} \times (١٦)^{\frac{١}{٤}} = (\sqrt[٣]{-١٢٥})^{٤} \times \sqrt[٤]{١٦}$
$= (-٥)^{٤} \times ٢ = ٥ \times ٢ = ١٠$

④ $\frac{(٨)^{\frac{٤}{٣}} \times (-٢٧)^{\frac{٤}{٣}}}{(٦٤)^{\frac{٤}{٣}} \times (٨١)^{\frac{١}{٤}}} = \frac{(\sqrt[٣]{-٨})^{٤} \times (\sqrt[٣]{-٢٧})^{٤}}{(\sqrt[٣]{٦٤})^{٤} \times \sqrt[٤]{٨١}}$

$= \frac{(-٢)^{٤} \times (-٣)^{٤}}{(٤)^{٤} \times ٣} = \frac{١ \times ٤ \times ٤ \times ٣ \times ٣}{٤ \times ٤ \times ٤ \times ٣} = \frac{٩}{٤}$

⑤ $\left(\frac{\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٢٤}}{\sqrt[٣]{٦}}\right)^{١٢} = \frac{(\sqrt[٣]{٣})^{١٢} \times (\sqrt[٣]{٢٤})^{١٢}}{(\sqrt[٣]{٦})^{١٢}} = \frac{٣^{٦} \times ٢^{٤}}{٦^{٣}}$

$= \frac{٣^{٦} \times ٢^{٤}}{٣^{٣} \times ٢^{٣}} = ٣^{٣} \times ٢ = ٢٧ \times ٢ = ٥٤$

① قيمة $\sqrt[3]{-27} = \ldots$ ٢٠٠٨ ش علاستاه

② " $\sqrt[4]{(-3)^4} = \ldots$ ٢٠٠٨ ص "

③ $(8)^{\frac{2}{3}} = \ldots$ ٢٠٠٩ ش "

④ $(27)^{\frac{2}{3}} = \ldots$ ٢٠٠٩ ص "

⑤ قيمة $3^{-2} = \ldots$ ٢٠١٠ ش "

⑥ قيمة المقدار : $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \ldots$ ٢٠١١ ص علاستان

⑦ " " $(0.64)^{\frac{2}{3}} = \ldots$ ٢٠١٢ ش "

⑧ " " $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \ldots$ ٢٠١٢ ص "

⑨ " " $\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots$ ٢٠١٣ ش "

⑩ " " $\sqrt[3]{\frac{-125}{8}} = \ldots$ ٢٠١٣ ص "

⊗ اختصر ما يلي ( أو بسّط )

⑪ $\frac{(32)^{\frac{2}{5}} \times (25)^{\frac{1}{5}}}{(0.008)^{\frac{1}{3}}}$ ٢٠٠٨ ش علاستان

⑫ $\frac{(25)^{\frac{1}{2}} \times (8)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{0.001}}$ = ٢٠٠٨ ص علاستان

⑬ $\frac{(16)^{\frac{1}{4}} \times \sqrt[3]{125}}{(1000)^{\frac{1}{3}}}$ = ٢٠٠٩ ش خمسة

⑭ $\frac{\sqrt[3]{-8} \times (64)^{\frac{1}{2}}}{(64)^{\frac{1}{3}} \times (16)^{\frac{1}{2}}}$ = ٢٠٠٩ ص ستة

٥

(٥) $\frac{(٢٧)^{\frac{٤}{٣}} \times \sqrt[٤]{٥٦٢٥}}{\sqrt{٨١٠٠} \times (-١٠٠)^{\frac{١}{٢}}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٦ ، ش ∈ ١٠

(٦) $(٥٤)^{\frac{٣}{٤}} \times (٢٤)^{\frac{-١}{٣}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٥ ، ص ∈ ١٠

(٧) $(٣٤)^{\frac{١}{٤}} \times (٤)^{\frac{١}{٤}} \times (١٦)^{\frac{-١}{٤}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٥ ، ش ∈ ١١

(١٨) $\left(\frac{\sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٤}}{\sqrt[٤]{١٠}}\right)^{١٢}$ = ؟ ، عدد صحيح ٥ ، ص ∈ ١١

(١٩) $\frac{(\sqrt[٣]{٣٤})^{٤}}{\sqrt[٣]{١٤} \times \sqrt[٣]{٣}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٣ ، ش ∈ ١٢

(٢٠) $\frac{\sqrt[٣]{١٨} \times \sqrt[٣]{٤}}{(\sqrt[٣]{٣٤})^{٤}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٤ ، ص ∈ ١٢

(٢١) $\frac{(٢٧)^{\frac{١}{٤}} \times (٣)^{\frac{١}{٤}}}{\sqrt[٣]{٦٤}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٤ ، ش ∈ ١٣

(٢٢) $\left(\frac{\sqrt[٣]{١٨} \times \sqrt[٣]{٤}}{\sqrt[٣]{-٦٤}}\right)^{٤}$ = ؟ ، عدد صحيح ٤ ، ص ∈ ١٣

(٢٣) $\frac{(٦٤)^{\frac{٣}{٥}} \times (\sqrt[٣]{٣٤})^{٤}}{\sqrt[٥]{-٣٢}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٥ ، ش ∈ ١٤

(٢٤) $\frac{(-٣٤)^{\frac{٥}{٤}} \times \sqrt[٤]{٨١}}{(٠,٠٩)^{\frac{١}{٤}}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٤ ، ص ∈ ١٤

(٢٥) $\frac{\sqrt[٤]{٦٤٥} \times (-٢٧)^{\frac{٤}{٣}}}{\sqrt{٠,٠٩}}$ = ؟ ، عدد صحيح ٤ ، ش ∈ ١٥

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

## ٦ الاقتران الأسي

* إذا كان الأساس عدداً ثابتاً موجباً ≠ ١ وكانت القوة تحتوي على متغير فإن الاقتران يسمى «أسي»

مثل : ه(س) = ٣^س

ه(س) = ٢^س - ١

د(س) = (١/٢)^(-٢س)

* هناك عدة أشياء يجب معرفتها عن الاقتران الأسي

١) المجال : وهو دائماً مجموعة الأعداد الحقيقية ح

٢) المدى : " " " " " الموجبة ح+

٣) شكل منحنى الاقتران

٤) نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات (نضع س = ٠)

٥) هل هو واحد لواحد أم لا ؟ دائماً واحد لواحد

٦) هل هو متزايد أم متناقص ؟

٧) نقطة تقاطعه مع محور السينات : لا يقطع السينات

مثال ① ارسم منحنى الاقتران ه : ه(س) = ٣^س ، س ∈ [-٢ ، ٢]

وزارة ٢٠٠٨ ش معلومات

الحل : نكون جدول

| س | ٢ | ١ | ٠ | -١ | -٢ |
|---|---|---|---|---|---|
| ه(س) | ٩ | ٣ | ١ | ١/٣ | ١/٩ |

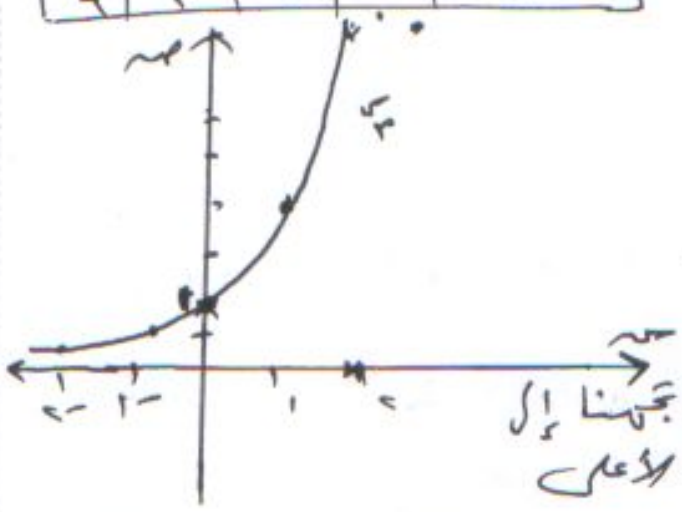
ه(٢) = ٣^٢ = ٩

ه(١) = ٣^١ = ٣

ه(٠) = ٣^٠ = ١

ه(-١) = ٣^-١ = ١/٣

ه(-٢) = ٣^-٢ = ١/٣^٢ = ١/٩




* لاحظ أنه ه متزايد لأنه كلما اتجهنا إلى اليمين ← يصعد المنحنى إلى الأعلى

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

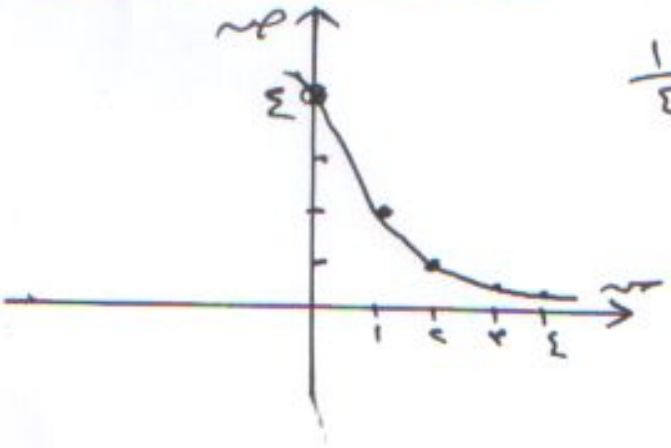
مثال ② إذا كان $و(س) = ٤^{-س}$ فأجب عما يأتي:

وزارة ٢٠١٠ | ص ٦ علامات

① أكمل الجدول المجاور

② ارسم منحنى $و(س)$

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| $و(س)$ | | | | | |




الحل: $و(٤) = ٤^{-٤} = ٤^{-٢} = \frac{١}{٤^{٢}} = \frac{١}{١٦}$

$و(٣) = ٤^{-٣} = ٤^{-١} = \frac{١}{٤}$

$و(٢) = ٤^{-٢} = ١$

$و(١) = ٤^{-١} = ٤^{١} = ٤$

$و(٠) = ٤^{-٠} = ٤^{٠} = ١$

مثال ③ إذا كان $و(س) = ٢^{س-٣}$ فجد إحداثي المقطع الصادي لمنحنى و

الحل: المقطع الصادي ⇐ نضع س = ٠

$\Leftarrow ص = ٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨} \Leftarrow (٠ ، \frac{١}{٨})$

مثال ④ إذا كانت $ع = ٥٠٠ - \frac{١}{٤} هـ^{٥٠٠ و س}$ تمثل معادلة (السعر الطلب)

وزارة ٢٠١٢ | ص | ٣ علامات

س : عدد الوحدات المباعة

ع : السعر

فجد السعر إذا كان عدد الوحدات المباعة (٤٠٠٠) وحدة

علماً بأن $هـ \approx ٢٫٧$

الحل: $ع(٤٠٠٠) = ٥٠٠ - \frac{١}{٤} هـ^{\frac{٥}{١٠٠٠} \times ٤٠٠٠}$

$= ٥٠٠ - \frac{١}{٤} \times (٢٫٧)^{\frac{٢}{١٠} \times ٤}$

$= ٥٠٠ - \frac{١}{٤} \times (٢٫٧)^{١}$

$= ٥٠٠ - \frac{١}{٤} \times \frac{٢٧}{١٠}$

$= ٥٠٠ - \frac{٢٧}{٤٠}$

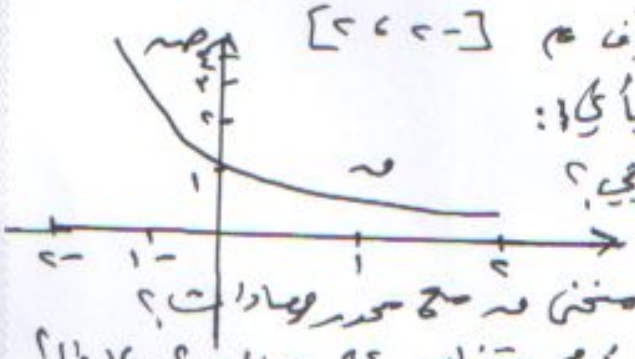
$= \frac{١٠٠٠٠ - ٢٧}{٤٠} = \frac{٩٩٧٣}{٤٠} = ٤٩٨٫٦٥$

١) إحداثيا نقطة تقاطع منحنى $هـ(س) = ٣^{س}$ مع محور الصادات هي ـــــــ . وزارة ٢٠٠٩ ص علامتان

٢) إذا كان $هـ(س) = ٣^{س}$ فإن مدى اقتران $هـ(س)$ هو ـــــــ . وزارة ٢٠١٠ ص علامتان

٣) إذا كان $هـ(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$ فإن نقطة تقاطع منحنى $هـ(س)$ مع محور الصادات هي ـــــــ . وزارة ٢٠١١ ص علامتان

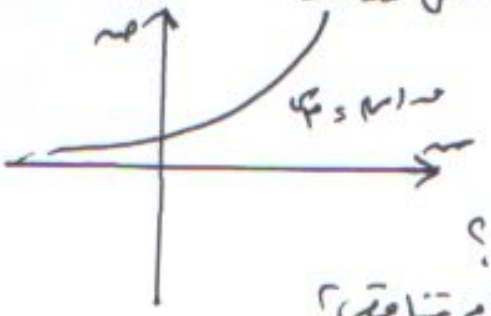
٤) الشكل المجاور يمثل منحنى $هـ$ المعرف على $[-٢، ٢]$ ص ٢٠٠٨ ٧ علامات




اعتماداً على الشكل أجب عما يأتي:
أ) هل $هـ$ اقتران أحادي أم لا؟ ولماذا؟
ب) جد $هـ(-١)$
ج) ما إحداثيا نقطة تقاطع منحنى $هـ$ مع محور الصادات؟
د) هل الاقتران $هـ$ متناقص أم متزايد على مجاله؟ ولماذا؟

٥) اكتب اسم منحنى الاقتران $هـ$ : $هـ(س) = ٣^{س}$ ، $س \in [-٢، ٢]$. ص ٢٠٠٩ ٥ علامات

٦) مستعيناً بالشكل المجاور والذي يمثل منحنى لاقتران $هـ(س) = ٣^{س}$ ص ٢٠١١ ٥ علامات

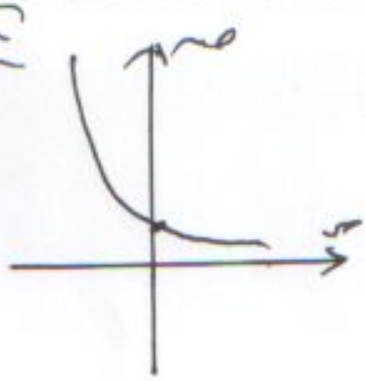



أ) ما مجال الاقتران $هـ(س)$ ؟
ب) ما مدى الاقتران $هـ(س)$ ؟
ج) ما إحداثيا نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور الصادات؟
د) هل منحنى الاقتران $هـ(س)$ متزايد أم متناقص؟
هـ) جد $هـ(٣)$ .

٧) إذا كان $هـ(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$ فأجب عما يأتي : ص ٢٠١١ ٦ علامات

| س | -٢ | -١ | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|---|---|
| $هـ(س)$ | | | | | |

أ) أكمل الجدول المجاور.
ب) اكتب اسم منحنى الاقتران $هـ(س)$
مستعيناً بالجدول السابق



٨) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران
ق(س) = $\frac{1}{2}$ $^{-س}$ ، فأجب عما يأتي :
ص ١٠٤ ، ٥ علامات
أ) هل منحنى ق(س) متزايد أم متناقص؟
ولماذا ؟
ب) ما مدى الاقتران ق(س) ؟
ج) ما إحداثيا نقطة تقاطع ق مع محور الصادات

٩) إذا كان ق(س) = ٣$^{س}$ فأجب عما يأتي :
ص ١٠٤ ، ٨ علامات
أ) أكمل الجدول المجاور

| س | -١ | ٠ | ١ |
|---|---|---|---|
| ق(س) | | | ٣ |

ب) ارسم منحنى ق(س) = ٣$^{س}$

١٠) مستعيناً بالشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق(س) = ٢$^{س}$
ص ١٠٤ ، ٥ علامات
أ) ما مجال الاقتران ق(س) ؟
ب) ما مدى ق
ج) ما إحداثيا نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات ؟
د) هل منحنى ق(س) متزايد أم متناقص ؟
هـ) جد قيمة ق(-٢)

١١) إذا كان ق(س) = ٢$^{-س}$ فأجب عما يأتي :
ص ١٠٤ ، ٧ علامات
أ) أكمل الجدول المجاور تبعاً مناسباً

| س | -١ | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|---|
| ق(س) | | | | |

ب) ارسم شكل الاقتران ق(س) .

١٢) إذا كان ق(س) = ٣ $^{١-س}$ . أجب عما يأتي :
ص ١٠٤ ، ٥ علامات
أ) جد قيمة كل من ق(٢) ، ق(-١)
ب) ما مدى الاقتران ق
ج) ما إحداثيا نقطة تقاطع ق مع محور الصادات ؟

(+9

١٣) إذا كان $د(س) = ٢^{س-٢}$ أوجد ما يأتي

أ) أكمل الجدول المجاور في إجابة

| س | -١ | ٠ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| $د(س)$ | | | | |

ب) ارسم منحنى الاقتران $د(س)$ مستعينًا بالجدول السابق في فرع (أ)

(علامة ٧ ص ١٤٠)

١٤) إذا كان $د(س) = ٤^{س-٢}$ ، أوجد ما يأتي مستعينًا بالآلة.

أ) هل يوجد كل من $د(-١)$ ، $د(٥)$

ب) ما مجال الاقتران $د$ ؟

ج) ما إحداثي نقطة تقاطع منحنى الاقتران $د(س)$ مع المحور الصادي؟

(علامة ٦ ص ١٥٠)

# ١٠ المعادلات الأسية

* المعادلة الأسية هي معادلة تحتوي على متغير أو أكثر في قوتها مثل : $س^{ص} = ع^{٣}$

* لحل المعادلة الأسية يجب أن نصل بطرفيها إلى الأساس نفسه مثلاً : $١٦^{س} = ٨^{ص} \Leftarrow ٢^{٤س} = ٢^{٣ص}$

مثال ① $٣^{س} = ٨١$

الحل : $٣^{س} = ٣^{٤}$

$س = ٤$

٨١ = ٩ × ٩ = ٣ × ٣ × ٣ × ٣

② $٤^{س-٣} = ١٦^{س}$

الحل : $٤^{س-٣} = (٤^{٢})^{س}$

$٤^{س-٣} = ٤^{٢س}$

$س - ٣ = ٢س$

$-س = ٣$

$س = -٣$

③ $٥^{س+١} \times ٥^{س+٧} = ٥^{ص}$

الحل : $٥^{س+١+س+٧} = ٥^{ص}$

$٢س + ٨ = ص$

$س = \frac{ص}{٢} = -١$

④ $\frac{٤^{س+١}}{١٦^{س}} = ٤$

الحل : $\frac{٤^{س+١}}{(٤^{٢})^{س}} = ٤^{ص}$

$\frac{٤^{س+١}}{٤^{٢س}} = ٤^{ص}$

$س + ١ - ٢س = ص$

$-س + ١ = ص$

$-س + ١ = ٣$

$-س = ٢$

$س = -٢$

⑤ $٧^{س-٩} = ١$

الحل : نستبدل (١) بـ (٧)

$٧^{س-٩} = ٧^{٠}$

$س - ٩ = ٠$

$س = ٩$

$س = \pm ٣$

⑥ $٢^{س+١} \times ٣^{س-٤} = ١٨$

الحل : $(٣ \times ٢)^{س-٤} \times ٢^{س+١-س+٤} = ٣ \times ٢$

$٣^{س-٤} \times ٢^{٥} = ٣ \times ٢$

$٣^{س-٤} \times ٣٢ = ٣^{١} \times ٢^{١}$

$٣^{س-٤} = ٣^{١}$

$س - ٤ = ١$

$س = ٥$

⑦ $٨^{س-٣} = ٤^{س-٤}$

$٢^{٣س-٩} = ٢^{٢س-٨}$

$٣س - ٩ = ٢س - ٨$

$س = ١$

⑧ $٨^{س-٣} = ٤^{س-٤}$

$٢^{٣س-٩} = ٢^{٢س-٨}$

$٣س - ٩ = ٢س - ٨$

$س = ١$

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

# أسئلة وزارية ٢٠٠٨ - ٢٠١٤ (١١)

١) $2^{ك+3} \times 2^{5} = 64$ — ٢٠٠٨ ش — علوم

٢) $2^{ك+3} \times 2^{ط+1} = 64$ — ٢٠٠٩ ف — علوم ٣

٣) $\frac{2^{ك+5} \times 3}{2^{ك+1}} = 16$ — ٢٠١٠ ش — علوم ٥

٤) $2^{ك-1} = 8$ — ٢٠١٠ ف — علوم

٥) $3^{ك+3} \times 3^{ك-2} = 81$ — ٢٠١٠ ف — علوم ٤

٦) $5^{ك} = 5^{2}$ — ٢٠١١ ش — علوم

« الجواب : ك = ٢ »

٧) $5^{ك+2} \times 5^{ك-2} = 25$ — ٢٠١١ ش — علوم ٥

٨) $2^{ك+1} = 16$ — ٢٠١٢ ف — علوم

٩) $3^{ك-1} = 9$ — ٢٠١٢ ش — =

١٠) $3^{ك} = 81$ — ٢٠١٢ ف — =

١١) $5^{ك+2} \times 5^{ك-1} = 25$ — = — علوم ٥

١٢) $2^{ك} = 128$ — ٢٠١٣ ش — علوم

١٣) $2^{ك+2} = 1$ — ٢٠١٣ ف — علوم

١٤) $4^{ك+1} \times 4^{ك-2} = 16$ — ٢٠١٣ ف — علوم ٤

١٥) $2^{ك-2} \times 2^{ك+3} = 8$ — ٢٠١٤ ش — علوم ٣

١٦) $3^{ك+2} = 1$ — ٢٠١٤ ش — علوم

١٧) $4^{ك-2} \times 16^{ك} = 64$ — ٢٠١٤ ف — علوم ٤

١٨) $3^{ك} \times 9^{ك-1} = 81$ — ٢٠١٥ ش — علوم ٥

# اللوغاريتمات

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

* لكل رمز في الرياضيات دلالة لفظية

فمثلاً : ① ٥^٢ : يعني ما هو العدد الذي إذا ضُرب في نفسه يكون الناتج ٢٥ ؟ الجواب = ٥

② س + ٣ = ٧ تعني ما هو العدد الذي إذا أُضيف إليه ٣ يكون الناتج ٧ ؟ الجواب ٤

والآن سنتعرف على رمز جديد وهو رمز اللوغاريتم

ورمزه : $\log_{م} هـ = ب$ ، حيث م : أساس اللوغاريتم

ويعني كم مرة يجب أن نضرب العدد (م) في نفسه ليكون الناتج صاعداً لـ هـ ( الجواب : ب من المرات )

أو : م أُسّ كم = هـ الجواب $م^{ب} = هـ$

مثلاً : ① $\log_{٢} ٨$ = تعني (٢) أُسّ كم يساوي (٨) ؟ الجواب ٣

② $\log_{٣} ٨١$ : تعني (٣) أُسّ كم يساوي (٨١) ؟ = ٤

ملاحظة : في $\log_{م} هـ$ : يجب أن يكون م ، هـ عددين حقيقيين موجبين حيث $م \neq ١$

إذا كان $\log_{م} هـ = ب$ فإن $م^{ب} = هـ$ والعكس صحيح.

الصيغة اللوغاريتمية ⟷ الصيغة الأسية

مثال ① عبّر بالصيغة الأسية :

① $\log_{٥} ١٢٥ = ٣$ ← $٥^{٣} = ١٢٥$

نضع أساس اللوغاريتم أسفل الصيغة الأسية

② $\log_{٤} ١٦ = ٢$ ← $٤^{٢} = ١٦$

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

ملاحظة ① إذا لم يكتب أساس اللوغاريتم (تحت حرف اللوا) فأساسه (١٠) تلقائياً ، ويسمى باللوغاريتم الاعتيادي

مثلاً : لو ا.ه = ت تعني لو ا.ه = ت

ورمزه في الآلة الحاسبة : Log

② إذا كان أساس اللوغاريتم هو العدد النابيري (ه)

فإنه يسمى باللوغاريتم الطبيعي ورمزه : Ln

مثال ① عبّر بالصيغة اللوغاريتمية :

① ٧^٢ = ٤٩ ⟸ لو٧ ٤٩ = ٢

② ٨^٠ = ١ ⟸ لو٨ ١ = صفر

مثال ② جد قيمة :

① لو٦٤ ٢

② لو ا.ه.ه.ه

الحل : نفرض أنها تساوي س ثم نحولها إلى الصيغة الأسية

الحل : لو٦٤ ٢ = س

٢^س = ٦٤

٦٤ = ٢^س

٦٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢

٦٤ = ٢^٦

س = ٦

الحل : لو ا.ه.ه.ه = س

١٠^س = ا.ه.ه.ه

١٠^س = ١/١٠٠٠

١٠^س = ١/١٠^٤

س = -٤

③ لو٧ ؟ = ؟

الحل : لو٧ ؟ = س

؟^س = ٧

(؟^س)^٣ = ٣^٣

؟^٣س = ٣^٣

؟^س = ٣

س = ٣/٣

قرين ④ لو٣ ؟ = ؟

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

# قوانين اللوغاريتمات

* هناك (٧) قوانين مهمة في اللوغاريتمات وهي مشتقة من الأسس

١) $\log_ب ا = هـ$ ، $ب \neq ١$ ، $ب > ٠$ حيث هـ هو الأس الذي يجعل العدد (ب) يساوي (ا)

مثلاً: ① $\log_٥ ١ = ٠$

② $\log_٧ ١ = ٠$ وهكذا

٢) $\log_م م = ١$ دائماً لوغاريتم العدد لأسه نفسه العدد يساوي ١

مثلاً: ① $\log_٨ ٨ = ١$

② $\log_٩ ٩ = ١$

٣) $\log_ب م^{ن} = ن \times \log_ب م$ دائماً ننزل قوة أمام اللوغاريتم

مثلاً: ① $\log_٥ ٢٥ = \log_٥ ٥^{٢} = ٢ \times \log_٥ ٥ = ٢$

② $\log_٢ \frac{١}{٨} = \log_٢ ٨^{-١} = -١ \times \log_٢ ٢^{٣} = -٣ = -٣$

٤) $\log_ج (م \times ن) = \log_ج م + \log_ج ن$ دائماً عند الضرب نجمع اللوغاريتمات

أو عند جمع لوغاريتمين لهما نفس الأساس نجد لوغاريتم حاصل ضرب العددين

مثلاً: ① $\log_٣ ٨١ + \log_٣ ٣ = \log_٣ (٨١ \times ٣) = \log_٣ ٢٤٣ = \log_٣ ٣^{٥} = ٥$

② $\log_٤ ٣٢ + \log_٤ ٢ = \log_٤ (٣٢ \times ٢) = \log_٤ ٦٤ = \log_٤ ٤^{٣} = ٣$

٥) $\log_ج (\frac{م}{ن}) = \log_ج م - \log_ج ن$ دائماً عند القسمة نطرح اللوغاريتمات

مثلاً: ① $\log_٤ ٦٤ - \log_٤ ١٦ = \log_٤ \frac{٦٤}{١٦} = \log_٤ ٤ = \log_٤ ٤^{١} = ١$

② $\log ٣٠ + \log ١١ - \log ٣٣ = \log (\frac{٣٠ \times ١١}{٣٣}) = \log \frac{٣٠}{٣}$

$= \log ١٠ = ١$

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

٦) $\log_{ب} م \times \log_{جـ} ب = \log_{جـ} م$

مثال ① $\log_{٥} ٢٥ \times \log_{٢} ٢ = \log_{٥} ٢٥ = ٢$

② $\log_{٣} ٨١ \times \log_{٧} ٧ \times \log_{٣} ٧$

$= \log_{٣} ٨١ \times \log_{٣} ٧$

$= \log_{٣} ٨١ = \log_{٣} ٣^{٤} = ٤ \log_{٣} ٣ = ٤$

٧) $\log_{ب} م = \frac{\log_{جـ} م}{\log_{جـ} ب}$ : هذه القاعدة مهمة في حل المسائل العملية

فلا يجاد لوغاريتم عدد لا نستطيع إيجاده من خلال القوانين السابقة نضطر إلى استخدام الآلة الحاسبة العلمية فنختار لأساس (١٠) أو (هـ) ونجد اللوغاريتمين ونقسمها

مثلاً ① $\log_{٥} ٢٨$ :

لاحظ أنه لا علاقة للعدد (٢٨) بالعدد (٥) ولا يوجد في الآلة الحاسبة الأساس (٥) لذلك :

باستخدام القاعدة السابقة $\log_{ب} م = \frac{\log_{جـ} م}{\log_{جـ} ب}$ نصبح

$\log_{٥} ٢٨ = \frac{\log ٢٨}{\log ٥} = \frac{١٫٤٤٧}{٠٫٦٩٨٩٧} = ٢٫٠٧$

أو $\log_{٥} ٢٨ = \frac{\log_{هـ} ٢٨}{\log_{هـ} ٥} = \frac{٣٫٣٣٠}{١٫٦٠٩} = ٢٫٠٧$

② إذا كان $\log س = ٠٫٨$ ، $\log ص = ٠٫٤$ فجد $\log_{ص} س$

الحل : $\log_{ص} س = \frac{\log س}{\log ص} = \frac{٠٫٨}{٠٫٤} = ٢$

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 ) أسئلة الوزارة ٢٠٠٨ - ٢٠١٤

١) الصيغة اللوغاريتمية للمعادلة : $س^{٤} = هـ$ هي ـــــ ٢٠٠٨ علمي

٢) قيمة $لو_{٣} ٦٤ \times لو_{٦} ٣ =$ ـــــ .

٣) جد قيمة $لو_{٨} ٣٢ + ٢ لو_{٢} - ٣ لو_{٨} ٤$ ٢٠٠٨ علمي

٤) الصيغة الأسية للمعادلة $لو_{٥} س = ٣$ هي ـــــ . ٢٠٠٨ صناعي

٥) أثبت أن $لو_{٤} ٥ \times لو_{٥} ٤ + لو ١٠ = ١$ ٢٠٠٨ علمي

٦) الصيغة اللوغاريتمية للمعادلة : $س^{٣} = ٧$ هي ـــــ . ٢٠٠٩ علمي

٧) جد قيمة $لو ١١ + لو ٣٠ - لو ٣٣ - (لو_{٥} ٣ \times لو_{٢} ٥)$ ٢٠٠٩ علمي

٨) بيّن أن : $لو_{٤} ٥ \times لو_{٥} ٤ - لو_{٢} ٤ = صفر$ ٢٠٠٩ صناعي

٩) الصيغة اللوغاريتمية للصيغة : $٢^{٣} = ٨$ هي ـــــ ٢٠١٠ صناعي

١٠) $لو_{٥} ٣ + لو_{٣} ٥$ يساوي ـــــ .

١١) جد قيمة المقدار : $لو_{٤} ١٦ + لو_{٣} ١٥ - لو_{٣} ٥$ ٢٠١٠ علمي

١٢) $لو_{٣} ٣^{٢} =$ ـــــ . ٢٠١١ صناعي

١٣) جد قيمة ما يأتي : أ) $لو ١٠٠٠$ ٢٠١١ علمي

ب) $لو_{٥} ٨١ \times لو_{٣} ٥$ ٢٠١٣ علمي

ج) $لو \frac{١}{١٠٥}$

١٤) $لو_{٣} \frac{١}{٢}$ يساوي ـــــ ٢٠١١ صناعي

١٥) جد قيمة بأبسط صورة : $لو ٤٠٠ + لو ١١ - لو ٤٤$ ٢٠١٤ علمي

١٦) الصيغة الأسية المكافئة للصيغة $لو_{٥} س^{٣} = ٢$ هي ـــــ ٢٠١٤ صناعي

١٧) الصيغة اللوغاريتمية المكافئة للصيغة : $س = ٥^{ص}$ هي ـــــ ٢٠١٤ علمي

١٨) إذا كان $لو ص = ٢$ فإن $لو ٥ ص =$ ـــــ

١٩) جد قيمة $لو ٤٩ \times لو ٥$ ٢٠١٤ صناعي

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 077 531 88 77 )

ب) الصيغة اللوغاريتمية المكافئة للصيغة الأسية

$٣^{٤} = ٨١$ ص ـــــ ص ١٣.ج ٣ علامات

ج) جد قيمة : $\log_{٤} ٧٢ - \log_{٤} ٩$ ٣ علامات

د) الصيغة الأسية المكافئة للصيغة اللوغاريتمية

$\log_{ب} ا = جـ$ ص ـــــ ص ١٣.ج ٣ علامات

هـ) إذا كان $\log س = ٤ \log ٢ + \log ص + ٣ \log ع$ فبيّن أن $س = ٨ ص ع^{٣}$ ـــــ ص ١٣.ج ٣ علامات

و) جد قيمة : $\log_{٣} ٨١ + \log_{٥} ٢٥ - \log_{٥} ٧$ ص ١٣.ج ٣ علامات

ز) جد قيمة ما يأتي بأبسط صورة :

$\log_{٤} ٤٨ - \log_{٤} ٣ + \log_{٧} \frac{١}{٧}$ ش ١٤.ج ٤ علامات

ح) جد قيمة : $\log_{٤} ١٦ + \log_{٢} ٤ - \log_{٢} ٦$ ص ١٤.ج ٣ علامات

وأبسط صورة :

ط) $س =$ : $\log ١٠٠٠ - (\log_{٢} ٦٤ \times \log_{٨} ٧)$ ص ١٥.ج ٣ علامات

ي) إذا كان $\log ص = ٢ \log ٥ + \log ٦$ ، $\log ٣ = ١,٢$

فجد $\log \overline{٢٥٠} + \log ١٦ \cdot$ ص ١٤.ج ٣ علامات

ك) إذا كان $\log س = ٩٠ ، \log ٣٦ = ١,٦$

فجد $\log \sqrt[٣]{س} + \log ٣,٦$ ص ١٥.ج ٣ علامات

* ص = لو$_{ب}$ س اقتران لوغاريتمي ⟺ س = ب$^{ص}$ ، س > ٠ ، ب > ٠ ، ب ≠ ١

هنا الأمثلة على الاقترانات اللوغاريتمية :

ق(س) = لو$_{٣}$ س ، هـ(س) = لو$_{٥}$ س ، م(س) = لو$_{٣}$ (س+٢)

ق(س) = لو (٣س−٤) : اقتران لوغاريتمي اعتيادي

ق(س) = لو$_{د}$ (٢س−٥) : اقتران لوغاريتمي طبيعي .

مثال ① ارسم منحنى الاقتران ق(س) = لو$_{٢}$ س

الحل : نكون جدولاً بحيث تكون قيم س لها علاقة بالأساس (٢)

مثلاً : ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ... ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$

لو كان الأساس ٣ : نختار ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ... ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$

ولا يجوز اختيار قيم سالبة

| س | ٤ | ٢ | ١ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{١}{٤}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) | ٢ | ١ | ٠ | −١ | −٢ |

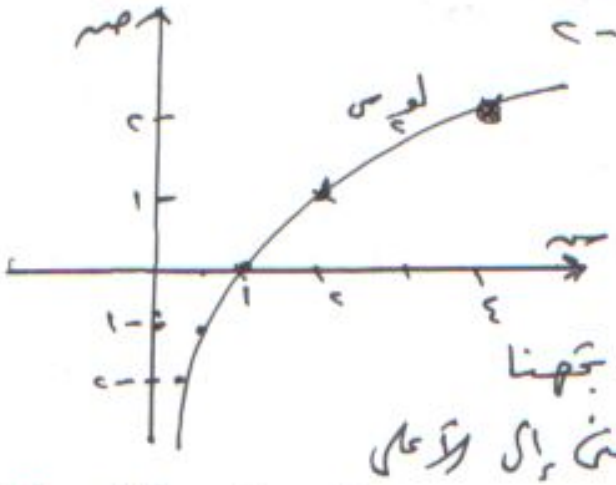
ق(٤) = لو$_{٢}$ ٤ = ٢

ق(٢) = لو$_{٢}$ ٢ = ١

ق(١) = لو$_{٢}$ ١ = ٠

ق($\frac{١}{٢}$) = لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢}$ = لو$_{٢}$ ٢$^{-١}$ = −١ ( يُمكن أن تكون النتائج سالبة )

ق($\frac{١}{٤}$) = لو$_{٢}$ $\frac{١}{٤}$ = لو$_{٢}$ ٢$^{-٢}$ = −٢




ملاحظات :

① المجال : ح$^{+}$

② المدى : ح

③ الاقتران متزايد لأنه كلما اتجهنا إلى اليمين يصعد المنحنى إلى الأعلى

④ الاقتران واحد لواحد ( لا يوجد عددان لهما نفس الصورة )

⑤ المقطع السيني ( ١ ، ٠ )

⑥ = الصادي : لا يوجد

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

مثال ② إذا كان د(س) = لو$_{٣}$(س-١) فجد

① المجال ② المدى ③ المقطع السيني ④ المقطع الصادي

الحل: ① يجب أن يكون ما بداخل اللوغاريتم موجباً

س - ١ > ٠

س > ١

إذاً المجال : جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من (١)

س ∈ (١ ، ∞)

② المدى : جميع الأعداد الحقيقية : ح

③ المقطع السيني : نضع ص = ٠

لو$_{٣}$(س-١) = ٠

نحولها إلى الصيغة الأسية : س - ١ = ٣$^{٠}$

س - ١ = ١

س = ١ + ١ = ٢ ⇐ (٠ ، ٢)

④ المقطع الصادي : الاقتران د(س) لا يقطع محور الصادات

تمرين : إذا كان د(س) = لو$_{٥}$(٢س + ٦) فجد

① المجال ② المدى ③ المقطع السيني

| الاقتران | المجال | المدى |
|---|---|---|
| د(س) = لو$_{٤}$ س | ح+ | ح |
| د(س) = $٤^{س}$ | ح | ح+ |

حلد خطة :

لوغاريتمي :

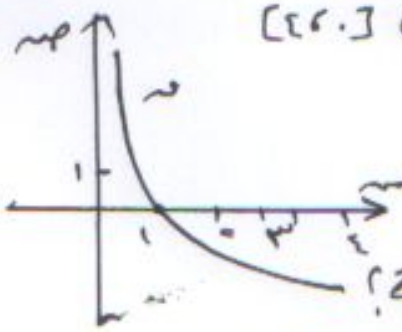
أسي :

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

## أسئلة الوزارة ٢٠٠٨ - ٢٠١٤ م

① إذا كان ق(س) = لو$_{\frac{1}{3}}$ (س - ٢) فإن مجال ق هو ح ـــ ٢٠٠٨ م علامتان

② الشكل المجاور يمثل منحنى لاقتران ق المعرف على [٠، ٤]




اعتماداً على ذلك أجب عما يأتي :

ⓐ هل ق اقتران أسي أم لوغاريتمي ؟

ⓑ جد ق(٤)

ⓒ ما إحداثيا نقطة تقاطع ق مع محور الصادات ؟

ⓓ هل ق متزايد أم متناقص على مجاله ؟ ولماذا ؟ ٢٠٠٩ م ٦ علامات

③ إذا كان ق(س) = لو$_{\frac{1}{3}}$ س فإن مدى ق هو ح ـــ ٢٠١٠ م علامتان

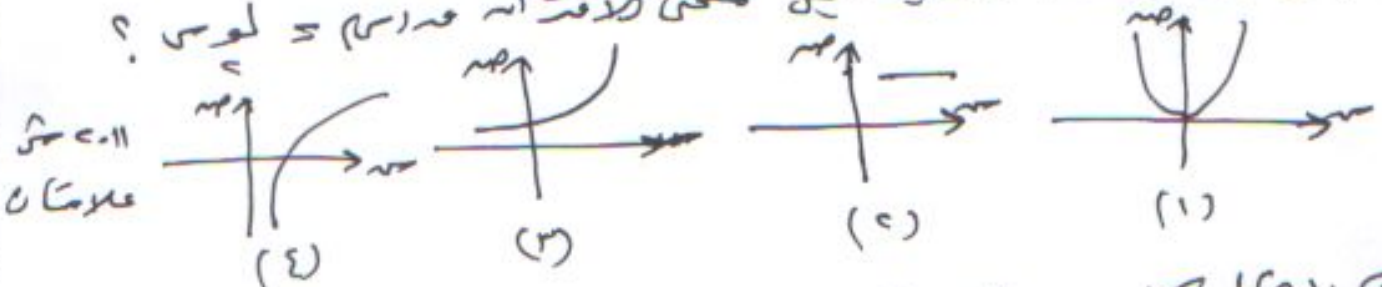
④ إذا كان ق(س) = لو$_{\frac{1}{3}}$ س ، س ∈ [٠،١ ، ٩] فأجب عما يأتي :

ⓐ أكمل الجدول الآتي بما يناسب

| س | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | ١ | ٣ | ٩ |
|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) | | | | | |

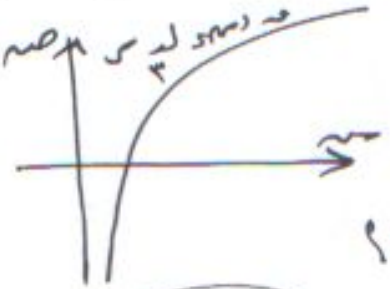
ⓑ أرسم منحنى الاقتران ق مستعيناً بالجدول السابق ٢٠١٠ م ٦ علامات

⑤ أي من الأشكال الآتية يمثل منحنى لاقتران ق(س) = لو$_{\frac{1}{3}}$ س ؟




٢٠١١ م علامتان

⑥ الشكل المجاور يمثل منحنى لاقتران ق(س) = لو$_{\frac{1}{3}}$ س مستعيناً به أجب عما يأتي :




ⓐ ما مجال الاقتران ق ؟ (علامة)

ⓑ ما مدى ق ؟

ⓒ هل منحنى ق متزايد أم متناقص على مجاله ؟ (علامة)

ⓓ ما إحداثيا نقطة تقاطع منحنى ق مع محور الصادات ؟ (علامتان)

ⓔ جد ق($\frac{1}{27}$) (علامتان)

٢٠١١ م ٧ علامات

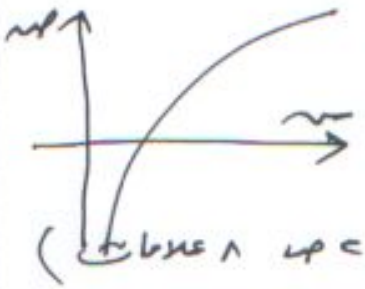
(٧) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ فأجب عما يأتي :

أ) أكمل الجدول الآتي :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | $3$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-1$ | | | |

ب) ارسم منحنى $f(x)$ (٣ علامات)

(٨) مستعيناً بالشكل الآتي والذي يمثل منحنى $f(x)$ ، أجب عما يأتي :



أ) ما مجال $f(x)$ ؟

ب) مدى $f(x)$ عندما $0 < x \leq 3$

ج) ما إحداثيا نقطة تقاطع $f(x)$ مع محور السينات ؟

د) هل منحنى $f(x)$ متزايد أم متناقص ؟ (٨ علامات)

(٩) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ فأجب عما يأتي :

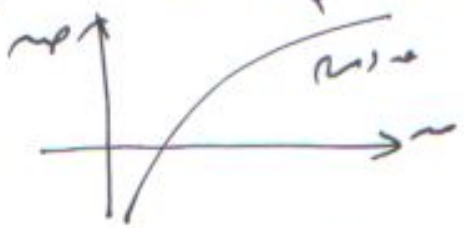
| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | $-1$ | |

أ) أكمل الجدول الآتي :

ب) ارسم منحنى $f(x)$ مستعيناً بالجدول السابق (٨ علامات)

(١٠) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g(x) = x - 1$ فأوجد $(f \circ g)(9)$ (٣ علامات)

(١١) مستعيناً بالشكل الآتي والذي يمثل منحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ فأجب عما يأتي :



أ) ما مجال $f$ ؟

ب) ما مدى $f$ ؟

ج) هل منحنى $f$ متزايد أم متناقص ؟

د) ما إحداثيا نقطة تقاطع منحنى $f$ مع محور السينات ؟

(١٢) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g(x) = x - 1$ فأجب عما يأتي :

أ) أكمل الجدول الآتي بما يناسب :

| $x$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $2$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

ب) ارسم منحنى $f$ مستعيناً بالجدول السابق

(١٤ شكل ٧ علامات)

(+ ٥١)

(١٣) إذا كان ق(س) = لو$_{\frac{1}{3}}$ (٤ − س) أجب عما يأتي:

١) جد مجال ق ومدى ق(−٥) ، ق(٢) ، ق($\frac{11}{3}$) .

٢) ما مجال الاقتران ق ؟

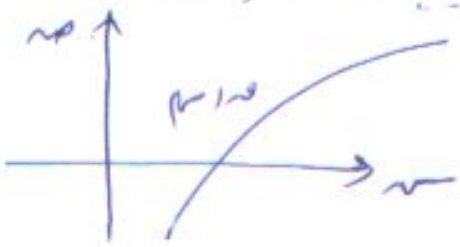
٣) ما مدى الاقتران ق ؟

٤) هل منحنى ق متناقص في مجاله ؟

٥) جد نقطة تقاطع منحنى ق مع محور السينات ؟

(حل السؤال ٦ علامات ص ١٤٠)

(١٤) مستعيناً بالشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق : ق(س) = لو$_{\frac{1}{3}}$ (س − ١) أجب عن الأسئلة الآتية:




١) ما مجال الاقتران ق ؟

٢) ما مدى الاقتران ق ؟

٣) هل منحنى الاقتران ق متناقص في مجاله ؟

٤) جد نقطة تقاطع منحنى ق مع محور السينات ؟

٥) جد ق($\frac{4}{3}$)

(حل السؤال ٦ علامات ص ١٥٠)

# المعادلات اللوغاريتمية

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

* دائماً نحوّل المعادلة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية ثم نحلها كما في المعادلات الأسية.

وهناك ٣ احتمالات لموقع س

① لو$_{٤}$ س = ٥ ② لو$_{٢}$ ٨ = ٣ ③ لو$_{٤}$ ١٦ = س + ١

* إذا كان هناك جمع أو طرح بين لوغاريتمين أولاً نحوّل الجمع إلى ضرب والطرح إلى قسمة ثم نحوّل إلى الصيغة الأسية.

مثال ① لو$_{٤}$ (س+٣) + لو$_{٤}$ (س−٣) = ٢

الحل: لو$_{٤}$ (س+٣)(س−٣) = ٢ ⇐ س$^{٢}$ − ٩ = ٤$^{٢}$

س$^{٢}$ = ١٦ + ٩

س$^{٢}$ = ٢٥

س = ±٥ مرفوض لأن س موجب

س = ٥

② لو$_{٦}$ (س+٦) − لو$_{٦}$ س = ١

لو$_{٦}$ $\frac{س+٦}{س}$ = ١ ⇐ $\frac{س+٦}{س}$ = ٦$^{١}$

س + ٦ = ٦س

٥س = ٦ ⇐ س = $\frac{٦}{٥}$

* إذا كان هناك عدد مضروباً في اللوغاريتم (٤ لو$_{٣}$ س) نجعله قوة لما في داخل اللوغاريتم ثم نكمل باقي الخطوات

مثال ③ ٢ لو$_{٣}$ س = ٤ ⇐ لو$_{٣}$ س$^{٢}$ = ٤

⇐ س$^{٢}$ = ٣$^{٤}$

س$^{٢}$ = ٨١ ⇐ س = ٩

④ لو$_{س}$ (٦س − ٩) = ٢ ، س ≠ ١

الحل: ٦س − ٩ = س$^{٢}$

س$^{٢}$ − ٦س + ٩ = ٠

(س − ٣)(س − ٣) = ٠ ⇐ س = ٣

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 ) أسئلة الوزارة ٢٠٠٨ - ٢٠١٤

(١) حل المعادلة التالية : $\log_3 س - \log_3 (س - ٤) = \log_3 ٥$ ٢٠٠٨

(٢) $\log_2 س^2 + \log_2 س - \log_2 ٢ = ٢$ ٢٠٠٨

(٣) $\log_2 (س - ٣) + \log_2 (س + ٤) = ٣$ ٢٠٠٩

(٤) $\log_3 س^2 - \log_3 س = ١$ ٢٠٠٩

(٥) $\log_2 (س - ٤) + \log_2 س = ٣$ ٢٠٠٩

(٦) $\log_2 (س - ١) = ٥$ ٢٠١٠

(٧) $\log_4 س - \log_4 (س - ١) = \frac{١}{٢}$ ٢٠١٠

(٨) $\log_4 (س - ٣) + \log_4 س = ١$ ٢٠١٠

(٩) $\log_3 (س + ٤) = ٣$ ٢٠١١

(١٠) $\log_5 (س + ٤) \times \log_4 ٥ = ٢$ ٢٠١١

(١١) $\log_2 س - \log_2 (س - ١) = ٢$ ٢٠١٢

(١٢) $\log_2 س = -٣$ ٢٠١٣

(١٣) $\log_2 (س - ٧) - \log_2 س = ٣$ ٢٠١٣

(١٤) $\log_2 (س + ٢) + \log_2 س = ١$ ٢٠١٤

(١٥) $\log_2 س^2 \times \log_5 ٦ = ٢$ ٢٠١٤

(١٦) $\log_2 ٤ س^2 - \log_2 ٥ س = ٣$ ٢٠١٤

(١٧) $\log_2 (س - ٧) + \log_2 س = ٣$ ، $س > ٧$ ٢٠١٥

٤٤

## تطبيقات

* في التطبيقات هناك ٣ أنواع من المسألة هي الفوائد

① فائدة مركبة ⇐ نستخدم قانون : ب = م (١+ف)^ن

حيث : ب : جملة المبلغ

ف : الفائدة

ن : المدة بالسنوات

② فائدة اسمية مستمرة : ب = م × هـ^(ف×ن)  هـ ≈ ٢,٧

③ فائدة مركبة + أقساط : ب = م (١ + ف/ك)^(ن×ك)

حيث ن : المدة الزمنية

ك = عدد الأقساط في السنة

مثال ① جد جملة مبلغ (٤٠٠٠) دينار - استثمرت في بنك لمدة (٥٠) سنة على أساس فائدة مركبة معدّل ٦٪ سنوياً علماً بأن (١,٠٦)^٥٠ = ٣,٠٧

الحل : مركبة ⇐ القانون : ب = م (١+ف)^ن

ب = ٤٠٠٠ (١ + ٠,٠٦)^٥٠

= ٤٠٠٠ × (١,٠٦)^٥٠

ب = ٤٠٠٠ × ٣,٠٧ = ٤٠٠٠ × ٣,٠٧/١ = ١٢٢٨٠ دينار

مثال : أودع - جلال مبلغ (٦٠٠٠) دينار في بنك بمعدّل فائدة مركبة ٨٪ سنوياً . فبلغت بعد ن من السنين (٩٠٠٠) دينار - جد قيمة ن بالسنوات

الحل : مركبة ⇐ ب = م (١+ف)^ن

٩٠٠٠ = ٦٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^ن

٩٠٠٠/٦٠٠٠ = (١,٠٨)^ن

٩/٦ = (١,٠٨)^ن

٣/٢ = (١,٠٨)^ن

نأخذ اللوغاريتم للطرفين ⇐

لو ٣/٢ = لو (١,٠٨)^ن

لو ٣/٢ = ن × لو (١,٠٨)

إذاً ن = لو ٣/٢ / لو ١,٠٨

=

٢٥

مثال ③ إذا كانت قيمة مبلغ (١٠٠٠) دينار - مستثمرة بفائدة مركبة لمدة (١٢) سنة تساوي (٣٤٠٠) دينار . فما معدل الفائدة إذا كانت الفائدة تضاف سنوياً .

الحل : فائدة مركبة ⇐ القانون $ه = م(١+ف)^{ن}$

$$٣٤٠٠ = ١٠٠٠(١+ف)^{١٢}$$

$$\frac{٣٤٠٠}{١٠٠٠} = (١+ف)^{١٢}$$

$$٣٫٤ = (١+ف)^{١٢}$$

فأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$لو ٣٫٤ = لو(١+ف)^{١٢}$$

$$= ١٢ لو(١+ف)$$

$$لو(١+ف) = \frac{لو ٣٫٤}{١٢}$$

مثال ④ أودع رجل مبلغ (٥٠٠) ديناراً في حساب توفير بمعدل فائدة السنوية ٧٫٥٪ سنوياً . واحتسب البنك الفائدة باستمرار . ما هي قيمة المبلغ بعد ٤٠ سنة ؟

الحل : فائدة مستمرة (كل لحظة) ⇐ نستخدم القانون $ه = م \times ه^{ف ن}$

$$ه = ٥٠٠ \times ه^{٤٠ \times ٠٫٠٧٥}$$

$$= ٥٠٠ \times ه^{\frac{٧٥}{١٠٠٠} \times ٤٠}$$

$$= ٥٠٠ \times ه^{٣}$$

$$= ٥٠٠ \times (٧٫٠)^{٣}$$

$$= ٥٠٠ \times ٢٠٫٠٨٥٥$$

$$= ١٠٠٤٫٧٥ \text{ دينار}$$

ملاحظة :

$$٧٫٥٪ = ٠٫٠٧٥$$

$$ه \approx ٧٫٠$$

$$(٧٫٠)^{٣} = ٢٠٫٠٨٥٥$$

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( 078 531 88 77 )

مثال ٥ حصل رجل على قرض من أحد البنوك قيمته (٥٠٠٠) دينار
مجعّل فائدة مركبة ١٢٪ سنوياً. بحيث يتم تسديد
المبلغ على أقساط شهرية متساوية عددها ٤٨ قسطاً
حيث قيمة القسط الشهري. علماً بأن $(١٫٠١)^{٤٨}$ =

الحل: مركبة + أقساط ← $ه = م(١ + \frac{ف}{ك})^{ن \times ك}$

$ه = ٥٠٠٠$ ، $ف = ١٢٫٠$ ، عدد الأقساط = ٤٨

الأقساط تدفع شهرياً $(ك) = ١٢$ قسط سنوياً : $ك = ١٢$

$$ه = ٥٠٠٠(١ + \frac{١٢٫٠}{١٢})^{٤٨}$$

$$= ٥٠٠٠ (١٫٠١)^{٤٨}$$

$$= ٥٠٠٠ \times$$

$$= ٨٠٦١٫١٢$$

قيمة القسط الشهري = $\frac{\text{جملة المبلغ}}{\text{عدد الأقساط}} = \frac{٨٠٦١٫١٢}{٤٨} = ١٦٧٫٩٤$ دينار

مثال ٦ حصل رجل على قرض من أحد البنوك قيمته (٤٠٠٠) دينار
مجعّل فائدة مركبة ٩٪ سنوياً. تحتسب كل ٣ شهور
ما جملة المبلغ المستحق بعد ٥ سنوات.

الحل: فائدة مركبة + أقساط ← $ه = م(١ + \frac{ف}{ك})^{ن \times ك}$

عدد الأقساط السنوية = ١٢ ÷ ٣ = ٤ أقساط

عدد الأقساط (ك) = ٤ × ٥ سنوات = ٢٠ قسطاً

$$ه = ٤٠٠٠(١ + \frac{٠٫٠٩}{٤})^{٥ \times ٤} = ٤٠٠٠ \times (١٫٠٤٥)^{٢٠}$$

$$= ٤٠٠٠ \times ١٫٤٩ = ٥٩٨٥٫٠ \text{ دينار}$$

(١) استثمر مبلغ (١٠٠٠) دينار في بنك على أساس فائدة مركبة تجعل (٦٪) سنوياً . جد جملة المبلغ بعد مرور أربع سنوات علماً بأن لو ١٠٠٦ = ٠٠٢٥٣ ، لو ١٠٠٦٤ = ٠٠١٦٤ ، لو ١٠٠٦٣ = ٠٠١٦٣ ص ٧ علامات

(٢) أودع علي مبلغ (١٠٠٠٠) دينار في حساب التوفير تجعل فائدة اسمية قدرها (٥٪) سنوياً ، واحتسب البنك الفائدة باستمرار جد جملة المبلغ بعد (٥٠) سنة . (علماً بأن $e^{2.5} \approx 12.2$) ص ٨ علامات ص ٢٠٠٨

(٣) حصل يوسف على قرض من أحد البنوك قيمته (١٠٠٠٠) دينار تجعل فائدة مركبة ٨٪ سنوياً . وأراد تسديد القرض على شكل أقساط متساوية ، كل ٣ شهور قسط لمدة ٣ سنوات جد ① عدد الأقساط المستحقة ص ٧ علامات ص ٢٠٠٩

② جملة المبلغ بعد ٣ سنوات . علماً بأن $(1.02)^{12} = 1.2682$

(٤) أودع سالم مبلغ (١٠٠٠٠) دينار في بنك لمدة ١٢ سنة على أساس فائدة مركبة تجعل ٣٪ سنوياً . احسب جملة المبلغ في نهاية المدة إذا علمت أن $(1.03)^{12} = 1.4257$ ص ٧ علامات ص ٢٠٠٩

(٥) أودع المبلغ (٥٠٠٠) دينار في حساب التوفير تجعل فائدة اسمية قدرها (٥٪) سنوياً واحتسب البنك الفائدة باستمرار فإذا بلغت جملة المبلغ بعد n من السنين (١٥٠٠٠) دينار . جد المدة n بالسنوات إذا علمت أن $\ln 3 = 1.1$ ص ٧ علامات ص ٢٠١٩

(٦) أودع محمود مبلغ (١٠٠٠) دينار في حساب توفير تجعل فائدة مركبة (٨٪) فبلغت جملة المبلغ بعد (n) سنوات (١٠٠٠٠) دينار جد المدة (n) بالسنوات إذا علمت أن $\ln 1.08 = 0.077$ ص ٦ علامات ص ٢٠١٠

(٧) أودع علي مبلغ ١٠٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة مركبة قدرها ٥٪. واحتسب البنك الفائدة باستمرار. ما هي قيمة المبلغ بعد (٢٠) سنة.

(٨) تم إيداع مبلغ من المال في أحد البنوك بفائدة ١٠٪ واحتسب البنك الفائدة باستمرار، إذا علمت أن قيمة المبلغ بعد مرور (١٠) سنوات قد بلغت (٧٠٠٠) دينار فما مقدار المبلغ الذي تم إيداعه. علماً بأن هـ^١ ≈ ٢٫٧

(٩) تتزايد سكان إحدى المدن حسب العلاقة ق = ق٠ هـ^٠٫٠٣ ن حيث ق : عدد السكان بعد (ن) سنة، ق٠ : عدد السكان الحالي، م : نسبة الزيادة السنوية في عدد سكان هذه المدينة. إذا كانت نسبة الزيادة السنوية في عدد السكان ٣٪ احسب بعد كم سنة يتضاعف عدد سكان المدينة (علماً بأن لو ٢ ≈ ٠٫٦٩)

(١٠) إذا كانت ق = ٥٠٠ - ٥٠٠ هـ^(-١/٢ ن) تمثل معادلة (السعر - الطلب) حيث س عدد الوحدات المباعة من سلعة ما، ق : السعر بالدينار. احسب السعر إذا كان عدد الوحدات المباعة (٢٠٠٠) وحدة. علماً بأن هـ ≈ ٢٫٧

(١١) أودع مستثمر مبلغ (٥٠٠٠) دينار في حساب توفير بمعدل فائدة مركبة قدرها (٦٪) سنوياً. فبلغت قيمة المبلغ بعد ن سنوات (١٠٠٠٠) دينار. احسب قيمة ن بالسنوات علماً بأن لو ٢ = ٠٫٣، لو ١٫٠٦ = ٠٫٠٢٥

(١٢) تتكاثر البكتيريا حسب العلاقة ق = ق٠ هـ^٠٫٠٢ ن حيث ق : عدد البكتيريا الحالي، ق٠ : عدد البكتيريا بعد ن دقيقة. بعد كم دقيقة يصبح عدد البكتيريا ٣ أمثال عددها الحالي علماً بأن لو ٣ = ٠٫٤٨، لو ٢ = ٠٫٣

(١٣) أودع شخص (٢٠٠٠) دينار في حساب توفير بمعدل فائدة ٨٪ سنوياً تحسب باستمرار. ما قيمة المبلغ بعد ٥ سنة. (هـ^٠٫٤ = ١٫٤٩)

٢٤) أودع ~~حمد~~ شخص مبلغ (٥٠٠٠) دينار في حساب توفير لمدة ثلاثة عشر سنوياً، تبلغت بعد (ن) من السنين (٧٠٠٠) دينار. حدد قيمة (ف) بالسنوات علماً بأن (لو ١٫٥ ≈ ٠٫١٨، لو ١٫٠٥ ≈ ٠٫٠٢).

٢٥) يتزايد عدد سكان إحدى المدن حسب العلاقة

$ع_ن = ع_1 \times (\text{جتا } ق)^{ن}$ : عدد السكان بعد (ن) سنة

$ع_1$ عدد السكان الحالي

م نسبة الزيادة السنوية في عدد السكان.

فإذا كانت نسبة الزيادة السنوية في عدد السكان (٥٪) احسب بعد كم سنة يصبح عدد سكان المدينة ثلاثة أمثال عدد سكانها الحالي. علماً بأن لو ٣ = ؟ (١٫١).

## ٢٩ استخدام الآلة الحاسبة

١ لإيجاد الجذر النوني لعدد قوته أم قوة كسرية لعدد

مثال ① $\sqrt[3]{5} = (5)^{\frac{1}{3}}$

المخطوات : $3 \rightarrow \sqrt[x]{\ } \rightarrow 5 \rightarrow x^y \rightarrow 2 =$

ⓑ $(-7)^{\frac{1}{9}}$ : $9 \rightarrow \sqrt[x]{\ } \rightarrow (-) \rightarrow 7 \rightarrow =$

٢ لإيجاد قيمة $(e)$ مرفوعة لقوة ما : $e^{\square}$

مثال ① $e^2$ : $\text{shift} \rightarrow e^x \rightarrow 2 =$

ⓑ $e^{-5}$ : $\text{shift} \rightarrow e^x \rightarrow (-) \rightarrow 5 =$

٣ لإيجاد لوغاريتم عدد (للأساس ١٠ أو للأساس $e$)

$\ln$ $\quad$ $\log$

مثال ① لو ٣٥٢ : $\log \rightarrow 352 \rightarrow =$

ⓑ $\ln 12.5$ : $\ln \rightarrow 12.5 \rightarrow =$

٤ لإيجاد العدد س المقابل للوغاريتم .

مثال ① : لو س = ٠,٥٧٨ $\quad$ $\text{shift} \rightarrow \log \rightarrow 0.578 \rightarrow =$

ⓑ لو س = $-0.0899$ $\quad$ $\text{shift} \rightarrow \log \rightarrow (-) \rightarrow 0.0899 \rightarrow =$

ⓒ $\ln$ س = ٢ : $\text{shift} \rightarrow \ln \rightarrow 2 \rightarrow =$

٥ لإيجاد لوغاريتم عدد أساسه ليس ١٠ أو $e$ .

مثال : $\log_5$ ٢ نجد لو ٢ ثم نجد لو ٥ ثم نقسم $\frac{\text{لو}_{10}\ 2}{\text{لو}_{10}\ 5} =$

إعداد المعلم : عبدالقادر الحسنات ( ٠٧٨ ٥٣١ ٨٨ ٧٧ ) أسئلة وزارية ٢٠٠٨ - ٢٠١٤

(١) الشكل المجاور يمثل خطوات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة

shift → $e^x$ → 3 → =

ب) $\bar{e}^{3}$ ج) $\bar{e}^{3}$ د) $\bar{e}^{3}$ هـ) $\bar{e}^{3}$ و) $\bar{e}^{3}$

الإجابة الصحيحة ٢٠٠٨

(٢) الشكل المجاور يمثل خطوات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة

3 → $\sqrt[x]{}$ → 8 → $x^{-1}$ → 2 =

ب) $\frac{1}{2}(8)$ ج) $\sqrt{8}$ د) $\sqrt[3]{8}$ هـ) $(8)^{\frac{1}{2}}$

الإجابة هـ) ٢٠٠٨

(٣) الشكل المجاور يمثل خطوات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة

shift → $e^x$ → (-) → 3 =

ب) $-\bar{e}^{3}$ ج) $-\bar{e}^{3}$ د) $\bar{e}^{3}$ هـ) $\bar{e}^{3}$

الإجابة ب) ٢٠٠٩

(٤) الشكل المجاور يمثل خطوات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة:

2 → x → shift → $e^x$ → (-) → 3 → =

ب) $-\bar{e}^{3}$ ج) $\bar{e}^{3}$ د) $-\bar{e}^{3}$ هـ) $-\bar{e}^{3}$

الإجابة هـ) ٢٠١٢

(٥) الشكل المجاور يمثل خطوات إيجاد قيمة س في المعادلة:

shift → log → 3 =

ب) $\frac{1}{3}$ لو س ج) $\frac{1}{2}$ لو س د) س لو ٣ هـ) س لو ٣

الإجابة هـ) ٢٠١٢

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

معلم المادة عبدالقادر الحسنات