

أدرب وأحل المسائل

الضرب القياسي

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$(u \rightarrow = 5i^{\wedge} - 4j^{\wedge} + 3k^{\wedge}, v \rightarrow = 7i^{\wedge} + 6j^{\wedge} - 2k^{\wedge}) \quad (1)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 5(7) - 4(6) + 3(-2) = 5$$

$$(u \rightarrow = 4i^{\wedge} - 8j^{\wedge} - 3k^{\wedge}, v \rightarrow = 12i^{\wedge} + 9j^{\wedge} - 8k^{\wedge}) \quad (2)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 4(12) - 8(9) - 3(-8) = 0$$

$$(u \rightarrow = \langle -5, 9, 17 \rangle, v \rightarrow = \langle 4, 6, -2 \rangle) \quad (3)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = -5(4) + 9(6) + 17(-2) = 0$$

$$(u \rightarrow = \langle 1, -4, 12 \rangle, v \rightarrow = \langle 3, 10, -5 \rangle) \quad (4)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 1(3) - 4(10) + 12(-5) = -97$$

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عشر درجة في كل مما يأتي:

$$(m \rightarrow = 4i^{\wedge} - 2j^{\wedge} + 5k^{\wedge}, n \rightarrow = 3i^{\wedge} + 4j^{\wedge} - 2k^{\wedge}) \quad (5)$$

$$m \rightarrow \cdot n \rightarrow = 4(3) - 2(4) + 5(-2) = -6$$

$$|m \rightarrow| = \sqrt{16 + 4 + 25} = 45 \quad |n \rightarrow| = \sqrt{9 + 16 + 4} = 29$$

$$\cos \theta = \frac{m \rightarrow \cdot n \rightarrow}{|m \rightarrow| |n \rightarrow|} = \frac{-6}{45 \times 29} = \cos^{-1} \left(\frac{-6}{1305} \right) \approx 99.6^\circ$$

$$(v \rightarrow = \langle 3, -2, 9 \rangle, w \rightarrow = \langle 5, 3, -4 \rangle) \quad (6)$$

$$v \rightarrow \cdot w \rightarrow = 3(5) - 2(3) + 9(-4) = -27$$

$$|v \rightarrow| = \sqrt{9 + 4 + 81} = 94 \quad |w \rightarrow| = \sqrt{25 + 9 + 16} = 50$$

$$\cos \theta = \frac{v \rightarrow \cdot w \rightarrow}{|v \rightarrow| |w \rightarrow|} = \frac{-27}{94 \times 50} \approx -0.1132 \quad \theta = \cos^{-1}(-0.1132) \approx 127^\circ$$

(7) إذا كانت $A(3, 5, -4)$, $B(7, 4, -3)$ و O نقطة الأصل، فأجد $\angle OAB$ إلى أقرب درجة.

$$AO \rightarrow = \langle -3, -5, 4 \rangle \quad |AO \rightarrow| = \sqrt{9 + 25 + 16} = 50$$

$$AB \rightarrow = \langle 4, -1, 1 \rangle \quad |AB \rightarrow| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$$

$$(\vec{AO} \cdot \vec{AB} \rightarrow |\vec{AO} \rightarrow| |\vec{AB}| = 18 \vec{AO} \cdot \vec{AB} \rightarrow = -3(4) - 5(-1) + 4(1) = -30 = \cos \theta - 1$$

$$\circ (-0.1) \approx 96(-350 \times 18) = \cos \theta - 1 \rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.1)$$

(8) يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: $(1, 4, 2)$, $(-3, 5, 7)$ ، ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: $(5, 3, -6)$, $(1, 2, -1)$ أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_2 والمستقيم l_1 إلى أقرب عشر درجة.

$$\langle \vec{v} \rightarrow = \langle -3 - 2, 5 + 1, 7 - 4 \rangle = \langle -5, 6, 3 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم } l_1$$

$$\langle \vec{w} \rightarrow = \langle 1 - 6, 2 + 5, -1 - 3 \rangle = \langle -5, 7, -4 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم } l_2$$

$$|\vec{v} \rightarrow| = 25 + 36 + 9 = 70 \quad |\vec{w} \rightarrow| = 25 + 49 + 16 = 90$$

$$\vec{v} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow = -5(-5) + 6(7) + 3(-4) = 25 + 42 - 12 = 55$$

$$\circ (55/6300) \approx 46.1 \quad (\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow / |\vec{u} \rightarrow| |\vec{w} \rightarrow|) = \cos \theta = 55/70 = 0.7857$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1 و l_2 هو 46.1° تقريباً.

(9) إذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r} \rightarrow = \langle 1, 4, -5 \rangle + \lambda \langle -6, q+5, 3 \rangle$ والمستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r} \rightarrow = \langle 1, 4, -5 \rangle + \mu \langle 5, q-6, -4 \rangle$ متعامدين، فما القيم الممكنة للثابت q ؟

$$\langle \vec{v} \rightarrow = \langle -6, q+5, 3 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم الأول}$$

$$\langle \vec{u} \rightarrow = \langle 5, q-6, -4 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم الثاني}$$

المستقيمان متعامدان، فاتجاههما متعامدان، أي أن: $\vec{v} \rightarrow \cdot \vec{u} \rightarrow = 0$

$$q+5)(q-6)+3(-4)=0 \Rightarrow q^2-q-72=0 \Rightarrow (q-9)(q+8)=0 \Rightarrow q=9, \text{ or } q=-8$$

إذا كانت: $\vec{r} \rightarrow = 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(-\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $P(-2, 22, 5)$ غير واقعة على المستقيم l ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(10) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

لتكن A هي المسقط العمودي للنقطة P على المستقيم l ، فإن متجه موقعها هو:

$$\langle \vec{OA} \rightarrow = \langle -t, 2+2t, -3+5t \rangle$$

إذا كان $\vec{AP} \rightarrow$ هو العمود من P على المستقيم l ، فإن: $\vec{AP} \rightarrow = \vec{OP} \rightarrow - \vec{OA} \rightarrow$

$$\langle AP \rightarrow = \langle -2+t, 22-(2+2t), 5-(-3+5t) \rangle = \langle -2+t, 20-2t, 8-5t \rangle$$

بما أن $AP \rightarrow$ يعامد a ، إذن: $AP \rightarrow \cdot \langle -1, 2, 5 \rangle = 0$

$$t) + 2(20-2t) + 5(8-5t) = 0 \Rightarrow t = 4115 \Rightarrow OA \rightarrow = \langle -4115, 11215, 3+2-1 \rangle \Rightarrow (23$$

إذن، مسقط العمود P على المستقيم a هو $A(-4115, 11215, 323)$

(11) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم a .

$$AP = (-2+4115)^2 + (22-11215)^2 + (5-323)^2 = 5487015 \approx 15.6$$

(12) أجد مساحة المثلث ABC ، حيث: $AB \rightarrow = \langle 4, 9, 1 \rangle$, $AC \rightarrow = \langle 9, 1, 4 \rangle$.

$$|AB \rightarrow| = 16+81+1=98 \quad |AC \rightarrow| = 81+1+16=98 \quad AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = 9(4)+1(9)+4(1)=49$$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$$(12) = 60^\circ = \cos^{-1} \left(\frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \frac{49}{98 \times 98}$$

$$60^\circ = 4932 \theta = 1298 \times 98 \sin \theta \Rightarrow \text{Area} = 12 |AB \rightarrow| \times |AC \rightarrow| \sin \theta$$

(13) أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3, 1), B(2, 7, -3), C(4, -5, 2)$.

$$AB \rightarrow = \langle 1, 4, -4 \rangle \Rightarrow |AB \rightarrow| = 1+16+16=33 \quad AC \rightarrow = \langle 3, -8, 1 \rangle \Rightarrow |AC \rightarrow| = 9+64+1=74$$

$$AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = 1(3)+4(-8)-4(1) = -33$$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$$(-3374) = \cos^{-1} \left(\frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \frac{-33}{33 \times 74}$$

$$\theta = 1233 \theta = 1-3374 = 4174 \text{Area} = 12 |AB \rightarrow| \times |AC \rightarrow| \sin \theta = -3374 \Rightarrow \sin \theta = \frac{-3374}{12 \times 33 \times 74}$$

$$\times 744174 = 13532 \approx 18.4$$



(14) حزام ناقل: يمثل المتجه:
 $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ القوة التي يولدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1,1,1)$ إلى النقطة $(9,4,7)$. أجد مقدار الشغل الذي تبذله القوة F ، علماً بأن القوة بالنيوتن N ، والمسافة بالمتراً m ، ومقدار الشغل (W) المبذول بوحدة الجول (J) يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة؛ أي: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

$$\vec{d} = \langle 8, 3, 6 \rangle, \vec{F} = \langle 5, -3, 1 \rangle \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 5(8) - 3(3) + 1(6) = 37J$$

(15) إذا كانت النقطة $R(27, -17, -1)$ ، والنقطة $S(11, -9, 11)$ تقعان على المستقيم a ، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم a ، حيث $\vec{OQ} \perp$ عمودي على a ، فأجد متجه الموقع للنقطة Q .

$$\{\vec{d} = \langle 8, 3, 6 \rangle, \vec{F} = \langle 5, -3, 1 \rangle \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 5(8) - 3(3) + 1(6) = 37$$

إذن، يمكن تبسيط اتجاه المستقيم a بقسمة \vec{RS} على 4:

$$\vec{v} = \langle -4, 2, 3 \rangle$$

$$\text{معادلة المستقيم } a \text{ هي: } \vec{r} = \langle 11, -9, 11 \rangle + t \langle -4, 2, 3 \rangle$$

النقطة Q هي المسقط العمودي للنقطة O على هذا المستقيم، فيكون متجه موقعها \vec{OQ} هو:

$$\vec{OQ} = \langle 11 - 4t, -9 + 2t, 11 + 3t \rangle$$

بما أن $\vec{OQ} \perp \vec{v}$ متعامدان، فإن: $\vec{OQ} \cdot \vec{v} = 0$

$$(11 - 4t) + 2(-9 + 2t) + 3(11 + 3t) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{OQ} = \langle 7, -7, 14 \rangle$$

إذا كانت متجهات مواقع النقاط: A ، B ، و C هي:
 $(2, 9, 7)$ ، $(14, 17, 4)$ ، $(-2, 2, 4)$ على الترتيب، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(16) أثبت أن: $\vec{AB} \perp \vec{AD}$.

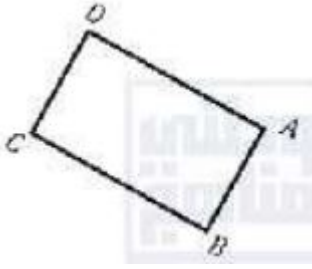
$$OA \rightarrow = \langle -4, 13, 22 \rangle, OB \rightarrow = \langle 4, 17, 14 \rangle, OD \rightarrow = \langle 2, -29, 7 \rangle$$

$$AD \rightarrow = \langle 2+4, -29-13, 7-22 \rangle = \langle 6, -42, -15 \rangle$$

$$AB \rightarrow = \langle 4+4, 17-13, 14-22 \rangle = \langle 8, 4, -8 \rangle$$

$$AB \rightarrow \cdot AD \rightarrow = 6(8) - 42(4) - 15(-8) = 0 \Rightarrow AB \rightarrow \perp AD$$

(17) أجد متجه موقع النقطة C إذا كان ABCD مستطيلاً.



ارسم شكل مستوي تقريبي يوضح المسألة (المهم ترتيب رؤوس المستطيل ABCD بالتوالي مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة)، أينما كان موقع O، فإن:

$$OC \rightarrow = OB \rightarrow + BC \rightarrow = OB \rightarrow + AD \rightarrow = \langle 4, 17, 14 \rangle + \langle 6, -42, -15 \rangle = \langle 10, -25, -1 \rangle$$

(ويمكن إيجاد $OC \rightarrow$ عبر الرأس D من

العلاقة: $\rightarrow OC \rightarrow = OD \rightarrow + DC \rightarrow = OD \rightarrow + AB \rightarrow$)

(18) أجد مساحة المستطيل ABCD.

$$|AD \rightarrow| = \sqrt{36 + 1764 + 225} = 2025 = 45$$

$$|AB \rightarrow| = \sqrt{64 + 16 + 64} = 144 = 12$$

$$Area = (45)(12) = 540$$

إذن، مساحة ABCD تساوي 540 وحدة مربعة.

(19) أجد متجه موقع مركز المستطيل ABCD.

مركز المستطيل هي نقطة تقاطع قطريه وهي نقطة منتصف كل من القطرين. نأخذ القطر BD ولتكن نقطة منتصفه E، فإن:

$$\langle E(4+22, 17-29, 14+7) \rangle = \langle 3, -6, 21 \rangle \Rightarrow OE \rightarrow = \langle 3, -6, 21 \rangle$$

تمثل: $r \rightarrow = \langle -5, 7, 1 \rangle + t \langle 3, 1, 4 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وتمثل:

$r \rightarrow = \langle 2, 8, -1 \rangle + u \langle 2, 0, -3 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، وتمثل:

$r \rightarrow = \langle 3, 19, 10 \rangle + v \langle -1, 3, 1 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3 .

إذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T، وكانت النقطة F تقع على

المستقيم l_3 ، حيث: $TF \perp l_3$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(20) أجد إحداثيات النقطة F.

لإيجاد نقطة تقاطع l_1 نسائي l_2 في معادلتها ونسائي الإحداثيات المتناظرة:

$$5+3t, 7+t, 1+4t = \langle 2+2u, 8, -1-3u \rangle - 5+3t = 2+2u \Rightarrow 3t-2u=7 \dots\dots\dots (-)$$

$$(1) 7+t=8 \Rightarrow t=1 \quad 4t = -1-3u \Rightarrow 4t+3u = -2 \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض $t=1$ في المعادلتين (1) و (2) نجد أن $u=-2$

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=1$ في معادلة l_1

$$\langle r \rightarrow = \langle -5+3(1), 7+1, 1+4(1) \rangle = \langle -2, 8, 5 \rangle$$

إذن، نقطة تقاطع l_1, l_2 هي $T(-2, 8, 5)$

F هو المسقط العمودي للنقطة T على l_3 ، إذن:

$$OF \rightarrow = \langle 3-v, 19+3v, 10+v \rangle \quad TF \rightarrow = \langle 3-v-(-2), 19+3v-8, 10+v-5 \rangle = \langle 5-v, 11+3v, v+5 \rangle$$

اتجاه l_3 هو $\langle w \rightarrow = \langle -1, 3, 1 \rangle$

لكن $TF \rightarrow \cdot w \rightarrow = 0$ ، إذن، يعامد l_3 إذن،

$$v) + 3(11+3v) + 1(v+5) = 0 \Rightarrow v = -3 \Rightarrow OF \rightarrow = \langle 3-(-3), 19+3(-3), -5 \rangle = \langle 6, 10, 7 \rangle$$

(21) أجد البعد بين النقطة T والمستقيم l_3 .

$$TF \rightarrow = \langle -8, 2, -2 \rangle \Rightarrow |TF \rightarrow| = \sqrt{64+4+4} = 62$$

إذا كانت: $\langle r \rightarrow = \langle 5, 3, 0 \rangle + \lambda \langle -1, 3, 1 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3 ، وكانت $A(3, -2, 1), B(5, 3, 0)$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(22) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم AB والمستقيم l_3 .

$$\langle AB \rightarrow = \langle 2, 5, -1 \rangle$$

وهذا هو اتجاه المستقيم $AB \rightarrow$

اتجاه المستقيم l هو: $\langle v \rightarrow = \langle -1, 3, 1 \rangle$

$$|AB \rightarrow| = 4 + 25 + 1 = 30 \quad |v \rightarrow| = 1 + 9 + 1 = 11 \quad AB \rightarrow \cdot v \rightarrow = 2(-1) + 5(3) - 1(1) = 12$$

$$\cos \theta = \frac{AB \rightarrow \cdot v \rightarrow}{|AB \rightarrow| |v \rightarrow|} = \frac{12}{30 \times 11} \approx 0.364 \Rightarrow \theta \approx \cos^{-1}(0.364) \approx 68.7^\circ$$

(23) تقع النقطة C على المستقيم AB ، حيث: $AB=AC$. أجد إحداثيات النقطة C .

بما أن A, B, C على استقامة واحدة، و $AB=AC$ إذن، $A(3, -2, 1)$ هي نقطة منتصف BC حيث:

$$C(x, y, z), B(5, 3, 0) \Rightarrow (x+5, y+3, z+0) = (2 \times 3, 2 \times (-2), 2 \times 1) = (6, -4, 2)$$

$$\Rightarrow x+5=6 \Rightarrow x=1 \quad y+3=-4 \Rightarrow y=-7 \quad z=2$$

إذن، إحداثيات النقطة C هي: $(1, -7, 2)$

تقع النقطة $A(-7, -4, 9)$ والنقطة $B(8, 5, 3)$ على المستقيم l ، وتقع النقطة $C(6, 11, 7)$ على المستقيم l_2 الذي معادلته: $\langle r \rightarrow = \langle 6, 11, 7 \rangle + t \langle -1, 3, 2 \rangle$:

(24) أبين أن النقطة B تقع على المستقيم l_2 .

متجه موقع أي نقطة على l_2 يكون $\langle r \rightarrow = \langle 6-t, 11+3t, 7+2t \rangle$

حتى تقع B على l_2 ينبغي وجود قيمة t تحقق المعادلة: $\langle t, 11+3t, 7+2t \rangle = \langle 8, 5, 3-6 \rangle$

$$t=8 \Rightarrow t=-2 \quad 11+3t=5 \Rightarrow t=-2 \quad 7+2t=3 \Rightarrow t=-2$$

لهذه المعادلات الثلاث الحل نفسه $t=-2$

إذن، تقع B على المستقيم l_2 لأنها تنتج من تعويض $t=-2$ في معادلته.

(25) أبين أن المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان.

اتجاه l_1 هو: $\langle AB \rightarrow = \langle 15, 9, -6 \rangle$

ويمكن تبسيطه إلى $\langle u \rightarrow = \langle 5, 3, -2 \rangle$

اتجاه l_2 هو: $\langle v \rightarrow = \langle -1, 3, 2 \rangle$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 5(-1) + 3(3) - 2(2) = 0$$

إذن، المستقيمان 1, 2 متعامدان.

(26) أجد $m\angle ABC$.

بما أن 1, 2 متعامدان، ونقطة التقائهما هي B (كونها واقعة على كل منهما كما سبق)

إذن، $m\angle ABC = 90^\circ$

(27) أجد مساحة المثلث ABC.

المثلث ABC قائم في B

$$AB = \sqrt{15^2 + 9^2 + (-6)^2} = 34 \quad BC = \sqrt{22^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = 56 = 214 \quad \text{Area} = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2} \times 34 \times 214 = 4788 \approx 69.2$$

إذن، مساحة المثلث ABC تسوي 69.2 وحدة مربعة تقريباً.

ABCD هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي:

$A(4, 3, -1), B(-4, 5, 2), C(6, -1, 0), D(10, 11, 19)$ فاجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(28) أجد مساحة المثلث ABC في صورة: $a6$.

$$AB \rightarrow = \langle -8, 2, 3 \rangle \Rightarrow |AB \rightarrow| = \sqrt{64 + 4 + 9} = 77 \quad AC \rightarrow = \langle 2, -4, 1 \rangle \Rightarrow |AC \rightarrow| = \sqrt{4 + 16 + 1} = 21$$

$$AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = -8(2) + 2(-4) + 3(1) = -21$$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$$(-311) = \cos^{-1} \left(\frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \theta$$

$$\theta = 120^\circ = 1 - 311 = 811 = 2211 \quad \text{Area} = \frac{1}{2} |AB \rightarrow| \times |AC \rightarrow| \sin \theta = -311 \Rightarrow \sin \theta = \frac{-311}{77 \times 21 \times 2211} = 76$$

(29) أثبت أن: $m\angle AED = 90^\circ$ ، حيث $E(1, 2, 1)$.

$$EA \rightarrow = \langle 3, 1, -2 \rangle, ED \rightarrow = \langle 9, 9, 18 \rangle \quad EA \rightarrow \cdot ED \rightarrow = 3(9) + 1(9) - 2(18) = 0$$

إذن، $EA \rightarrow \perp ED \rightarrow$ وقياس الزاوية AED هو 90° .

(30) إذا علمت أن النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC، فأجد حجم الهرم ABCD.

$$DE \rightarrow = 81 + 81 + 324 = 96$$

ويمثل ارتفاع h، أما مساحة قاعدته $A=76$ ، وذلك من السؤال 28، إذن حجم الهرم هو:

$$V = 13Ah = 13 \times 76 \times 96 = 126$$

إذن حجم الهرم يساوي 126 وحدة مكعبة.

إذا كانت $A(3, 1, -6)$, $B(5, -2, 0)$, $C(8, -4, -6)$ ، فأجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تبعاً:

(31) أبين أن $AC \rightarrow = n(1 - 10)$ ، حيث n عدد صحيح.

$$AC \rightarrow = (5 - 50) = 5(1 - 10)$$

تكون قيمة n هي 5

(32) أبين أن قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1} \frac{5}{214}$.

$$CA \rightarrow = (-5, 5, 0) \Rightarrow |CA \rightarrow| = 25 + 25 + 0 = 5 \quad CB \rightarrow = (-3, 2, 6) \Rightarrow |CB \rightarrow| = 9 + 4 + 36 = 49$$

$$CA \rightarrow \cdot CB \rightarrow = -5(-3) + 5(2) + 0(6) = 25$$

ليكن θ قياس الزاوية ACB

$$\cos \theta = \frac{CA \rightarrow \cdot CB \rightarrow}{|CA \rightarrow| |CB \rightarrow|} = \frac{25}{5 \cdot 7} = \frac{1}{7}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{7} \right)$$

(33) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AC.

$$AC \rightarrow = (5, -5, 0)$$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم AC بالمتجه $v \rightarrow = (1, -1, 0)$

وتكون معادلته: $r \rightarrow = (8, -4, -6) + t(1, -1, 0)$

(34) إذا كانت $D(6, -1, p)$ ، وُعلم أن $AC \leftrightarrow BD$ ، متقاطعان، فما قيمة p ؟

$$\langle BD \rightarrow = \langle 1, 1, p$$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $BD \rightarrow$ بالمتجه $\langle 1, 1, p \rightarrow$

$$\langle BD \rightarrow: r \rightarrow = \langle 5, -2, 0 \rangle + u \langle 1, 1, p$$

يتقاطع المستقيمان، إذن، يوجد u, t بحيث تتساوى لهما $r \rightarrow$ في المعادلتين:

$$t, -4 - t, -6) = \langle 5 + u, -2 + u, up \rangle 8 + t = 5 + u \Rightarrow t - u = -3 \dots \dots \dots (1) -4 - t = +8$$

$$(-2 + u \Rightarrow t + u = -2 \dots \dots \dots 2up = -6 \dots \dots \dots (3)$$

بجمع المعادلتين (1) و(2)، نجد أن: $t = -5, u = 12$ ثم بالتعويض في (3) نجد أن:
 $p = -12$

$$D(6, -1, -12$$

(35) أبين أن الشكل ABCD معين، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

$$AB \rightarrow = \langle 2, -3, 6 \rangle DC \rightarrow = \langle 2, -3, 6 \rangle \Rightarrow AB \rightarrow = DC \rightarrow BC \rightarrow = \langle 3, -2, -6 \rangle AD \rightarrow = \langle 3, -2, -6 \rangle \Rightarrow BC \rightarrow = AD \rightarrow$$

من (1) و(2) ينتج أن الشكل ABCD متوازي أضلاع، والآن نجد طول AB, AD

$$AB = |AB \rightarrow| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \quad AD = |AD \rightarrow| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

وبما أن ABCD متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان فهو معين جميع أضلاعه متطابقة طول كل واحد منها 7 وحدات.

(36) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

تم حل هذا السؤال في موضعه تحت عنوان "مسألة اليوم".