

أتحقق من فهمي

الضرب القياسي

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (144):

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$(a) \quad (v \rightarrow = \langle 4, 8, -3 \rangle, w \rightarrow = \langle -3, 7, 2 \rangle)$$

$$v \rightarrow \cdot w \rightarrow = 4(-3) + 8(7) - 3(2) = -12 + 56 - 6 = 38$$

$$(b) \quad (m \rightarrow = -3i^{\wedge} + 5j^{\wedge} - k^{\wedge}, n \rightarrow = -12i^{\wedge} + 6j^{\wedge} - 8k^{\wedge})$$

$$m \rightarrow \cdot n \rightarrow = -3(-12) + 5(6) - 1(-8) = 36 + 30 + 8 = 74$$

الزاوية بين متجهين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (146):

أجد قياس الزاوية θ بين المتجه $u \rightarrow$ والمتجه $w \rightarrow$ في كل مما يأتي، مقرباً الناتج إلى أقرب عشر درجة:

$$(a) \quad (u \rightarrow = -3i^{\wedge} + 5j^{\wedge} - 4k^{\wedge}, w \rightarrow = 4i^{\wedge} + 2j^{\wedge} - 3k^{\wedge})$$

$$u \rightarrow \cdot w \rightarrow = -3(4) + 5(2) - 4(-3) = -12 + 10 + 12 = 10$$

$$|u \rightarrow| = \sqrt{9 + 25 + 16} = 50 \quad |w \rightarrow| = \sqrt{16 + 4 + 9} = 29$$

$$\cos \theta = \frac{u \rightarrow \cdot w \rightarrow}{|u \rightarrow| |w \rightarrow|} = \frac{10}{50 \times 29} = \frac{1}{145} \approx 0.0069$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{145} \right) \approx 89.98^\circ \approx 90^\circ$$

$$(b) \quad (u \rightarrow = \langle 2, -10, 6 \rangle, w \rightarrow = \langle -3, 15, -9 \rangle)$$

$$u \rightarrow \cdot w \rightarrow = 2(-3) - 10(15) + 6(9) = -6 - 150 + 54 = -102$$

$$|u \rightarrow| = \sqrt{4 + 100 + 36} = 110 \quad |w \rightarrow| = \sqrt{9 + 225 + 81} = 150$$

$$\cos \theta = \frac{u \rightarrow \cdot w \rightarrow}{|u \rightarrow| |w \rightarrow|} = \frac{-102}{110 \times 150} = \frac{-17}{275} \approx -0.0618$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-17}{275} \right) \approx 92.14^\circ$$

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (147):

إذا كانت: $r \rightarrow = (3-21) + t(2-5-1)$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $r \rightarrow = (530) + u(10-3)$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب درجة.

اتجاه المستقيم l_1 هو $v \rightarrow = (2, -5, -1)$ واتجاه المستقيم l_2 هو $u \rightarrow = (1, 0, -3)$

$$|v \rightarrow| = \sqrt{4+25+1} = 30 \quad |u \rightarrow| = \sqrt{1+0+9} = 10$$

$$v \rightarrow \cdot u \rightarrow = 1(2) + 0(-5) - 3(-1) = 2 + 3 = 5$$

$$\cos \theta = \frac{v \rightarrow \cdot u \rightarrow}{|v \rightarrow| |u \rightarrow|} = \frac{5}{30 \times 10} = \frac{1}{60} \approx 0.0167$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{60} \right) \approx 89.7^\circ$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1, l_2 هو 73° تقريباً.

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (149):

أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$$E(2, 1, -1), F(5, 1, 7), G(6, -3, 1)$$

$$GF \rightarrow = (-1, 4, 6) \quad |GF \rightarrow| = \sqrt{1+16+36} = 53$$

$$GE \rightarrow = (-4, 4, -2) \quad |GE \rightarrow| = \sqrt{16+16+4} = 6$$

$$GF \rightarrow \cdot GE \rightarrow = -1(-4) + 4(4) + 6(-2) = 4 + 16 - 12 = 8$$

ليكن قياس الزاوية EGF هو θ ، إذن:

$$\cos \theta = \frac{GF \rightarrow \cdot GE \rightarrow}{|GF \rightarrow| |GE \rightarrow|} = \frac{8}{53 \times 6} = \frac{4}{159} \approx 0.0252$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{159} \right) \approx 89.8^\circ$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \approx \sqrt{1 - 0.0006} \approx 0.9997$$

$$A = \frac{1}{2} |GF \rightarrow| |GE \rightarrow| \sin \theta = \frac{1}{2} \times 53 \times 6 \times 0.9997 \approx 158.9$$

ويمكن إيجاد $\theta \sin$ من معرفتنا بقيمة $\theta \cos$ من دون إيجاد زاوية θ كما يأتي:

$$\theta = 1 - (4353)^2 = 477 - 16477 = 461353 \Rightarrow A = 12 \times 653 \times 4\theta = 4353 \Rightarrow \sin \cos$$

$$61353 = 461 \approx 21.5$$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه

أتحقق من فهمي صفحة (151):

إذا كانت: $\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t(5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم
، والنقطة $P(2, 0, 103)$ غير واقعة على المستقيم ، فأجيب عن السؤالين الآتيين:
(a) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم .

اتجاه المستقيم $\vec{v} = (5, 7, -3)$ المعطى هو:

افرض أن مسقط النقطة P على النقطة F ، فيكون متجه موقعها هو:

$$\vec{OF} = (16 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} - (3 + 3t)\hat{k}$$

ويكون العمود من P على F هو \vec{PF} حيث:

$$\vec{PF} = \vec{OF} - \vec{OP} = (16 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} - (3 + 3t)\hat{k} - (2\hat{i} + 103\hat{k}) = (14 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} - (193 + 3t)\hat{k}$$

ولأن المتجهين \vec{PF} ، \vec{v} متعامدان فإن $\vec{PF} \cdot \vec{v} = 0$

$$14 + 5t + 7(11 + 7t) - 3(-193 - 3t) = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \vec{OF} = (16 + 5(-2))\hat{i} + 5\hat{j} - (3 + 3(-2))\hat{k} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

إذن مسقط العمود من النقطة P على المستقيم F هو النقطة $F(6, -3, 3)$

(b) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم .

$$PF = (6 - 2)^2 + (-3 - 0)^2 + (3 - 103)^2 = 2263$$

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

أتحقق من فهمي صفحة (154):

(a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المبين في المثال السابق.

$$\vec{DE} = (7, 8, 2) \quad |\vec{DE}| = \sqrt{49 + 64 + 4} = 117 \quad \vec{DB} = (8, 4, -8) \quad |\vec{DB}| = \sqrt{64 + 16 + 64} = 12$$

$$\vec{DE} \cdot \vec{DB} = 7(8) + 8(4) + 2(-8) = 68 - 16 = 52$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{52}{117 \cdot 12}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{52}{1404}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{13}{351}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{27}\right) \approx 88.5^\circ$$

(b) أجد حجم الهرم.

$$AB = 8^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 72$$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM،
حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري القاعدة
المربعة: $(M=(1+9,1-7,1+3))=(5,-3,1)$

$$EM=(-3)^2+(-6)^2+(-6)^2=9$$

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

$$V=\frac{1}{3}(7^2)(9)=7^2(3)=216$$

إذن، حجم الهرم يساوي 216 وحدة مربعة.