

## أتحقق من فهمي

### المستقيمات في الفضاء

#### توازي المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (127):

إذا كان:  $G(7,5,-11), H(4,4,-4), K(4,5,3), L(7,7,3)$ ، فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

(a)  $\vec{GH}, \vec{KL}$

$$\vec{GH} = \langle -3, -1, 7 \rangle \quad \vec{KL} = \langle 3, 2, 0 \rangle$$

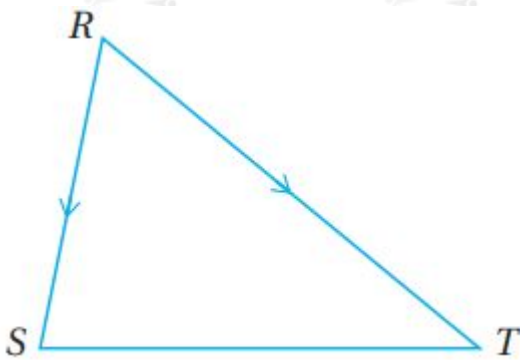
نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي  $c$  يجعل العبارة  $\vec{GH} = c\vec{KL}$  صحيحة، ونستنتج أن  $\vec{GH}, \vec{KL}$  غير متوازيين.

(b)  $\vec{GL}, \vec{HK}$

$$\vec{GL} = \langle 0, 2, 14 \rangle \quad \vec{HK} = \langle 0, 1, 7 \rangle$$

نلاحظ أن  $\vec{GL} = 2\vec{HK}$ ، ونستنتج أن  $\vec{GL} \parallel \vec{HK}$ .

أتحقق من فهمي صفحة (129):



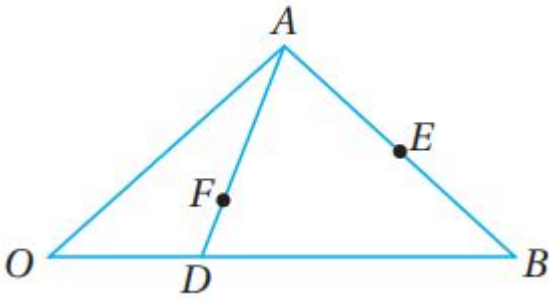
في المثلث  $RST$  المجاور، إذا كان:  $\vec{RS} = 4\vec{a}$ ، والنقطة  $U$  منتصف  $\vec{RS}$ ، والنقطة  $V$  منتصف  $\vec{RT}$ ، فأثبت أن  $\vec{ST} \parallel \vec{UV}$ .

$$\vec{UV} = \vec{UR} + \vec{RV} = 12(-4\vec{a}) + 12(6\vec{b}) = 3\vec{b} - 2\vec{a} \quad \vec{ST} = \vec{SR} + \vec{RT} = (-4\vec{a} + 6\vec{b}) = 2(3\vec{b} - 2\vec{a})$$

إذن،  $\vec{ST} = 2\vec{UV}$ ، ومنه المتجهان  $\vec{ST}, \vec{UV}$  متوازيان.

أتحقق من فهمي صفحة (130):

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB.



إذا كان:  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ، وكانت النقطة D تقع على  $\vec{OB}$ ، والنقطة E منتصف  $\vec{AB}$ ، والنقطة F تقع على  $\vec{AD}$ ، حيث:  $\vec{OF} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b})$ ، فأثبت أن O، F، و E تقع على استقامة واحدة.

$$\vec{OE} = \vec{OB} + \vec{BE} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{BA} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{BO} + \vec{OA}) = \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{OF} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b}) \implies \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{OF} \implies \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{OE} \implies \vec{OF} = \frac{2}{5}\vec{OE}$$

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن:

$$5\vec{OF} = 2\vec{OE} \implies \vec{OF} = \frac{2}{5}\vec{OE}$$

وهذا يعني أن المتجهين  $\vec{OF}$ ،  $\vec{OE}$  متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن النقاط O، E، F تقع على استقامة واحدة.

المعادلة المتجهة للمستقيم

أتحقق من فهمي صفحة (132):

أجد معادلة متجهة للمستقيم a الذي يوازي المتجه:  $\vec{v} = \langle 1, -4, -5 \rangle$ ، ويمر بالنقطة  $U(0, -6, 9)$ .

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \implies \vec{r} = \langle 0, -6, 9 \rangle + t\langle 1, -4, -5 \rangle$$

أتحقق من فهمي صفحة (133):

أجد معادلة متجهة للمستقيم a المار بالنقطتين:  $M(3, 7, -9)$ ،  $N(2, -4, 3)$ .

$$NM \rightarrow = \langle 3-2, 7-(-4), -9-3 \rangle = \langle 1, 11, -12 \rangle$$

$$r \rightarrow = r \rightarrow 0 + tv \rightarrow \Rightarrow r \rightarrow = \langle 3, 7, -9 \rangle + \langle t, 11, -12 \rangle$$

أتحقق من فهمي صفحة (136):

تمثل:  $\hat{r} \rightarrow = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$  معادلة متجهة للمستقيم ا:

(a) أبين أن النقطة التي متجه الموقع لها هو  $(39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k})$  تقع على المستقيم ا.

$$\hat{r} \rightarrow = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k}$$

نبحث عن قيمة ل t تحقق:

$$39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k}$$

$$39 = 11 + 7t \Rightarrow t = 4$$

$$-3 = 5 - 2t \Rightarrow t = 4$$

$$14 = -6 + 5t \Rightarrow t = 4$$

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه ( $t=4$ )، فإن القطعة التي متجه موقعها  $39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k}$  وهي النقطة  $(39, -3, 14)$  تقع على المستقيم ا لأنها تنتج من تعويض  $t=4$  في معادلته.

(b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتقابل القيمة:  $t = -3$ .

$$t = -3 \Rightarrow r \rightarrow = (11+7(-3))\hat{i} + (5-2(-3))\hat{j} + (-6+5(-3))\hat{k} = -10\hat{i} + 11\hat{j} - 21\hat{k}$$

(c) إذا كانت النقطة  $(v, -3v, 5v-1)$  تقع على المستقيم ا، فما قيمة v؟

متجه الموقع للنقطة  $(v, -3v, 5v-1)$  هو  $v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)\hat{k}$

$$v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)\hat{k} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k}$$

$$v = 11 + 7t \dots (1)$$

$$-3v = 5 - 2t \dots (2)$$

$$5v - 1 = -6 + 5t \dots (3)$$

$$(1) \times 3 + (2) \Rightarrow 0 = 38 + 19t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow v = -3$$

تتحقق من أن  $v = -3, t = -2$  تحققان المعادلة (3)

$$16 - = 16 - (2 - )6 + 5 - = 1 - (3 - )5$$

إذن، قيمة v التي تجعل النقطة  $(v, -3v, 5v-1)$  واقعة على المستقيم ا هي:  $v = -3$

## المستقيمت المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

أتحقق من فهمي صفحة (136):

إذا كانت:  $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t \langle 1, 11, -12 \rangle$  معادلة متجهة للمستقيم  $l_1$ ، وكانت:  $\vec{r} = \langle -30, -6, 30 \rangle + u \langle 4, -6, 3 \rangle$  معادلة متجهة للمستقيم  $l_2$ ، فأحدد إذا كان المستقيمان:  $l_1, l_2$  متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

اتجاه المستقيم  $l_1$  هو  $\vec{v}_1 = \langle 1, 11, -12 \rangle$

اتجاه المستقيم  $l_2$  هو  $\vec{v}_2 = \langle 4, -6, 3 \rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي  $k$  بحيث  $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$  فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي  $\vec{r}$  من معادلتَي المستقيمين:

$$\begin{aligned} t \langle 1, 11, -12 \rangle &= \langle -30, -6, 30 \rangle + u \langle 4, -6, 3 \rangle \\ 3 + t &= -30 + 4u \Rightarrow t - 4u = -33 \dots\dots\dots (1) \\ 7 + 11t &= -6 - 6u \Rightarrow 11t + 6u = -13 \dots\dots\dots (2) \\ -9 - 12t &= 30 + 3u \Rightarrow 12t + 3u = -39 \dots\dots\dots (3) \\ 3 \times (1) + 2 \times (2) &\Rightarrow 25t = -125 \Rightarrow t = -5, \\ u &= 7 \end{aligned}$$

نتحقق من أن  $u=7, t=-5$  تحققان المعادلة (3)

$$39 - = 39 - 39 - ? = (7)3 + (-5)12$$

بما أن قيمة  $t$  وقيمة  $u$  حققنا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان.

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض  $t=-5$  في معادلة  $l_1$ :

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle - 5 \langle 1, 11, -12 \rangle = \langle -2, -48, 51 \rangle$$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة  $(-2, -48, 51)$

أتحقق من فهمي صفحة (138):

عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته:  $(0, 7, 0)$ . وفي الوقت نفسه، أقلعت

طائرة ثانية من موقع إحداثياته:  $(-2, 0, 0)$ . وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته:  $(8, 15, 16)$ ، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته:  $(22, 24, 48)$ . هل خطا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

اتجاه الطائرة الأولى هو اتجاه الطائرة الأولى هو  
 $\vec{v}_1 = \langle 8 - 0, 15 - 0, 16 - 0 \rangle = \langle 8, 15, 16 \rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 8 ليصبح:  $\langle 1, 1, 2 \rangle$

معادلة مسار الأولى:  $\vec{r} = \langle 0, 7, 0 \rangle + t \langle 1, 1, 2 \rangle$

اتجاه الثانية هو  $\vec{v}_2 = \langle 22 - (-2), 24 - 0, 48 - 0 \rangle = \langle 24, 24, 48 \rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح:  $\langle 1, 1, 2 \rangle$

معادلة مسار الثانية:  $\vec{r} = \langle -2, 0, 0 \rangle + u \langle 1, 1, 2 \rangle$

نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.