

اختبار نهاية الوحدة

التكامل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) قيمة $\int_0^2 e^{2x} dx$ هي:

a) $e^4 - 1$

b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$

d) $12e^4 - 12$

$\int_0^2 e^{2x} dx = 12e^{2x} \Big|_0^2 = 12e^4 - 12 \dots \dots \dots$

(2) قيمة $\int_{-4}^4 (x^2 - 4) dx$ هي:

a) 0

b) 4

c) 16

d) 8

$\int_{-4}^4 (x^2 - 4) dx = \int_{-4}^4 x^2 dx - \int_{-4}^4 4 dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_{-4}^4 = \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(-\frac{64}{3} + 16 \right) = \frac{128}{3} - 32 = \frac{128 - 96}{3} = \frac{32}{3} \dots \dots \dots$

(3) يبين الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين:

$y = x^3 - 3x^2 + 4$ ، $y = x^2 - x - 2$ ، في الفترة $[-1, 2]$

التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد مساحة المنطقة المظللة هو:

a) $\int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx$

b) $\int_{-1}^2 (x^3 + 4x^2 - x - 6) dx$

$$\int (x^3 - 4x^2 - x + 2) dx \quad (c)$$

$$\int (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \quad (d)$$

$$A = \int -12(x^3 - 3x^2 + 4 - (x^2 - x - 2)) dx = \int -12(x^3 - 4x^2 + x + 6) dx \dots \dots \dots$$

(... (a

(4) حل المعادلة التفاضلية: $dy/dx = 2xy$ الذي تحققه النقطة $(0,1)$ هو:

$$y = e^{x^2} \quad (a)$$

$$y = x^2y \quad (b)$$

$$y = x^2y + 1 \quad (c)$$

$$y = x^2y^2 + 1 \quad (d)$$

$$|y| = x^2 \Rightarrow |y| = e^{x^2} y = |y| = x^2 + C \quad (0,1) \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \Rightarrow \ln |y| = x^2 \dots \dots \dots a$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (1 - e^x) dx \quad (5)$$

$$\int (1 - e^x) dx = \int e^{-12x} dx = -\frac{1}{12} e^{-12x} + C$$

$$\int (2x + e^{3x} - 1) dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^2 x + e^{3x} - 1) dx = -\frac{1}{2} \int (2x \cos^2 x + e^{3x} - 1) dx = \int (-12x - 2 \sin^2 x) dx$$

$$\int |x| + C \quad 2|x| + 13e^{3x} - \ln$$

$$\int (x) dx \quad (7)$$

$$\int (x + \sec^2 x) dx = \int (\csc^2 x \cos^2 x \sin^2 x + 1 \sin^2 x) dx = \int (\csc^2 x (1 + \tan^2 x) dx$$

$$\int x + C + \tan x) dx = -\cot$$

$$\int (e^{2x} + 5) dx \quad (8)$$

$$\int (e^{2x} + 5) dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} + 5 dx = \frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 5| + C$$

$$(2x^2+7x-3)dx \quad (9) \int$$

$$\int (2x^2+7x-3)dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C$$

$$(2x-1)dx \quad (10) \int \sec^2$$

$$\int (2x-1)dx = x^2 - \frac{1}{2}x + C$$

$$(5x+1)dx \quad (11) \int \cot$$

$$\int (5x+1)dx = \frac{5}{2}x^2 + x + C$$

$$x dx \quad (12) \int \cos \frac{\pi}{2} \sin$$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = -\frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2}x \sin x + \frac{1}{2}x \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}) \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$(0.5x)dx \quad (13) \int \cos^2$$

$$\int_0^{\pi} (0.5x) \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{2} + 0 \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$(x^3-1)dx \quad (14) \int_0^2$$

$$\int_0^2 (x^3-1)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - 2 \right) - (0 - 0) = 4 - 2 = 2$$

$$(4x)dx \quad (15) \int_0^{\pi/4} (\sec^2$$

$$\int_0^{\pi/4} 4x \sec^2 x dx = 2x^2 \tan x + \cos^2 x \Big|_0^{\pi/4} = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \tan \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} - (0 + 1) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$$

$$(2x)dx \quad (16) \int_0^{\pi/3} (2x+\pi^3)-1+\cos$$

$$\int_0^{\pi/3} (2x+\pi^3-1+\cos 2x) dx = \left(x^2 + \pi^3 x - x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/3} = \left(\frac{\pi^2}{9} + \pi^3 \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2} \right) - (0 + 0 - 0 + 0) = \frac{\pi^2}{9} + \frac{\pi^4}{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(2x)dx \quad (17) \int_0^{\pi/8} x \cos$$

$$\int_0^{\pi/8} 2x \cos x dx = -2x \sin x + 2 \cos x \Big|_0^{\pi/8} = -2 \left(\frac{\pi}{8} \right) \sin \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} - (0 + 2) = -\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} - 2$$

$$(4x^2-4)dx \quad (18) \int$$

$$4x^2 - 4dx = \int \frac{4x^2 - 4}{(x-2)(x+2)} dx = \frac{Ax-2+B}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow A=1, B=-14$$

$$\int \frac{4x^2 - 4}{(x-2)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{14}{x+2} \right) dx = \ln|x-2| - 14 \ln|x+2| + C$$

(19) $\int \frac{x+7x^2-x-6}{(x+2)(x-3)} dx$

$$\frac{x+7x^2-x-6}{(x+2)(x-3)} = \frac{Ax-3+Bx+2A}{(x+2)(x-3)} = \frac{Ax^2 + (B-A)x + (2A-3)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow A=2, B=-1, C=2$$

$$\int \frac{x+7x^2-x-6}{(x+2)(x-3)} dx = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-3} \right) dx = 2 \ln|x+2| - \ln|x-3| + C$$

(20) $\int \frac{x-1}{x^2-2x-8} dx$

$$\frac{x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\Rightarrow A=1, B=-1/2$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-8} dx = \ln|x-4| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + C$$

(21) $\int \frac{x^2+3x^3+x}{x^2+1} dx$

$$\frac{x^2+3x^3+x}{x^2+1} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2+1} + \frac{1}{x} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2+1} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow A=3, B=-2, C=1$$

$$\int \frac{x^2+3x^3+x}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{3x^2-2x+1}{x^2+1} + \frac{1}{x} \right) dx = 3 \ln|x^2+1| - \ln|x| + C$$

(22) $\int \frac{1-x}{x(1-x)} dx$

$$\frac{1-x}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)+Bx}{x(1-x)} = \frac{A-Bx+A}{x(1-x)}$$

$$\Rightarrow A=1, B=1, C=1$$

$$\int \frac{1-x}{x(1-x)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \ln|x| - \ln|1-x| + C$$

(23) $\int \frac{x-3\cos x \cos 2x \sin x}{x^2-3u} dx$

$$x^2 - 3u = \int \sin x - 3\cos x \cos 2x \sin x \Rightarrow dx = du - \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin u = \cos x$$

$$\int \frac{1}{u^2-3} du = \int \frac{1}{(u-3)(u+3)} du = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3} = \frac{A(u+3)+B(u-3)}{(u-3)(u+3)}$$

$$\Rightarrow A=1/6, B=1/6$$

$$\int \frac{1}{u^2-3} du = \frac{1}{6} \ln|u-3| + \frac{1}{6} \ln|u+3| + C = \frac{1}{6} \ln|u^2-9| + C$$

$$\int (xx-4)dx \quad (24)$$

$$u=x \Rightarrow u^2=x, dx=2u du \int xx-4 = \int uu^2-4 \times 2u du = \int 2u^2u^2-4 du = \int (2+8u^2-4) du$$

$$8u^2-4 = Au^{-2} + Bu+2 \Rightarrow A(u+2) + B(u-2) = 8u = 2 \Rightarrow A=2, u=-2 \Rightarrow B$$

$$|u+2| + C = 2x |u-2| - 2 \ln = -2 \int xx-4 = \int (2+2u^{-2} + -2u+2) du = 2u + 2 \ln |x-2x+2| + C + 2 \ln$$

$$\int x dx (25) \int (x^2 + \tan x \sec^2 x) dx$$

$$x(u-1)u du \sec^2 x dx = \int \sec^2 x (x^2 + \tan x) dx \Rightarrow dx = du \sec^2 u = 1 + \tan x$$

$$\int (u^2 - u) du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{3}(1 + \tan x)^3 - \frac{1}{2}(1 + \tan x)^2 + C$$

$$\int (x^4 - 3x^3) dx \quad (26)$$

$$u=4-3x \Rightarrow dx = du - 3, x = \frac{4-u}{3} \int x^4 - 3x^3 dx = \int \frac{1}{81}(4-u)^4 du - 3 \int \frac{1}{27}(4-u)^3 du$$

$$= \frac{1}{81} \int (4u^4 - 13u^3 + 24u^2 - 23u + 16) du - \frac{1}{9} \int (4u^3 - 12u^2 + 12u - 4) du$$

$$= \frac{1}{81} (u^5 - \frac{13}{4}u^4 + 8u^3 - \frac{23}{2}u^2 + 16u) - \frac{1}{9} (u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 4u) + C$$

$$= \frac{1}{81} (4-3x)^5 - \frac{13}{324} (4-3x)^4 + \frac{8}{27} (4-3x)^3 - \frac{23}{162} (4-3x)^2 + \frac{16}{81} (4-3x) - \frac{1}{9} (4-3x)^4 + \frac{4}{9} (4-3x)^3 - \frac{2}{3} (4-3x)^2 + \frac{4}{9} (4-3x) + C$$

$$\int (x^6) dx \quad (27) \int \ln(x)$$

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C = \frac{1}{7} (x^7) + C$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$$

$$\int (x+1)^{2x-2} dx \quad (28)$$

$$u=x-2 \Rightarrow x=u+2, dx=du \int (x+1)^{2x-2} dx = \int (u+3)^{2u} du = \int (u^2 + 6u + 9) u^{2u} du$$

$$= \int (u^{2u+2} + 6u^{2u+1} + 9u^{2u}) du = \frac{1}{2u+3} u^{2u+3} + \frac{6}{2u+2} u^{2u+2} + \frac{9}{2u+1} u^{2u+1} + C$$

$$= \frac{1}{2(x-2)+3} (x-2)^{2(x-2)+3} + \frac{6}{2(x-2)+2} (x-2)^{2(x-2)+2} + \frac{9}{2(x-2)+1} (x-2)^{2(x-2)+1} + C$$

$$\int x dx (29) \int x \csc^2 x dx$$

$$\int x \csc^2 x dx = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$\int (x^2 - 5x) e^x dx \quad (30)$$

$$u=x^2-5x dv=e^x dx du=(2x-5) dx v=e^x \int (x^2-5x) e^x dx = (x^2-5x) e^x - \int (2x-5) e^x dx$$

$$\int (2x-5)ex dx = \int 2xex dx - \int 5ex dx = 2 \int xex dx - 5 \int ex dx = 2(xex - \int ex dx) - 5ex = 2xex - 2ex - 5ex + C = ex(2x - 7) + C$$

$$\int (2x^2 - 3x + 1) \sin x dx$$

$$\int (2x^2 - 3x + 1) \sin x dx = -2x \cos x + 3 \int x \cos x dx - \int \cos x dx = -2x \cos x + 3(x \sin x + \cos x) - \sin x + C = 3x \sin x - 2x \cos x + 3 \cos x - \sin x + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_0^1 t^3 t^2 dt \quad (32)$$

$$u = t^2 \Rightarrow dt = \frac{1}{2} u^{-1/2} du \Rightarrow t = 0 \Rightarrow u = 0, t = 1 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow \int_0^1 t^3 t^2 dt = \int_0^1 t^5 dt = \frac{1}{6} t^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\int (\pi x^3 - 4\pi^3 \cot^3 x) dx$$

$$\int (\pi x^3 - 4\pi^3 \cot^3 x) dx = \frac{\pi}{4} x^4 - 4\pi^3 \int \cot^3 x dx = \frac{\pi}{4} x^4 - 4\pi^3 \int \cot x (\csc^2 x - 1) dx = \frac{\pi}{4} x^4 - 4\pi^3 \left(\int \cot x \csc^2 x dx - \int \cot x dx \right) = \frac{\pi}{4} x^4 - 4\pi^3 \left(-\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln |\sin x| \right) + C = \frac{\pi}{4} x^4 + 2\pi^3 \cot^2 x + 4\pi^3 \ln |\sin x| + C$$

$$\int (4x^4 + 3 \sin \pi x \cos x) dx$$

$$\int (4x^4 + 3 \sin \pi x \cos x) dx = \frac{4}{5} x^5 + \frac{3}{\pi} \int \sin \pi x \cos x dx = \frac{4}{5} x^5 + \frac{3}{\pi} \int \frac{1}{2} \sin 2\pi x dx = \frac{4}{5} x^5 - \frac{3}{4\pi} \cos 2\pi x + C$$

$$\int (10x^2 - x^2 + x - 2) dx \quad (35)$$

$$\int (10x^2 - x^2 + x - 2) dx = \int 9x^2 + x - 2 dx = 3x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$$

$$\int (23x^2 + 416x^2 - 1) dx \quad (36)$$

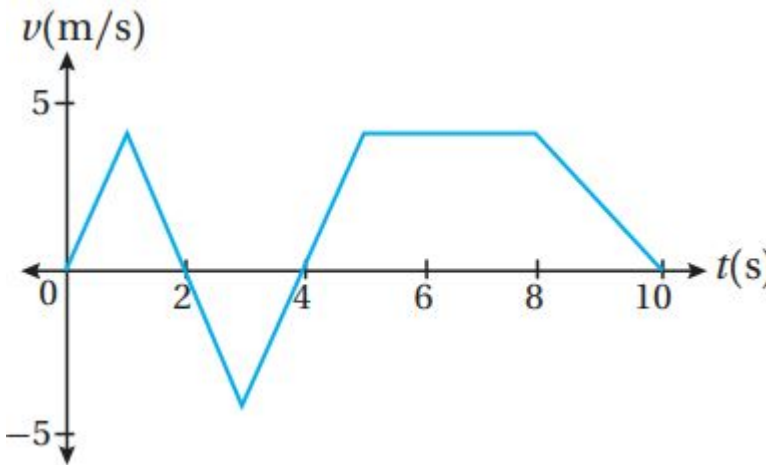
$$\int (23x^2 + 416x^2 - 1) dx = \int (439x^2 - 1) dx = \frac{439}{3} x^3 - x + C$$

$$35275)=2+34\ln 3-34\ln(2+34\ln$$

$$(2x dx (371/2e/2x \ln f$$

$$2x|12e^2 - \int 12e^2 x^2 dx = x^2 \ln 2x dv = x dx du = 1xv = x^2 \int 12e^2 x \ln u = \ln$$

$$(2x|12e^2 - 14x^2|12e^2 = 116(e^2 + 1) dx = x^2 \ln$$



يبين الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية [0,10]، إذا بدأ الجسيم الحركة من x=0 عندما t=0، فأجب عن الأسئلة الثلاثة التالية تباعاً:

(38) أجد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

$$s(10) - s(0) = \int_0^{10} v(t) dt = R_1 - R_2 + R_3 = 12(2)(4) - 12(2)(4) + 12(3+6)(4) = 18m$$

(39) أجد المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة له.

$$\int_0^{10} |v(t)| dt = R_1 + R_2 + R_3 = 4 + 4 + 18 = 26m$$

(40) أجد الموقع النهائي للجسيم.

$$s(10) - s(0) = 18 \Rightarrow s(10) - 0 = 18 \Rightarrow s(10) = 18m$$

(41) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $g(x) = x^2, f(x) = x$.

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x=0, x=1 \quad A = \int_0^1 (x-x^2) dx = (2/3 x^3 - 1/2 x^2) |_0^1 = (2/3 - 1/2) - (0) = 1/6$$

(42) أجد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $g(x) = x, f(x) = x^3$.

$$x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x=0, x=1, x=-1 \quad A = \int_{-1}^0 (x-x^3) dx + \int_0^1 (x-x^3) dx$$

$$=(14x^4-12x^2)|_{-10}+(12x^2-14x^4)|_0=12$$

(43) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين:

$$x=2, x=-2 \text{ والمستقيمين } g(x)=x^2+2, f(x)=-x$$

$$x^2+2=-x \Rightarrow x^2+x+2=0$$

هذه المعادلة التربيعية لا حلول لها، لأن المميز سالب، إذن، منحنيا الاقترانين لا يتقاطعان.

$$A = \int_{-1}^1 -22(x^2+2+x)dx = (13x^3+2x+12x^2)|_{-1}^1 - 22 = 403$$

(44) أثبت أن: $\int_{-1}^1 (25x^2x^2-1)dx = 3+12\ln 2$.

$$x^2x^2-1=1+1x^2-1=1+Ax-1+Bx+1 \Rightarrow A(x+1)+B(x-1)=1x=1 \Rightarrow A=12$$

$$|x=-1 \Rightarrow B=-12 \int_{-1}^1 25x^2x^2-1 dx = \int_{-1}^1 25(1+12x-1+-12x+1)dx = (x+12\ln 2|x+1|)|_{-1}^1 = 3+12\ln 2 - 12\ln 2$$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=t^2-1t+6$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية:

(45) أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[1,10]$.

$$D = \int_{10}^{110} v(t)dt = \int_{10}^{110} (19t-(t+6)-12)dt = (118t^2-2t+6)|_{10}^{110} = (27-52)$$

$$m \approx 2.792m$$

(46) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[1,10]$.

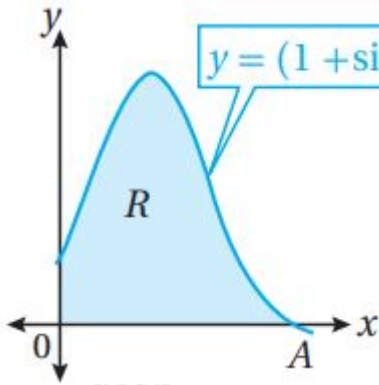
$$v(t)=19t-(t+6)-12$$

لتكن d المسافة المقطوعة وهي تمثل المساحة بين منحنى $v(t)$ والمحور t بين المستقيمين $t=1, t=10$

$$d = \int_{10}^{110} |v(t)|dt = \int_{10}^{110} |19t-(t+6)-12|dt$$

$$19t-(t+6)-12=0 \Rightarrow t^2=1t+6 \Rightarrow t^2+6=9 \Rightarrow t^2(t+6)=81 \Rightarrow t^3+6t^2-81=0 \Rightarrow (t-3)(t^2+9t+81)=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow d = -$$

$$\int_{10}^{110} 13(19t-(t+6)-12)dt + \int_{310}^{310} (19t-(t+6)-12)dt = (2t+6-118t^2)|_{10}^{110} + (118t^2-2t+6)|_{310}^{310} = 15518-27 \approx 3.32m$$



يمثل الشكل المجاور منحنى
الاقتران: $y = (1 + \sin 2x)^2$ حيث: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$

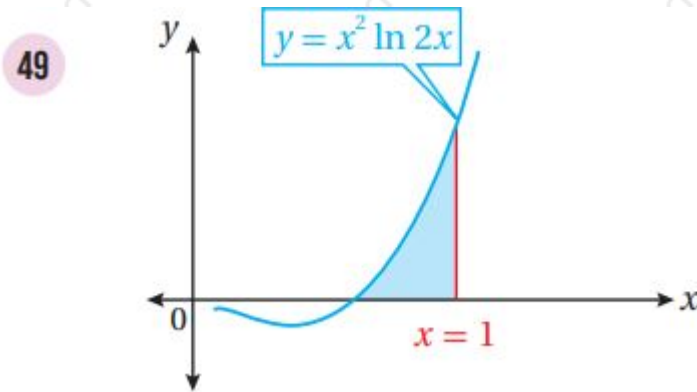
(47) أجد إحداثيي النقطة A.

$$(2x)^2 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow A\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$$

(48) أجد مساحة المنطقة R.

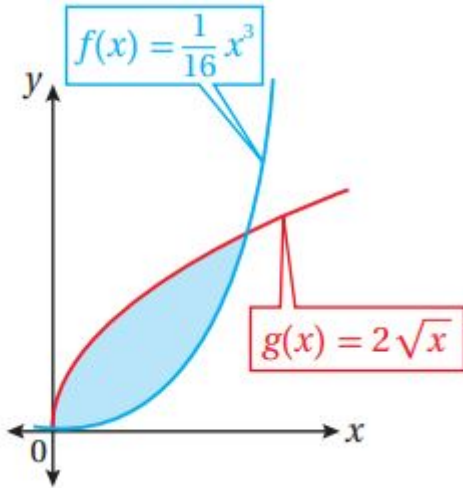
$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin 2x)^2 dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x) dx \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + 2\sin 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}) dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\frac{3}{2} + 2\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 4x) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x - \cos 2x + \frac{1}{8}\sin 4x \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{9\pi}{8} + 1 - 18\sin \end{aligned}$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:



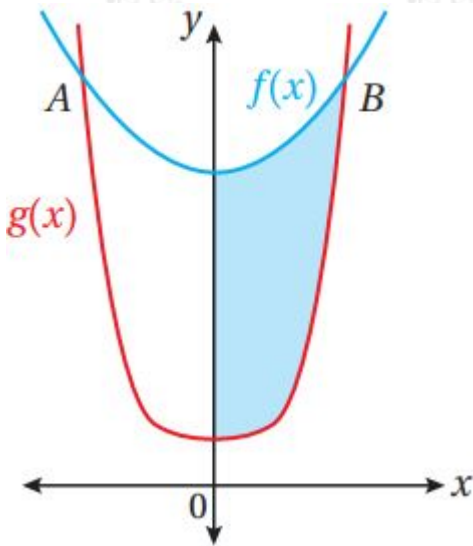
$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln 2x dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 (\ln 2 + \ln x) dx = \ln 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx \\ &= \ln 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx = \frac{\ln 2}{3} + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx \\ &= \frac{\ln 2}{3} + \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\ln 2}{3} + \left(\frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{24} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{72} \right) \\ &= \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{24} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{72} = \frac{13 \ln 2}{72} - \frac{19}{72} \end{aligned}$$

50



$$116x^3 = 2x \Rightarrow 1256x^6 - 4x = 0 \Rightarrow x(1256x^5 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4(256)^{1/5} = 2105$$

$$= 4A = \int_0^4 (2x - 116x^3) dx = (43x^3 - 164x^4) \Big|_0^4 = 203$$



يبين الشكل الآتي منحنىي الاقترانين:
: $f(x) = x^2 + 14, g(x) = x^4 + 2$

(51) إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة A والنقطة B، فأجد إحداثي نقطتي التقاطع.

$$x^2 + 14 = x^4 + 2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow A(-2, f(-2))$$

$$= (-2, 18) B(2, f(2)) = (2, 18)$$

(52) أجد حجم الجسم الناتج من دورات المنطقة المظللة حول المحور x.

نلاحظ أن منحنىي f, g واقعان فوق المحور x، وأن منحنى f فوق منحنى g في الفترة $[-2, 2]$

$$V = \pi \int_0^2 (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^2 ((x^2 + 14)^2 - (x^4 + 2)^2) dx = \pi \int_0^2 (-x^8 - \rightarrow$$

$$3x^4 + 28x^2 + 192) dx = \pi(-19x^9 - 35x^5 + 283x^3 + 192x)|_0^2 = 17216\pi 45$$

(53) أجد حجم المجسم الناتج من دورات المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:
 $f(x) = xe^{-x}$ والمحور x والمستقيمين: $x=1$ و $x=2$ حول المحور x .

$$V = \pi \int_1^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^2 x^2 e^{-2x} dx$$

$$u = x^2 \quad dv = e^{-2x} dx$$

$$du = 2x dx \quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$x^2 = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

$$V = \pi \left(-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) \Big|_1^2 = 2e^{-4} - 3e^{-2} \pi$$

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(54) \quad \frac{dy}{dx} = yx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} x^2 + C \Rightarrow y = e^{\frac{1}{2} x^2 + C} = e^{\frac{1}{2} x^2} \cdot e^C = e^{\frac{1}{2} x^2} \cdot C$$

$$(55) \quad \frac{dy}{dx} = x \sec y$$

$$y dy = \int x \sec y dx \Rightarrow \int y dy = \int x \sec y dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = \int x \sec y dx$$

$$y = x \sec y - \int x \sec y dx \Rightarrow \int x \sec y dx = x \sec y - \int x \sec y dx$$

$$\int x \sec y dx = x \sec y - \int x \sec y dx \Rightarrow \int x \sec y dx = x \sec y - \int x \sec y dx$$

$$(56) \quad 3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$$

$$3y^2 dy = 8x dx \Rightarrow \int 3y^2 dy = \int 8x dx \Rightarrow y^3 = 4x^2 + C$$

$$(57) \quad x \frac{dy}{dx} = 3xy + 4y$$

$$\frac{dy}{y} = (3x + 4) \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (3 + \frac{4}{x}) dx \Rightarrow \ln|y| = 3x + 4 \ln|x| + C$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

$$(58) \quad \frac{dy}{dx} + 4y = 8; y(0) = 3$$

$$\frac{dy}{dx} + 4y = 8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 8 - 4y \Rightarrow \int \frac{dy}{8 - 4y} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{4} \ln|8 - 4y| = x + C$$

$$\ln|8 - 4y| = -4x - 4C \Rightarrow 8 - 4y = e^{-4x - 4C} \Rightarrow 4y = 8 - e^{-4x - 4C} \Rightarrow y = 2 - \frac{1}{4} e^{-4x - 4C}$$

الحل الخاص $y(0) = 3 \Rightarrow 3 = 2 - \frac{1}{4} e^{-4C} \Rightarrow e^{-4C} = -4 \Rightarrow C = \frac{1}{4} \ln(-4)$

$$(59) \quad \frac{dy}{dx} = 5e^y(2x+1)(x-2); y(-3) = 0$$

$$dy 5e^y = dx (2x+1)(x-2) \Rightarrow \int 5e^y dy = \int (2x+1)(x-2) dx = \int (2x^2 - 3x - 2) dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 - 2x + C$$

$$+1)=1x=2 \Rightarrow B=15x=-12 \Rightarrow A=-25 \int dy 5ey = \int (-252x+1+15x-2)dx - 5+C5+15 \ln 15 \ln - = 15 - \text{الحل العام } |x-2|+C|2x+1|+15 \ln e^{-y} 5 = -15 \ln |x-2| - 15 \Rightarrow 1 - |2x+1| + 15 \ln e^{-y} 5 = -15 \ln - \text{نعوض } \Rightarrow C = -15 \quad x = -3, y = 0$$

$$||x-2| 2x+1| x-2 2x+1| \Rightarrow 1 - e^{-y} = \ln e^{-y} 5 = 15 \ln$$

أسماك: يتغير عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = 0.2x$, حيث x عدد الأسماك، و t الزمن بالسنوات منذ هذه السنة:

(60) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علماً بأن عددها هذه السنة هو 300 سمكة.

$$|x| = 0.2t + C \Rightarrow x = e^{0.2t + C} = e^C (e^{0.2t}) = K e^{0.2t} \Rightarrow \int dx x = 0.2 dt \Rightarrow \int dx x = \int 0.2 dt \Rightarrow \ln 0.2t$$

حيث k ثابت يساوي e^C وبملاحظة أن عدد الأسماك x أكبر من صفر (فيكون $|x| = x$)

$$\text{الحل الخاص } x(0) = 300 \Rightarrow 300 = K e^{0.2(0)} \Rightarrow K = 300 \quad x(t) = 300 e^{0.2t}$$

(61) أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات.

$$x(5) = 300 e^{0.2(5)} = 300 e \approx 815$$

إذن، عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات هو 815 سمكة تقريباً.

(62) تجارة: يمثل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من منتج معين، حيث x عدد القطع المباعة من المنتج بالمئات. إذا كان: $p'(x) = -300x(9+x^2)^3$ هو معدل التغير في سعر القطعة الواحدة من المنتج، فأجد $p(x)$ ، علماً بأن سعر القطعة الواحدة هو 75JD عندما يكون عدد القطع المباعة من المنتج 400 قطعة.

$$p(x) = \int -300x(9+x^2)^3 dx \quad u = 9+x^2 \Rightarrow dx = du \quad 2x p(u) = \int -300x u^3 du \quad 2x = \int -150u - 32 du = 300u + C \Rightarrow p(x) = 300(9+x^2) + C \quad p(4) = 300(5) + C \Rightarrow 75 = 60 + C \Rightarrow C = 15 \Rightarrow p(x) = 15 + 300(9+x^2)$$