

مهارات التفكير العليا

المعادلات التفاضلية

تحد: أحل كلاًً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dy/dx = xy^2 - xy - 1/y^2 + y) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} dy/dx &= xy^2 - 1/y^2 + y - xy \\ dy/dx &= 1/y^2(x-1) - y(x-1) = (x-1)(1/y^2 - y) \Rightarrow dy \\ y^2 - y &= (x-1)dx \int dy \\ y^2 - y &= \int (x-1)dx \int y^2 dy = \int (x-1)dx - 1/3 \int -3y \\ |1-y^2| &= 12x^2 - x + C_1 - 1/3 \int -3y \\ |1-y^2| &= 12x^2 - x + C_1 - y^3/3 \end{aligned}$$

$$(dy/dx = x^2y - 1 - 2x^3y - 2) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} dy/dx &= x(12y - 1 - 23y - 2) = x(3y - 2 - 4y + 26y^2 - 7y + 2) = x(-y^6y^2 - 7y + 2) \\ &\Rightarrow 6y^2 - 7y + 2 - ydy = xdx \int 6y^2 - 7y + 2 - ydy = \int xdx \int (-6y^2 + 7y - 2)dy = \int \\ |y| &= 12x^2 + C_1 x dx - 3y^2 + 7y - 2 \ln \end{aligned}$$

$$(y(35xtan^2y + tan^2x + tan^2dy/dx = 1 + tan^2$$

$$\begin{aligned} xx) &= sec^2y(1 + tan^2x + tan^2y = sec^2xtan^2y + tan^2x + tan^2dy/dx = 1 + tan^2 \\ xdx \int dy &= sec^2y dy sec^2x sec^2y = sec^2x(1 + tan^2x = sec^2y sec^2 + tan^2 \\ xdx 12(y+2y)dy &= \int sec^2x dx \int 12(1 + cosy)dy = \int sec^2x dx \int cos^2y = \int sec^2c^2 \\ x + C_2y) &= tan^2 12 sin \end{aligned}$$

تبير: يمكن نمذجة معدل تحلل مادة مشعة بالمعادلة التفاضلية: $dx/dt = -\lambda x$, حيث x الكتلة المتبقية من المادة المشعة بالمليغرام بعد t يوماً، و $\lambda > 0$.

(36) أثبت أنه يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$, حيث a ثابت، مبرراً إجابتي.

$$|x| = -\lambda t + C \int dx/dt = -\lambda x \int dx = \int -\lambda dt \ln$$

لكن الكمية x لا تكون سالبة، فتحذف رمز القيمة المطلقة.

$$e^C \Rightarrow x = ae^{-\lambda t} \quad x = -\lambda t + Cx = e^{-\lambda t} + C = e^{-\lambda t} \times ec \ln \Rightarrow$$

(37) إذا كان عمر النصف للمادة المشعة هو الوقت اللازم لتحليل نصف هذه المادة،

وهـ كـتـلـةـ المـادـةـ الـابـتدـائـيـةـ،ـ فـأـثـبـتـ أـنـ عـمـرـ النـصـفـ لـلـمـادـةـ الـمـشـعـةـ هـوـ $2\lambda \ln 2$ ـ،ـ مـبـرـرـاـ إـجـابـتـيـ.

الكمية الابتدائية: $x(0)=a$

المطلوب: حساب الزمن الذي يكون عنده $a=12$, نعرض:

$$2\lambda 2 \Rightarrow t = \ln 12a = ae - \lambda t \Rightarrow 12 = e - \lambda t \Rightarrow 2 = e \lambda t \Rightarrow \lambda t = \ln$$

تبرير: تمثل المعادلة التفاضلية: $dy/dx = -2x^3y$ ميل المماس لمنحنى علاقـةـ ما:

(38) أجد قيمة n التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حلـاـًـ لـلـمـاعـدـلـةـ التـفـاضـلـيـةـ المـعـطـاـةـ،ـ حيثـ a ثـابـتـ اـخـتـيـارـيـ،ـ مـبـرـرـاـ إـجـابـتـيـ.

$$dy/dx = -2x^3y$$

لكـيـ تكونـ العـلـاقـةـ $x^2 + ny^2 = a$ حلـاـًـ لـلـمـاعـدـلـةـ التـفـاضـلـيـةـ المـعـطـاـةـ،ـ يـجـبـ أنـ تـحـقـقـهاـ.

نشـقـ طـرـفـيـ العـلـاقـةـ بـالـنـسـبـةـ لـلـمـتـغـيرـ x

$$2x + 2ny dy/dx = 0 \Rightarrow dy/dx = -xny$$

نـعـرضـ المـشـتـقةـ فـيـ المـاعـدـلـةـ التـفـاضـلـيـةـ:

$$xny = -2x^3y \Rightarrow 2nxy = 3xy \Rightarrow n = 3xy/2xy = 3/2 -$$

(39) أـجـدـ إـحـدـائـيـ نقاطـ تقـاطـعـ منـحـنـىـ العـلـاقـةـ معـ الـمحـورـ x ـ إـذـاـ عـلـمـتـ أـنـ منـحـنـاـهاـ يـمـرـ بالـنـقـطةـ (5,4)،ـ مـبـرـرـاـ إـجـابـتـيـ.

النـقـطةـ (5,4)ـ تـحـقـقـ المـاعـدـلـةـ:

$$a \Rightarrow a = 49 \Rightarrow x^2 + 32y^2 = 49 = (16)(25) + 32 \Rightarrow$$

لـإـيجـادـ الإـحـدـائـيـ x ـ لـنـقـاطـ التـقـاطـعـ منـحـنـىـ العـلـاقـةـ معـ الـمحـورـ x ـ نـصـعـ $y=0$ ـ فـيـ مـعـادـلـتـهاـ

$$x^2 = 0 + 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow$$

إـحـدـائـيـاتـ نقطـيـ تقـاطـعـ العـلـاقـةـ $x^2 + 32y^2 = 49$ ـ معـ الـمحـورـ x ـ هـمـاـ (7,0), (0,7).