أتحقق من فهمي

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية

أتحقق من فهمي صفحة (92):

أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية: y′′−4y′+3y=0 في كل مما يأتي:

(y=4ex+5e3x (a

y′=4ex+15e3xy′′=4ex+45e3xy′′−4y′+3y=4ex+45e3x−4(4ex+15e3x)+3(4ex+5e3x)=0

إذن y=4ex+5e3x حل للمعادلة التفاضلية y′′−4y′+3y=0

(x (by=sin

x≠0x−4cosx=2sinx+3sinx−4cosxy′′−4y′+3y=−sinxy′′=−siny′=cos

إذن xy=sin ليس حلاً للمعادلة التفاضلية y′′−4y′+3y=0

الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية

أتحقق من فهمي صفحة (94):

أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: x−32xdydx=5sec2، ثم أجد الحل الخاص لها الذي يحقق النقطة (0,7).

x−32x)dxx−32x)dx∫dy=∫(5sec2x−32x⟹dy=(5sec2dydx=5sec2

الحل العام لهذه المعادلة هو:

x−x32+Cy=5tan

لإيجاد الحل الخاص نعوض النقطة (0,7) في الحل العام:

C⇒C=7+0−0=7

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق النقطة (0,7) هو:

x−x32++7y=5tan

حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات

أتحقق من فهمي صفحة (96):

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

(dydx=2xy4 (a

dydx=2xy4⇒2xdx=y4dy⇒∫2xdx=∫y4dy⇒15y5=x2+C

(dydx=2x−xey (b

dydx=2x−xey⇒dydx=x(2−ey)⇒dy2−ey=xdx⇒∫xdx=∫12−ey×e−ye|2e−y−1|+C⇒x2=−ydy⇒∫xdx=−12∫−2e−y2e−y−1dy⇒x22=−12ln|2e−y−1|+C−ln

(xy (cdydx=xsin

xdxxdx⇒∫ydy=∫xsinxy⇒ydy=xsindydx=xsin

نجد ∫xdxxsin بالأجزاء:

x−∫−cxdx⇒12y2=−xcosx⇒∫ydy=∫xsinxdxdu=dxv=−cosu=xdv=sinx+Cx+sinxdx⇒12y2=−xcosos

(x (dxdydx=y2cos2sin2

xdx⇒∫y−2dxsin2xdxdyy2=cos2xdy=y2cos2xsin2xdydx=y2cos2sin2xx−x+C⇒1y=x+cotx−1)dx⇒−1y=−cotxdx∫y−2dy=∫(csc2y=∫cot2+C

أتحقق من فهمي صفحة (98):

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

(dydx=xy2e2x,y(0)=1 (a

dy=xy2e2xdx∫dyy2=∫xe2xdx

نجد ∫xe2xdx بالأجزاء:

u=xdv=e2xdxdu=dxv=12e2x⇒∫dyy2=12xe2x−∫12e2xdx

الحل العام هو:

1y=12xe2x−14e2x+C−⇒

بتعويض (0,1):

C⇒C=−34+14−=1−

الحل الخاص هو:

1y=12xe2x−14e2x−34−

(x,y(π2)=1 (bdydx=ycos

xdxdyy=cos

الحل العام هو:

x+C|y|=sinxdx⇒lndyy=∫cos∫

بتعويض (π2,1)

C⇒C=−1+1=0

الحل الخاص:

x−1|y|=sinln

أتحقق من فهمي صفحة (100):

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: dsdt=stt+1، حيث t الزمن بالثواني، وs موقع الجسيم بالأمتار. أجد موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة، علما بأن s(0)=1.

dsdt=stt+1⇒dss=tt+1dt∫dss=∫tt+1dtu=t+1⇒du=dt,t=u−1∫tt+1dt =∫(u−1)udu=∫(u−1)u12du=∫(u32−u12)du=25u52−23u32+C=25(t +1)52−23(t+1)32+C

الموقع bbb لا يمكن أن يكون 0 لأن 0ln غير معرف ولا يمكن أن يكون سالباً لأن s(0)=1 واقتران الموقع متصل، ولذا يمكننا أن نحذف رمز القيمة المطلقة وتعتبر s|s|=lnln بتعريض s=1 عندما t=0 ينتج:

s=25(t+1)52−23(t+1)32+415C⇒C=415⇒ln+25−23=0

نعوض t=3 لنجد s الموقع المطلوب:

s(3)=645−163+415=11615⇒s(3)=e11615ln

أتحقق من فهمي صفحة (102):

غـزلان: يمكـن نمذجـة معـدل تغيـر عـدد الغـزلان فـي إحـدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: dPdt=120000P(1000−P)، حيث P عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها:

(a) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد سنة من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة هو 2500 غزال.

dPdt=120000p(1000−P)∫dPP(1000−P)=∫120000dt

بتجزئة الكسر داخل التكامل في الطرف الأيسر:

11000P+110001000−P)dP=∫120000dt)∫

حل عام:

|1000−P|=t|P|−20ln|1000−P|=120000t+C20ln|P|−11000ln11000ln |P1000−P|=t+C+C20ln

بتعويض P=2500 عند t=0 ينتج:

53|P1000−P|=t+20ln53⇒20ln25001500=20lnC=20ln

(b) بعد كم سنة يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال؟

نعويض P=1800 في المعادلة الأخيرة:

2720≈653⇒t=20ln(94)=t+20ln20ln⇒

إذن، يصبح عدد الغزلان 1800 غزال بعد 6 سنوات تقريباً من بدء الدراسة.