مهارات التفكير العليا

المساحات والحجوم

تبرير: أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(22) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y=x2$ ،$y=x1/2$.

$x2=x12\Rightarrow x4=x\Rightarrow x4-x=0\Rightarrow x(x3-1)=0\Rightarrow x=0,x=1A=\int01(x12-x2)dx=(23x32-13x3)|01=23-13-0=13$

(23) أجد المساحة المحصورة بين منحتيي الاقترانين: $y=x3$ ،$y=x1/3$.

$x3=x13\Rightarrow x9=x\Rightarrow x9-x=0\Rightarrow x(x8-1)=0\Rightarrow x(x4-1)(x4+1)=0\Rightarrow x(x2-1)(x2+1)(x4+1)=0\Rightarrow x=0,x=-1,x=1(18)13=12,(18)3=1512\Rightarrow x13>x3,0<x<1(-18)13=-12,(-18)3=-1512\Rightarrow x3>x13,-1<x<0A=\int-10(x3-x13)dx+\int01(x13-x3)dx=(14x4-34x43)|-10+(34x43-14x4)|01=0-(14-34)+34-14-0=1$

(24) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين : $y=x1/n,y=xn$، حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2، مبرراً إجابتي.

أولاً إذا كان n زوجياً

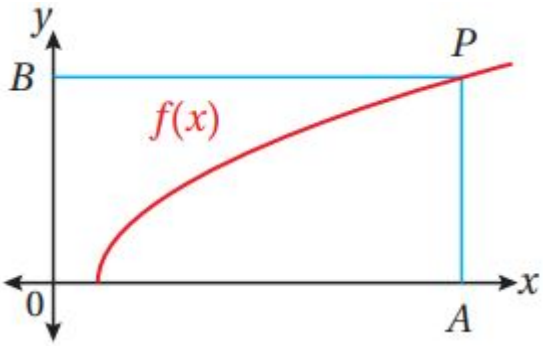
يتقاطع المنحنيان عند $x=0,x=1$

$A=\int01(x1n-xn)dx=(x1n+11n+1-xn+1n+1)|01=11n+1-1n+1-0=nn+1-1n+1=n-1n+1$

ثانياً إذا كان n فردياً

يتقاطع المنحنيان عند $x=0,x=1,x=-1$

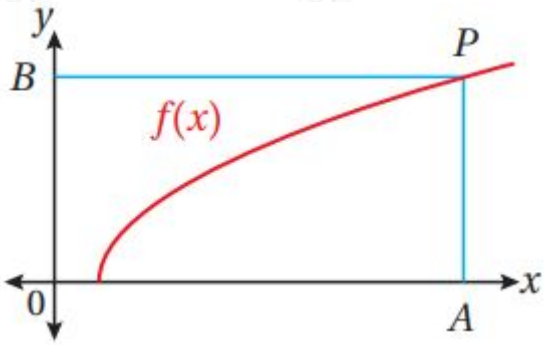
$A=\int-10(xn-x1n)dx+\int01(x1n-xn)dx=(xn+1n+1-x1n11n+1)|-10+(x1n+11n+1-xn+1n+1)|01=0-(1n+1-11n+1)+11n+1-1n+1-0=-1+nn+1+n-1n+1=2(n-1)n+1$



تـــبرير: يـــبين الشكـــل المجـــاور منحنـــى الاقتـران: f(x)=2x−2، حيـث: x≥1. إذا كـانت النقطـة P(9,4) تقـع علـى منحنـى الاقتـران f(x)، حيث PA¯ يوازي المحور y، وPB¯ يوازي المحور x، فأجد كلاً مما يأتي:

(25) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x)، والمستقيم y=4 والمحورين الإحداثيين.

2x−2=0⇒x=1

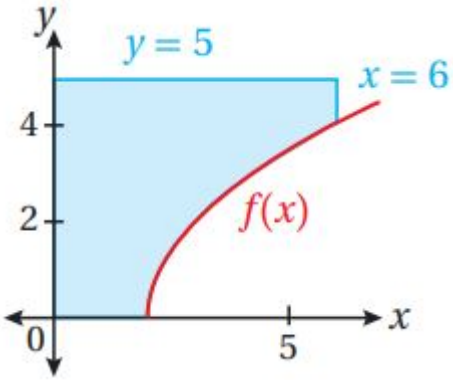


نقسم المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى قسمين برسم المستقيم x=1، ونجد المساحة كما يأتي:

A=∫014dx+∫19(4−2x−2)dx=(4x)|01+(4x−13(2x−2)32)|19=4−0+36−13(16)32−(4−0)=443

(26) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x)، والمستقيم x=9، والمحور x.

A=∫192x−2dx=13(2x−2)32|19=13((16)32−0)=643

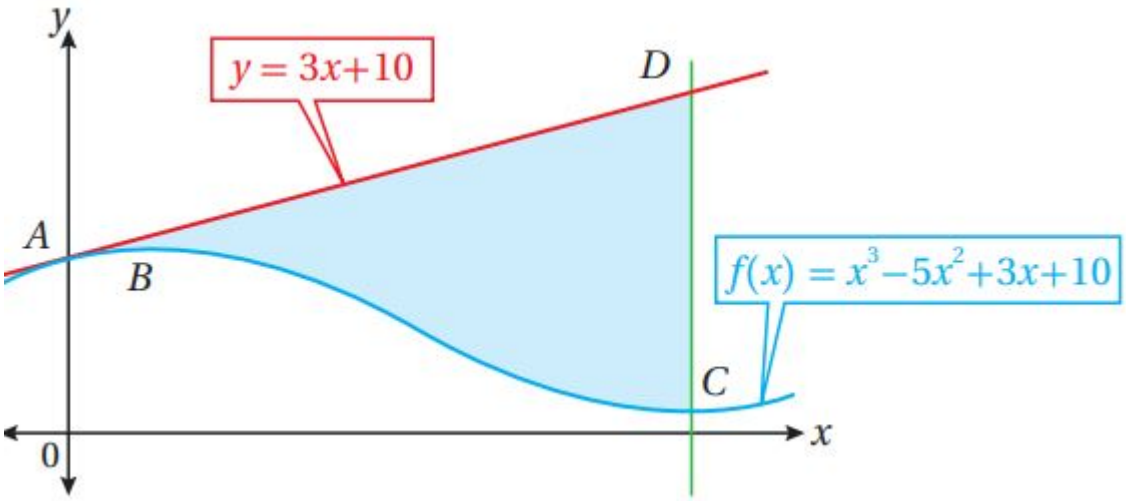


(27) تبرير: بين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأول، ومنحنى الاقتران: $f(x)=2x-2$، والمستقيمين: $x=6, y=5$. أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة حول المحور bbb، مبرراً إجابتي.

$2x-2=0 \Rightarrow x=2$

نقسم المنطقة إلى قسمين برسم المستقيم $x=2$، ونجد الحجم كما يأتي:

$$V=\pi\int_0^2 5^2 dx+\pi\int_2^6(5^2-(2x-2)^2)dx=\pi\int_0^2 25dx+\pi\int_2^6(25-(4x-8)dx$$
$$=50\pi+\pi\int_2^6(33-4x)dx=50\pi+\pi(33x-2x^2)|_2^6=50\pi+\pi(33(6)-72-66+8)|=118\pi$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى كل من الاقتران: $f(x)=x^3-5x^2+3x+10$، و المستقيم: $y=3x+10$. إذا مر المستقيم ومنحنى الاقتران بالنقطة A الواقعة على المحور y، وكان للاقتران $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة B، وقيمة صغرى محلية عند النقطة C، وقطع الخط الموازي للمحور y والمار بالنقطة C المستقيم: $y=3x+10$ في النقطة D؛ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(28) أجد إحداثيات كل من النقطة B، والنقطة C.

$y=x^3-5x^2+3x+10 \quad f'(x)=3x^2-10x+3=0 \Rightarrow (3x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}, x=3$

نقطة القيمة العظمى هي:

$(B(13,f(13))=(13,28327$

نقطة القيمة الصغرى هي:

$(C(3,f(3))=(3,1$

(29) أثبت أن $\overline{AD}$ مماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة A، مبرراً إجابتي.

النقطة A تقع على محور y إذن أحداثياها هما:

$(A(0,f(0))=(0,10$

ميل المنحنى عند A هو:

$dydx|x=0=0-0+3=3$

معادلة مماس المنحنى $f(x)$ عند النقطة A هي (حيث $f'(0)=3$):

$y-10=3(x-0)\Rightarrow y=3x+10$

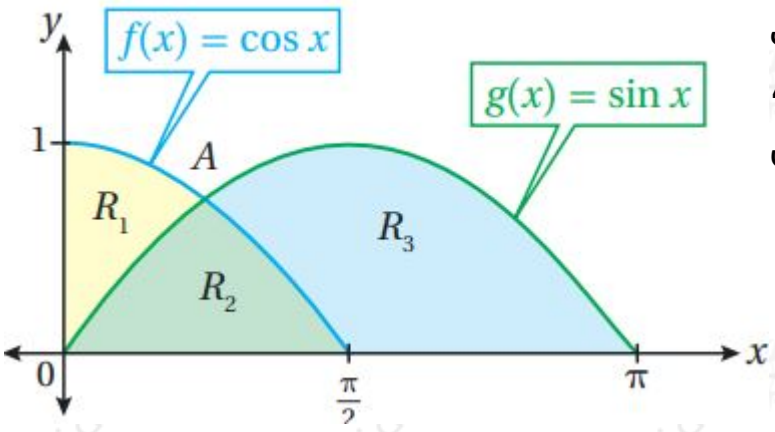
وهذه المعادلة هي معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ نفسها.

إذن، $\overleftrightarrow{AD}$ مماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة A

(30) أجد مساحة المنطقة المظللة، مبرراً إجابتي.

$A=\int_0^3(3x+10-(x^3-5x^2+3x+10))dx=\int_0^3(5x^2-x^3)dx=(53x^3-14x^4)|_0^3=45-814-0=994$

تبرير: يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $h(x)=\sin x-f(x)=\cos x$، معتمداً هذا الشكل، أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:



(31) أجد إحداثيي النقطة A.

$x=1\Rightarrow x=\pi 4$ or $x=5\pi 4x\Rightarrow \tan x=\sin f(x)=g(x)\Rightarrow \cos$

نلاحظ من الرسم المعطى x تقع في الفترة $(\pi 2,0)$

إذن، إحداثيا النقطة A هما: $(\pi 4,f(\pi 4))=(\pi 4,12)$

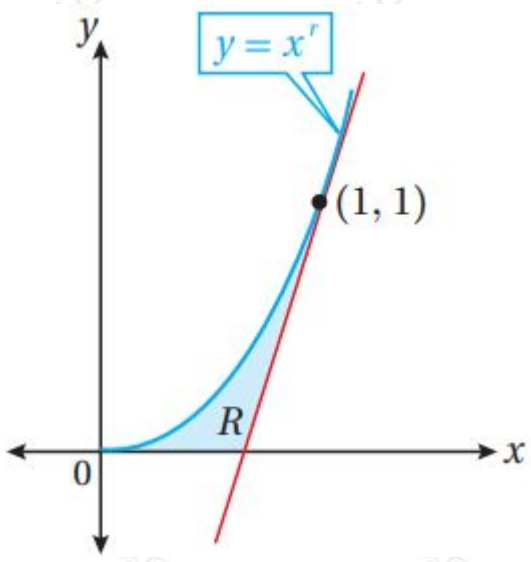
(32) أجد مساحة كل من المناطق: R1,R2,R3.

$x)|0\pi 4=12+12-(0+1)=2-1A(x+\cos x)dx=(\sin x-\sin A(R1)=\int 0\pi 4(\cos$
$x|\pi 4\pi 2=-12+1+1-x|0\pi 4+\sin xdx=-\cos xdx+\int \pi 4\pi 2\cos R2)=\int 0\pi 4\sin$
$x)|\pi 4\pi x-\sin xdx=(-\cos x)dx+\int \pi 2\pi \sin x-\cos 12=2-2A(R3)=\int \pi 4\pi 2(\sin$
$x)|\pi 2\pi =2=-0-1-(-12-12)+(-(-1)+0)=22+(-\cos$

(33) أثبت أن مساحة المنطقة R1 إلى مساحة المنطقة R2 تساوي: 2:2.

$A(R1)A(R2)=2-12-2=2-12(2-1)=12=22$

إذن: $A(R1):A(R2)=2:2$



تحد: يبين الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران: $y=xr$ حيث: $r>1$، والمحور x، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة (1,1):

(34) أثبت أن مماس منحنى الاقتران يقطع المحور x عند النقطة $(r-1r,0)$.

$y=xr,y'=rxr-1$

ميل المماس عند (1,1) هو:

bbby′|x=1=r(1)r−1=r

معادلة المماس هي:

y−1=r(x−1)⇒y=rx+1−r

لإيجاد المقطع x لهذا المماس نضع y=0 في معادلته:

rx+1−r⇒x=r−1r=0

إذن، يقطع هذا المماس المحور x في النقطة (r−1r,0)

(35) أستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أن مساحة المنطقة R هي r−12r(r+1) وحدة مربعة.

مساحة المنطقة R تساوي المساحة بين المنحنى والمحور x والمستقيمين x=0,x=1 مطروحاً منها مساحة المثلث الذي رؤوسه (1,0),(1,1),(r−1r,0) أي أن A(R) هي:

A(R)=∫01xrdx−12(1−r−1r)(1)=xrr+1|01−12r=1r+1−12r=2r−r−12(r(r+1)=r−12r(r+1

(36) أجد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R أكبر ما يمكن.

A(r)=r−12r2+2r,r≥1A′(r)=2r2+2r−(r−1)(4r+2)(2r2+2r)2=−2(r2−2r−1)(2r2+2r)2=0⇒r2−2r−1=0⇒r=2±82=2±222=1±2

ولأن r≥1 تكون قيمة الحرجة 1+2

إذن، قيمة r التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن هي: r=1+2

تحد: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: f(x)=x2−4x+6 عند النقطة (1,3) يقطع منحنى الاقتران مرة أخرى عند النقطة P، فأجد كلاً مما يأتي:

(37) إحداثيات النقطة P.

f′(x)=2x−4

ميل المماس عند النقطة (1,3) هو:

$f'(1)=-2$

ميل العمودي على المماس عند النقطة (1,3) هو: 12

معادلة العمودي:

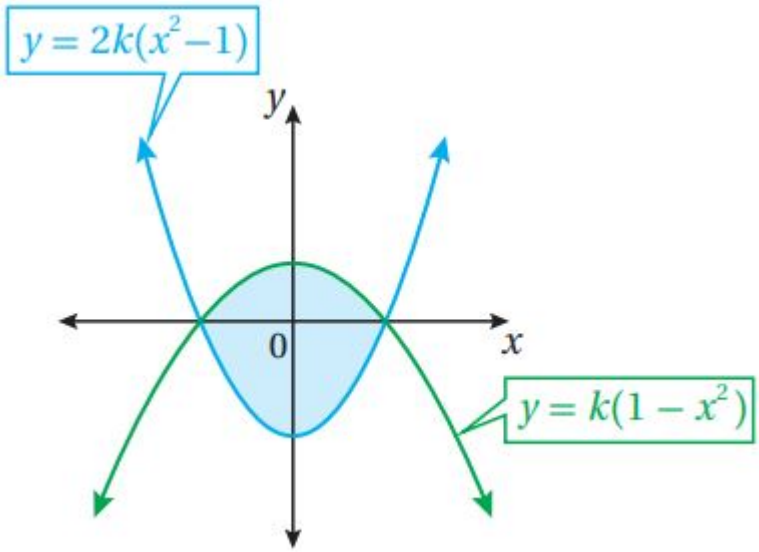
$y-3=12(x-1)\Rightarrow y=12x+52$

نجد نقاط تقاطع المنحنى والعمودي على المماس:

$x2-4x+6=12x+52\Rightarrow 2x2-9x+7=0\Rightarrow(2x-7)(x-1)=0\Rightarrow x=72,x=1\Rightarrow P(7(2,f(72))=(72,174$

(38) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) والعمودي على المماس، مقرباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

$A=\int 172(12x+52-(x2-4x+6))dx=\int 172(92x-72-x2)dx=(94x2-72x-13x3)|172=(94(72)2-72(72)-13(72)3)-(94-72-13)=12548\approx 2.604$



(39) تبرير: المنطقة المظللة في الشكل المجاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كل منهما المحور x، عندما $x=-1,x=1$. إذا كانت معادلتا القطعين هما: $y=2k(x2-1),y=k(1-x2)$، وكانت مساحة المنطقة المظللة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت k.

$k(1-x2)-2k(x2-1))dx=8\Rightarrow\int -11(k(1-x2)+2k(1-x2))dx=8\Rightarrow 3k)11-\int\int -11(1-x2)dx=83k(x-13x3)|-11=83k((1-13)-(-1+13))=83k(2-23)=83k(43)=8\Rightarrow k=2$