

مهارات التفكير العليا

التكامل بالأجزاء

(37) تبرير: أثبت أن: $\int \frac{1}{23x^2} \ln x dx = 9 \ln 1/23x^2 \ln x - 6$.

$$2x | \frac{1}{23} - \int \frac{1}{23x^2} dx = \frac{1}{23} \ln x - \frac{1}{23} \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{23} \ln x + \frac{1}{23} \int x^{-2} dx = \frac{1}{23} \ln x - \frac{1}{23} x^{-1} = \frac{1}{23} \ln x - \frac{1}{23x}$$

(38) تبرير: أثبت أن: $\int \sin \frac{\pi}{4} x \sin 5x dx = \frac{\pi}{4} - 216$.

$$2x - 116 \sin 8x dx du = dxv = 14 \sin 2x - \cos 3x dx = 12 (\cos 5x \sin u = x dv = \sin 2x - 118x) |_{0\pi}^4 - \int_{0\pi}^4 (14 \sin 2x - 116 \sin 3x) dx = x(14 \sin 5x \sin 8x |_{0\pi}^4 \sin 8x) |_{0\pi}^4 + 1128 \cos 8x |_{0\pi}^4 - (-18 \cos 2x - 116 \sin 8x) dx = x(14 \sin 6 \sin = \pi^4 (14) + 0 - 1128 - 18 + 1128 = \pi - 216$$

(39) تبرير: إذا كان: $\int_0^a x e^{x/2} dx = 6$, فأثبت أن a يحقق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

$$u = x dv = e^{1/2 x} dx du = dxv = 2e^{1/2 x} \int_0^a x e^{1/2 x} dx = 2x e^{1/2 x} |_{0a} - \int_0^a 2e^{1/2 x} dx = 2x e^{1/2 x} |_{0a} - 4e^{1/2 x} |_{0a} = 2ae^{1/2 a} - 4e^{1/2 a} + 4 \Rightarrow 2ae^{1/2 a} - 4e^{1/2 a} + 4 = 6 \Rightarrow 2ae^{1/2 a} = 4e^{1/2 a} + 2$$

بقسمة طرفي المعادلة على $2e^{1/2 a}$ نحصل على:

$$a = 2 + e^{-1/2 a}$$

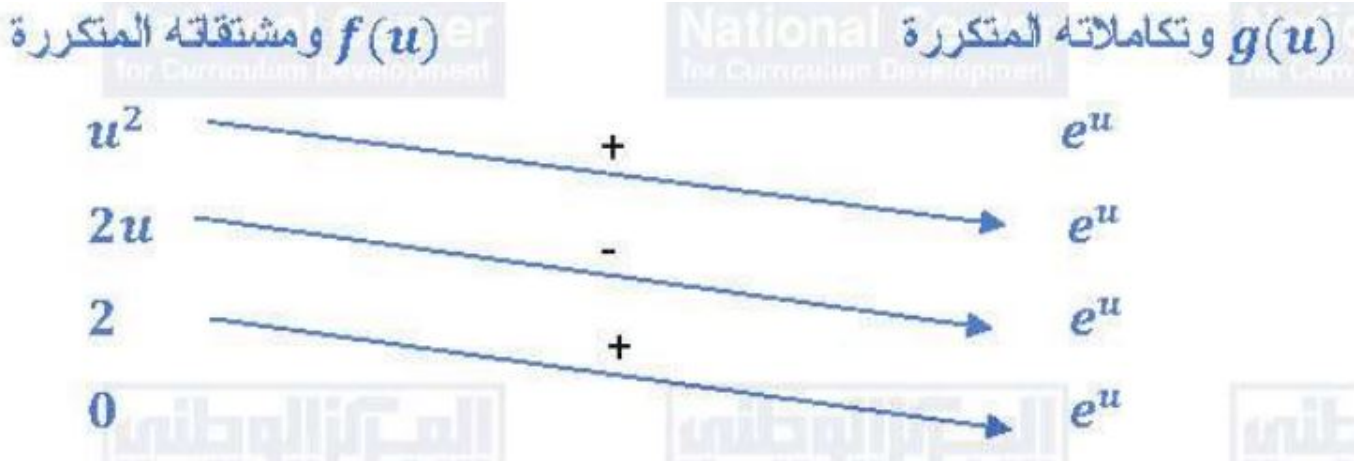
لذا فإن a يحقق المعادلة $x = 2 + e^{-x/2}$

(40) تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 dx$ بطريقتين مختلفتين، مبرراً إجابتي.

الطريقة الأولى بالتعويض:

$$x^2 dx = \int u^2 x du = \int u^2 e^{u/2} du \Rightarrow du dx = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du, x = e^{u/2} \int (\ln u = \ln$$

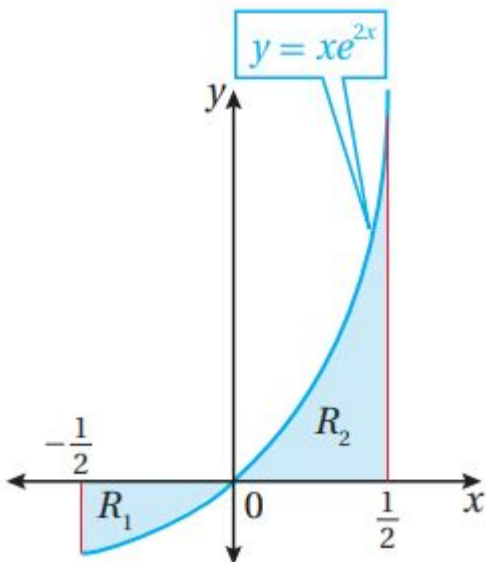
بالأجزاء مرتين، نستخدم الجدول:



$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

الطريقة الثانية: بالأجزاء مباشرة:

$$\int x^2 \ln x dx = \int x^2 \cdot \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$



تبرير: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران: $y = xe^{2x}$ حيث: $x \leq 0$ و $x \geq 0$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(41) أجد مساحة كل من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2 .

$$A_1 = -\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} xe^{2x} dx, A_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx$$

نجد التكامل غير المحدود $\int xe^{2x} dx$ بالأجزاء:

$$u = x, dv = e^{2x} \Rightarrow du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$x - 14e^{2x} + C = 14e^{2x}(2x - 1) + C \Rightarrow A(R1) = -14e^{2x}(2x - 1) \Big|_{120} = 14 - 12e \\ = e - 24e \quad A(R2) = 14e^{2x}(2x - 1) \Big|_{012} = 0 + 14 = 14$$

(42) أثبت أن مساحة المنطقة R1 إلى مساحة المنطقة R2 تساوي (e-2):e.

$$A(R1)A(R2) = e - 24e \quad 14 = e - 2e \quad A(R1):A(R2) = (e - 2):e$$

تحد: استعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كل مما يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب،
و a ≠ 0:

$$(x) + C \quad (43) \quad x dx = x^{n+1} (n+1)^2 (-1 + (n+1) \ln x) \ln f$$

$$x^{n+1} - \int 1 + x dx = x^{n+1} \ln x dv = x^n dx du = 1 x dx v = 1 + 1 x^{n+1} \int x^n \ln u = \ln \\ x) x^{n+1} - 1 (n+1)^2 x^{n+1} + C = x^{n+1} (n+1)^2 (-1 + (n+1) \ln 1 x^n dx = x^{n+1} \ln \\ + C$$

$$(x) e^{ax} dx = x e^{ax} a - n \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (44) f$$

$$u = x^n dv = e^{ax} dx du = n x^{n-1} dx v = 1 a e^{ax} \int x^n e^{ax} dx = 1 a x^n e^{ax} - n \int x^{n-1} \\ e^{ax} dx$$