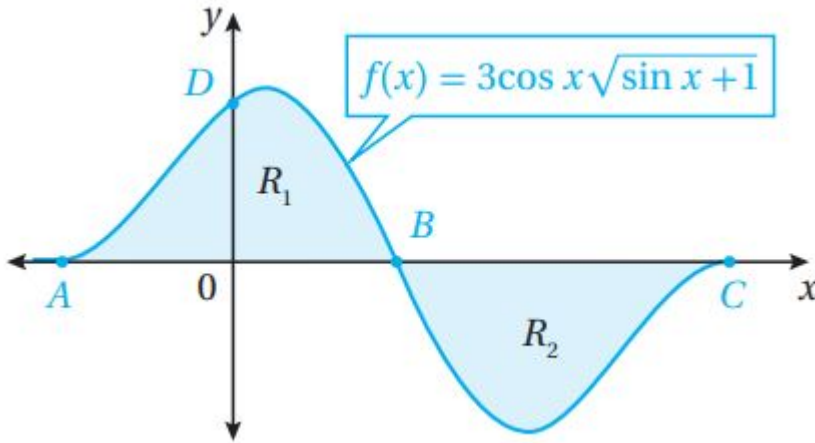


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران: $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجب عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ since } \sin x = 0 \Rightarrow 3\cos x \sqrt{1 + \sin x} = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ بوضع $n = 0$

$$(B(\frac{\pi}{2}, 0), C(\frac{3\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\frac{\pi}{2}$ بوضع $n = -1$

$$(A(-\frac{\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$A = \int_{0}^2 3\cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x} = 3 \int_{0}^2 \sqrt{u} du = 3 \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{0}^2 = 2(2^{\frac{3}{2}} - 0) = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x - \sin x) dx = -\int_0^{\pi/2} 2(3\cos x + \sin x) dx = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة $\int_1^{16} \frac{1+x^3}{4x} dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}, x^3 = u - 1 \Rightarrow u = 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\int_1^{16} \frac{1+x^3}{4x} dx = \int_2^{17} \frac{u}{4(u-1)} \frac{du}{3(u-1)^{2/3}} = \frac{1}{12} \int_2^{17} \frac{u}{(u-1)^{5/3}} du = \frac{1}{12} \int_2^{17} (1 + \frac{1}{u-1}) (u-1)^{-5/3} du$$

$$= \frac{1}{12} \left[\int_2^{17} (u-1)^{-5/3} du + \int_2^{17} (u-1)^{-2/3} du \right] = \frac{1}{12} \left[-3(u-1)^{-2/3} + 3(u-1)^{1/3} \right]_2^{17}$$

$$= \frac{1}{12} \left[-3(16)^{-2/3} + 3(16)^{1/3} + 3(1)^{-2/3} - 3(1)^{1/3} \right] = \frac{1}{12} \left[-3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 2 + 3 - 3 \right] = \frac{1}{12} \left[-\frac{3}{4} + 6 \right] = \frac{1}{12} \cdot \frac{21}{4} = \frac{7}{16}$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow dx = -du, x = \pi - u \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_1^e (\ln x)(\ln x^2) dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (2x^3 + 1 + \sin x) dx$

bbb