أتحقق من فهمي

تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقترانات الأسيّة

أتحقق من فهمي صفحة 10

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int(5x2-3e7x)\ dx$

$\int(5x2-3e7x)\ dx=53x3-37e7x+C$

(b) $\int0ln38e4x\ dx$

$\int0ln38e4x\ dx=84e4x|0ln3=2(e4ln3-e0)=2(eln34-e0)=2(81-1)=160$

(c) $\int e1-x\ dx$

$\int e1-x\ dx=\int(e1-x)1/2\ dx=\int e(1-x)/2\ dx=-2e(1-x)/2+C$

(d) $\int(3x+2x)\ dx$

$\int(3x+2x)\ dx=3xln3+2(23x32)+C=3xln3+43x32+C$

تكامل الاقترانات المثلثية

أتحقق من فهمي صفحة 12

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int\cos(3x-\pi)\ dx$

$\int\cos(3x-\pi)\ dx=13\sin(3x-\pi)+C$

(b) $\int(\csc2(5x)+e2x)\ dx$

∫(csc2 (5x)+e2x) dx=−15cot 5x+12e2x+C

(c) ∫0π/3(sin 2x−cos 4x) dx

∫0π3(sin 2x−cos 4x) dx=(−12cos 2x−14sin 4x)|0π3=(−12cos 2π3 −14sin 4π3)−(−12cos 0−14sin 0)=(−12(−12)−14(−32))−(−12−0)=6+38

المتطابقات المثلثية والتكامل

أتحقق من فهمي صفحة 14

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) ∫cos4 x dx

∫cos4 x dxcos4 x=(cos2 x)2=(1+cos 2x2)2=14(1+2cos 2x+cos2 2 x)=14(1+2cos 2x+1+cos 4x2)=14+12cos 2x+18+18cos 4x=38+1 2cos 2x+18cos 4x∫cos4 x dx=∫(38+12cos 2x+18cos 4x)dx=38x+1 4sin 2x+132sin 4x+C

(b) ∫0π/6sin 3xsin x dx

∫0π6sin3xsin x dx=∫0π612(cos (3x−x)−cos (3x+x)) dx=12∫0π6(co s 2x−cos 4x) dx=(14sin 2x−18sin 4x)|0π6=(14sin 2π6−18sin 4π6) −(0−0)=38−316=316

(c) ∫dx1+cos x

∫dx1+cos x=∫(11+cos x×1−cos x1−cos x)dx=∫1−cos xsin2 x dx= ∫(csc2 x−cot xcsc x) dx=−cot x+csc x+C

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

أتحقق من فهمي صفحة 16

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(a) $\int(\sin x-5x)\,dx$

$\int(\sin x-5x)\,dx=-\cos x-5\ln|x|+C$

(b) $\int 53x+2\,dx$

$\int 53x+2\,dx=53\int 33x+2\,dx=53\ln|3x+2|+C$

(c) $\int x2-7x+2x2\,dx$

$\int x2-7x+2x2\,dx=\int(1-7x+2x-2)\,dx=x-7\ln|x|-2x-1+C$

(d) $\int 2x+3x2+3x\,dx$

$\int 2x+3x2+3x\,dx=\ln|x2+3x|+C$

(e) $\int \sin 2x1+\cos 2x\,dx$

$\int \sin 2x1+\cos 2x\,dx=-12\int -2\sin 2x1+\cos 2x\,dx=-12\ln|1+\cos 2x|$
$+C=-12\ln(1+\cos 2x)+C$

(f) $\int \cot x\,dx$

$\int \cot x\,dx=\int \cos x\sin x\,dx=\ln|\sin x|+C$

(g) $\int exex+7\,dx$

$\int exex+7\,dx=\ln|ex+7|+C=\ln(ex+7)+C$

(h) $\int \csc x\,dx$

$\int dx1+\cos x=\int(11+\cos x\times 1-\cos x1-\cos x)dx=\int 1-\cos x\sin 2x\,dx=$
$\int(\csc 2x-\cot x\csc x)\,dx=-\cot x+\csc x+C$

أتحقق من فهمي صفحة 17

أجد: $\int x2+x+1x+1\,dx$

$\int x2+x+1x+1\ dx=\int(x+1x+1)\ dx=12x2+\ln|x+1|+C$

تكاملات الاقترانات المتشعبة

أتحقق من فهمي صفحة 19

(a) إذا كان: $f(x)=\{1+x,x<12x,x\geq 1$ ، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

$\int_{-1}^{3} f(x)\ dx=\int_{-1}^{1}(1+x)\ dx+\int_{1}^{3}2x\ dx=(x+12x2)|_{-1}^{1}+x2|_{1}^{3}=(1+12)-(-1+12)+9-1=10$

(b) إذا كان: $|f(x)=|1-x$ ، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

$f(x)=\{1-x,x\leq 1x-1,x>1\int_{-2}^{2} f(x)\ dx=\int_{-2}^{1}(1-x)\ dx+\int_{1}^{2}(x-1)\ dx=(x-12x2)|_{-2}^{1}+(12x2-x)|_{1}^{2}=(1-12)-(-2-2)+(2-2)-(12-1)=5$

(c) إذا كان: $|f(x)=|x2-1$ ، فأجد قيمة: $\int_{-4}^{0} f(x)dx$.

$f(x)=\{x2-1,x<-11-x2,-1\leq x\leq 1x2-1,x>1\int_{-4}^{0} f(x)\ dx=\int_{-4}^{-1}(x2-1)\ dx+\int_{-1}^{0}(1-x2)\ dx=(13x3-x)|_{-4}^{-1}+(x-13x3)|_{-1}^{0}=(-13+1)-(-643+4)+(0-0)-(-1+13)=563$

تطبيقات التكامل: الشرط الأولي

أتحقق من فهمي صفحة 20

تلوث: تسرب نفط من ناقلة بحرية، مكوناً بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ قدماً بعد t دقيقة من بدء التسرب. إذا كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل: $R'(t)=210.07t+5$ ، فأجد $R(t)$ ، علماً بأن $R(0) = 0$.

$R(t)=\int 210.07t+5\ dt=210.07\int 0.070.07t+5\ dt=300\ln|0.07t+5|+CR(0)=300\ln 5+C0=300\ln 5+C\Rightarrow C=-300\ln 5R(t)=300\ln|0.07t+5|-300\ln 5=300\ln|0.07t+55|=300\ln|0.014t+1|$

تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم

أتحقق من فهمي صفحة 23

$v(t) = 3 \cos t$ يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

(a) إذا بدأ الجُسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسيم بعد π6 ثانية من بدء الحركة.

s(t)=∫v(t) dt=∫3cos t dt=3sin t+Cs(0)=3sin 0+C0=3sin 0+C⇒C=0s(t)=3sin ts(π6)=3sin (π6)=1.5m

(b) أجد إزاحة الجسيم في الفترة [0, 2π] .

s(2π)−s(0)=3sin (2π)−3sin (0)=0 m

(c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة [0, 2π] .

|v(t)|=|3cos t|={3cos t,0≤t<π2−3cos t,π2≤t≤3π23cos t,3π2<t≤2π∫02π|v(t)| dx=∫0π23cos t dx+∫π23π2−3cos t dx+∫3π22π3cos t dx=3sin t|0π2−3sin t|ππ23π2+3sint |3π22π=(3−0)−(−3−3)+(0−(−3))=12m