أتدرب وأحل المسائل

الاشتقاق الضمني

أجد dydx لكل ممّا يأتي:

(1) $x^2 - 2y^2 = 4$

$2x - 4y\ dydx = 0$

$dydx = x2y$

(2) $1x2 + 1y2 = 110$

$1x2 + 1y2 = 110$

$-2xx4 + -2ydydxy4 = 0$

$dydx = 2xx4\ x\ y4\text{-}2y = -\ y3x3$

(3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

$2(x^2 + y^2)\ (2x + 2ydydx) = 50(2x - 2ydydx)$

$dydx\ (yx^2 + y^3 + 25\ y) = 25x - x^3 - xy^2$

$dydx = 25x - x3 - xy2yx2 + y3 + 25y$

(4) $e^x\ y = xe^y$

$(e^x)\ (dydx) + (y)\ (e^x) = (x)\ (e^y dydx) + (e^y)\ (1)$

$dydx\ (e^x - xe^y) = e^y - ye^x$

$dydx = ey - yexex - xey$

(5) $3^x = y - 2xy$

$3^x \ln 3 = dydx - 2x\ dydx - 2y$

$dydx\ (1 - 2x) = 2y + 3^x \ln 3$

dydx = 2y + 3x ln 31 - 2x

(6) x + y = 5

12 x + dydx2 y = 0

dydx = -2 y2 x = -yx

(7) x = sec 1y

1 = - 1y2dydx sec 1y tan 1y

dydx = -y2sec1y tan 1y = $-y^2$ cos 1y cot 1y

(8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

$2(\sin \pi x + \cos \pi y)^1 (\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi y \frac{dy}{dx}) = 0$

$\frac{dy}{dx}(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x + \cos \pi y) = (\pi \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi y)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi y)}{(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x + \cos \pi y)} = \frac{\cos \pi x}{\sin \pi y}$

(9) xy2 + y2x = 5

xy2 + y2x = 5 → $x^2 + y^4 = 5xy^2$

→ $2x + 4y^3 \frac{dy}{dx} = 10xy \frac{dy}{dx} + 5y^2$

→ $\frac{dy}{dx}(4y^3 - 10xy) = 5y^2 - 2x$

→ $\frac{dy}{dx} = \frac{5y2 - 2x}{4y3 - 10xy} =$

(10) $x + y = \cos(xy)$

$1 + \frac{dy}{dx} = -(x \frac{dy}{dx} + y) \sin xy$

$\frac{dy}{dx}(-x \sin xy - 1) = 1 + y \sin xy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 + y \sin xy}{x \sin xy + 1}$

(11) $x^2 + y^2 = \ln (x + y)^2$

$2x + 2y \, dydx = 2(x + y) \, (1 + dydx)(x + y)2$

$x + y \, dydx = 1 + dydxx + y$

$dydx \, (xy + y^2 - 1) = 1 - x^2 - xy$

$dydx = 1 - x2 - xyxy + y2 - 1$

(12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$(\sin x) \, (-\sin y \, dydx) + (\cos y) \, (\cos x) = 2x - 5 \, dydx$

$dydx \, (\sin x \sin y - 5) = \cos x \cos y - 2x$

$dydx = \cos x \cos y - 2x\sin x \sin y - 5$

أجد$dydx$ لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

(13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0 \, , \, x = 12$

أجد قيمة y عندما $x = 12$:

$2y^2 + 2(12) \, y - 1 = 0 \;\rightarrow\; 2y^2 + y - 1 = 0$

$\rightarrow \; (2y - 1) \, (y + 1) = 0 \;\rightarrow\; y = 12 \, , \, y = -1$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ:

$4y \, dydx + 2x \, dydx + 2y = 0$

$dydx = -y2y + x$

$dydx \, (12, 12) = -122 \, x \, 12 + 12 = -13$

$dydx \, (12, -1) = 1-2 + 12 = -23$

(14) $y^3 + 2x^2 = 11y \, , \, y = 1$

أجد قيمة x عندما $y = 1$:

$1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm 5$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ:

$3y^2 \, dydx + 4x = 11dydx$

$dydx = 4x11 - 3y2$

$dydx \, (-5, 1) = -52$

$dydx \, (5, 1) = 52$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

(15) $x^2 + y^2 = 25$, $(3, -4)$

$2x + 2y \, dydx = 0$

$2(3) + 2(-4) \, dydx = 0 \rightarrow dydx \, (3, -4) = 34$

(16) $x^2 \, y = 4(2 - y)$, $(2, 1)$

$x^2 \, dydx + 2xy = -4 \, dydx$

$4 \, dydx + 2(2) \, (1) = -4 \, dydx \rightarrow dydx \, (2, 1) = -12$

(17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1$, $(\pi 2, \pi 2)$

$e^{\sin x} \cos x - e^{\cos y} \sin y \, dydx = 0$

$e\sin \pi 2 \cos \pi 2 - e\cos \pi 2 \sin \pi 2 dydx = 0 \rightarrow dydx \, (\pi 2, \pi 2) = 0$

(18) $x23 + y23 = 5$, $(8, 1)$

$x23 + y23 = 5$

$23 \, x\text{-}13 + 23 \, y\text{-}13 \, dydx = 0$

$23(12) + 23(1)\ dydx = 0 \rightarrow dydx\ (8, 1) = -12$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

(19) $x^2 + xy + y^2 = 13$, (-4, 3)

$2x + x\ dydx + y + 2y\ dydx = 0$

$-8 - 4\ dydx + 3 + 6\ dydx = 0$

ميل المماس هو:

$dydx\ (-4, 3) = 52$

معادلة المماس هي:

$y - 3 = 52\ (x + 4) \rightarrow y = 52x + 13$

(20) $x + y - 1 = \ln (x^2 + y^2)$, (1, 0)

$1 + dydx = 2x + 2y\ dydx\ x2 + y2$

$1 + dydx = 2 \rightarrow dydx\ (1, 0) = 1$

معادلة المماس هي:

$y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$

أجد d2ydx2 لكلٍّ ممّا يأتي:

(21) $x + y = \sin y$

$1 + dydx = \cos y\ dydx$

$dydx = 1\text{-}1 + \cos y$

$d2ydx2 = \sin y\ dydx(-1 + \cos y)2 = \sin y\ (1\text{-}1 + \cos y)(-1 + \cos y)2 = \sin y\ (-1 + \cos y)3$

(22) $4y^3 = 6x^2 + 1$

$12y^2\ dydx = 12x$

$dydx = xy2$

$d2ydx2 = y2 - 2xy\ dydxy4 = y - 2x\ (xy2)y3 = y3 - 2x2\ y5$

(23) $xy + e^y = e$

$x\ dydx + y + e^y\ dydx = 0$

$dydx = -yx + ey$

$d2ydx2 = (x + ey)\ (-dydx) + y\ (1 + ey\ dydx)(x + ey)2$

$= (x + ey)\ (yx + ey) + y\ (1 + ey\ -yx + ey)(x + ey)2$

$= (x + ey)\ (y) + y\ (x + ey - yey)(x + ey)3$

$= 2xy + 2yey - y2ey\ (x + ey)3$

(24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x - 6)(y + 4)$ عند النقطة $(7, -2)$.

$(x-6)(y+4)=2(x-6)dydx+(y+4)=0(7-6)dydx+(-2+4)=0\rightarrow dydx|(7,-2)=-2$

إذن ميل العمودي على المماس هو: 12

معادلة العمودي على المماس هي:

$y+2=12(x-7)\rightarrow y=12x-112$

(25) أثبت أنّ لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

$3x2+2xy+y2=66x+2xdydx+2y+2ydydx=0dydx=-3x-yx+ydydx=0 \rightarrow -3x-yx+y=0 \rightarrow -3x-y=0 \rightarrow y=-3x3x2+2x(-3x)+(-3x)2=6 \rightarrow 6x2=6 \rightarrow x=\pm 1$

(1, -3) ، (إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين (-1, 3).

(26) أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم: $x + 2y = 0$.

$x+y2=11+2ydydx=0 \rightarrow dydx=-12y$

ميل المستقيم:

$-12y=-12 \rightarrow y=1 \rightarrow x+(1)2=1 \rightarrow x=0$

النقطة المطلوبة هي (1 ,0)

(27) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم: $y + 3x = 0$.

$y3=x23y2dydx=2x \rightarrow dydx=2x3y2, y \neq 0$

ميل المستقيم: $y + 3x - 5 = 0$ هو -3 إذن ميل العمودي عليه يساوي: $\frac{1}{3}$

$2x3y2=13 \rightarrow 2x=y2 \rightarrow x=12y2y3=x2 \rightarrow y3=14y4 \rightarrow 1=14y \rightarrow y=4 \rightarrow x=12(4)2 \rightarrow x=8$

النقطة المطلوبة هي (8, 4)

(28) إذا كان: $xy+yx=10$ ، حيث: $x \neq y \neq 0$ ، فأثبت أنّ $dydx=yx$.

$xy+yx=10, x \neq 0, y \neq 0y-xdydxy22xy+xdydx-yx22yx=0 \rightarrow y-xdydx2y2xy=y-xdydx2x2yx \rightarrow (y-xdydx)(x2yx)=(y-xdydx)(y2xy)x2yyx-x3yxdydx=y3xy-xy2xydydx(xy2xy-x3yx)dydx=y3xy-x2yyx \rightarrow dydx=y3xy-x2yyxxy2xy-x3yx=y(y2xy-x2yx)x(y2xy-x2yx)=yx$

يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام؛ لأنه لا يساوي صفراً إلا إذا كان $x = y$ وهذا لا يستق مع العلاقة الأصلية.