

## أتحقق من فهمي

### الاشتقاق الضمني

#### العلاقة الضمنية ومشتقتها

أتحقق من فهمي صفحة 60

أجد  $dy/dx$  لكلِّ ممَّا يأتي:

(a)  $x^2 + y^2 = 13$

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

(b)  $2x + 5y^2 = \sin y$

$$2x + 5y^2 = \sin y$$

$$2 + 10y \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - \cos y) = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

أتحقق من فهمي صفحة 62

أجد  $dy/dx$  لكلِّ ممَّا يأتي:

(a)  $3xy^2 + y^3 = 8$

$$3xy^2 + y^3 = 8$$

$$6xy \frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{6xy + 3y^2}$$

$$(b) \tan(x - y) = 2xy^3 + 1$$

$$\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$$

$$(1 - dydx) \sec^2(x - y) = 6xy^2 dydx + 2y^3$$

$$\sec^2(x - y) - \sec^2(x - y) dydx = 6xy^2 dydx + 2y^3$$

$$dydx(6xy^2 + \sec^2(x - y)) = \sec^2(x - y) - 2y^3$$

$$dydx = \frac{\sec^2(x - y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x - y)}$$

$$(c) x^2 = x - yx + y$$

$$x^2 = x - yx + y$$

$$2x = (x + y)(1 - dydx) - (x - y)(1 + dydx)$$

$$2x(x + y)^2 = x - x dydx + y - y dydx - x - x dydx + y + y dydx$$

$$2x dydx = 2y - 2x(x + y)^2$$

$$dydx = \frac{2y - 2x(x + y)^2}{2x} = \frac{y - x(x + y)^2}{x}$$

أو يمكن تبسيط العلاقة قبل الاشتقاق كالآتي:

$$x^2 = x - yx + y \rightarrow x^3 + x^2y = x - y$$

$$\rightarrow 3x^2 + x^2 dydx + 2xy = 1 - dydx$$

$$\rightarrow dydx + x^2 dydx = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$\rightarrow dydx(1 + x^2) = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$\rightarrow dydx = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{1 + x^2}$$

ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية

أتحقق من فهمي صفحة 63

(a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة:  $y^2 = \ln x$  عند النقطة  $(e, 1)$ .

$$y^2 = \ln x \rightarrow 2y \, dydx = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow dydx = \frac{1}{2xy}$$

$$dydx (e, 1) = \frac{1}{2e}$$

(b) أجد ميل العلاقة:  $(y - 3)^2 = 4(x - 5)$  عندما  $x = 6$ .

لأجد قيمة عندما  $x = 6$ .

$$(y - 3)^2 = 4(6 - 5) \rightarrow (y - 3)^2 = 4$$

$$\rightarrow y - 3 = \pm 2$$

$$\rightarrow y = 5 \text{ or } y = 1$$

$(y - 3)^2 = 4(x - 5)$  باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى  $x$  ينتج أن:

$$2(y - 3) \, dydx = 4$$

$$dydx = \frac{2}{y - 3}$$

ميل المماس عند النقطة الأولى هو:

$$dydx (6, 1) = \frac{2}{1 - 3} = -1$$

ميل المماس عند النقطة الثانية هو:

$$dydx (6, 5) = \frac{2}{5 - 3} = 1$$

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

أتحقق من فهمي صفحة 65

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:  $x^2 + y^3 - 3xy = 17$  عند النقطة  $(2, 3)$ .

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

$x = 2$  بتعويض ، و  $y = 3$  ينتج أن:

$$3(2)^2 + 3(3)^2 \frac{dy}{dx} - 3(2) \frac{dy}{dx} - 3(3) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (2, 3) = -17$$

-17 ميل المماس هو:

إذن معادلة المماس هي:

$$y - 3 = -17(x - 2)$$

$$y = -17x + 237$$

### المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

أتحقق من فهمي صفحة 66

$xy + y^2 = 2x$  إذا كان: ، فأجد  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

$$xy + y^2 = 2x \rightarrow x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 2$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 - yx + 2y$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = (x + 2y) (-\frac{dy}{dx}) - (2 - y) (1 + 2\frac{dy}{dx})(x + 2y)^2$$

$$= (x + 2y) (y - 2x + 2y) - (2 - y) (1 + 2(2 - yx + 2y)) (x + 2y)^2$$

$$= (x + 2y) (y - 2) - (2 - y) (x + 4)(x + 2y)^3$$

$$= 2xy - 4x + 2y^2 - 8(x + 2y)^3$$

### المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطة

أتحقق من فهمي صفحة 67

أجد  $d^2y/dx^2$  للمعادلة الوسيطة الآتية عندما  $t = 2$  :

$$x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 2t^2$$

$$dy/dx = dy/dt \cdot dx/dt = 3t^2 - 4t \cdot 6t = 12t - 23$$

$$d^2y/dx^2 = d/dt(dy/dt) \cdot dx/dt = 12 \cdot 6t = 112t$$

$$d^2y/dx^2 \text{ at } t=2 = 124$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

أتحقق من فهمي صفحة 69

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

(a)  $y = x^x, x > 0$

$$y = x^x \rightarrow \ln y = \ln x^x$$

$$\rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$\rightarrow 1y (dy/dx) = x(1/x) + \ln x$$

$$\rightarrow dy/dx = y/x + y \ln x \rightarrow dy/dx = x^x/x + x^x \ln x$$

(b)  $y = x - 1/x^4 + 1$

$$y = x - 1/x^4 + 1 \rightarrow \ln y = \ln x - 1/x^4 + 1$$

$$\rightarrow \ln y = \ln x - 1/x^4 + 1$$

$$\rightarrow \ln y = \ln(x-1) - \ln(x^4+1)$$

$$\rightarrow 1y (dy/dx) = 12(x-1) + 2x^3/x^4 + 1$$

$$\rightarrow dy/dx = (12(x-1) + 2x^3/x^4 + 1) x - 1/x^4 + 1$$