

## أتدرّب وأحل المسائل

### مشتقنا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

$$(1) f(x)=x^3 2x - 1$$

$$f(x)=x^3 2x - 1 \quad f'(x)=(2x-1)(3x^2)-(x^3)(2)(2x-1)2=4x^3-3x^2(2x-1)2$$

$$(2) f(x)=x^3 \sec x$$

$$f(x)=x^3 \sec x \quad f'(x)=(x^3)(\sec x \tan x)+(\sec x)(3x^2)=x^3 \sec x \tan x+3x^2 \sec x$$

$$(3) f(x)=x+1 \cos x$$

$$f(x)=x+1 \cos x \quad f'(x)=(\cos x)(1)-(x+1)(-\sin x)(\cos x)2=\cos x+x \sin x+\sin x \cos 2x$$

$$(4) f(x)=e^x (\tan x - x)$$

$$f(x)=e^x (\tan x - x) \quad f'(x)=(e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)=e^x \tan 2x + e^x \tan x - xe^x$$

$$(5) f(x)=\sin x + \cos x e^x$$

$$f(x)=\sin x + \cos x e^x \quad f'(x)=(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)(e^x)2=-2 \sin x e^x$$

$$(6) f(x)=x^3 \sin x + x^2 \cos x$$

$$f(x)=x^3 \sin x + x^2 \cos x \quad f'(x)=(x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)=x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$$

$$(7) f(x)=x^3(x+3)$$

$$f(x)=x^3(x+3)=x^5+3x^4 \quad f'(x)=5x^4-16+x-23=566+1x23$$

$$(8) f(x)=1+\sec x \quad 1-\sec x$$

$$f(x) = 1 + \sec x \\ f'(x) = (1 - \sec x)(\sec x \tan x) - (1 + \sec x)(-\sec x \tan x) \\ 2 = 2 \sec x \tan x (1 - \sec x)^2$$

$$(9) f(x) = 2 - 1xx - 3$$

$$f(x) = 2 - 1xx - 3 = 2x - 1x^2 - 3x \\ f'(x) = (x^2 - 3x)(2) - (2x - 1)(2x - 3)(x^2 - 3x) \\ 2 = -2x^2 + 2x - 3(x^2 - 3x)^2$$

$$(10) f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$$

$$f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1) \\ f'(x) = (x^3 - x)((x^2 + 2)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(2x)) + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1) \\ = (x^3 - x)(x^2 + 2)(2x + 1) + (x^3 - x)(x^2 + x + 1)(2x) + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1)$$

$$(11) f(x) = (\csc x + \cot x) - 1$$

$$f(x) = (\csc x + \cot x) - 1 = 1 \\ \csc x + \cot x \\ f'(x) = -1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)(\csc x + \cot x)^2 \\ = \csc x \cot x + \csc^2 x(\csc x + \cot x)^2 \\ = \csc x(\cot x + \csc x)(\csc x + \cot x)^2 \\ = \csc x \cot x + \csc x$$

إذا كان  $f(x)$  و  $g(x)$  اقترانين قابلين للاشتقاء عندما  $x = 0$  ، وكان:  
فأجد كلاً ممّا يأتي:

$$(12) (fg)'(0)$$

$$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0) = 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$$

$$(13) (fg)'(0)$$

$$(fg)'(0) = g(0)f'(0) - f(0)g'(0) \\ g(0) = -1, f(0) = 5, g'(0) = -3, f'(0) = 2 \\ 2(-1) = -2$$

$$(14) (7f - 2fg)'(0)$$

$$(7f - 2fg)'(0) = 7f'(0) - 2(fg)'(0) = 7(-3) - 2(13) = -47$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة المعطاة:

$$(15) f(x)=x^2-4x^2+4, x=-2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x^2 + 4 \\ f'(x) &= (x^2 + 4)(2x) - (x^2 - 4)(2x) = 16x(x^2 + 4) \\ f''(x) &= (x^2 + 4)2(16) - (16x)(2)(x^2 + 4) = (16)(x^2 + 4) - (16x)(2) \\ f'''(-2) &= (16)(8) - (-32)(2)(-4) = -14 \end{aligned}$$

$$(16) f(x)=1+x^1+x^3, x=8$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+x^1+x^3 = (1+x^3)(1-x^3+x^2) \\ f'(x) &= 29x-53-29x-43 = 29x^53-29x^43 \\ f''(8) &= 29(132-116) = -1144 \end{aligned}$$

$$(17) f(x)=11+x, x=4$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 11+xf'(x) = -(12x)(1+x)2 = -12x(1+x)2 \\ f'(x) &= 2x(2)(1+x)1(12x) + (1+x)2(1x)4x(1+x)4 = 2+1+xx4x(1+x)3 \\ f''(4) &= 2+1+2216(1+2)3 = 7864 \end{aligned}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

$$(18) f(x)=1+x^1+ex, (0,12)$$

$$f(x)=1+x^1+ex \\ f'(x)=(1+ex)(1)-(1+x)(ex)(1+ex)2 = 1-xex(1+ex)2$$

ميل المماس عند النقطة  $(0, 12)$  هو:

معادلة المماس هي:

$$y-12=14(x-0) \rightarrow y=14x+12$$

$$(19) f(x)=ex \cos x + \sin x, (0,1)$$

$$f(x)=ex \cos x + \sin x \\ f'(x)=(ex)(-\sin x) + (\cos x)(ex) + \cos x$$

ميل المماس عند النقطة  $(0, 1)$  هو:

$$f'(0)=(1)(0)+(1)(1)+1=2$$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = 2(x - 0) \rightarrow y = 2x + 1$$

أثبت صحة كلّ ممّا يأتي معتمداً أنّ  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$$(20) \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cot x) &= \frac{d}{dx}(\cos x \sin x) = (\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x) \sin^2 x = -\sin^2 x - \cos^2 x \sin^2 x = -1 \sin^2 x \\ &= -\csc^2 x \end{aligned}$$

$$(21) \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}(1/\cos x) = -(-\sin x)/\cos^2 x = 1/\cos x \times \sin x / \cos x = \sec x \tan x$$

$$(22) \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}(1/\sin x) = -(\cos x)/\sin^2 x = -1/\sin x \times \cos x / \sin x = -\csc x \cot x$$

لاحظ المشتقه المعطاة في كلّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقه العليا المطلوبة:

$$(23) f'(x) = 2 - 2x, f''(x)$$

$$f'(x) = 2 - 2x, f''(x) = 2x$$

$$(24) f''(x) = 2x, f(4)(x)$$

$$f''(x) = 2x, f(4)(x) = 1/x$$

$$(25) f(4)(x) = 2x + 1, f(6)(x)$$

$$f(4)(x) = 2x + 1, f(5)(x) = 2f(6)(x) = 0$$



(26) **نباتات هجينة:** وجد فريق بحث زراعي أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة هجينة من نبات تباع الشمس  $h$  بالأمتار، باستعمال الاقتران:  $h(t) = 3t^2 + t^2$  ، حيث  $t$  الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

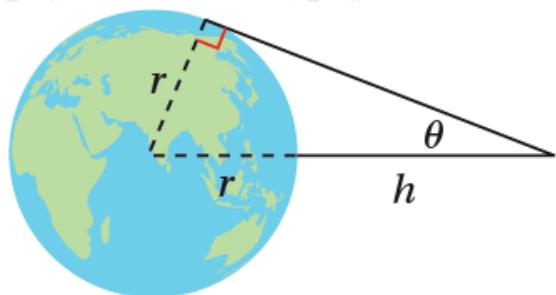
$$h(t) = 3t^2 + t^2 \quad h'(t) = (4+t^2)(6t) - (3t^2)(2t) = 24t(4+t^2)$$

إذا كان الاقتران: ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:  $y = e^x \sin x$  . أجد  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ، و  $\frac{dy}{dx}$  (27)

$$\frac{dy}{dx} = (ex)(\cos x) + (\sin x)(ex) = ex(\cos x + \sin x) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ex(-\sin x + \cos x) + ex(\cos x + \sin x) = 2ex\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y \quad \text{أثبت أن } (28)$$

$$2\frac{dy}{dx} - 2y = 2ex(\cos x + \sin x) - 2ex\sin x = 2ex\cos x = \frac{d^2y}{dx^2}$$



**أقمار صناعية:** عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض، فإنه يُمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مستشعرات لقياس الزاوية  $\theta$  (بالراديان) المبينة في الشكل المجاور. إذا كان  $h$  يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومترات، و  $r$  يمثل نصف قطر الأرض بالكيلومترات، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

$$h = r(\csc \theta - 1) \quad \text{أثبت أن } (29)$$

$$\csc \theta = r + hr \rightarrow r + h = r\csc \theta \rightarrow h = r(\csc \theta - 1)$$

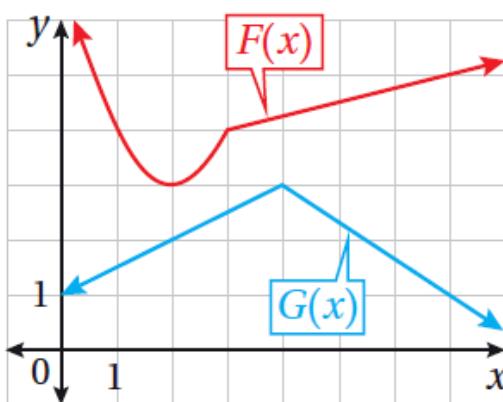
$$\text{أجد معدل تغير } h \text{ بالنسبة إلى } \theta \text{ عندما } \theta = \pi/6 \text{ rad} \quad (30)$$

$$dh/d\theta = r(-\csc \theta \cot \theta) \quad dh/d\theta|_{\theta=\pi/6} = 6371(-\csc \pi/6 \cot \pi/6) = 6371(-2 \times 3) \approx -22070 \text{ km/rad}$$

.  $f'(x) = (3x-1)(3x+1)x^3$  ، فأثبت أن  $x+12x^2f(x)=9\ln x$  (31)

$$f(x) = 9\ln x + 12x^2f(x) = 9(1x) + -1(4x)4x4 = 9x - 1x3 = 9x^2 - 1x3 = (3x-1)(3x+1)x^3$$

. يبين الشكل المجاور منحني الاقتراني:  $F(x)$  و  $G(x)$



: إذا كان:  $P(x) = F(x)G(x)Q(x)$  ، فأجد كلاً مما يأتي:

$$(32) P'(2)$$

$$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$$

((2) ميل المستقيم الذي يمر بال نقطتين (2, 3) و (4, 4) ويساوي  $G'$

((2) ميل المماس الأفقي، ويساوي صفرًا.  $F'$

$$P'(2) = 3 \times 12 + 2 \times 0 = 32$$

$$(33) Q'(7)$$

$$Q'(7) = G(7)F'(7) - F(7)G'(7)G(7) = 1 \times 14 - 5 \times -231 = 4312$$