أتدرب وأحل المسائل

الأسئلة (1 - 20)

الاشتقاق

أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

(1) $f(x)=|x-5|,\ x=5$

$f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|(5+h)-5|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}f'_+(5)=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1f'_-(5)=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$

$f'(5)$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإن f غير موجودة، أي أنّ f غير قابل للاشتقاق عند $x = 5$

(2) $f(x)=x2/5,\ x=0$

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h)25-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h25}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h35}f'_+(0)=\infty f'_-(0)=-\infty$

$f'(0)$ غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 0$

(3) $f(x)=\{x2,\ x\leq 1x2-2x,\ x>1,\ x=1$

$f'_+(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)2-2(1+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h2-2-2h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h2-2h}{}=-\infty$

$f'_+(1)$ غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 1$

(4) $f(x)=3x,\ x=4$

$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3+h4+34}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{12-12-3h4}{h(4+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-34}{(4+h)}=-316$

$f'(4)$ غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 4$

(5) $f(x)=(x-6)2/3,\ x=6$

$f'(6)=\lim_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(6+h-6)23-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h)23}{h}=$

$\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\left|3+f'(6)=\infty f-'(6)=-\infty\right.$

$x = 6$ غير قابل للاشتقاق عند f غير موجودة، إذن f ‘(6)

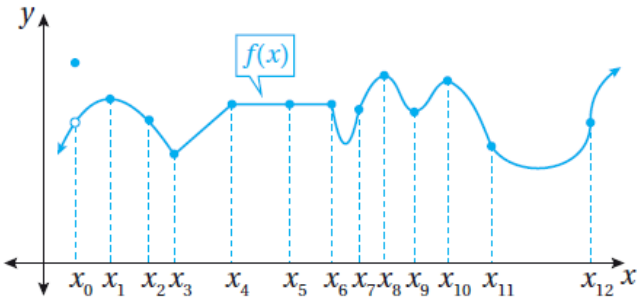
(6) $f(x)=\{x+1,\ x\neq 43,\ x=4,\ x=4$

$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+h+1-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2}{h}f+'(4)=\infty f-'(4)=-\infty$

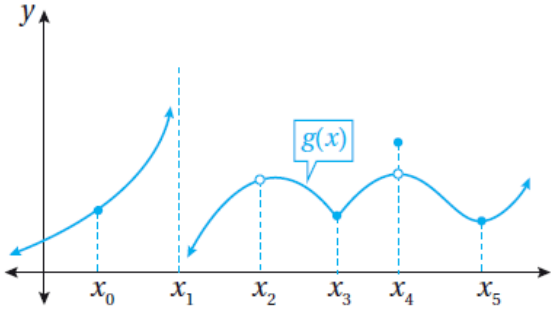
4)‘ f) غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 4$

أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها كلّ اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق، مبرراً إجابتي:

7



8



(7) الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3,\ x = x_4,\ x = x_6$ ؛ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط.

$x = x_0$ وهو غير قابل للاشتقاق عندما ؛ لأنه غير متصل عندها،

$x = x_{12}$ وهو غير قابل للاشتقاق عندما ؛ نظراً لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة.

(8) الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$؛ لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة.

$x = x_0$ وهو غير قابل للاشتقاق عندما ؛ لأنه غير متصل عندها،

$x = x_1,\ x = x_2,\ x = x_4$ وهو غير قابل للاشتقاق عندما ؛ لأنه غير متصل عندها.

أحدد قيمة (قيم) x التي لا يكون عندها كلّ اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق:

(9) $f(x)=x-8x2-4x-5$

f اقتران نسبي منحناه متصل وأملس عند جميع نقاطه باستثناء أصفار مقامه،

$$x2-4x-5=0\rightarrow(x-5)(x+1)=0\rightarrow x=5 \text{ or } x=-1$$

f غير متصل عند $x = 5 , x = -1$ إذن غير قابل للاشتقاق عندها.

(10) $f(x)=3x-63+5$

$$f(x)=3x-63f'(x)=13(3x-6)-23(3)=1(3x-6)23$$

غير قابل للاشتقاق f الحقيقية عدا أصفار مقامها، إذن x موجودة عند جميع قيم $f'(x)$ عند $x = 2$

(11) $f(x)=|x2-9|$

$$f(x)=|x2-9|=\{9-x2,-3<x<3x2-9,x\leq-3 \text{ or } x\geq3$$

نبحث قابلية الاشتقاق عند $x = 3$ و $x = -3$:

$$f'(3)=limh\rightarrow0f(3+h)-f(3)h=limh\rightarrow0|(3+h)2-9|-0h=limh\rightarrow0|6h+h2|$$
$$hf+'(3)=limh\rightarrow0+6h+h2h=limh\rightarrow0+(6+h)=6f-'(3)=limh\rightarrow0--6h-$$
$$h2h=limh\rightarrow0-(-6-h)=-6$$

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين فإن $f'(3)$ غير موجودة أي أن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 3$

$$f'(-3)=limh\rightarrow0f(-3+h)-f(-3)h=limh\rightarrow0|(-3+h)2-9|-0h=limh\rightarrow0|6h-h2|hf+'(-3)=limh\rightarrow0+6h-h2h=$$
$$limh\rightarrow0+(6-h)=6f-'(-3)=limh\rightarrow0--6h+h2h=limh\rightarrow0-(-6+h)=-6$$

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين فإن $f'(-3)$ غير موجودة أي أن f غير قابل للاشتقاق عند $x = -3$

إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = -3 , x = 3$

(12) إذا كان: $f(x)=x|x|$ ، فأثبت أنّ $f'(0)$ موجودة.

$f(x)=x|x|f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|}{|h|}=\begin{cases}-h,h<0\\h,h\geq0\end{cases}f'_+(0)=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1f'_-(0)=\lim_{h\to0}\frac{(-h)}{h}=-1$

$f'(0)$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار متساويتان، إذن) موجودة.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

(13) $f(x)=2\sin x-e^x$

$f'(x)=2\cos x-e^x$

(14) $f(x)=\ln x^4-\pi\cos x$

$f'(x)=\frac{4}{x}+\pi\sin x$

(15) $f(x)=\ln(1-x^3)+x^4$

$f(x)=\ln(1-x^3)+x^4=\ln1-\ln x^3+x^4=-3\ln x+x^4f'(x)=-\frac{3}{x}+4x^3$

(16) $f(x)=e^{x+1}+1$

$f(x)=e^{x+1}+1=e\times e^{x+1}f'(x)=e\times e^{x}=e^{x+1}$

(17) $f(x)=e^x+x^e$

$f'(x)=e^x+e\,x^{e-1}$

(18) $f(x)=\ln(10^x n)$

$f(x)=\ln(10^x n)=\ln10^x-\ln n=\ln10^x-\ln n=x\ln10f'(x)=-\frac{n}{(1-x)}=-nx$

إذا كان: $f(x)=\sin x+12e^x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(19) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi\ ,\ 12e^\pi)$.

$f'(x)=\cos x+12e^x$

ميل المماس عند النقطة $(\pi , 12e\pi)$:

$f'(\pi)=\cos \pi+12e\pi=-1+12e\pi$

معادلة المماس عند النقطة $(\pi , 12e\pi)$:

$y-12e\pi=(-1+12e\pi)(x-\pi)y=(-1+12e\pi)x+\pi-\pi 2e\pi+12e\pi$

(20) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi , 12e\pi)$.

بما أن ميل المماس عند النقطة $(\pi , 12e\pi)$ هو $-1+12e\pi$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو:

$-1-1+12e\pi=-2-2+e\pi=22-e\pi$

معادلة العمودي على المماس هي:

$y-12e\pi=22-e\pi(x-\pi)\rightarrow y=22-e\pi x-2\pi 2-e\pi+12e\pi$