

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$ (ب) $\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds$

(ج) $\int (2s-2s^3) \sqrt{(s-2)^2} ds$ (د) $\int \frac{9-s^3}{(s^2-2s)^2} ds$

الحل

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص = $s-2 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 1 = \frac{ds}{s-2} \Rightarrow ds = \frac{ds}{s-2}$

$\int (1-2s)(s-2)^4 ds = \int \frac{(1-2s)(s-2)^4}{s-2} ds$

$= \int (1-2s)(s-2)^3 ds = \int (1-2s) \frac{ds}{s-2}$

(ب) $\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds$

ص = $2-2s \Rightarrow \frac{ds}{ds} = -1 = \frac{ds}{2-2s} \Rightarrow ds = \frac{ds}{2-2s}$

$\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds = \int \frac{6s^2 (2-2s)^2}{2-2s} ds$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{u} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{u} =$$

(ج) $\int (2-3x)^{\frac{1}{2}} (2-3x)^{\frac{1}{2}} dx$

$$ص = 2 - 3x \Rightarrow \frac{ص}{3} = 2 - 3x$$

$$\cdot \frac{ص}{3} = \frac{ص}{3}$$

$$\frac{ص}{3} \int (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int -\frac{ص}{3} (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -\frac{ص}{3} (2-3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

(د) $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

$$\Leftrightarrow 6-x^2 = \frac{ص}{3} \Leftrightarrow 6-x^2 = \frac{ص}{3}$$

$$\cdot \frac{ص}{3} = \frac{ص}{3}$$

$$= \frac{ص}{3} \times \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2}$$

$$= \frac{ص}{3} \times \frac{ص}{3} \times \frac{(3-x)(3+x)}{(x^2-6)^2}$$

$$p + \frac{1}{\sqrt{u}} = p + \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = p + \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$
 (ب) $\int (s-1)(2s^2-4s+1) ds$
 (ج) $\int 2 \sqrt{s-2} ds$
 (د) $\int 2s^2 \sqrt{s+1} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{s^2}{2} + C$

(ب) $\int (s-1)(2s^2-4s+1) ds = \int (2s^3-4s^2+s-2s^2+4s-1) ds = \int (2s^3-6s^2+5s-1) ds = \frac{2s^4}{4} - \frac{6s^3}{3} + \frac{5s^2}{2} - s + C = \frac{1}{2}s^4 - 2s^3 + \frac{5}{2}s^2 - s + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{s-2} ds = 2 \int (s-2)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2}{3} (s-2)^{3/2} + C = \frac{4}{3} (s-2)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{s+1} ds = \int 2s^2 (s+1)^{1/2} ds$
 Let $u = s+1 \Rightarrow s = u-1$
 $\int 2(u-1)^2 u^{1/2} du = \int 2(u^2-2u+1)u^{1/2} du = \int (2u^{5/2}-4u^{3/2}+2u^{1/2}) du = \frac{2 \cdot 2}{7} u^{7/2} - \frac{4 \cdot 2}{5} u^{5/2} + \frac{2 \cdot 2}{3} u^{3/2} + C = \frac{4}{7} (s+1)^{7/2} - \frac{8}{5} (s+1)^{5/2} + \frac{4}{3} (s+1)^{3/2} + C$

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{s^2}{2} + C$

(ب) $\int (s-1)(2s^2-4s+1) ds = \int (2s^3-4s^2+s-2s^2+4s-1) ds = \int (2s^3-6s^2+5s-1) ds = \frac{2s^4}{4} - \frac{6s^3}{3} + \frac{5s^2}{2} - s + C = \frac{1}{2}s^4 - 2s^3 + \frac{5}{2}s^2 - s + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{s-2} ds = 2 \int (s-2)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2}{3} (s-2)^{3/2} + C = \frac{4}{3} (s-2)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{s+1} ds = \int 2s^2 (s+1)^{1/2} ds$
 Let $u = s+1 \Rightarrow s = u-1$
 $\int 2(u-1)^2 u^{1/2} du = \int 2(u^2-2u+1)u^{1/2} du = \int (2u^{5/2}-4u^{3/2}+2u^{1/2}) du = \frac{2 \cdot 2}{7} u^{7/2} - \frac{4 \cdot 2}{5} u^{5/2} + \frac{2 \cdot 2}{3} u^{3/2} + C = \frac{4}{7} (s+1)^{7/2} - \frac{8}{5} (s+1)^{5/2} + \frac{4}{3} (s+1)^{3/2} + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب) $\int_1^{-1} 3s^2(s-1)^2 ds$

ج) $\int 2s \sqrt{s^2-1} ds$

د) $\int \frac{s^2-3}{(s^3-2s)^2} ds$

الحل

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds = \int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds$

$$\int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times \frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times (1+\frac{1}{4})} ds$$

$$\int \frac{\sqrt{4s+1}}{6} ds$$

$$\frac{1}{6} \left[\frac{2}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (1+4 \times s) \right]$$

$$\frac{1}{9} (16s^{\frac{3}{2}} - 9s - 2)$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x^2}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$(ج) \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \right) dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$\frac{1}{2} \left[\ln|1-x| - \ln|1+x| \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\ln|1-1| - \ln|1+1| - \ln|1-(-1)| + \ln|1+(-1)| \right)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2} \\ & \left(-1 - 1 \right) \frac{x}{2} \\ & \frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(3 - u)^2} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{3 - u} = \int_1^2 \frac{1}{1 - u} = \int_1^2 \frac{1}{1 + u}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 3 - 6} - \frac{1}{2 \times 3 - 6} = \int_1^2 \frac{1}{x^3 - 6}$$

$$\text{مفر} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_2^3 \frac{3x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx$

الحل

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$\int_2^3 \frac{3x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_2^3 \frac{3x^2 - 2}{(3 - u)^2} dx$$

$$\int_2^3 \frac{3x^2 - 2}{(3 - u)^2} dx = \int_2^3 \frac{3x^2 - 2}{(3 - u)^2} dx$$

$$0 - 6 - = (8 -) 5 - (27) 6 = (3 -) 5 - (3) 6$$

$$11 - =$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

الحل

$$٥س = س٢ + ١ \Leftrightarrow س٢ = ٥س - ١ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{س٢} = \frac{٥}{س}$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 \frac{٨س}{س} (س٢ + ١) دس$$

$$\text{عندما } س = -١ \Rightarrow س٢ = ١ \Rightarrow ١ = ٥(-١) - ١ = -٦$$

$$\text{عندما } س = ٢ \Rightarrow س٢ = ٤ = ٥(٢) - ١ = ٩$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-٦}^٩ ٨ دس = ٨(٩ - (-٦)) = ١٢٠$$

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس$$

الحل

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس = \int_0^2 ٢س (٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} دس$$

$$\Leftrightarrow ٥س = ٩ + س٢ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{س٢} = \frac{٥}{س}$$

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس = \int_0^2 \frac{٢س}{س} \sqrt{٩ + س٢} دس$$

$$\int_0^2 \frac{٢س}{س} \sqrt{٩ + س٢} دس = \int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{١ + \frac{١}{س}} دس$$

$$\int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{١ + \frac{١}{س}} دس = \int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{\frac{س + ١}{س}} دس$$

$$\int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{\frac{س + ١}{س}} دس = \int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} \cdot س}{س + ١} دس$$

$$\int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} \cdot س}{س + ١} دس = \int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} (س + ١ - ١)}{س + ١} دس$$

$$\int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} (س + ١ - ١)}{س + ١} دس = \int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} (س + ١) - ٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{س + ١} دس$$

$$\int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} (س + ١) - ٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{س + ١} دس = \int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} (س + ١) - ٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{س + ١} دس$$

$$\int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} (س + ١) - ٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{س + ١} دس = \int_0^2 \frac{٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}} (س + ١) - ٢(٩ + س٢)^{\frac{1}{2}}}{س + ١} دس$$