إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (١ - ٢س)(س - س^٢)^٤ \, ءس$ ب) $\int ٦س^٢ \sqrt[٥]{(٢س^٣ - ٢)^٢} \, ءس$

جـ) $\int (٢س - ٣س^٢) \, قا^٢(س^٢ - س^٣) \, ءس$ د) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^٢ - ٦س)^٢} \, ءس$

الحل

أ) $\int (1 - 2س)(س - س^2)^4 \, دس$.

$ص = س - س^2 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 1 - 2س \Leftarrow \frac{دص}{1 - 2س} = دس$

$\int (1 - 2س) \, ص^4 \frac{دص}{1 - 2س} = \int ص^4 \, دص$

$= \frac{ص^5}{5} + ج = \frac{(س - س^2)^5}{5} + ج$

ب) $\int ٦س^٢ \sqrt[٥]{(٢س^٣ - ٢)^٢} \, دس$

$ص = ٢س^٣ - ٢ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٦س^٢ \Leftarrow \frac{دص}{٦س^٢} = دس$

$\int ٦س^٢ \sqrt[٥]{ص^٢} \frac{دص}{٦س^٢} = \int ص^{\frac{٢}{٥}} \, دص$

$$\frac{ص^{\frac{٢}{٥}+١}}{\frac{٢}{٥}+١} + جـ = \frac{ص^{\frac{٧}{٥}}}{\frac{٧}{٥}} + جـ$$

$$= \frac{٥}{٧}\sqrt[٥]{ص^{٧}} + جـ$$

$$= \frac{٥}{٧}\sqrt[٥]{(٢س^{٣}-٢)^{٧}} + جـ$$

جـ) $\int (٢س - ٣س^{٢})\, قا^{٢}(س^{٣} - س^{٢})\, دس$

$$ص = س^{٣} - س^{٢} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ٢س$$

$$\frac{دص}{٣س^{٢}-٢س} = دس$$

$$\int \overset{(-١)}{(٢س - ٣س^{٢})}\, قا^{٢}ص \, \frac{دص}{٣س^{٢}-٢س}$$

$$\int -قا^{٢}ص \cdot دص = -ظاص + جـ$$

$$= -ظا(س^{٣}-س^{٢}) + جـ$$

د) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}}\, دس$

$$ص = س^{٢} - ٦س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س - ٦ \Leftarrow$$

$$دس = \frac{دص}{٢س - ٦}$$

$$\int \frac{٣س-٩}{ص^{٢}} \times \frac{دص}{٢س-٦} =$$

$$\int ٣(س-٣) \times ص^{-٢} \times \frac{دص}{٢(س-٣)} =$$

$$\frac{٣}{٢}\, \frac{ص^{-٢+١}}{-٢+١} + جـ = \frac{٣}{٢}\, \frac{ص^{-١}}{-١} + جـ$$

$$\frac{-٣}{٢ص} + جـ = \frac{-٣}{٢(س^{٢}-٦س)} + جـ$$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[3]{(\text{٣س} - \text{٢})^{2}}\ \text{ءس}$

ب) $\int (\text{س} - \text{١})(\text{٢س}^{2} - \text{٤س} + \text{١})^{5}\ \text{ءس}$

جـ) $\int \text{٢ قا}^{2}(\text{٢} - \text{س})\ \text{ءس}$

د) $\int \text{٢س}^{3}\ \text{جا}(\text{س}^{4} + \text{١})\ \text{ءس}$

الحل

أ) $\int \sqrt[3]{(\text{٣س}-\text{٢})^{2}}\ \text{ءس} = \int (\text{٣س}-\text{٢})^{\frac{2}{3}}\ \text{ءس} = \dfrac{(\text{٣س}-\text{٢})^{\frac{2}{3}+1}}{(\frac{2}{3}+1)\times 3} + \text{جـ}$

$= \dfrac{(\text{٣س}-\text{٢})^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}\times 3} + \text{جـ} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{(\text{٣س}-\text{٢})^{5}} + \text{جـ}$

ب) $\int (\text{س}-\text{١})(\text{٢س}^{2}-\text{٤س}+\text{١})^{5}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{٢س}^{2}-\text{٤س}+\text{١} \Leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س} - \text{٤}$

$\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤س}-\text{٤}} \Leftarrow \text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤}(\text{س}-\text{١})}$

$\int (\text{س}-\text{١}) \times \text{ص}^{5}\ \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤}(\text{س}-\text{١})} = \frac{1}{4}\int \text{ص}^{5}\ \text{ءص}$

$= \dfrac{\text{ص}^{6}}{6\times 4} + \text{جـ} = \dfrac{(\text{٢س}^{2}-\text{٤س}+\text{١})^{6}}{24} + \text{جـ}$

جـ) $\int \text{٢ قا}^{2}(\text{٢}-\text{س})\ \text{ءس} =$

$\dfrac{\text{٢ ظا}(\text{٢}-\text{س})}{-1} + \text{جـ}$

$-\text{٢ ظا}(\text{٢}-\text{س}) + \text{جـ}$

د) $\int \text{٢س}^{3}\ \text{جا}(\text{س}^{4}+\text{١})\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{4}+\text{١} \Leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{3} \Leftarrow$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{٤س}^{3}} = \text{ءس}$

$\int \text{٢س}^{3}\ \text{جا ص}\ \dfrac{\text{ءص}}{\text{٤س}^{3}} =$

$\int \frac{1}{2}\ \text{جا ص ءص} = -\frac{1}{2}\ \text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{جتا}(\text{س}^{4}+\text{١}) + \text{جـ}$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{0}^{2} \sqrt{٤س + ١}\ د س$

ب) $\int_{-١}^{١} ٣س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٣}\ د س$

جـ) $\int_{١}^{٢} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}\ د س$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\ د س$

الحل

٤) $\int_{0}^{٢} \sqrt{٤س + ١}\ د س = \int_{0}^{٢} (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}\ د س$

$= \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{١}{٢} + ١}}{٤ \times (\frac{١}{٢} + ١)} \right]_{0}^{٢} = \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} \right]_{0}^{٢}$

$= \left[\frac{\sqrt{(٤س + ١)^{٣}}}{٦} \right]_{0}^{٢}$

$= \frac{١}{٦} \left[\sqrt{(٤ \times ٢ + ١)^{٣}} - \sqrt{(٤ \times ٠ + ١)^{٣}} \right]$

$= \frac{١}{٦} (\sqrt{٩^{٣}} - \sqrt{١^{٣}})$

$\frac{1}{2}(27-1)$

$\frac{1}{2} \times 26 = \frac{13}{3}$

ب) $\int_{-1}^{1} 3x^2 (x^3-1)^3 \, dx =$ صفر

جـ) $\int_{1}^{0} 2x \sqrt{x^4-1} \, dx =$

$\int_{1}^{0} 2x (x^4-1)^{\frac{1}{2}} \, dx$

$ص = x^4 - 1 \Leftarrow \frac{dص}{dx} = 4x^3 \Leftarrow dx = \frac{dص}{4x^3}$

$\int_{1}^{0} 2x \, ص^{\frac{1}{2}} \frac{dص}{4x^3} = \int_{1}^{0} ص^{\frac{1}{2}} dص$

$\left[\frac{ص^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_{1}^{0} = \left[\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{0}$

$\frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(x^4-1)^4} \right]_{1}^{0} = \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{(0^4-1)^4} - \sqrt[3]{(1-1)^4} \right)$

$$\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{0}\right)$$

$$\frac{3}{4}\left(1-0\right)$$

$$\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$$

د) $\int_{1}^{2}\frac{2\text{س}-3}{(\text{س}^2-3\text{س})^2}\,\text{دس}=\int_{1}^{2}(2\text{س}-3)(\text{س}^2-3\text{س})^{-2}\,.\,\text{دس}$

$\text{ص}=\text{س}^2-3\text{س}\Leftarrow\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=2\text{س}-3\Leftarrow\text{دس}=\frac{\text{دص}}{2\text{س}-3}$

$\int_{1}^{2}(2\text{س}-3)\,\text{ص}^{-2}\times\frac{\text{دص}}{2\text{س}-3}=\int_{1}^{2}\text{ص}^{-2}\,\text{دص}=$

$\left[\frac{-\text{ص}^{-2+1}}{-2+1}\right]_{1}^{2}=\left[\frac{-\text{ص}^{-1}}{-1}\right]_{1}^{2}=\left[\frac{1}{\text{ص}}\right]_{1}^{2}$

$\left[\frac{1}{\text{س}^2-3\text{س}}\right]_{1}^{2}=\frac{1}{2^2-3\times2}-\frac{1}{1^2-3\times1}=\frac{1}{-2}-\frac{1}{-2}$

$=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}=\text{صفر}$

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-2}^{3}3\text{س}^2\,\text{ق}'(\text{س}^3)\,\text{دس}$

الحل

$\text{ص}=\text{س}^3\Leftarrow\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=3\text{س}^2\Leftarrow\text{دس}=\frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$\int_{-2}^{3}3\text{س}^2\,\text{ق}'(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}=\int_{-2}^{3}\text{ق}'(\text{ص})\,.\,\text{دص}=$

$\text{ق}(\text{ص})\Big]_{-2}^{3}=\text{ق}(\text{س}^3)\Big]_{-2}^{3}$

$\text{ق}(3^3)-\text{ق}((-2)^3)=\text{ق}(27)-\text{ق}(-8)=-6-5$

$=-11$

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢} ق(س)\,ح س = ٣$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(س^{٢}+١)\,ح س$

الحل

$ص = س^{٢}+١ \Leftarrow \frac{ح ص}{ح س} = ٢س \Leftarrow ح ص = ٢س\, ح س$

$\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(ص)\,ح ص = \int_{٢}^{٥} ٤\, ق(ص)\,ح ص$

عندما $س = -١ \leftarrow ص = (-١)^{٢}+١ = ٢$

عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ٢^{٢}+١ = ٥$

$\int_{٢}^{٥} ٤\, ق(ص)\,ح ص = ٤ \times -٣ = -١٢$

---

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{٤} ٢س \sqrt{س^{٢}+٩}\,ح س$

الحل

$\int_{٠}^{٤} ٢س (س^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\,ح س$

$ص = س^{٢}+٩ \Leftarrow \frac{ح ص}{ح س} = ٢س \Leftarrow ح ص = ٢س\, ح س$

$\frac{ح ص}{ح س} = ٢س$

$\int_{٠}^{٤} ٢س \cdot ص^{\frac{١}{٢}} \frac{ح ص}{ح س} = \int_{٠}^{٤} ص^{\frac{١}{٢}}\,ح ص = \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}\right]_{٠}^{٤} = \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}}$

$\frac{٢}{٣} \left[\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}}\right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣}\left(\sqrt{(٤^{٢}+٩)^{٣}} - \sqrt{(٠+٩)^{٣}}\right)$

$\frac{٢}{٣}\left(٥^{٣} - ٣^{٣}\right) = \frac{٢}{٣}(١٢٥ - ٢٧)$

$= \frac{٢}{٣} \times ٩٨ = \frac{١٩٦}{٣}$