اختبار نهاية الوحدة

المتجهات

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) إذا كانت $A(-3,4,9),B(5,-2,3)$، فإن الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle 2,2,-12\rangle$

b) $\langle -6,-6,8\rangle$

c) $\langle 1,1,-6\rangle$

d) $\langle -6,8,-6\rangle$

(2) إذا كان: $\vec{v}=\langle 2,c,-5\rangle$، وكان: $|\vec{v}|=35$، فإن c تساوي:

a) 4

b) -3,5

c) 15

d) -4,4

(3) إذا كان PQR مستقيماً، حيث: $\overrightarrow{PQ}=a$، $PQ:QR=3:1$، فإن التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{a}$ هو:

a) $13\vec{a}$

b) $14\vec{a}$

c) $-13\vec{a}$

d) $-14\vec{a}$

(4) النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة:
$\vec{r}=\langle 4,-2,5\rangle+t\langle -2,1,3\rangle$، والإحداثي y لها 10 هي:

a) (18,10,28)

b) (28,10,35)

c) (8,10,20−)

d) (20,10,41−)

(5) إذا كان: v→=⟨2,−2,5⟩، وكان: w→=⟨−3,4,6⟩، فإن 3v→−2w→ يساوي:

a) ⟨0,2,3⟩

b) ⟨14,3−,12⟩

c) ⟨8−,16−,13⟩

d) ⟨13,16,8−⟩

(6) إذا كان قياس الزاوية بيـن a,b→ هو 60°، وكان: a→·b→=30،
وكان: |a→|=10، فإن مقدار b→ هو:

a) 3

b) 5

c) 6

d) 24

(7) إذا كان: u→=⟨−4,2,a⟩، وكان: v→=⟨2,b,5⟩، وكان: u→∥v→ فإن قيمة a هي:

a) -10

b) -5

c) -1

d) 5

(8) إذا كان المتجه u→=(5−63)، والمتجه: v→=(614q) متعامدين، فإن قيمة q

هي:

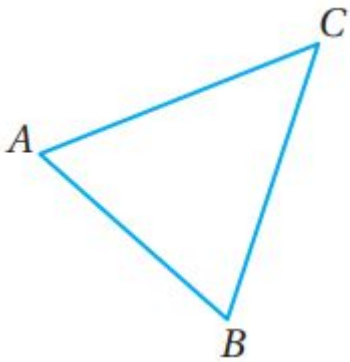
a) 0

b) 8

c) 10

d) 18

(9) في المثلث المجاور، إذا كان: $\hat{AB}\rightarrow=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$، وكان: $\hat{BC}\rightarrow=-2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$، فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عشر درجة.



$BA\rightarrow=\langle-3,1,-2\rangle\Rightarrow|BA\rightarrow|=9+1+4=14BC\rightarrow=\langle-2,4,3\rangle\Rightarrow|BC\rightarrow|=4+16+9$
$(BA\rightarrow\cdot BC\rightarrow|BA\rightarrow||BC\rightarrow|=29BA\rightarrow\cdot BC\rightarrow=-3(-2)+1(4)-2(3)=4\theta=\cos-1$
$\circ(414\times29)\approx78.5)=\cos-1$

(10) إذا وقعت النقاط: $E(2,0,4),F(h,5,1),G(3,10,k)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كل من h وk؟

E,F,G تقع على استقامة واحدة، إذن $\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{FG}$، ومنه:

$\langle h-2,5,-3\rangle\parallel\langle3-h,5,k-1\rangle$

إذن، يوجد عدد حقيقي مثل c بحيث:

$h-2,5,-3\rangle=c\langle3-h,5,k-1\rangle\Rightarrow5c=5\Rightarrow c=1h-2=(3-h)c\Rightarrow h-2=3-h\Rightarrow h=\rangle$
$52(k-1)c=-3\Rightarrow k-1=-3\Rightarrow k=-2$

(11) إذا كانت $A(3,-2,4),B(1,-5,6),C(-4,5,-1)$، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

AB→=⟨−2,−3,2⟩r→=⟨3,−2,4⟩+t⟨−2,−3,2⟩⇒OD→=⟨3−2t,−2−3t,4+2t⟩
CD→=⟨3−2t,−2−3t,4+2t⟩−⟨−4,5,−1⟩=⟨7−2t,−7−3t,5+2t⟩CD→⊥AB
→⇒CD→·AB→=0⇒−2(7−2t)−3(−7−3t)+2(5+2t)=0⇒t=−1⇒OD→=⟨3
(+2,−2+3,4−2⟩=⟨5,1,2⟩⇒D(5,1,2

إذا كانت: r→=(−2−59)+λ(−507) معادلة متجهة للمستقيم l1، وكانت:
r→=(−3−175)+μ(24−1) معادلة متجهة للمستقيم l2، فأجيب عن السؤالين الأتيين تباعاً:

(12) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l1,l2.

لإيجاد نقطة التقاطع نساوي r→ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيمة الوسيطين λ,μ:

2−5λ,−5,9+7λ⟩=⟨−3+2μ,−17+4μ,5−μ⟩−17+4μ=−5⇒μ=3−2−5λ−⟩
=−3+2μ⇒λ=−1

وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية:

9+7λ=5−μ9+7(−1)=5−32=2

نجد نقطة تقاطعهما بتعويض λ=−1 في معادلة l1، وهي النقطة (5,2−,3)

(13) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين:l1,l2.

اتجاه المستقيم l1: v→=⟨−5,0,7⟩

اتجاه المستقيم l2: u→=⟨2,4,−1⟩

v→·u→=−5(2)+0+7(−1)=−17|v→|=25+0+49=74|u→|=4+16+1=21

لتكن θ قياس الزاوية بين v→,u→ إذن:

∘(−1774×21)≈115.5(v→·u→|v→||u→|)=cos−1θ=cos−1

فيكون قياس الزاوية الحادة بين l1,l2 هو α حيث: ∘α=180∘−115.5∘=64.5

إذا كانت A(1,4,−5),B(3,0,2),C(−4,1,3)، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(14) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AB↔.

⟨AB→=⟨2,−4,7⟩r→=⟨1,4,−5⟩+t⟨2,−4,7

(15) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AC↔.

⟨AC→=⟨−5,−3,8⟩r→=⟨1,4,−5⟩+u⟨−5,−3,8

(16) إذا كان قياس ∠BAC=θ، فأثبت أن: θ=587138cos.

AB→|=4+16+49=69|AC→|=25+9+64=98AB→·AC→=2(−5)−4(−3)|
θ=AB→·AC→|AB→||AC→|=5869×98=5869×49×2=587+7(8)=58cos
138

(17) أجد مساحة المثلث ABC.

(ABC)=12|AB→|×|AC→θ=1−33646762=33987138Areaθ=1−cos2sin
θ=12×7138×33987138=33982|sin

(18) إذا كانت: ⟨r→=⟨3,−25,13⟩+t⟨4,5,−1 معادلة متجهة للمستقيم l، وكانت النقطة V تقع على المستقيم l، حيث: OV⊥l¯ فما إحداثيات النقطة V؟

V نقطة على l إذن يكون متجه موقعها: ⟨OV→=⟨3+4t,−25+5t,13−t

اتجاه l هو: ⟨w→=⟨4,5,−1

وبما أن OV⊥l¯ إذن يكون:0=w→·OV→ ومنه:

3+4t)+5(−25+5t)−1(13−t)=0⇒t=3⇒OV→=⟨3+12,−25+15,13−3⟩)4
(⇒V(15,−10,10

يمر المستقيم l1 بالنقطتين: E وF، ويمر المستقيم l2 بالنقطتين: G وH. أحدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

(E(7,6,34),F(5,9,16),G(1,21,−2),H(−13,−14,19) (19

⟨EF→=⟨−2,3,−18⟩GH→=⟨−14,−35,21

نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{GH}$ كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين:

معادلة l1 هي: $\overrightarrow{r}=\langle 7,6,34\rangle+t\langle -2,3,-18\rangle$

معادلة l2 هي: $\overrightarrow{r}=\langle 1,21,-2\rangle+u\langle -14,-35,21\rangle$

نساوي $\overrightarrow{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$\langle 7-2t,6+3t,34-18t\rangle=\langle 1-14u,21-35u,-2+21u\rangle 7-2t=1-14u\Rightarrow -2t+14u=-6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) 6+3t=21-35u\Rightarrow 3t+35u=15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) 34-18t=-2+21u\Rightarrow 18t+21u=36 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) (1)\times 9+(3): u=-649, t=1573 (157)+35(-649)=2.14\neq 15$

هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

20) $(E(-3,-5,16),F(12,0,1),G(7,2,11),H(1,-22,23)$

$\overrightarrow{EF}=\langle 15,5,-15\rangle \overrightarrow{GH}=\langle -6,-24,12$

بما أن النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير ثابتة، فإنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{GH}$ وهذا يعني أن المستقيمين غير متوازيين.

بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{EF}$ بقسمته على 5 تكون معادلته: $\overrightarrow{r}=\langle -3,-5,16\rangle+t\langle 3,1,-3\rangle$

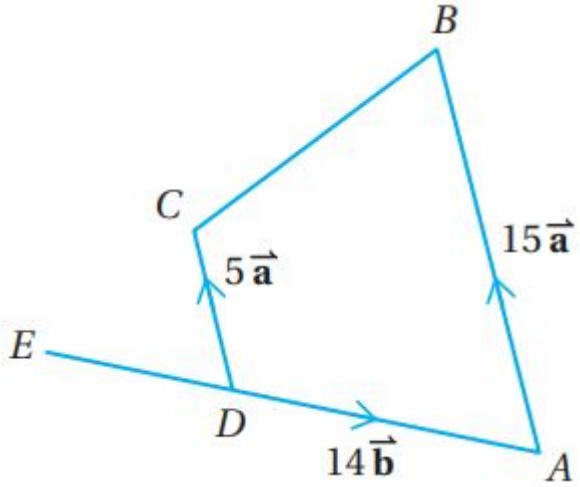
بتبسيط اتجاه $\overrightarrow{GH}$ بقسمته على 6 تكون معادلته: $\overrightarrow{r}=\langle 7,2,11\rangle+u\langle -1,-4,2\rangle$

نساوي $\overrightarrow{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$\langle 3+3t,-5+t,16-3t\rangle=\langle 7-u,2-4u,11+2u\rangle -3+3t=7-u\Rightarrow 3t+u=10 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) -5+t=2-4u\Rightarrow t+4u=7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) 16-3t=11+2u\Rightarrow 3t+2u=5 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) (3)-(1): u=-5\Rightarrow t=5$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

(21) في الشكل الرباعي ABCD الآتي، مد AD على استقامته ليصل إلى النقطة E، حيث: AD=2 DE، إذا كان: DA→=14b→، وكان: DC→=5a→، وكان: AB→=15a→، فأثبت أن B,C,E تقع على استقامة واحدة.



AD=2DE⇒AD→=2DE→⇒DE→=12AD→=12(−14b→)=−7b→EC→=ED→+DC→=−DE→+DC→=7b→+5a→EB→=EA→+AB→=21b→+15a→=3(7→b→+5a→)⇒EB→=3EC

وهذا يعني أن EB→∥EC→

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها، إذن النقاط الثلاثة B,C,E تقع على استقامة واحدة.