

## اختبار نهاية الوحدة

### المتجهات

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) إذا كانت  $A(-3,4,9), B(5,-2,3)$ ، فإن الصورة الإحداثية للمتجه  $\vec{AB}$  هي:

a)  $(2,2,12-)$

b)  $(6-,6-,8)$

c)  $(1,1,6-)$

d)  $(6-,8,6-)$

(2) إذا كان:  $\vec{v} = (2, c, -5)$ ، وكان:  $|\vec{v}| = 35$ ، فإن  $c$  تساوي:

a) 4

b) -3,5

c) 15

d) -4,4

(3) إذا كان  $PQR$  مستقيماً، حيث:  $\vec{PQ} = a, \vec{PQ} : \vec{QR} = 3:1$ ، فإن التعبير عن المتجه  $\vec{RQ}$  بدلالة  $a$  هو:

13a  $\rightarrow$  (a)

14a  $\rightarrow$  (b)

13a  $\rightarrow$  (c-)

14a  $\rightarrow$  (d-)

(4) النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة:  
 $\vec{r} = (4, -2, 5) + t(-2, 1, 3)$ ، والإحداثي  $y$  لها 10 هي:

a) (18,10,28)

b) (28,10,35)

c) (8,10,20-)

d) (20,10,41-)

(5) إذا كان:  $\langle v \rightarrow = \langle 2, -2, 5 \rangle$ ، وكان:  $\langle w \rightarrow = \langle -3, 4, 6 \rangle$ ، فإن  $\langle 3v \rightarrow - 2w \rightarrow$  يساوي:

a) (0,2,3)

b) (14,3-,12)

c) (8-,16-,13)

d) (13,16,8-)

(6) إذا كان قياس الزاوية بين  $a \rightarrow, b \rightarrow$  هو  $60^\circ$ ، وكان:  $a \rightarrow \cdot b \rightarrow = 30$ ، وكان:  $|a \rightarrow| = 10$ ، فإن مقدار  $b \rightarrow$  هو:

a) 3

b) 5

c) 6

d) 24

(7) إذا كان:  $\langle u \rightarrow = \langle -4, 2, a \rangle$ ، وكان:  $\langle v \rightarrow = \langle 2, b, 5 \rangle$ ، وكان:  $\langle u \rightarrow \cdot \langle v \rightarrow = 10$ ، فإن قيمة  $a$  هي:

a) -10

b) -5

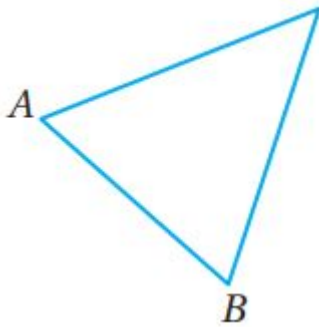
c) -1

d) 5

(8) إذا كان المتجه  $\langle u \rightarrow = \langle 5, -6, 3 \rangle$ ، والمتجه:  $\langle v \rightarrow = \langle 6, 1, 4 \rangle$  متعامدين، فإن قيمة  $q$

هي:

- a) 0  
b) 8  
c) 10  
d) 18



(9) في المثلث المجاور، إذا كان:  $\vec{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ، وكان:  $\vec{BC} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ، فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عشر درجة.

$$\vec{BA} = \langle -3, 1, -2 \rangle \Rightarrow |\vec{BA}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

$$\vec{BC} = \langle -2, 4, 3 \rangle \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -3(-2) + 1(4) - 2(3) = 4$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{4}{\sqrt{14} \times \sqrt{29}} \approx 0.14$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.14) \approx 78.5^\circ$$

(10) إذا وقعت النقاط:  $E(2, 0, 4), F(h, 5, 1), G(3, 10, k)$  على مستقيم واحد، فما قيمة كل من  $h$  و  $k$ ؟

$E, F, G$  تقع على استقامة واحدة، إذن  $\vec{EF} \parallel \vec{FG}$ ، ومنه:

$$\langle h-2, 5, -3 \rangle \parallel \langle 3-h, 5, k-1 \rangle$$

إذن، يوجد عدد حقيقي مثل  $c$  بحيث:

$$h-2, 5, -3 = c(3-h, 5, k-1) \Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1$$

$$h-2 = (3-h)c \Rightarrow h-2 = 3-h \Rightarrow h = 5$$

$$-3 = (k-1)c \Rightarrow k-1 = -3 \Rightarrow k = -2$$

(11) إذا كانت  $A(3, -2, 4), B(1, -5, 6), C(-4, 5, -1)$  وكانت النقطة  $D$  تقع على المستقيم المار بالنقطة  $A$  والنقطة  $B$ ، وكانت الزاوية  $CDA$  قائمة، فأجد إحداثيات النقطة  $D$ .

$$\begin{aligned} AB \rightarrow &= \langle -2, -3, 2 \rangle \quad r \rightarrow = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle -2, -3, 2 \rangle \Rightarrow OD \rightarrow = \langle 3-2t, -2-3t, 4+2t \rangle \\ CD \rightarrow &= \langle 3-2t, -2-3t, 4+2t \rangle - \langle -4, 5, -1 \rangle = \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t \rangle \quad CD \rightarrow \perp AB \\ \rightarrow \Rightarrow CD \rightarrow \cdot AB \rightarrow &= 0 \Rightarrow -2(7-2t) - 3(-7-3t) + 2(5+2t) = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow OD \rightarrow = \langle 3 \\ &+ 2, -2+3, 4-2 \rangle = \langle 5, 1, 2 \rangle \Rightarrow D(5, 1, 2) \end{aligned}$$

إذا كانت:  $r \rightarrow = (-2-59) + \lambda(-507)$  معادلة متجهة للمستقيم  $l_1$ ، وكانت:  
 $r \rightarrow = (-3-175) + \mu(24-1)$  معادلة متجهة للمستقيم  $l_2$ ، فأجيب عن السؤالين  
 الأتيين تباعاً:

(12) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:  $l_1, l_2$ .

لإيجاد نقطة التقاطع نساوي  $r \rightarrow$  في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد  
 قيمة الوسيطين  $\lambda, \mu$ :

$$\begin{aligned} 2-5\lambda, -5, 9+7\lambda &= \langle -3+2\mu, -17+4\mu, 5-\mu \rangle - 17+4\mu = -5 \Rightarrow \mu = 3-2-5\lambda- \\ &= -3+2\mu \Rightarrow \lambda = -1 \end{aligned}$$

وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية:

$$9+7\lambda = 5-\mu \quad 9+7(-1) = 5-32 = 2$$

نجد نقطة تقاطعها بتعويض  $\lambda = -1$  في معادلة  $l_1$ ، وهي النقطة  $(5, 2, -3)$

(13) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين:  $l_1, l_2$ .

اتجاه المستقيم  $l_1: v \rightarrow = \langle -5, 0, 7 \rangle$

اتجاه المستقيم  $l_2: u \rightarrow = \langle 2, 4, -1 \rangle$

$$v \rightarrow \cdot u \rightarrow = -5(2) + 0 + 7(-1) = -17 \quad |v \rightarrow| = \sqrt{25+0+49} = 74 \quad |u \rightarrow| = \sqrt{4+16+1} = 21$$

لتكن  $\theta$  قياس الزاوية بين  $v \rightarrow, u \rightarrow$  إذن:

$$\cos \theta = \frac{v \rightarrow \cdot u \rightarrow}{|v \rightarrow| |u \rightarrow|} = \frac{-17}{74 \times 21} \approx -115.5 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(-115.5)$$

فيكون قياس الزاوية الحادة بين  $l_1, l_2$  هو  $\alpha$  حيث:  $\alpha = 180^\circ - 115.5^\circ = 64.5^\circ$

إذا كانت  $A(1, 4, -5), B(3, 0, 2), C(-4, 1, 3)$ ، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(14) أكتب معادلة متجهة للمستقيم  $AB \leftrightarrow$ .

$$\langle AB \rightarrow = \langle 2, -4, 7 \rangle r \rightarrow = \langle 1, 4, -5 \rangle + t \langle 2, -4, 7 \rangle$$

(15) أكتب معادلة متجهة للمستقيم  $AC \leftrightarrow$ .

$$\langle AC \rightarrow = \langle -5, -3, 8 \rangle r \rightarrow = \langle 1, 4, -5 \rangle + u \langle -5, -3, 8 \rangle$$

(16) إذا كان قياس  $\angle BAC = \theta$ , فأثبت أن:  $\theta = \cos^{-1} \frac{587}{138}$ .

$$\begin{aligned} |AB \rightarrow| &= \sqrt{4+16+49} = 9, |AC \rightarrow| = \sqrt{25+9+64} = 9.8 \\ AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow &= 2(-5) - 4(-3) = -10 + 12 = 2 \\ \cos \theta &= \frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} = \frac{2}{9 \times 9.8} = \frac{2}{88.2} = \frac{1}{44.1} \end{aligned}$$

(17) أجد مساحة المثلث  $ABC$ .

$$\begin{aligned} \text{Area}(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} |AB \rightarrow| |AC \rightarrow| \sin \theta \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{44.1}\right)^2} \end{aligned}$$

(18) إذا كانت:  $r \rightarrow = \langle 3, -25, 13 \rangle + t \langle 4, 5, -1 \rangle$  معادلة متجهة للمستقيم  $a$ , وكانت النقطة  $V$  تقع على المستقيم  $a$ , حيث:  $\vec{OV} \perp a$  فما إحداثيات النقطة  $V$ ؟

$$V \text{ نقطة على } a \text{ إذن يكون متجه موقعها: } \langle OV \rightarrow = \langle 3+4t, -25+5t, 13-t \rangle$$

$$\text{اتجاه } a \text{ هو: } \langle w \rightarrow = \langle 4, 5, -1 \rangle$$

وبما أن  $\vec{OV} \perp a$  إذن يكون:  $w \rightarrow \cdot OV \rightarrow = 0$  ومنه:

$$\begin{aligned} 4(3+4t) + 5(-25+5t) - 1(13-t) &= 0 \Rightarrow t = 3 \\ \Rightarrow V(15, -10, 10) \end{aligned}$$

يمر المستقيم  $l_1$  بالنقطتين:  $E$  و  $F$ , ويمر المستقيم  $l_2$  بالنقطتين:  $G$  و  $H$ . أحدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

$$(19) E(7, 6, 34), F(5, 9, 16), G(1, 21, -2), H(-13, -14, 19)$$

$$\langle EF \rightarrow = \langle -2, 3, -18 \rangle \langle GH \rightarrow = \langle -14, -35, 21 \rangle$$

نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي  $k$  يحقق  $\vec{EF} = k\vec{GH}$  كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين:

$$\text{معادلة 1 هي: } \vec{r} = \langle 7, 6, 34 \rangle + t \langle -2, 3, -18 \rangle$$

$$\text{معادلة 2 هي: } \vec{r} = \langle 1, 21, -2 \rangle + u \langle -14, -35, 21 \rangle$$

نساوي  $\vec{r}$  في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم  $t, u$  لمعرفة نقطة التقاطع:

$$\begin{aligned} 7-2t, 6+3t, 34-18t &= \langle 1-14u, 21-35u, -2+21u \rangle \\ 7-2t &= 1-14u \Rightarrow -2t+14u = -6 \dots\dots\dots (1) \\ 6+3t &= 21-35u \Rightarrow 3t+35u = 15 \dots\dots\dots (2) \\ 34-18t &= -2+21u \Rightarrow 18t+21u = 36 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

$$(E(-3, -5, 16), F(12, 0, 1), G(7, 2, 11), H(1, -22, 23)) \quad (20)$$

$$\vec{EF} = \langle 15, 5, -15 \rangle \quad \vec{GH} = \langle -6, -24, 12 \rangle$$

بما أن النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير ثابتة، فإنه لا يوجد عدد حقيقي  $k$  حيث  $\vec{EF} = k\vec{GH}$  وهذا يعني أن المستقيمين غير متوازيين.

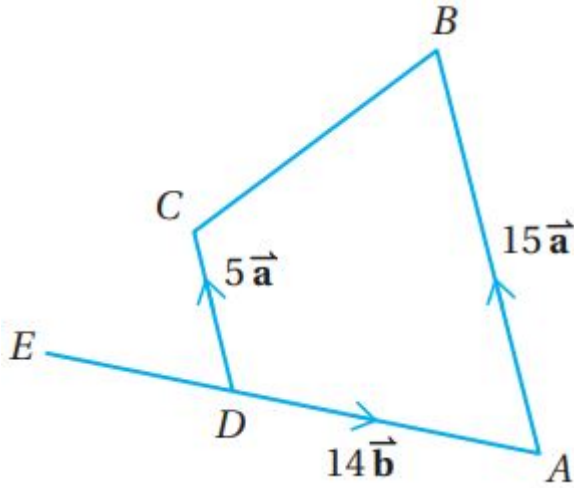
$$\text{بتبسيط اتجاه } \vec{EF} \text{ بقسمته على 5 تكون معادلته: } \vec{r} = \langle -3, -5, 16 \rangle + t \langle 3, 1, -3 \rangle$$

$$\text{بتبسيط اتجاه } \vec{GH} \text{ بقسمته على 6 تكون معادلته: } \vec{r} = \langle 7, 2, 11 \rangle + u \langle -1, -4, 2 \rangle$$

نساوي  $\vec{r}$  في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم  $t, u$  لمعرفة نقطة التقاطع:

$$\begin{aligned} 3+3t, -5+t, 16-3t &= \langle 7-u, 2-4u, 11+2u \rangle \\ -3+3t &= 7-u \Rightarrow 3t+u = 10 \dots\dots (1) \\ -5+t &= 2-4u \Rightarrow t+4u = 7 \dots\dots\dots (2) \\ 16-3t &= 11+2u \Rightarrow 3t+2u = 5 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.



(21) في الشكل الرباعي الآتي، مد  $AD$  على استقامته ليصل إلى النقطة  $E$ ، حيث:  $AD = 2 DE$ ، إذا كان:  $\vec{DA} = 14b$ ، وكان:  $\vec{DC} = 5a$ ،  $\vec{AB} = 15a$ ، فأثبت أن  $B, C, E$  تقع على استقامة واحدة.

$$\begin{aligned} AD = 2DE &\Rightarrow \vec{AD} = 2\vec{DE} \Rightarrow \vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{2}(-14b) = -7b \\ \vec{EC} &= \vec{ED} + \vec{DC} = -\vec{DE} + \vec{DC} = 7b + 5a \\ \vec{EB} &= \vec{EA} + \vec{AB} = 2\vec{AD} + \vec{AB} = 2(-14b) + 15a = -28b + 15a \\ \vec{EB} &= 3(-7b + 5a) = 3\vec{EC} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن  $\vec{EB} \parallel \vec{EC}$

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة  $E$  نفسها، إذن النقاط الثلاثة  $B, C, E$  تقع على استقامة واحدة.