

اختبار نهاية الوحدة

التكامل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) قيمة $\int x^3 - 1x^2$ هي:

$x^2 - 1x + C$ (a)

$x^2 + 1x + C$ (b)

$x^2 - 1x + C$ (c)

$x^2 + 1x + C$ (d)

$$\int x^3 - 1x^2 dx = \int (x^3 - 1x^2) dx = \int (x - x - 2) dx = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + C = \frac{1}{2}x^2 + 1x + C \dots b$$

(2) إذا كان: $\int 02kx dx = 6$ فإن قيمة الثابت k:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

$$\int 02kx dx = 6 \Rightarrow k \cdot 2x^2 \Big|_0^2 = 6 \Rightarrow k(2)^2 - k(0)^2 = 6 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3 \dots c$$

(3) قيمة: $\int 03(x^2 + 3x) dx$ هي:

a) 334

b) 2114

c) 412

d) 2212

$$\int (x^2 + 3x) dx = (-13x^3 + 32x^2) \Big|_0^3 = (-13(3)^3 + 32(3)^2) - (-13(0)^3 + 32(0)^2) = 92 \dots\dots\dots (c)$$

(4) قيمة: $\int 02e^{2x}$ هي:

$e^4 - 1$ (a)

$e^4 - 2$ (b)

$2e^4 - 2$ (c)

$12e^4 - 12$ (d)

$$\int 02e^{2x} dx = 12e^{2x} \Big|_0^2 = 12e^{2(2)} - 12e^{2(0)} = 12e^4 - 12 \dots\dots\dots d$$

(5) قيمة: $\int 141x$ هي:

a) -2

b) 716-

c) 12

d) 2

$$\int 141x dx = \int 14x - 12 dx = 2x^2 \Big|_{14} = 2x \Big|_{14} = 24 - 21 = 2 \dots\dots\dots d$$

(6) التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 4x - x^2$ والمحور x هو:

$\int (4x - x^2) dx$ (a) 40

$\int (4x - x^2) dx$ (b) 04

$\int (4x - x^2) dx$ (c) 10

$\int (4x - x^2) dx$ (d) 01

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الآتية:

$$f(x)=0 \Rightarrow 4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0 \Rightarrow x=0, x=4$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة $[0,4]$ ، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1)=4(1)-(1)^2=3>0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,4]$

والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو

$$\int_0^4 (4x-x^2) dx$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (7x-1/2) dx$$

$$\int (3x-12) dx = 6x^2 + C$$

$$\int (8x-10x^2) dx$$

$$\int (8x-10x^2) dx = 4x^2 - 10/3 x^3 + C$$

$$\int (5x^3) dx$$

$$\int 5x^3 dx = \int (5x^3 - 3) dx = -5/2 x^2 - 2 + C = -5/2 x^2 + C$$

$$\int (x^2 - 1/x^3) dx$$

$$\int (x^2 - 1/x^3) dx = \int (x^2 - 1/x^3) dx = \int (x^2 \cdot x^3 - 1/x^3) dx = \int (x^5 - x^{-3}) dx = 3/8 x^6 + 3/2 x^{-2} + C = 3/8 x^6 + 3/2 x^{-2} + C$$

$$\int (5x^2 - 2e^{7x}) dx$$

$$\int (5x^2 - 2e^{7x}) dx = 5/3 x^3 - 2/7 e^{7x} + C$$

$$\int (2x + 3e^{4x} + 5) dx$$

$$\int (2x+3e^{4x+5})dx = \int (x^2+34e^{4x+5}+C)dx$$

$$\int (x^2-62x)dx \quad (13)$$

$$\int |x|+Cx^2-62x dx = \int (x^2-62x)dx = \int (12x-3x)dx = 14x^2-3\ln|x|$$

$$\int (x-1)^3 dx \quad (14)$$

$$\int (x-1)^3 dx = \int (x-1)^{-3} dx = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C$$

$$\int (e^x+4)dx \quad (15)$$

$$\int |e^x+4|+C e^{e^x+4} dx = \ln|e^x+4|+C$$

$$\int (2x e^{x^2-1}) dx \quad (16)$$

$$\int 2x e^{x^2-1} dx \quad u = x^2-1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow \int 2x e^u \times \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2-1} + C$$

$$\int (4e^x(3+e^{2x})) dx \quad (17)$$

$$\int 4e^x(3+e^{2x}) dx = \int (12e^x+4e^{3x}) dx = 12e^x+4\frac{e^{3x}}{3}+C$$

$$\int (x(4+2x+x^2))^8 dx \quad (18)$$

$$\int (x(4+2x+x^2))^8 dx \quad u = 4+2x+x^2 \Rightarrow du = 2+2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2+2x} \Rightarrow \int (1+x)^8 \times \frac{du}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \int (1+x)^7 du = \frac{1}{2} \int 12u-8 du = -\frac{1}{2}(6u-4) + C = -\frac{1}{2}(6(4+2x+x^2)-4) + C = -\frac{1}{2}(24+12x+6x^2-4) + C = -\frac{1}{2}(20+12x+6x^2) + C$$

$$\int ((3+x^2)\sin x) dx \quad (19)$$

$$\int (3+x^2)\sin x dx \quad u = 3+x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow \int x \sin u \times \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(3+x^2) + C$$

$$\int (x^3-4\cos^3 x) dx \quad (20)$$

$$\int (x^3-4\cos^3 x) dx = \frac{x^4}{4} - 4 \int \cos^3 x dx$$

$$\int ((7x+2)\sin x) dx \quad (21)$$

$$\int (7x+2) + C(7x+2) dx = \int (12x^2 + 17 \cos(7x+2)) dx = \int (1 - \sin x - \sin) dx$$

$$\int (e^{3x} - e^{-3x}) dx \quad (22)$$

$$\int (e^{3x} - e^{-3x}) dx = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

$$\int (21 - 5x) dx \quad (23)$$

$$\int |1-5x| + C(21-5x) dx = \int (2-5(-5)1-5x) dx = -25 \int (1-5x) dx = -25 \ln |1-5x| + C$$

(24) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 4x - 2$ فأجد قاعدة العلاقة، علماً بأن منحنىها يمر بالنقطة $(0, 3)$.

$$y = \int (4x - 2) dx = 2x^2 - 2x + C$$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 3)$ إذن:

$$C = 3 \Rightarrow y = 2x^2 - 2x + 3$$

(25) الإيراد الحدي: يمثل الاقتران: $R'(x) = 4x - 1.2x^2$ الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المباعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علماً بأن $R(20) = 30000$.

$$R(x) = \int (4x - 1.2x^2) dx = 2x^2 - 0.4x^3 + C$$

بما أن $R(20) = 30000$ إذن:

$$C = 54000 \Rightarrow R(x) = 2x^2 - 0.4x^3 + 54000$$

(26) يتحرك جسيم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = \cos(3t - \pi)$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتراً لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

$$\int (3t - \pi) + C(3t - \pi) dx = \int 13 \sin v(t) = \int \cos$$

إذا كان $\int (11 - 5 - 1g(x)) dx = 10$ ، $\int (4 - 55f(x)) dx = 4$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

$$\int (15f(x)) dx \quad (27)$$

$$\int 15f(x)dx = \int -1 - 5f(x)dx + \int -55f(x)dx = -4 + 10 = 6 - \int$$

$$\int (5 - 17f(x))dx \quad (28 - \int$$

$$\int 5 - 17f(x)dx = 7\int -5 - 1f(x)dx = 7 \times 4 = 28 - \int$$

$$\int (3f(x) - g(x))dx \quad (29) 1 - 5 - \int$$

$$\int 3f(x) - g(x)dx = 3\int -1 - 5f(x)dx - \int -1 - 5g(x)dx = 3(-4) - (-11) = 1 - 5 - \int = -1$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int (3x^2 - 4x + 1)dx \quad (30) 23 - \int$$

$$\int 3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)|_{-2}^3 = ((3)^3 - 2(3)^2 + 3) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2)) = 30$$

$$\int (13x^3 + 2x^2)dx \quad (31) \int$$

$$\int 13x^3 + 2x^2)dx = \int 13(x^3 + 2x^2)dx = \int 13(x^2 + 2x)dx = (13x^3 + x^2)|_{13} = (\int 13(3)^3 + (3)^2) - (13(1)^3 + (1)^2) = 503$$

$$\int (x)|dx \quad (32) -3|15 \int$$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|x| = \begin{cases} 3-x, & x < 3 \\ x-3, & x \geq 3 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int (x)|dx = \int 13(3-x)dx + \int 35(x-3)dx = (3x - 12x^2)|_{13} + (12x^2 - 3x)|_{3-3}|15 \int 5 = (3(3) - 12(3)^2) - (3(1) - 12(1)^2) + (12(5)^2 - 3(5)) - (12(3)^2 - 3(3)) = 4$$

$$\int (1420x)dx \quad (33) \int$$

$$\int 1420x)dx = \int 1420x - 12dx = 40x|_{14} = 40x|_{14} = 404 - 401 = 40 \int$$

$$\int (253x(x+2))dx \quad (34) \int$$

$$\int 25(3x^2 + 6x) dx = (x^3 + 3x^2) \Big|_{25} = ((5)^3 + 3(5)^2) - ((2)^3 + 3(2)^2) = 180$$

$$\int (232xe^{-x^2} dx) \quad (35)$$

$$232xe^{-x^2} dx \Rightarrow u = -x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x} \Rightarrow u = -9x^2 = 2 \Rightarrow u = -4$$

$$\int 232xe^{-x^2} dx = \int -4 - 92xe^u \times \frac{du}{-2x} = \int -4 - 9e^u du = -4u - 9e^u \Big|_{-4-9} = -e^{-9} + e^{-4} = -1e^9 + 1e^4$$

$$\int (023x^2(x^3+1)^5 dx) \quad (36)$$

$$023x^2(x^3+1)^5 dx \Rightarrow u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} \Rightarrow u = 9x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int 023x^2(x^3+1)^5 dx = \int 193x^2 u^5 \times \frac{du}{3x^2} = \int 19u^5 - 5du = -14u^4 - 4 \Big|_{19} = -14(9)^4 + 14(1)^4 = 16406561$$

$$\int (016xx^2+1 dx) \quad (37)$$

$$\int |x^2+1| \Big|_{01} = 3 \ln |016xx^2+1 dx| = \int 013(2x)x^2+1 dx = 3 \int 012xx^2+1 dx = 3 \ln |2| \Big|_{1} = 3 \ln |2| - 3 \ln$$

(38) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2+4, & x < 0 \\ 4-x, & x \geq 0 \end{cases}$, فأجد قيمة: $\int_{-2}^1 f(x) dx$.

بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 (x^2+4) dx + \int_0^1 (4-x) dx = (13x^3+4x) \Big|_{-2}^0 + (4x-12x^2) \Big|_0^1 = (0) - (13(-2)^3+4(-2)) + (4(1)-12(1)^2) - (0) = 856$$

(39) يتحرك جسم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة

بالاقتران: $v(t) = 5 + e^t - 2$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية، إذا الجسم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوان من بدء الحركة.

$$v(t) = 5 + e^t - 2 \Rightarrow s(t) = \int (5 + e^t - 2) dt = 5t + e^t - 2t + C = 5t + e^t - 2 + C$$

بما أن الجسم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن $s(0) = 0$:

$$s(0) = 5(0) + e^0 - 2 + C = e - 2 + C = -1e^2 \Rightarrow C = -1e^2 \Rightarrow s(t) = 5t + e^t - 2 - 1e^2$$

موقع الجسم بعد 3 ثوان من الحركة هو:

$$s(3)=5(3)+e^{3-2}-1e^2=15+e-1e^2$$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$.
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$(f'(x)=3x^2+6x-2; (0,6) \quad (40)$$

$$f(x)=\int(3x^2+6x-2)dx=x^3+3x^2-2x+C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,6)$ إذن:

$$6=C=f(0)=0^3+3(0)^2-2(0)+C=6$$

$$(f'(x)=20x^2; (1,400) \quad (41)$$

$$f(x)=\int 20x^2 dx = \int 20x^2 - 2 dx = -20x^{-1} + C = -20/x + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1,400)$ إذن:

$$400=C=f(1)=-20(1)+C \Rightarrow C=420$$

$$(f'(x)=2x+1x^2; (1,1) \quad (42)$$

$$f(x)=\int(2x+1x^2)dx=x^2+\frac{1}{3}x^3+C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1,1)$ إذن:

$$1=f(1)=1^2+\frac{1}{3}(1)^3+C \Rightarrow C=-\frac{4}{3}$$

$$(f'(x)=5e^x-4; (0,-1) \quad (43)$$

$$f(x)=\int(5e^x-4)dx=5e^x-4x+C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,-1)$ إذن:

$$-1=f(0)=5e^0-4(0)+C \Rightarrow C=-6$$

$$(f'(x)=xx^2+5; (2,10) \quad (44)$$

$$f(x)=\int xx^2+5 dx \quad u=x^2+5 \Rightarrow du=2x dx \Rightarrow dx=\frac{du}{2x} \quad \int xx^2+5 dx = \int xu \cdot \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{4} u^2 + C = \frac{1}{4} (x^2+5)^2 + C$$

$$x = \int 12u^{1/2} du = 13u^{3/2} + C = 13(x^2 + 5)^{3/2} + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (2,10) إذن:

$$10 = 13(2^2 + 5)^{3/2} + C \Rightarrow C = 10 - 13(9)^{3/2} = 10 - 13(27) = 10 - 351 = -341$$

(45) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 2$ والمحور x ، والمستقيمين: $x = 1, x = -2$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

نختار عدداً ضمن الفترة $[-2, 1]$ ، وليكن -1.5 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-1.5) = (-1.5+1)(-1.5-2) = (-0.5)(-3.5) = 1.75 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-2, -1]$

نختار عدداً ضمن الفترة $[-1, 1]$ ، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = (0+1)(0-2) = -2 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 1]$

العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^1 (x^2 - x - 2) dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + x + 2) dx = (13x^3 - 12x^2 - 2x) \Big|_{-2}^{-1} + (-13x^3 + 12x^2 + 2x) \Big|_{-1}^1 = (-13 - 12 + 2) - (-83 - 2 + 4) + (-13 + 12 + 2) - (13 + 12 - 2) = 316$$

إذن، المساحة هي: 316 وحدة مربعة.

(46) طب: يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل $C'(t) = 3t(t^2 + 36)^3$ ، فأجد مقدار التغير في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

أولاً نجد قاعدة الاقتران:

$$C(t) = \int 3t(t^2 + 36)^3 dt \quad u = t^2 + 36 \Rightarrow du = 2t dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$C(t) = \int 3t(t^2 + 36)^3 dt = \int 3tu^3 \times \frac{du}{2t} = \int \frac{3}{2}u^3 du = \frac{3}{2} \times \frac{u^4}{4} + K = \frac{3}{8}u^4 + K = \frac{3}{8}(t^2 + 36)^4 + K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0) = 0$ ومنه:

$$C(0) = \frac{3}{8}(0^2 + 36)^4 + K = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}(36)^4 + K = 0 \Rightarrow K = -\frac{3}{8}(36)^4 = -12$$

$$C(t) = \frac{3}{8}(t^2 + 36)^4 - 12$$

$$2C(8) = 2 \left(\frac{3}{8}(8^2 + 36)^4 - 12 \right) = -364 + 36 - 12 = -810$$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو $0.8 - \text{mg/cm}^2$

(47) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 3x$ والمحور x .

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة $[0, 1]$ ، وليكن 12 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 3(0)^2 - 3(0) = 0 < 0$$

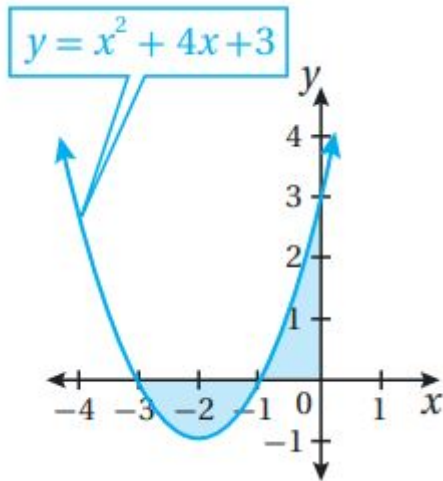
بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 1]$

$$A = - \int_0^1 (3x^2 - 3x) dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3x) dx = \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \left(-(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2 \right) - \left(-(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2 \right) = 12$$

إذن، المساحة هي: 12 وحدة مربعة.

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

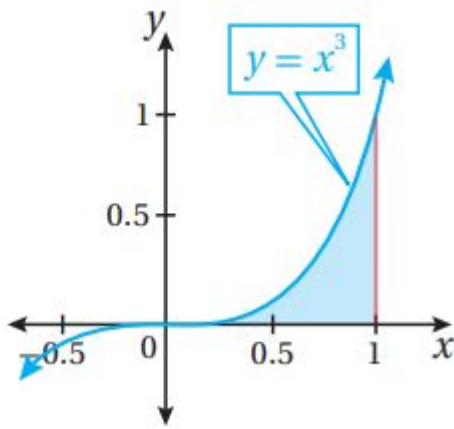
48



$$A = -\int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3) dx + \int_{-1}^{1} (x^2 + 4x + 3) dx = \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx + \int_{-1}^{1} (x^2 + 4x + 3) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x\right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right) \Big|_{-1}^{1} = (13 - 2 + 3) - (9 - 18 + 9) + (0) - (-13 + 2 - 3) = 83$$

إذن، المساحة هي: 83 وحدة مربعة.

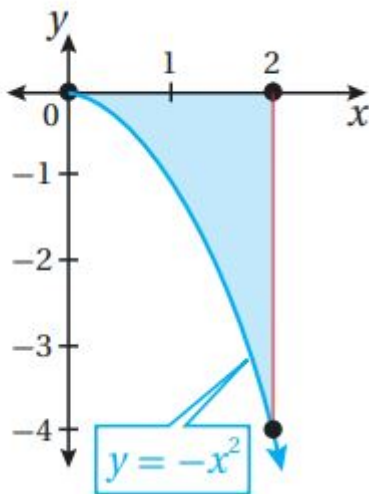
49



$$A = \int_0^1 x^3 dx = \left(\frac{1}{4}x^4\right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4}(1)^4\right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4\right) = \frac{1}{4}$$

إذن، المساحة هي: 14 وحدة مربعة.

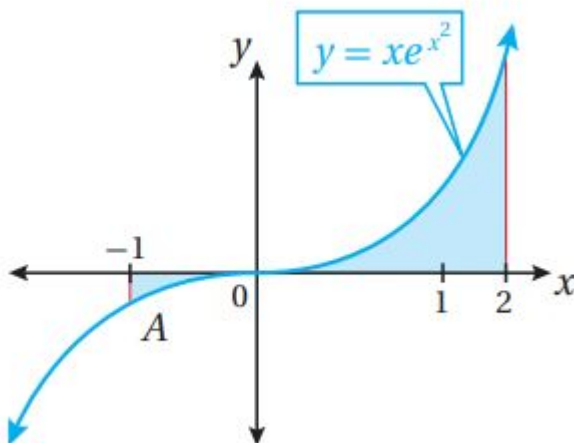
50



$$A = -\int_0^2 -x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right) = \frac{8}{3}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

51



$$A = -\int_{-1}^0 x e^{x^2} dx + \int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_{-1}^0 -x e^{x^2} dx + \int_0^2 x e^{x^2} dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dt = \frac{du}{2} \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 1 \quad x = 2 \Rightarrow u = 4$$

$$A = \int_1^0 -\frac{1}{2} e^u du + \int_0^4 \frac{1}{2} e^u du = \left(-\frac{1}{2} e^u\right)\Big|_1^0 + \left(\frac{1}{2} e^u\right)\Big|_0^4 = \left(-\frac{1}{2} e^0\right) - \left(-\frac{1}{2} e^1\right) + \left(\frac{1}{2} e^4\right) - \left(\frac{1}{2} e^0\right) = -1 + \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^4$$

إذن، المساحة هي: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^4$ وحدة مربعة.