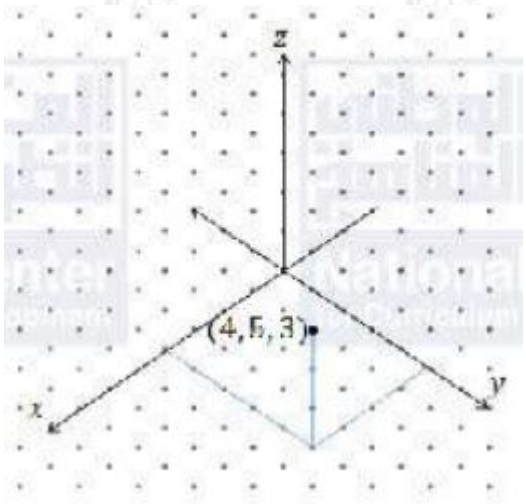
أتدرب وأحل المسائل

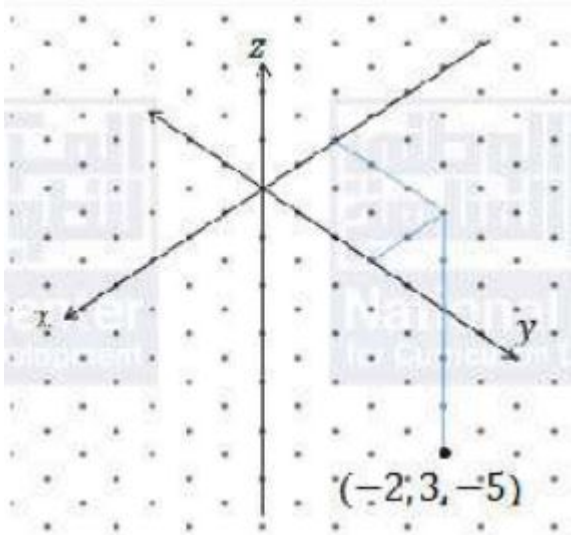
المتجهات في الفضاء

أعيّن كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

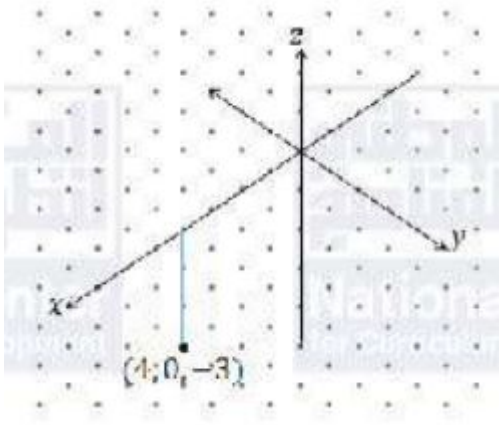
(1) (4,5,3)



(2) (5−,2,3−)



(3) (3−,4,0)



أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أعطي طرفاها في كل مما يأتي:

(4) (5,4,2),(2,8−,3)

A(3,−2,8),B(5,4,2)AB=(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2=22+62+(−6)2=76=219N=(x1+x22,y1+y22,z1+z22)=(3+52,−2+42,8+22)=(4,1(,5

(5) (5,3−,2),(2,7,0−)

A(−2,7,0),B(2,−5,3)AB=(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2=16+144+9=169=13N=(x1+x22,y1+y22,z1+z22)=(−2+22,7−52,0+32)=(0,1,(32

(6) (3,6,7−),(5−,12,8)

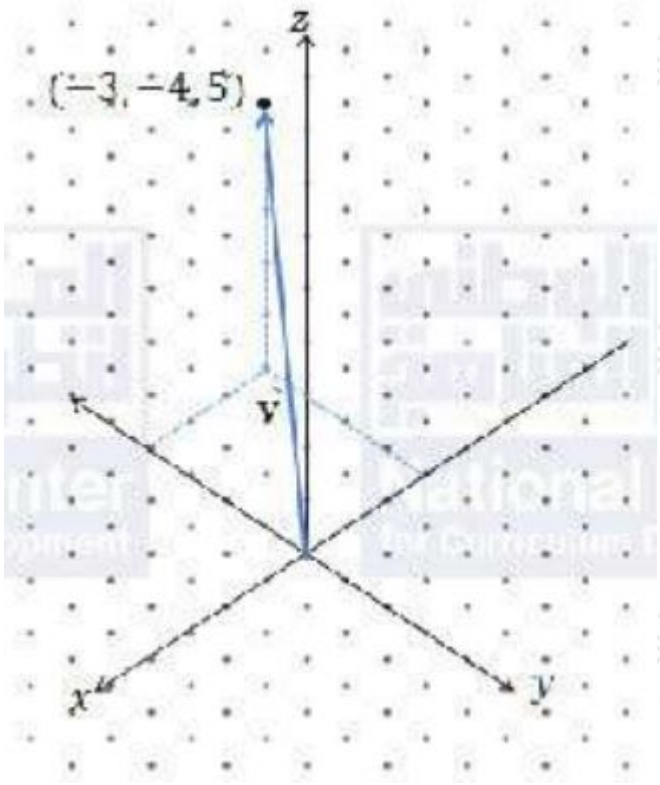
A(12,8,−5),B(−3,6,7)AB=(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2=225+4+144=373N=(x1+x22,y1+y22,z1+z22)=(12−32,8+62,−5+72)=(92,7(,1

(7) (6−,3,2),(8,4−,5−)

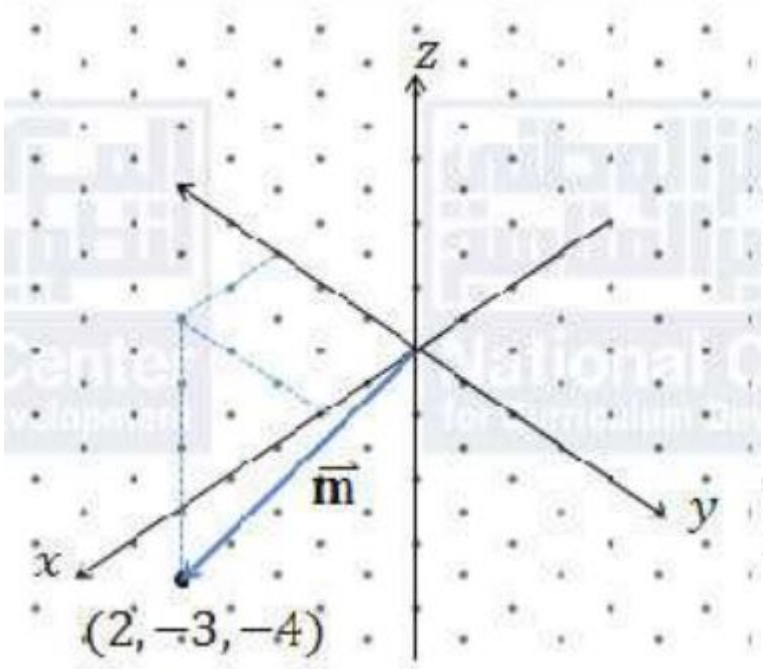
A(−5,−8,4),B(3,2,−6)AB=(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2=64+100+100=264=266N=(x1+x22,y1+y22,z1+z22)=(−5+32,−8+22,4−6(2)=(−1,−3,−1

أمثل كلاً من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء:

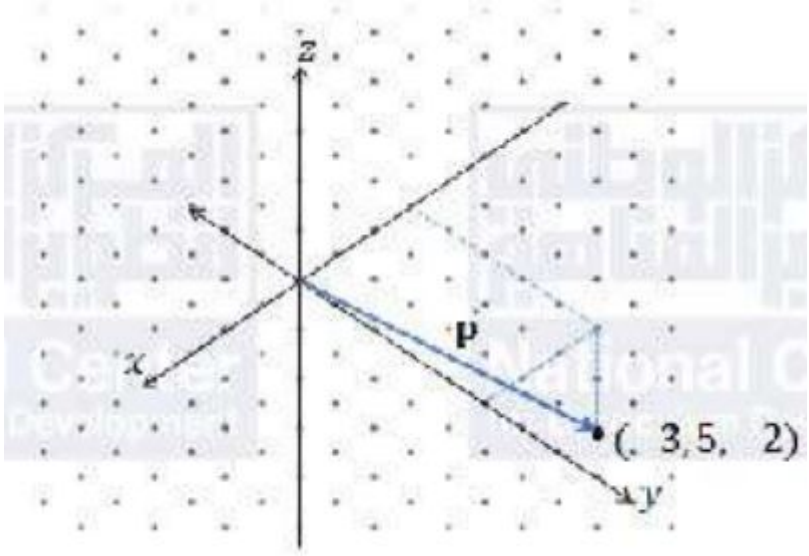
(8 $\vec{v}=\langle -3,-4,5\rangle$



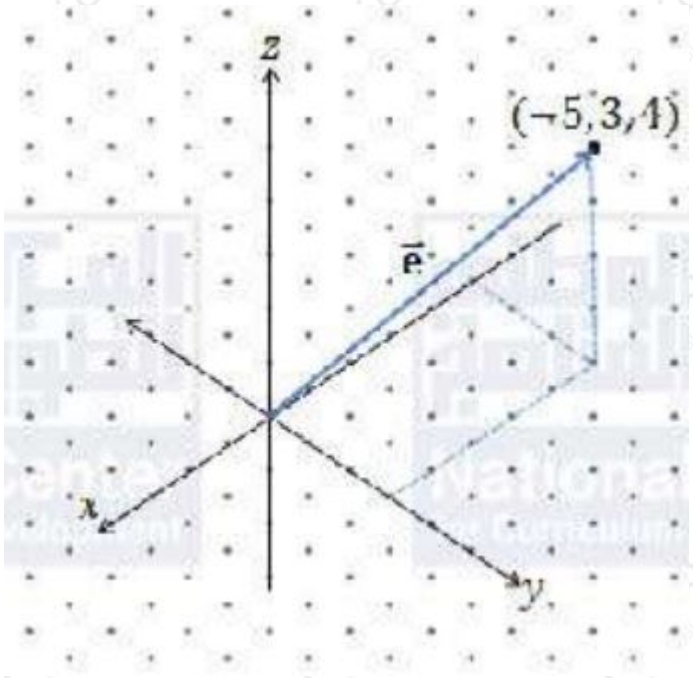
(9 $\vec{m}=\langle 2,-3,-4\rangle$



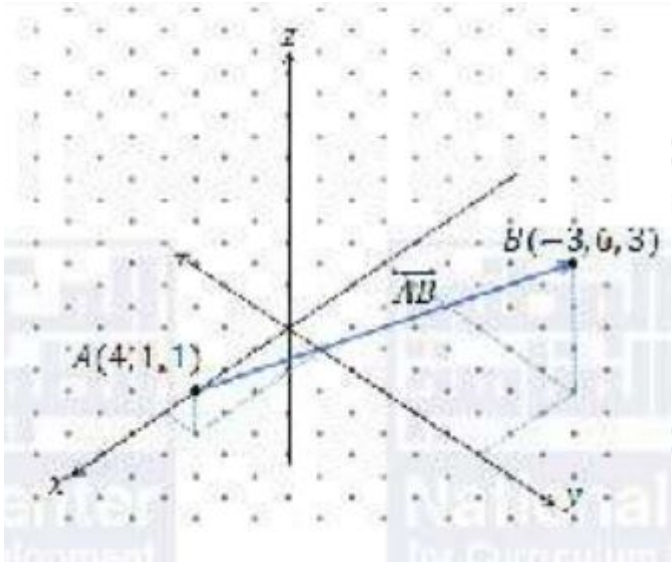
(10 $\vec{p}=\langle -3,5,-2\rangle$



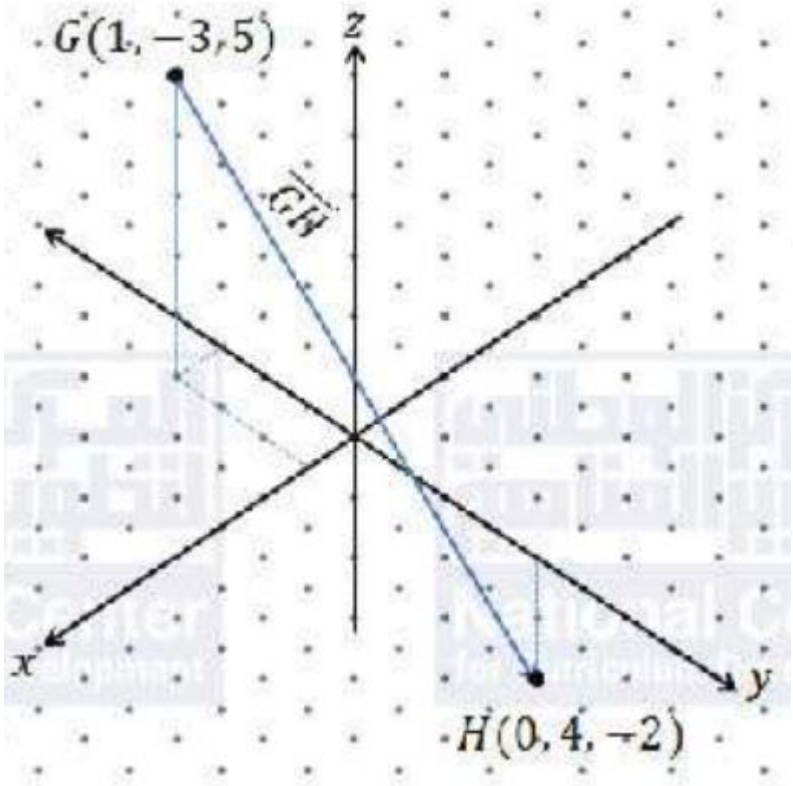
(e→=−5i^+3j^+4k^ (11



(AB→:A(4,1,1),B(−3,6,3) (12



(GH→:G(1,−3,5),H(0,4,−2) (13



أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه AB→ الذي أعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي:

(A(4,6,9),B(−3,2,5) (14

AB→=⟨−3−4,2−6,5−9⟩=⟨−7,−4,−4⟩|AB→|=v12+v22+v32=49+16+16=81=9

(A(−8,5,7),B(6,3,2) (15

AB→=⟨6−(−8),3−5,2−7⟩=⟨14,−2,−5⟩|AB→|=v12+v22+v32=196+4+25=225=15

(A(12,−5,4),B(4,1,−1) (16

AB→=⟨4−12,1−(−5),−1−4⟩=⟨−8,6,−5⟩|AB→|=v12+v22+v32=64+36+25=125=55

(A(24,−8,10),B(10,6,3) (17

AB→=⟨10−24,6−(−8),3−10⟩=⟨−14,14,−7⟩|AB→|=v12+v22+v32=196+196+49=441=21

(18) إذا كان OAB مثلثاً فيه: OA→=a,AB→=b→، والنقطة C هي منتصف AB→، فأكتب المتجه OC→ بدلالة a→ وb→.

OC¯=OA→+AC→=a→+12AB→=a→+12(b→−a→)=12a→+12b→=12(a(→→+b

إذا كان: e→=⟨−3,9,−4⟩,f→=5i^−3j^+7k^,g→=⟨−1,8,−5⟩، فأجد كلاً مما يأتي:

(3e→+4f→ (19

3e→+4f→=3⟨−3,9,−4⟩+4⟨5,−3,7⟩=⟨−9,27,−12⟩+⟨20,−12,28⟩=⟨11,15,16⟩

(e→+f→−3g→ (20

⟨e→+f→−3g→=⟨−3,9,−4⟩+⟨5,−3,7⟩−3⟨−1,8,−5⟩=⟨5,−18,18

(4e→−2f→+3g→ (21

⟨4e→−2f→+3g→=4⟨−3,9,−4⟩−2⟨5,−3,7⟩+3⟨−1,8,−5⟩=⟨−25,66,−45

(2e→+7f→−2g→ (22

$\langle 2e\rightarrow+7f\rightarrow-2g\rightarrow=2\langle -3,9,-4\rangle+7\langle 5,-3,7\rangle-2\langle -1,8,-5\rangle=\langle 31,-19,51$

إذا كانت: $A(-1,6,5),B(0,1,-4),C(2,1,1$ نقاطاً في الفضاء، فأجد كلاً مما يأتي:

(23) متجه موقع كل من النقاط: A وB وC.

$\langle OA\rightarrow=\langle -1,6,5\rangle,OB\rightarrow=\langle 0,1,-4\rangle,OC\rightarrow=\langle 2,1,1$

(24) متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A.

$\langle BA\rightarrow=OA\rightarrow-OB\rightarrow=\langle -1,6,5\rangle-\langle 0,1,-4\rangle=\langle -1,5,9$

(25) متجه الإزاحة من النقطة C إلى النقطة B.

$\langle CB\rightarrow=OB\rightarrow-OC\rightarrow=\langle 0,1,-4\rangle-\langle 2,1,1\rangle=\langle -2,0,-5$

(26) المسافة بين النقطة C والنقطة B.

$BC\rightarrow|=v12+v22+v32=4+0+25=29|$

أكتب كلاً من المتجهات الآنية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

$(g\rightarrow=\langle 5,7,-1\rangle$ (27

$\hat{}g\rightarrow=5i\hat{}+7\jmath\hat{}-k$

$(ST\rightarrow:S(1,0,-5),T(2,-2,0)$ (28

$\hat{}ST\rightarrow=(2-1)i\hat{}+(-2-0)\jmath\hat{}+(0-(-5))k\hat{}=\imath\hat{}-2\jmath\hat{}+5k$

$(a\rightarrow+3b\rightarrow:a\rightarrow=1i\hat{}+2j\hat{}-4k\hat{},b\rightarrow=4i\hat{}-3j\hat{}+5k\hat{}$ (29-

$\hat{}a\rightarrow+3b\rightarrow=-i\hat{}-2j\hat{}+4k\hat{}+12i\hat{}-9\jmath\hat{}+15k\hat{}=11i\hat{}-11\jmath\hat{}+19k-$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

$(4i\hat{}+3j\hat{}$ (30-

$\hat{}v\rightarrow=-4i\hat{}+3\jmath\hat{}|v\rightarrow|=16+9=5v\hat{}=15v\rightarrow=-45i\hat{}+35\jmath$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $v\rightarrow$

(143i^−24j^ (31

v→=143i^−24ȷ^|v→|=20449+576=21025=145v^=1145v→=1431 ^45i^−24145ı

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(72i^+33j^+56k^ (32−

v→=−72i^+33ȷ^+56k^|v→|=5184+1089+3136=9409=97v^=197 ^v→=−7297i^+3397ı^+5697k

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(33) (11138)

v→=(11138)|v→|=121+169+64=354v^=1354v→=(113541335483 (54

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(34) (5−4−2)

(v→=(5−4−2)|v→|=25+16+4=45=35v^=135v→=(535−435−235

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(n→=⟨−2,0,3⟩ (35

⟨n→=⟨−2,0,3⟩|n→|=4+0+9=13n^=113n→=⟨−213,0,313

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه n→

(36) إذا كان: ^a→=−3i^+4j^+12k^,b→=7i^+39j^−2k، وكان:
^3a→+cb→=−23i^−66j^+40k، فأجد قيمة c.

3a→+cb→=3(−3i^+4ȷ^+12k^)+c(7i^+39j^−2k^)=(−9+7c)i^+(12+39c)ȷ^+(36−2c)k^⇒−23i^−66j^+40k^=(−9+7c)ı^+(12+39c)(^ȷ^+(36−2c)k

في هذاه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

$9+7c=-23,12+39c=-66,36-2c=40\pi-$

وعند حل هذه المعادلات نجد أن لها الحل نفسه $c=-2$

(37) إذا كان: $(3v2 \rightarrow t,(2w+47-4) \rightarrow s=:$، وكان: $(631w \rightarrow ks=-4t$، فأجد قيمة كل من v وw وk.

$ks\rightarrow-4t\rightarrow=k(2w+47-4)-4(3v2)=(2k-12k(w+47)-4v-4k-8)\Rightarrow(631w)=(2k-12k(w+47)-4v-4k-8)\Rightarrow2k-12=6\Rightarrow k=9-4k-8=w\Rightarrow w=-36-8=-44k(w+47)-4v=31\Rightarrow9(-44+47)-4v=31\Rightarrow v=-1$

(38) إذا كان:
$5m\rightarrow+2p\rightarrow=4n,n\rightarrow=\langle6,2,-3\rangle,p\rightarrow=\langle2,a,-1\rangle$، فما قيمة الثابت a؟

$\langle5m\rightarrow+2p\rightarrow=4n\rightarrow5\langle4,1,-2\rangle+2\langle2,a,-1\rangle=4\langle6,2,-3\rangle\langle24,5+2a,-12\rangle=\langle24,8,-12$

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

$5+2a=8\Rightarrow a=32$

(39) إذا كان: $\langle v\rightarrow=\langle u-3,u+1,u-2\rangle$، وكان: $|v\rightarrow|=17$، فما قيمة u ؟

$|v\rightarrow|=v12+v22+v32=(u-3)2+(u+1)2+(u-2)2=17$ الأقواس وفك الطرفين بتربيع $u2-6u+9+u2+2u+1+u2-4u+4=2893u2-8u-275=0u=8\pm3$ $u=666=11$ أو $3642(3)=8\pm586u=-506=-253$

(40) إذا كان متجها الموقع للنقطة G والنقطة H هما:
$g\rightarrow=\langle-2,c+1,-8\rangle$ و$h\rightarrow=\langle c-1,-4,c+2\rangle$، على الترتيب، فأجد قيمة c، علماً بأن: $|GH\rightarrow|=19$، وأن: $c>0$.

$GH\rightarrow=\langle c-1-(-2),-4-(c+1),c+2-(-8)\rangle=\langle c+1,-5-c,c+10\rangle|GH\rightarrow|=(c+1)2+(-5-c)2+(c+10)2=19$ الأقواس وفك الطرفين بتربيع $c2+2c+1+25+10c+c2+c2+20c+100=361\Rightarrow3c2+32c-235=0\Rightarrow c=-32\pm38446=-32\pm626c=-946=-473$ أو $c=306=5$

ولكن $c>0$ إذن، $c=5$