مهارات التفكير العليا

التكامل بالكسور الجزئية

تبرير: أحل السؤالين الآتيين تباعاً:

(33) أجد: $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقيتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مبرراً أجايتي.

الحل الأول بضرب كل من البسط والمقام بـ e^{-x}

$$\int \frac{dx}{1+e^x}=\int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}=-\int \frac{-e^{-x}dx}{e^{-x}+1}=-\ln|e^{-x}+1|+C$$

الحل الثاني بالتعويض:

$$u=e^x\Rightarrow \frac{du}{dx}=e^x=u\Rightarrow dx=\frac{du}{u}$$
$$\int \frac{1}{1+e^x}dx=\int \frac{1}{1+u}\times\frac{du}{u}=\int \frac{1}{u(1+u)}du$$
$$\frac{1}{u(1+u)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}\Rightarrow 1=A(1+u)+Bu$$
$$u=0\Rightarrow A=1$$
$$u=-1\Rightarrow B=-1$$
$$\int \frac{1}{1+e^x}dx=\ln|u|-\ln|u+1|+C$$
$$\int \frac{1}{u(1+u)}du=\int\left(\frac{1}{u}+\frac{-1}{u+1}\right)du=\ln(e^{-x}+1)+C$$
$$\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)-1+C=-\ln(e^x+1)+C=\ln e^x-\ln=\ln$$

(34) أجد: $\int_{\ln 0}^{\ln 2}\frac{dx}{1+e^x}$.

$$\int_{\ln 0}^{\ln 2}\frac{dx}{1+e^x}=\ln(e^x+1)|_{\ln 0}^{\ln 2}=\ln(e^{\ln 2}+1)-(\ln e^{\ln 2}+1)$$
$$=\ln 4-\ln 2=\ln 3-0+\ln 2-\ln(e^0+1))=\ln 0-\ln$$

(35) تبرير: أثبت أن: $\int_{2}^{3}\frac{12x-4}{x^2(x-1)^2}dx=\ln\left(\frac{3^3}{4}\right)-\frac{5}{2}$.

$$\frac{5x^2-8x+12}{x^2(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\Rightarrow 5x^2-8x+1=A(x-1)^2+B(x)(x-1)+C(x)$$
$$x=0\Rightarrow A=1$$
$$x=1\Rightarrow C=-1$$
$$x=-1\Rightarrow 14=4A+4B-2C\Rightarrow B=2$$
$$\int_{2}^{3}\frac{5x^2-8x+12}{x^2(x-1)^2}dx=\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\left(-\frac{1}{x}+2\ln|x|-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|\right)|_{2}^{3}$$
$$=2\ln 3-\frac{1}{3}-2\ln 2+\frac{1}{2}-2\ln 2+1=\ln 9-\frac{1}{3}=\ln 2-\ln\frac{64}{9}+\frac{1}{2}-\ln 3+\ln 3-\frac{1}{3}=\ln 4-2\ln\frac{8}{3}-\frac{1}{2}$$

(36) تبرير: أثبت أن: $\int_{1}^{2}\frac{(x^4-4)dx}{x(x^2+1)}=4(1+\ln\frac{2}{\sqrt{5}})$.

u=x⇒u2=x⇒dx=2udux=9⇒u=3x=16⇒u=4∫9162xx−4dx=∫342uu2−42udu=∫344u2u2−4du=∫34(4+16u2−4)du16u2−4=16(u−2)(u+2)=Au−2+Bu+2⇒16=A(u+2)+B(u−2)u=2⇒A=4u=−2⇒B=−4∫34(4+16u2−4)du=∫34(4+4u−2+−4u+2)du=(4u+4l55=4+4ln1+4ln6−12−4ln2−4ln|u+2|)|34=16+4ln|u−2|−4lnn(5353)⇒∫9162xx−4dx=4(1+ln3=4(1+ln

(37) تبرير: أثبت أن: ∫14x2+9x+42x2+5x+3dx=2+12ln512014x2+9x+42x2+5x+3dx=2+12ln.

4x2+9x+42x2+5x+3=2−x+22x2+5x+3x+22x2+5x+3=x+2(x+1)(2x+3)=Ax+1+B2x+3⇒x+2=A(2x+3)+B(x+1)x=−1⇒A=1x=−32⇒B=−1∫014x2+9x+42x2+5x+3dx=∫01(2−1x+1+121−5−0+ln2+12ln|2x+3|)|01=2−ln|x+1|+12lnx+3)dx=(2x−ln53)=2+12ln4−ln5−ln3=2+12(ln5−12ln4+12ln3=2−12ln12ln12

تحد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(xxdx (38+1∫

xxdxu=1+x⇒dudx=14x1+x,1+x=⇒dx=4x1+xdu=4u(u2−+1∫1)du∫1+xxdx=∫u(u2−1)24u(u2−1)du=4u2u2−1=4+4u2−14u2−1=4(u−1)(u+1)=Au−1+Bu+1⇒4=A(u+1)+B(u−1)u=1⇒A=|u2u=−1⇒B=−2∫4u2u2−1du=∫(4+2u−1+−2u+1)du=4u+2ln||u−1u+1|+C⇒∫1+xxdx=41+x+2ln|u+1|+C=4u+2ln−1|−2ln1+x−11+x+1|+C

(x16x4−1dx (39∫

x16x4−1=x(4x2+1)(2x−1)(2x+1)=Ax+B4x2+1+C2x−1+D2x+1⇒x=(Ax+B)(2x−1)(2x+1)+C(4x2+1)(2x+1)+D(4x2+1)(2x−1)x=12⇒C=18x=−12⇒D=18x=0⇒0=−B+C−D⇒B=0x=1⇒1=3A+3B+15C+5D⇒A=−12∫x16x4−1dx=∫(−12x4x2+1+182x

|2x+1|+|2x−1|+116ln(4x2+1)+116ln−1+182x+1)dx=−116ln|4x2−14x2+1|+CC=116ln

(1x−x3dx (40∫

u=x16⇒dudx⇒16x−56⇒dx=6x56du=6u5duu=x16⇒x=u6⇒x=u3,x3=u2⇒∫1x−x3dx=∫6u5u3−u2du=∫6u3u−1du=∫(6u2+6u||u−1|+C=2x+3x3+6x6+6ln+6+6u−1)du=2u3+3u2+6u+6lnx6−1|+C