

أتحقق من فهمي

التكامل بالكسور الجزئية

عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة

أتحقق من فهمي صفحة (49):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x-7x^2-x-6)dx \text{ (a)}$$

$$\begin{aligned} x-7x^2-x-6 &= x-7(x-3)(x+2) = Ax-3+Bx+2 \Rightarrow x-7 = A(x+2)+B(x-3) \\ &= 3 \Rightarrow A = -45 \quad x = -2 \Rightarrow B = 95 \\ \int x-7x^2-x-6 dx &= \int (-45x-3+95x+2) dx = - \\ &|x+2| + C|x-3| + 95 \ln |45x-3| \end{aligned}$$

$$(3x-1x^2-1)dx \text{ (b)}$$

$$\begin{aligned} 3x-1x^2-1 &= 3x-1(x-1)(x+1) = Ax-1+Bx+1 \Rightarrow 3x-1 = A(x+1)+B(x-1) \\ |x-1| + 2|x+1| &= 1 \Rightarrow A = 1 \quad x = -1 \Rightarrow B = 2 \\ \int 3x-1x^2-1 dx &= \int (1x-1+2x+1) dx = \ln \\ &|x+1| + Cn \end{aligned}$$

عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مكرر

أتحقق من فهمي صفحة (51):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x+4(2x-1)(x-1)^2)dx \text{ (a)}$$

$$\begin{aligned} x+4(2x-1)(x-1)^2 &= A2x-1+Bx-1+C(x-1)^2 \Rightarrow x+4 = A(x-1)^2+B(2x- \\ &1)(x-1)+C(2x-1) \quad x=1 \Rightarrow A=18 \quad x=1 \Rightarrow C=5 \quad x=0 \Rightarrow 4=A+B-C \Rightarrow B=-9 \\ \int x+ &|2x-1|-9|4(2x-1)(x-1)^2 dx = \int (182x-1+-9x-1+5(x-1)^2) dx = 182 \ln \\ &|x-1|-5x-1+C|2x-1|-9 \ln |x-1|-5x-1+C = 9 \ln n \end{aligned}$$

$$(x^2-2x-4x^3-4x^2+4x)dx \text{ (b)}$$

$$x^2 - 2x - 4 = Ax(x-2) + Bx + C(x-2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = Ax^2 - 2Ax + Bx + Cx^2 - 4Cx + 4C$$

$$x^2 - 2x - 4 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x + (4C-4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ -2A+B=-2 \\ 4C-4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2 - 2x - 4}{(x-2)^2} dx = \int (2x - 2 + \frac{-1}{x-2}) dx = 2|x-2| + 2x + 2 - \ln|x-2| + C$$

عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل، وغير مكرر

أتحقق من فهمي صفحة (52):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

(a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx$

$$3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$$

$$3x+4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 - 3Bx + Cx - 3C$$

$$3x+4 = (A+B)x^2 + (-3B+C)x + (4A-3C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3B+C=3 \\ 4A-3C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx = \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C$$

(b) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx$

$$7x^2-x+1 = A(x+1) + (Bx+C)(x^2-x+1)$$

$$7x^2-x+1 = Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Cx^2 - Cx + Cx - C$$

$$7x^2-x+1 = Bx^3 + (C-B)x^2 + (A+C)x + (A-C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ C-B=7 \\ A+C=-1 \\ A-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ C=7 \\ A=-4 \end{cases}$$

$$\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx = \int \left(\frac{-4}{x+1} + \frac{7x}{x^2-x+1} \right) dx = -4 \ln|x+1| + 2 \ln|x^2-x+1| + 2 \ln|x| + C$$

درجة كثيرة الحدود في البسط مساوية لدرجة كثيرة الحدود في المقام، أو أكبر منها

أتحقق من فهمي صفحة (53):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

(a) $\int (4x^3 - 52x^2 - x - 1) dx$

$$\int (4x^3 - 52x^2 - x - 1) dx = x^4 - \frac{52}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 = x^4 - 26x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$$

$$-4(2x+1)(x-1)=A(2x+1)+B(x-1)\Rightarrow 3x-4=A(x-1)+B(2x+1)x=-12\Rightarrow A=113x=1\Rightarrow B=-13$$

$$\int 4x^3-52x^2-x-1dx=\int (2x+1+1132x+1+-13x-1|x-1|+C|2x+1|-13\ln)dx=x^2+x+116\ln$$

$$(x^2+x-1x^2-x)dx \text{ (b)}$$

$$(x^2-x)+Cx^2+x-1x^2-x)dx=\int (1+2x-1x^2-x)dx=x+\ln$$

التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة

أتحقق من فهمي صفحة (54):

أجد كل قيمة من التكاملين الآتيين:

$$(342x^3+x^2-2x-4x^2-4)dx \text{ (a)}$$

$$\int (342x^3+x^2-2x-4x^2-4)dx=\int 34(2x+1+6xx^2-4)dx=(x^2+x+3\ln|1255)=8+3\ln 12)-(12+3\ln 4)|34=(20+3\ln$$

$$(563x-10x^2-7x+12)dx \text{ (b)}$$

$$3x-10x^2-7x+12=3x-10(x-3)(x-4)=A(x-3)+B(x-4)\Rightarrow 3x-10=A(x-4)+B(x-3)x=3\Rightarrow A=1x=4\Rightarrow B=2$$

$$\int 563x-10x^2-7x+12dx=\int 56(1x-3+2x62=\ln 3+\ln 1)=\ln 2+2\ln 2-(\ln 3+2\ln|x-4|)|56=\ln|x-3|+2\ln|x-4|dx=(\ln$$

التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض

أتحقق من فهمي صفحة (57):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x-1)dx \text{ (a)}$$

$$\int \tan^2 \sec^2 x dx$$

$$\int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$\int \tan^2 x \sec^2 x dx = \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^4 x dx - \int \sec^2 x dx$$

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx = \int \sec^2 x dx + \int \sec^2 x \tan^2 x dx$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 u du = \int (u^2 - 1) du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} dx$$

$$\Rightarrow A(x+1) + B(x-1) = 1 \Rightarrow Ax + A + Bx - B = 1$$

$$\Rightarrow (A+B)x + (A-B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

(b) $\int \frac{1}{(e^x-1)(e^x+4)} dx$

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{1}{(e^x-1)(e^x+4)} dx = \int \frac{1}{(u-1)(u+4)} \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{1}{u(u-1)(u+4)} du = \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+4} du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u(u-1)(u+4)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+4}$$

$$\Rightarrow 1 = A(u-1)(u+4) + Bu(u+4) + Cu(u-1)$$

$$\Rightarrow 1 = A(u^2+3u-4) + B(u^2+4u) + C(u^2-u)$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B+C)u^2 + (3A+4B-C)u - 4A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+4B-C=0 \\ -4A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1/4 \\ B=1/4 \\ C=1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(e^x-1)(e^x+4)} dx = -\frac{1}{4} \ln|e^x-1| + \frac{1}{4} \ln|e^x+4| + \frac{1}{2} \ln|e^x| + C$$