

أتحقق من فهمي

التكامل بالكسور الجزئية

عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة

أتحقق من فهمي صفحة (49):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x-7x^2-x-6)dx \text{ (a)}$$

$$\begin{aligned} x-7x^2-x-6 &= x-7(x-3)(x+2) = Ax-3+Bx+2 \Rightarrow x-7 = A(x+2)+B(x-3) \\ x=3 &\Rightarrow A = -45 \\ x=-2 &\Rightarrow B = 95 \\ \int x-7x^2-x-6 dx &= \int (-45x-3+95x+2) dx = -\frac{45}{2}|x+2| + C|x-3| + 95 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

$$(3x-1x^2-1)dx \text{ (b)}$$

$$\begin{aligned} 3x-1x^2-1 &= 3x-1(x-1)(x+1) = Ax-1+Bx+1 \Rightarrow 3x-1 = A(x+1)+B(x-1) \\ |x-1|+2|x=1 &\Rightarrow A = 1 \\ x=-1 &\Rightarrow B = 2 \\ \int 3x-1x^2-1 dx &= \int (1x-1+2x+1) dx = \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مكرر

أتحقق من فهمي صفحة (51):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x+4)(2x-1)(x-1)^2 dx \text{ (a)}$$

$$\begin{aligned} x+4(2x-1)(x-1)^2 &= A2x-1+Bx-1+C(x-1)^2 \Rightarrow x+4 = A(x-1)^2 + B(2x-1)(x-1) + C(2x-1) \\ x=1 &\Rightarrow A = 18 \\ x=1/2 &\Rightarrow C = 5 \\ x=0 &\Rightarrow 4 = A+B-C \Rightarrow B = -9 \\ \int x+4(2x-1)(x-1)^2 dx &= \int (18x-1 + -9x-1 + 5(x-1)^2) dx = 18 \ln|x-1| - 5x-1 + C|2x-1| - 9 \ln|x-1| - 5x-1 + C = 9 \ln|x-1| - 5x-1 + C \end{aligned}$$

$$(x^2-2x-4x^3-4x^2+4x)dx \text{ (b)}$$

$$x^2 - 2x - 4 = Ax(x-2) + Bx + C(x-2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = Ax^2 - 2Ax + Bx + Cx^2 - 4Cx + 4C$$

$$x^2 - 2x - 4 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x + (4C-4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ -2A+B=-2 \\ 4C-4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\int (2x-2-1(x-2)^2) dx = 2 \int (x-1-x^2+2x-2) dx = 2 \int (-x^2+3x-3) dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 6x + C = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 6x + C$$

عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل، وغير مكرر

أتحقق من فهمي صفحة (52):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int (3x+4)(x-3)(x^2+4) dx \quad (a)$$

$$3x+4 = A(x-3) + B(x^2+4) + C(x-3)(x^2+4)$$

$$3x+4 = Ax - 3A + Bx^2 + 4B + C(x^3 - 3x^2 + 4x - 12)$$

$$3x+4 = Cx^3 + (B-3C)x^2 + (A+4C)x + (-3A+4B-12C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ B-3C=0 \\ A+4C=3 \\ -3A+4B-12C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ B=0 \\ A=3/4 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\int (3x+4)(x-3)(x^2+4) dx = \int (3x-3x^2-12x+4x^2-12) dx = \int (-3x^2+3x-12) dx = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 12x + C$$

$$\int (7x^2-x+1)(x^3+1) dx \quad (b)$$

$$7x^2-x+1 = A(x^3+1) + B(x^2-x+1) + C(x^3+1)(x^2-x+1)$$

$$7x^2-x+1 = Ax^3 + A + Bx^2 - Bx + B + C(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$7x^2-x+1 = Cx^5 + (A+C)x^3 + (B-C)x^2 + (-B+C)x + (A+B-C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ A+C=0 \\ B-C=0 \\ -B+C=-1 \\ A+B-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ A=0 \\ B=-1 \\ C=-2 \end{cases}$$

$$\int (7x^2-x+1)(x^3+1) dx = \int (7x^2-x+1) dx = \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

درجة كثيرة الحدود في البسط مساوية لدرجة كثيرة الحدود في المقام، أو أكبر منها

أتحقق من فهمي صفحة (53):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int (4x^3-52x^2-x-1) dx \quad (a)$$

$$\int (4x^3-52x^2-x-1) dx = \int (2x+1+3x-42x^2-x-1) dx = \int (3x-42x^2-x-1) dx = \frac{3}{2}x^2 - 14x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - C$$

$$-4(2x+1)(x-1)=A(2x+1)+B(x-1)\Rightarrow 3x-4=A(x-1)+B(2x+1)x=-12\Rightarrow A=113x=1\Rightarrow B=-13$$

$$\int 4x^3-52x^2-x-1dx = \int (2x+1+1132x+1+-13x-1|x-1|+C|2x+1|-13\ln)dx = x^2+x+116\ln$$

$$(x^2+x-1x^2-x)dx \text{ (b)}$$

$$(x^2-x)+Cx^2+x-1x^2-x)dx = \int (1+2x-1x^2-x)dx = x+\ln$$

التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة

أتحقق من فهمي صفحة (54):

أجد كل قيمة من التكاملين الآتيين:

$$(342x^3+x^2-2x-4x^2-4)dx \text{ (a)}$$

$$\int (342x^3+x^2-2x-4x^2-4)dx = \int 34(2x+1+6xx^2-4)dx = (x^2+x+3\ln|1255)=8+3\ln(12)-(12+3\ln(4))|34=(20+3\ln$$

$$(563x-10x^2-7x+12)dx \text{ (b)}$$

$$3x-10x^2-7x+12=3x-10(x-3)(x-4)=A(x-3)+B(x-4)\Rightarrow 3x-10=A(x-4)+B(x-3)x=3\Rightarrow A=1x=4\Rightarrow B=2$$

$$\int 563x-10x^2-7x+12dx = \int 56(1x-3+2x62=\ln(3)+\ln(1))=\ln(2)+2\ln(2)-(\ln(3)+2\ln(|x-4|))|56=\ln(|x-3|)+2\ln(-4)dx=(\ln$$

التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض

أتحقق من فهمي صفحة (57):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(x-1)dx \text{ (a)}$$

$$\int \tan^2 \sec^2 x dx$$

$$\int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x (x-1) dx = \int \sec^2 x dx - \int x \sec^2 x dx$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int x \sec^2 x dx = \int u^2 - x - 1 dx = \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \int \sec^2 x (x-1) dx = \int \sec^2 x dx - \int x \sec^2 x dx$$

$$x = \int \frac{1}{u^2-1} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{1}{u-1} du = \ln|u-1| + C = \ln|x-1| + C$$

(b) $\int \frac{1}{(x-1)(x+4)} dx$

$$\begin{aligned} u = x-1 \Rightarrow du = dx &\Rightarrow \int \frac{1}{(u)(u+5)} du \\ \frac{1}{u(u+5)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+5} &\Rightarrow 1 = A(u+5) + B(u) \\ 1 = Au + 5A + Bu &\Rightarrow 1 = (A+B)u + 5A \\ \begin{cases} A+B=0 \\ 5A=1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases} \\ \int \frac{1}{(x-1)(x+4)} dx &= \int \left(\frac{-1/5}{x-1} + \frac{1/5}{x+4} \right) dx \\ &= -\frac{1}{5} \ln|x-1| + \frac{1}{5} \ln|x+4| + C \end{aligned}$$