

أتدرّب وأحل المسائل

التكامل بالتعويض

أحد كلاًً من التكاملات الآتية:

$$(xx^2+4dx) \int$$

$$xx^2+4dxu=x^2+4 \Rightarrow du/dx=2x \Rightarrow dx=du/2x \int xx^2+4dx=\int xu \times du/2x=\int 12u \int du=\int 12u-12du=u12+C=x^2+4+C$$

$$(x^2(2x^3+5)4dx) \int$$

$$x^2(2x^3+5)4dxu=2x^3+5 \Rightarrow du/dx=6x^2 \Rightarrow dx=du/6x^2 \int x^2(2x^3+5)4dx=\int x \int 2u^4 \times du/6x^2=\int 16u^4du=130u^5+C=130(2x^3+5)^5+C$$

$$(3xx^2+7dx) \int$$

$$3xx^2+7dxu=x^2+7 \Rightarrow du/dx=2x \Rightarrow dx=du/2x \int 3xx^2+7dx=\int 3xu \times du/2x=\int 32u^12du=u32+C=(x^2+7)3+C$$

$$(x^6e^1-x^7dx) \int$$

$$x^6e^1-x^7dxu=1-x^7 \Rightarrow du/dx=-7x^6 \Rightarrow dx=du/-7x^6 \int x^6e^1-x^7dx=\int x^6eu \int xdu/-7x^6=\int -17eudu=-17eu+C=-17e^1-x^7+C$$

$$(x^4(x^5+9)3dx) \int$$

$$x^4(x^5+9)3dxu=x^5+9 \Rightarrow du/dx=5x^4 \Rightarrow dx=du/5x^4 \int x^4(x^5+9)3dx=\int x^4u^3 \int xdu/5x^4=\int 15u^3du=-110u^2+C=-110(x^5+9)^2+C$$

$$(3x^2-1)ex^3-xdx) \int$$

$$3x^2-1)ex^3-xdxu=x^3-x \Rightarrow du/dx=3x^2-1 \Rightarrow dx=du/(3x^2-1) \int (3x^2-1)ex \int 3-xdu=\int (3x^2-1)eudu=eu+C=ex^3-x+C$$

$$(3x-3x^2-2x+4dx) \int$$

$$bbb \int 3x-3x^2-2x+4dxu=x^2-2x+4 \Rightarrow du/dx=2x-2 \Rightarrow dx=du/2x-2 \int 3x-3$$

$$x^2 - 2x + 4dx = \int 3x - 3u \times du \quad 2x - 2 = \int 3(x-1)u \times du \quad 2(x-1) = \int 32u - 12du = \\ 3u^2 + C = 3x^2 - 2x + 4 + C$$

$$(x)dx \quad (81x \ln \int$$

$$|x dx = \int 1x u \times x du = \int 1 u du = \ln x \Rightarrow du dx = 1x \Rightarrow dx = x du \quad \int 1x \ln x dx u = \ln 1x \ln \int x | + C | \ln u | + C = \ln$$

$$(x)4dx \quad (9x(1+\cos \int$$

$$x(1+\cos x) \int \sin x \Rightarrow dx = du - \sin x \Rightarrow du dx = -\sin x) 4dx u = 1 + \cos x(1 + \cos \int x) 5 + C x = \int -u 4du = -15u^5 + C = -15(1 + \cos x) u^4 \times du - \sin x) 4dx = \int \sin$$

$$(2x)dx \quad (102x \cos \int 5 \int$$

$$2x c 2x \int \sin 5 2x \Rightarrow dx = du \quad 2 \cos 2x \Rightarrow du dx = 2 \cos 2x dx u = \sin 2x \cos b b b \int \sin 5 2x 6 + C 2x = \int 12u^5 du = 112u^6 + C = 112(\sin 2x \times du \quad 2 \cos 2x dx = \int u^5 \cos os$$

$$(1x)x2dx \quad (11 \sin \int$$

$$(u)x2(1x)x2dx = \int \sin(1x)x2dx u = 1x \Rightarrow du dx = -1x2 \Rightarrow dx = -x2du \quad \int \sin \int (1x) + Cu + C = \cos u du = \cos x - x2du = \int -\sin$$

$$(x)dx \quad (12x \sin \cos \int$$

$$xex dx = \int \cos x \sin x \int \cos x \Rightarrow dx = du \cos x \Rightarrow du dx = \cos x dx u = \sin x \sin \cos \int x + C x + C = -1 \sin x = \int 1 e u du = \int e - u du = -e - u + C = -e - \sin u \times du \cos$$

$$(ex(2+ex))5dx \quad (13 \int$$

$$ex(2+ex)5dx u = 2+ex \Rightarrow du dx = ex \Rightarrow dx = du ex \quad \int ex(2+ex)5dx = \int ex u 5 \times d \int u ex = \int u 5 du = 16u^6 + C = 16(2+ex)^6 + C$$

$$(x)x dx \quad (14) (\ln \cos \int$$

$$(u)xxx du = x) x dx = \int \cos(\ln x \Rightarrow du dx = 1x \Rightarrow dx = x du \quad \int \cos x) x dx u = \ln(\ln \cos \int x) + C (\ln u + C = \sin u du = \sin \int \cos$$

$$(3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x) 4dx \quad (15) \int$$

$$3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x)4dxu = x^3 - x^2 - x \Rightarrow du dx = 3x^2 - 2x - 1 \Rightarrow dx = du \int$$

$$3x^2 - 2x - 1 \int (3x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x)4dx = \int (3x^2 - 2x - 1)u^4 \times du 3x^2 - 2x - 1 = \int u^4 du = 15u^5 + C = 15(x^3 - x^2 - x)^5 + C$$

أحد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(2x-1)ex^2 - xdx \quad (16) \quad 02 \int$$

$$2x-1)ex^2 - xdxu = x^2 - x \Rightarrow du dx = 2x-1 \Rightarrow dx = du 2x-1 x=2 \Rightarrow u=(2)02 \int$$

$$2-2=2x=0 \Rightarrow u=(0)2-0=0 \int 02(2x-1)ex^2 - xdx = \int 02(2x-1)eudu 2x-1 = \int 02eudu = eu|02 = e2 - e0 = e2 - 1$$

$$(12e^1/xx^2dx \quad (17) \int$$

$$12e^1xx^2dxu = 1x \Rightarrow du dx = -1x^2 \Rightarrow dx = -x^2du x=2 \Rightarrow u=12x^2 = 1x^1dx = \int$$

$$\int 112eux^2 - x^2du = \int 112 - eudu = -eu|112 = -e12 + e = -e + e$$

$$(xxdx \quad (18) \quad ee^3 \ln \int$$

$$e=e^3=3x=e \Rightarrow u=\ln x \Rightarrow du dx = 1x \Rightarrow dx=xdu x=e^3 \Rightarrow u=\ln xx dxu = \ln ee^3 \ln \int$$

$$xxdx = \int 13uxxdu = \int 13u^12du = 23u^32|13 = 23u^3|13 = 2333 - 231 \int ee^3 \ln$$

$$13 = 23 - 23$$

$$(x^3+x)x^4+2x^2+1dx \quad (19) \quad 01 \int$$

$$x^3+x)x^4+2x^2+1dxu = x^4+2x^2+1 \Rightarrow du dx = 4x^3+4x \Rightarrow dx = du 4x^3+4 \quad 01 \int$$

$$xx=1 \Rightarrow u=(1)4+2(1)2+1=4x=0 \Rightarrow u=(0)4+2(0)2+1=1 \int 01(x^3+x)x^4+2$$

$$x^2+1dx = \int 14(x^3+x)u \times du 4x^3+4x = \int 14(x^3+x)u \times du 4(x^3+x) = \int 1414u$$

$$12du = 16u^32|14 = 16u^3|14 = 1643 - 1613 = 76$$

$$(03xx^2+1dx \quad (20) \int$$

$$03xx^2+1dxu = x^2+1 \Rightarrow du dx = 2x \Rightarrow dx = du 2xx = 3 \Rightarrow u=10x=0 \Rightarrow u=1 \int 03x \int$$

$$x^2+1dx = \int 110xu \times du 2x = \int 11012u - 12du = u12|110 = u|110 = 10 - 1$$

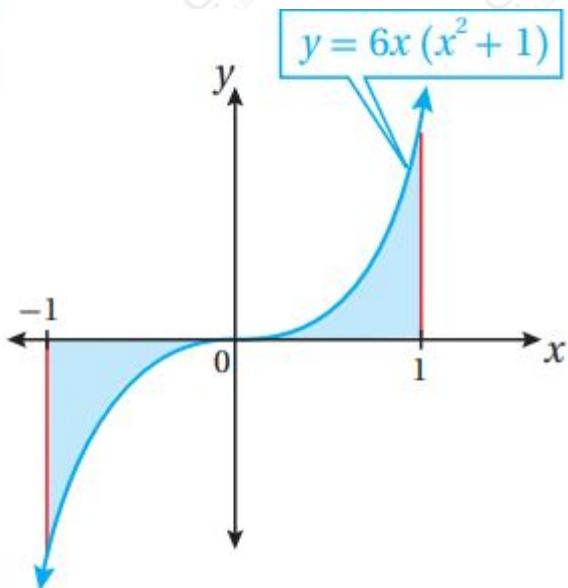
$$(122x+1(x^2+x+4)3dx \quad (21) \int$$

$$122x+1(x^2+x+4)3dxu = x^2+x+4 \Rightarrow du dx = 2x+1 \Rightarrow dx = du 2x+1 x=2 \Rightarrow u \int$$

$$= (2)2+2+4=10x=1 \Rightarrow u=(1)2+1+4=6 \int 122x+1(x^2+x+4)3dx=\int 6102x+1u3\times du 2x+1=\int 610u-3du=-12u-2|610=-12u2|610$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

22



$$A = -\int_{-1}^1 -106x(x^2+1)dx + \int_0^1 016x(x^2+1)dx$$

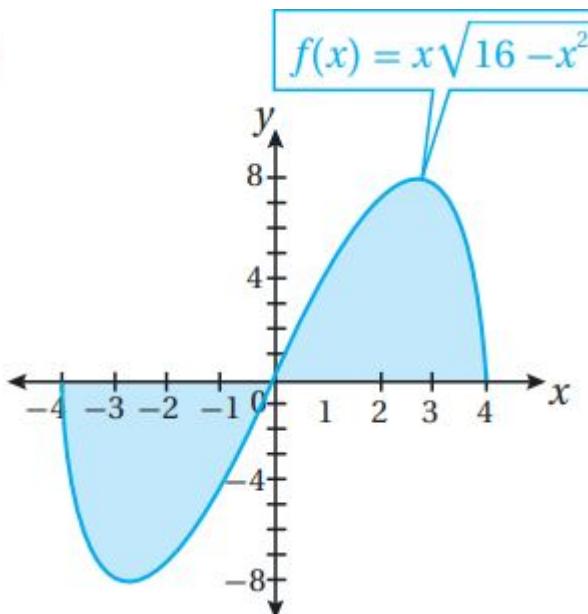
هناك طريقتان للحل: إما التكامل بالتعويض، أو تكامل كثير حدود بعد توزيع الأقواس.

طريقة التكامل بالتعويض:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1 \Rightarrow du/dx = 2x \Rightarrow dx = du/2x \\ x &= 0 \Rightarrow u = 1 \\ x &= 1 \Rightarrow u = 2 \\ A &= -\int_{-1}^1 -106x(x^2+1)dx + \int_0^1 016x(x^2+1)dx = -\int_{-1}^1 -16xu \times du + \int_0^1 126xu \times du \\ &= -\int_{-1}^1 -213udu + \int_0^1 123udu = -32u^2|_{-1}^1 + 32u^2|_0^1 \\ &= -32(1)^2 + 32(2)^2 - 32(1)^2 = 9 \end{aligned}$$

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 9 وحدات مربعة.

23



$$\begin{aligned}
 A &= -\int_{-4}^{-x} 40x(16-x^2) dx + \int_{-x}^{4} 40x(16-x^2) dx \\
 u &= 16-x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = du/-2x \\
 x=0 &\Rightarrow u=16-(0)^2=16 \\
 x=-4 &\Rightarrow u=16-(-4)^2=0 \\
 x=4 &\Rightarrow u=16-(4)^2=0 \\
 A &= -\int_{-4}^{-x} 40x(16-x^2) dx + \int_{-x}^{4} 40x(16-x^2) dx = -\int_{16}^{0} 16x du - \int_{0}^{16} 16x du \\
 &= \int_{0}^{16} 16x du + \int_{16}^{0} 16x du = 16x^2 \Big|_0^{16} - 16x^2 \Big|_{16}^0 = 16(16)^2 - 16(0)^2 - 16(0)^2 + 16(16)^2 = 1280
 \end{aligned}$$

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 1283 وحدات مربعة.

في كل مما يأتي المشتقه الأولى للاقتران $x(f)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $x(f)$:

$$(f'(x)=xe^4-x^2; (-2,1)) \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int xe^4-x^2 dx = e^4-x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = du/-2x \\
 f(x) &= \int xe^4-x^2 dx = e^4-x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = du/-2x \\
 &= \int xe^4-x^2 dx = e^4-x^2 + C = -12e^4-x^2 + C
 \end{aligned}$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعرض النقطة $(-2,1)$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -12e^4-x^2 + C \Rightarrow f(-2) = -12e^4-(-2)^2 + C \Rightarrow 1 = -12+C \Rightarrow C = 32 \\
 f(x) &= -12e^4-x^2 + 32
 \end{aligned}$$

$$(f'(x)=2x(1-x^2); (0,-1)) \quad (25)$$

$$f(x) = \int 2x(1-x^2) dx = 2x-x^3 + C$$

$$= \int 2xu^2 \times du - 2x = \int -u - 2du = u - 1 + C = 11 - x^2 + C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعرض النقطة ١-٠:

$$f(x) = 11 - x^2 + C \Rightarrow f(0) = 11 - 0^2 + C \Rightarrow -1 = 1 + C \Rightarrow C = -2 \\ f(x) = 11 - x^2 - 2$$

(26) يتحرك جسم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $\vec{v} = -2t\hat{i} + (1+t^2)\hat{j}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و \vec{v} سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموضع الابتدائي للجسم $4\hat{m}$ ، فأجد موقع الجسم بعد t ثانية من بدء الحركة.

$$s(t) = \int -2t(1+t^2)^3 dt + C = 1+t^2 \Rightarrow du/dt = 2t \Rightarrow dt = du/(2t) \int -2t(1+t^2)^3 dt = \int -u^3 du/2 = -u^4/8 + C = -u^{-3}/8 + C$$

بما أن الموضع الابتدائي للجسيم 4 m , إذن, $s(0) = 4$:

$$s(t) = 21 + t^2 + C \Rightarrow f(0) = 21 + 0^2 + C \Rightarrow 4 = 2 + C \Rightarrow C = 2$$



(27) زراعة: يمثل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V(t) = 0.4t^3 + 30.2t^4 + 80003$ هو معدل التغير في سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$ ، علمًا بأن سعره الآن 5000 JD.

$$V(t) = \int 0.4t^3 0.2t^4 + 8000 \, dt = 0.2t^4 + 8000 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0.8t^3 \Rightarrow \frac{dt}{dt} = \frac{du}{0.8t^3}$$

$$V(t) = \int 0.4t^3 0.2t^4 + 8000 dx = \int 0.4t^3 u^3 du 0.8t^3 = \int 12u - 13du = 13u^2/3 + C = 13u^2/3 + C = 13(0.2t^4 + 8000)^{2/3} + C$$

بما أن سعر دونم الأرض الآن هو 5000 دينار، إذن، $V(0) = 5000$ ومنه:

$$V(t) = 13(0.2t^4 + 8000)23 + CV(0) = 13(0.2(0)^4 + 8000)23 + C5000 = 13(8000)23 + C5000 = 4003 + CC = 146003 \\ V(t) = 13(0.2t^4 + 8000)23 + 146003$$

(28) سكان: أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى المدن يتغير سنويًا بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $P'(t)=4e^{0.2t}+e^{-0.2t}$, حيث t عدد السنوات منذ عام

2015 م، و $P(t)$) عدد السكان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد السكان عام 2015 م إلى عام 2025 م.

$$\begin{aligned} dt = du & \cdot 0.2e^{0.2t} \\ t=10 \Rightarrow u & = 4 + e^{0.2(10)} = 4 + e^2 \\ t=0 \Rightarrow u & = 4 + e^{0.2(0)} = 5 \quad |0 \Rightarrow \\ 104e^{0.2t} & - 4 + e^{0.2t} dt = 54 + e^2 \\ 4e^{0.2t} & \times du = 54 + e^2 \\ 20e^{0.2t} & \times du = 54 + e^2 \\ u & = 40u \quad |54 + e^2 = 40u \quad |54 + e^2 = 404 + e^2 - 405 \approx 46 \end{aligned}$$

إذن يزداد عدد سكان هذه المدينة بحوالي 46 ألف شخص من 2015 م إلى 2025 م.